UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS Facultad de Ciencias y Educación Maestría en Educación	**FORMATO RAE** **RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN**

Información General	
Tipo de documento	RAE
Acceso al documento	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Título del documento	GENERALIZACIÓN DE PATRONES: UNA FORMA DE DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Autor	Sandra Milena Ramírez Orozco
Director	PhD. Rodolfo Vergel Causado
Palabras claves	Pensamiento algebraico, generalización aritmética, generalización algebraica, secuencias figurales.

1. DESCRIPCIÓN

El trabajo pretende determinar el nivel de generalización (aritmética-algebraica) que desarrollan los estudiantes de grado octavo del Colegio Entre Nubes Sur Oriental IED, al enfrentarse a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales, con el fin de potenciar el pensamiento algebraico. Las tareas planteadas tuvieron la intención que el estudiante analizara la forma como cambia, es decir, la forma como aumenta o disminuye los términos de la secuencia, en otras palabras, la estructura espacial y numérica; que los lleve a conjeturar la forma de los siguientes términos; por último, formular un procedimiento que permita establecer el patrón de comportamiento, a través de una actividad conjunta en diferentes grupos de trabajo, tomando como base la Teoría Cultural de la Objetivación, en la que se define el aprendizaje como "procesos sociales de toma de conciencia crítica en los que intervienen diferentes medios semióticos puestos en juego por los estudiantes (lenguaje, gestos, símbolos, artefactos, etc.)" (Miranda, Radford, & Guzmán, 2013)

2. FUENTES

Bar, A. (2001). Abducción. La inferencia del Descubrimirnto. *Cinta moebio 12*, 169-174.

Callejo, M. L. (2015). Generalización y pensamiento algebraico. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas No. 68*, 5-8.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema 28(48)*.

Chalé, S. D. (2015). La visualización en la resolución de patrones. *Memorias XIV CIAEM-IACME*.

Gónzalez, A. (2013). Estudio del Pensamiento Algebraico en los libros de texto venezolanos. *VII CIBEM*, (págs. 1164-1171). Montevideo, Uruguay.

Guzmán, N. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la Aritmética generalizada (Tesis de Maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2015). Pruebas saber 3°, 5° y 9°. *Lineamientos para las aplicaciones muestrales y censales 2015.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto al punto (0,0). *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Educations Vol. 2(2)*, 183-208.
Moreno, P. C. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto (Tesis de Maestría).* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, (Esp)*, 7-21. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509902
Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4 (2)*, 37-62.
Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas . En D. Á. Vallès, *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació [teacher's activity: Intervention, innovation, research]* (págs. 33-49). Girona (España): Documenta Universitaria.
Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la Generalización. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutierrez, & M. y. Molina, *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (págs. 3-12). Granada: Comares.
Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132-150.
Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, 8(18)*, 547-567.
Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, Cognición y Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12(2)*, 215-250.
Rincón, C. A. (2016). *Unidad 1: Lenguaje y Semiótica.* Obtenido de Aprende en línea (Universidad de Antioquía): http://aprendeenlinea.udea.edu.co/boa/contenidos.php/cb10887d80142488399661377b684b60/511/1/contenido/capitulos/Unidad1LenguajeySemiotica.PDF
Rojas, P. J., & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación científica y tecnológica*, 760-766.
Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., & Mora, L. (1999). *La transición Aritmética-Algebra.* Bogotá D. C.: Universidad Disitrital-Gaia.
Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12(1)*, 122-142.
Vergel, R. (Mayo de 2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento temprano. *PNA*, 193-215.
Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *Tecno Lógicas (16)*, 139-151.
Wikilibros. (2015). Obtenido de https://es.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1ticas/%C3%81lgebra/Introducci%C3%B3n

3. CONTENIDOS
Está dividido en cinco capítulos, el primero nos acerca al problema de investigación teniendo en cuenta aspectos como: el objeto de investigación, población y los objetivos. En el segundo, se referencian los aspectos teóricos en torno al pensamiento algebraico y algunos elementos teóricos de la Teoría Cultural de la Objetivación. Un tercer momento permite el

acercamiento a la metodología multisemiótica, estableciendo las diferentes fases de la investigación, incluyendo los resultados del pilotaje realizado. El cuarto apartado permite realizar el análisis de la actividad realizada por los estudiantes a partir de las tareas que se escogieron las cuales permiten establecer los tipos de generalidad desarrolladas por los estudiantes. Por último, se presentan conclusiones y resultados de la investigación.

4. METODOLOGÍA

El proceso de investigación se realizó bajo la metodología denominada multi-semiótica (Radford,2015), tomando como precedente que el aprendizaje como "procesos sociales de toma de conciencia crítica en los que intervienen diferentes medios semióticos puestos en juego por los estudiantes (lenguaje, gestos, símbolos, artefactos, etc.)" (Miranda, et al., 2013, p. 183), ésta nos lleva a la observación de las diferentes interacciones dadas en aula donde intervienen diferentes medios semióticos que llevan a procesos de objetivación y subjetivación, a partir de los momentos descritos a continuación:

Inicialmente se realizó un rastreo de tareas de secuencias figurales, las cuales debieron contar con unos elementos básicos para abordar las temáticas pertinentes y propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico, teniendo en cuenta que adquieran significado los conceptos matemáticos, por último, organizadas secuencialmente de tal manera que se lograra evidenciar una complejidad matemática creciente. Estas fueron sometidas a un pilotaje, que permitió evaluar la pertinencia de las mismas y las posibles dificultades que se podían presentar. No fue necesario realizar ajustes, las tareas cumplían los objetivos propuestos.

Un segundo momento fue la implementación de las tareas en el aula, éstas se desarrollaron en diferentes momentos, y no necesariamente de forma lineal: presentación de la tarea, trabajo en pequeños grupos, discusión profesor-estudiantes, plenarias donde los pequeños grupos presentan sus ideas y las defienden frente a los otros grupos, en los diferentes momentos de discusión la función del docente debe estar encaminada a orientar el proceso, a partir de preguntas y realizar la retroalimentación del proceso.

Durante la implementación se recogió la información con diferentes medios, entre ellos, grabación de video y audio, tanto en las plenarias; hojas de trabajo, donde se evidencia el trabajo individual y grupal de los estudiantes y notas realizadas en el tablero, en los momentos de plenaria este puede ser uno de los recursos utilizados. Posteriormente, se realizó el procesamiento de datos, donde se hizo la transcripción de los diálogos hechos al interior de cada grupo y en las discusiones generales, el análisis interpretativo de la transcripción, está se hizo únicamente de aquellos segmentos donde se evidencian los procesos propios categorizados en la teoría (objetivación y subjetivación) y las preguntas de investigación; de igual manera se escanearon las hojas de trabajo, con el objetivo principal de dar cuenta tanto de los procesos que se evidencian desde la teoría, como desde la pregunta de investigación.

5. CONCLUSIONES

Teniendo como precedente que la actividad matemática es multimodal, durante el desarrollo de las tareas evidenciamos la emergencia de diferentes medios semióticos movilizados por los estudiantes que permitían denotar las relaciones establecidas entre los elementos de las secuencias en su estructura espacial y/o numérica. Se evidencia la presencia de conteos, signos indexicales, iconos (flecha), tablas, representaciones graficas bidimensionales, gestos con las manos, señalamientos (con dedos y objetos), frases representativas y uso de símbolos.

Frente a los procesos de abducción podemos inferir que en la mayoría de los casos los estudiantes parten de la comunalidad encontrada en los términos dados inicialmente para proponer una regla o hipótesis que les permita relacionar la manera cómo estos cambian, generalmente a través de una relación aditiva que les permite moverse entre términos consecutivos (fórmula de recurrencia). Así mismo, encontramos evidencia de abducciones analíticas, en estos casos la hipótesis planteada va más allá de determinar los términos de forma secuencial (regla de recurrencia), la regla establecida permite establecer una relación entre el número de la figura y la estructura numérica y/o espacial.

Durante las diferentes interacciones con los grupos de trabajo, en la mayoría de los casos uno o dos estudiantes son los que toman la vocería para explicar los procesos realizados, la actitud de los demás es atender a la explicación y sólo en casos que consideran necesaria su intervención para aclarar o preguntar lo hace. En el interior de los grupos si se da la participación de todos los miembros del mismo.

Notamos a su vez que, en la generalización realizada por los estudiantes, una de las mayores dificultades está en la designación simbólica de lo indeterminado, si bien, es posible encontrar una relación entre los elementos de la secuencia y expresarlo en una frase representativa usando como sujeto el número de la figura, el paso a la designación simbólica no se da.

En el análisis realizado logramos evidenciar que el hecho que un estudiante realice durante una tarea una generalización algebraica no implica necesariamente que en la siguiente ocurrirá lo mismo, en algunos casos por el contrario algunos pasaron a una generalización aritmética, debido al grado de dificultad y de comprensión que los estudiantes hacían de esta.

Generalización de Patrones:

Una forma de desarrollar el pensamiento algebraico

Sandra Milena Ramírez Orozco

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Bogotá, octubre de 2017

Generalización de Patrones:

Una forma de desarrollar el pensamiento algebraico

Sandra Milena Ramírez Orozco

20152184023

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de

Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática

Director Rodolfo Vergel Causado, PhD.

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática

Facultad de Ciencias y Educación

Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Bogotá, octubre de 2017

Dedicatoria

A mis hijos, Daniel y Catalina, por ser mi motor y compañía.
A mi familia por motivarme a soñar y acompañarme en la travesía de hacer mis sueños realidad, pero sobre todo por creer en mí.

Agradecimientos

A Dios por todas las bendiciones recibidas para que lograra cumplir con esta meta.
A mis amigos, por su comprensión, consejo y ayuda durante este proceso.
A mis estudiantes, por su colaboración, disposición y paciencia.
Al profesor Rodolfo Vergel, por sus enseñanzas y orientaciones para realizar está investigación.
Al profesor Julio Romero, por sus aportes y acompañamiento.

Resumen

En este trabajo se pretende determinar el tipo de generalización (aritmética-algebraica) que desarrollan los estudiantes de grado octavo del Colegio Entre Nubes Sur Oriental IED al enfrentarse a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales, con el fin de potenciar el pensamiento algebraico. Para lograr este objetivo, se plantearon una serie de tareas de generalización de patrones desde la estructura propuesta por Radford (2013), en la que se parte de términos particulares, desde los cuales se establecen algunas caractersticas que permiten la extensión a términos siguientes, pequeños (en un rango inferior o igual a 20) y posteriormente grandes (mayores a 20), para finalmente determinar la generalidad de los mismos, es decir, establecer la comunalidad de estos en terminos de la variación que ocurre tanto en la estructura numérica como en la espacial, proceso que implica un razonamiento abductivo que nos permite determinar si se esta frente a una generalización aritmética o algebraica. “Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término al otro (utilizando expresiones como hay que añadir dos cuadrados), llegamos a una generalización aritmética” (Radford, 2013, p.7), es decir, se establece una regla u operación a partir de la comunalidad encontrada entre los términos, que le permite extender a secuencia a términos subsecuentes. En cuanto a la de tipo algebraico se da cuando “la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término” (Radford, 2013, p.7) establece una expresión que permite develar la estructura numérica y espacial de cualquier termino. Así mismo, la generaización algebraica puede ser factual (la indeterminacia es expresada en acciones concretas como señalamientos, gestos, etc.), contextual (la indeterminancia se hace explicita y realiza la descripción del término general) o simbolica (frases claves son representadas por símbolos alfanumericos). El proceso de generalización realizado por los estudiantes es analizado desde la metodología multi-semiótica, en la que se entiende el aprendizaje como una actividad multimodal evidenciada a través de los diferentes medios semióticos que son movilizados por estos durante la actividad desarrollada en el aula. A partir de ello evidenciamos que los procesos de generalización realizados por los estudiantes tendían a ser de tipo aritmético o algebraicos contextuales, donde algunos de los recursos utilizados fueron: la elaboración de tablas, deícticos temporales, señalamientos, entre otros., así mismo, unas de las mayores dificultades se dan en el paso a la designación simbólica de la característica encontrada, siendo pocos los casos en los que se realizó una generalización algebraica simbólica.

Palabras claves: Pensamiento algebraico, generalización aritmética, generalización algebraica, secuencias figurales.

ABSTRACT

In this paper we intend to determine the type of generalization (arithmetic-algebraic) developed by the eighth-grade students of the Colegio Entre Nubes Sur Oriental IED when confronting tasks of generalization of patterns of figurative sequences, to enhance algebraic thinking. In order to achieve this objective, a series of generalization tasks were proposed from the structure proposed by Radford (2013), which is based on particular terms, from which some characteristics are established that allow the extension to the following terms, small (in a range less than or equal to 20) and later large (greater than 20), to finally determine the generality of the same, ie to establish the commonality of these in terms of the variation occurring both in the numerical structure and in the spatial, process that involves an abductive reasoning that allows us to determine if this is an arithmetic or algebraic generalization. “When abduction is simply used to move from one term to another (using expressions as two squares must be added), we arrive at an arithmetic generalization "(Radford, 2013, p.7), that is, a rule or operation is established from commonality found between the terms, which allows it to be sequenced in subsequent terms. As for the algebraic type, it is given that "abduction will no longer be used as a simple possibility, but as a principle assumed to deduce apodically a formula that provides the value of any term" (Radford, 2013, p.7). numerical and spatial structure of any term. Likewise, algebraic generalization can be factual (indeterminacy is expressed in concrete actions such as signs, gestures, etc.), contextual (indeterminacy becomes explicit and performs the description of the general term) or symbolic (key phrases are represented by symbols alphanumeric). The generalization process performed by the students is analyzed from the multi-semiotic methodology, in which learning is understood as a multimodal activity evidenced through the different semiotic means that are mobilized by these during the activity developed in the classroom. From this we show that the generalization processes carried out by the students tended to be of arithmetic or algebraic contextual type, where some of the resources used were: the elaboration of tables, temporary deictic, signs, among others. of the greater difficulties are given in the step to the symbolic designation of the characteristic found, being few cases in which a symbolic algebraic generalization was realized.

Keywords: Algebraic thinking, arithmetic generalization, algebraic generalization, figurative sequences.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo determinar o tipo de generalização (aritmética-algébrica), desenvolvido por alunos da oitava série do Colégio Entre Nubes Sur Oriental IED quando enfrenta tarefas generalização dos padrões de seqüências figurativas, a fim de promover o pensamento algébrico. Para atingir esse objetivo, foram propostas uma série de tarefas de generalização a partir da estrutura proposta por Radford (2013), que se baseia em termos específicos, dos quais são estabelecidas algumas características que permitem a extensão aos seguintes termos, pequenos (em um intervalo menor ou igual a 20) e mais tarde grande (maior que 20), para finalmente determinar a generalidade deles, isto é, estabelecer a uniformidade destes em termos de variação que ocorre tanto na estrutura numérica como em o processo espacial que envolve um raciocínio abdutivo que nos permite determinar se esta é uma generalização aritmética ou algebraica. “Quando o abdução é simplesmente usado para se mover de um termo para outro (usando expressões como dois quadrados devem ser adicionados), chegamos a uma generalização aritmética "(Radford, 2013, p.7), ou seja, uma regra ou operação é estabelecida de comum encontrado entre os termos, o que permite que ele seja sequenciado em termos subsequentes. Quanto ao tipo algébrico, é dito que "o abdução não será mais usado como uma possibilidade simples, mas como um princípio assumido para deduzir apodicamente uma fórmula que fornece o valor de qualquer termo" (Radford, 2013, p.7). estrutura numérica e espacial de qualquer termo. Da mesma forma, o generaización algébrica pode ser de facto (a indeterminacia é expressa em medidas concretas como sinais, gestos, etc.), contexto (a indeterminação explicitados e faz a descrição do termo geral) ou ponto (frases-chave estão representados por símbolos alfanumérico). O processo de generalização realizado pelos alunos é analisado a partir da metodologia multi-semiótica, em que a aprendizagem é entendida como uma atividade multimodal evidenciada através dos diferentes meios semióticos que são mobilizados por estes durante a atividade desenvolvida na sala de aula. Desse modo, mostramos que os processos de generalização realizados pelos alunos tendem a ser de tipo contextual aritmético ou algébrico, onde alguns dos recursos utilizados foram: elaboração de tabelas, deictica temporária, sinais, entre outros. das maiores dificuldades são dadas no passo à designação simbólica da característica encontrada, sendo poucos casos em que uma generalização algebraica simbólica foi realizada.

Palavras chave: *P*ensamento algébrico, aritmética generalização, a generalização algébrica, seqüências figurativas

CONTENIDO

Lista de figuras

Lista de esquemas

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se da como resultado del proceso de investigación realizado en el marco de la maestría en educación con énfasis en matemáticas, en el cual se propone la generalización de patrones como una forma de desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Distrital Colegio Entre Nubes Sur Oriental (CENSO), ya que a lo largo de la intervención pedagógica han quedado de manifiesto las dificultades que éstos experimentan cuando requirieron integrar procesos que están enmarcados dentro del pensamiento algebraico.

En este sentido, es preciso mencionar que durante las últimas décadas se ha venido cuestionando sobre los diferentes momentos que se deben dar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, reflexión que podemos encontrar por ejemplo, en el documento estándares de matemáticas (MEN,2006) en su aparte "Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!" en este exponen en primera instancia que la enseñanza de las matemáticas estaba ligada a la concepción que se tenía de está como algo estable e infalible, por dicha razón su aprendizaje se daba desde ejercitación, la memorización de teoremas, propiedades, axiomas, etcétera. De igual manera se planteaba que la enseñanza de la lógica correspondía únicamente a la matemática, pero se evidenció que el desarrollo del pensamiento lógico es un eje trasversal a las diferentes áreas del conocimiento, sin embargo, esto no puede ser causal para desconocer la importancia que tiene la matemática en los diferentes contextos, en tanto ofrece herramientas para organizar y analizar información, establecer relaciones que permitan la toma de decisiones, entre otras. A partir de estas reflexiones podemos inferir que los procesos de enseñanza actualmente, aunque no se puede desligar de los conceptos propios de las ciencias, deben estar encaminados a desarrollar los procesos de pensamiento (lógico, científico, matemático, entre otros).

En segunda instancia, el documento precisa que el ser competente debe ir más allá del saber hacer en un contexto, definiéndose según los estándares como: “el conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006, p.49) de alguna manera este es un llamado a cambiar las prácticas de enseñanza e intentar acercarnos a una educación contextualizada, a una realidad particular, en las que están inmersas unas culturas y problemáticas propias, que pueden ser base en el desarrollo de capacidades y habilidades propias de cada disciplina del saber, pero que a su vez preparen al educando para enfrentarse a las diferentes exigencias del contexto donde interactúe y así poder lograr una adaptación.

En tercera instancia, el documento realiza un acercamiento histórico y evolutivo de la matemática se evidenció que existían diferentes maneras de hacer matemáticas, asociada al número, a la geometría, a la probabilidad, etc., y en la búsqueda de hacerse matemáticamente competente desde los lineamientos curriculares se plantea la posibilidad de subdividir el conocimiento matemático en los cinco pensamientos, los cuales deben ser desarrollados a lo largo de la educación básica y media, estos son: pensamiento numérico (operaciones y relaciones), espacial (objetos en el espacio, relaciones, transformaciones, etc.), métrico (magnitud, patrones de medida, medición), aleatorio (probabilidad y estadística inferencial) y, variacional (relación, función, variación, modelación).

Es importante entonces iniciar procesos que permitan un aprendizaje significativo en los estudiantes, los cuales encaminaran al logro de las metas propuestas desde los estándares, permitiendo además que se un desarrollo desde la formación social y crítica del individuo, en este sentido y teniendo de precedente las dificultades a lo largo del proceso de construcción del pensamiento algebraico en los estudiantes del CENSO debido a que en la educación primaria se da mayor relevancia a los procesos aritméticos, nos centraremos entonces en lo concerniente al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, que constituyen nuestro interés de intervención, apoyándonos en procesos de generalización de patrones, identificado como una de las formas más importantes en el desarrollo del mismo, pues al ingresar a la educación básica secundaria, especialmente en grado octavo cuando los requerimientos de su aplicación son más puntuales, no existen las bases suficientes para adelantar de manera adecuada los procesos.

En el primer capítulo se realiza una contextualización del problema, es decir, se explicará por qué es importante realizar esta intervención, desde un acercamiento a la realidad de la institución a partir los resultados obtenidos en las Pruebas Saber de grado noveno durante los últimos cuatro años, así mismo, algunas de las investigaciones realizadas en torno al desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización.

En el segundo capítulo se tratan los elementos teóricos desde los tres ejes fundamentales de la investigación, en primer lugar, una definición de pensamiento algebraico, desde los estándares de matemáticas (MEN, 2006) y la teoría cultural de la objetivación (TCO). En segundo lugar, la generalización de patrones nuestro objeto de estudio, estableciendo los tipos y niveles de generalidad (Radford, 2010), desde los cuales ubicamos al estudiante en una categoría de acuerdo con los alcances de la actividad desarrollada, que se presenta como una de las formas de desarrollar este tipo de pensamiento. En tercer lugar, se muestran los principios teóricos de la TCO, frente a los procesos de enseñanza-aprendizaje haciendo un acercamiento a los objetivos de la misma mencionados por Radford (2014) “comprensión y producción de saberes y subjetividades en el aula y la identificación de formas pedagógicas de acción que permitan el desarrollo de acciones significativas” (p. 136).

En el tercer capítulo, se expone la metodología utilizada denominada multisemiótica, la cual es planteada en el marco de la TCO, cuyo objetivo primordial consiste en develar el proceso de toma de conciencia en los estudiantes, desde los diferentes medios semióticos que son movilizados en el desarrollo de las tareas, a través de las actividades conjuntas que se realizan en el interior del aula de clase. Se presentarán los elementos que caracterizan esta metodología, instrumentos de recolección y proceso de análisis.

En el cuarto capítulo se presentan los análisis de las tareas realizadas por los estudiantes, teniendo en cuenta algunos principios teóricos de la TCO, la metodología multisemiótica y la pregunta de investigación, destacando los hallazgos que permiten establecer el tipo de generalización realizada por los estudiantes, lo que nos servirá de insumo para presentar algunas conclusiones de los resultados obtenidos.

Por último, en el quinto capítulo se dan a conocer las conclusiones del proceso de análisis realizado desde las diferentes tareas planteadas y de las actividades realizada por los estudiantes, destacando los hallazgos frente a los medios semióticos, los tipos de generalización y algunas de las dificultades presentadas. También algunas consideraciones finales frente a interrogantes que surgen de la investigación.

1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

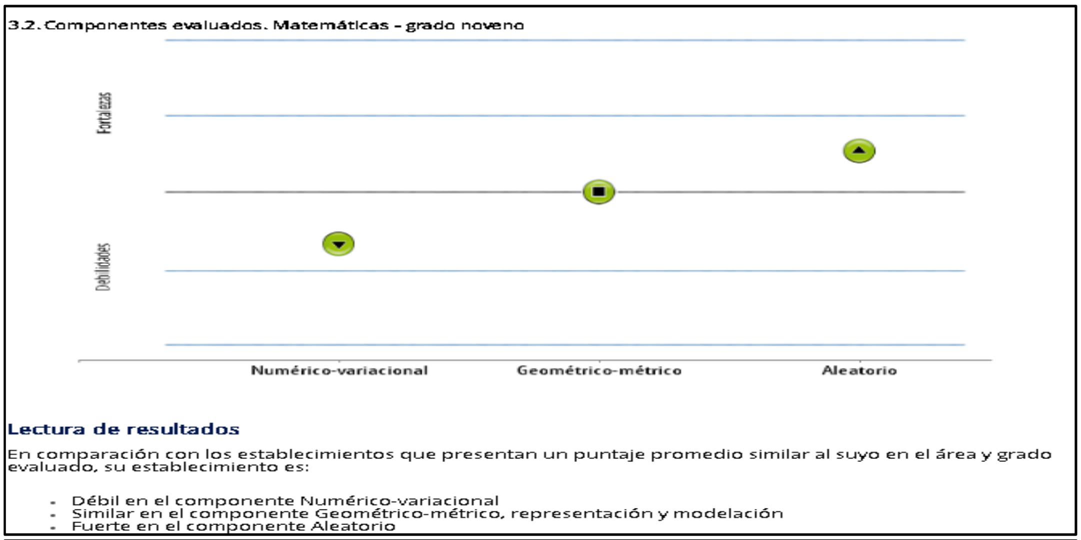
En este capítulo se plantean algunos aspectos relevantes frente a la escogencia del problema que se abordó. En primer lugar, acercándose a la realidad particular de la institución educativa en cuanto al desempeño en pruebas externas (Pruebas Saber), así mismo, en el desempeño académico de los estudiantes particularmente de grado noveno. En segundo lugar, se reportan algunas de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza del algebra, específicamente sobre los procesos de generalización. En tercer lugar, se plantea tanto el problema como los objetivos de la presente investigación.

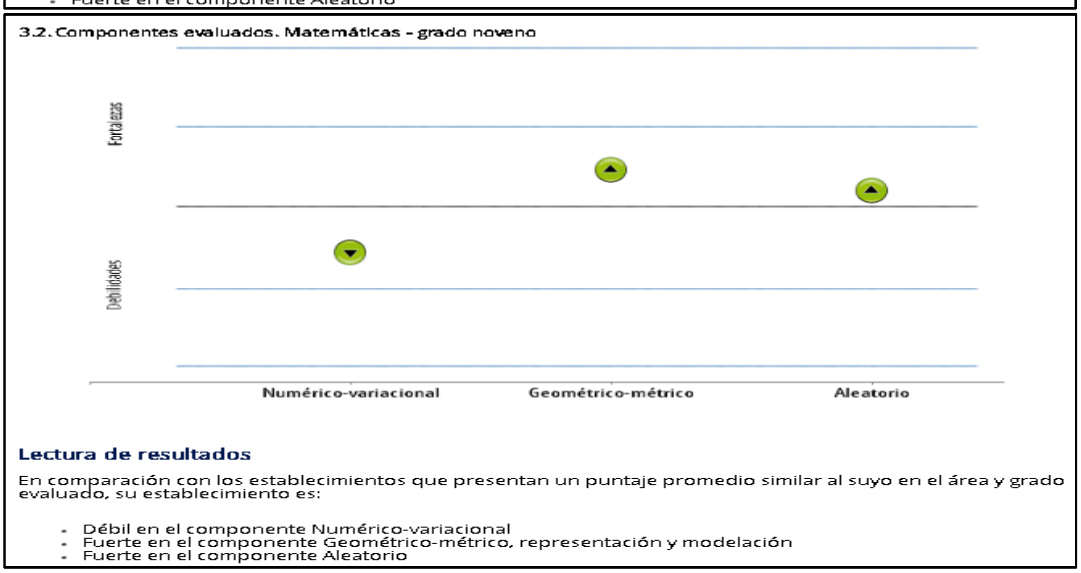
1.1. Antecedentes del problema

Al realizar un análisis de los resultados de las Pruebas Saber de grado noveno y de las evaluaciones internas del Colegio Entre Nubes Sur Oriental (CENSO), se ha encontrado una coincidencia con respecto al bajo desempeño en el área de matemáticas entendiendo que las pruebas externas más allá de evaluar los contenidos propios de las diferentes asignaturas, se centran en identificar las competencias desde los diferentes componentes de las áreas desarrolladas por los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones problema y con base en ellas estar en la capacidad de resolverlas de la forma más adecuada haciendo uso de sus capacidades.

Para nuestro caso esto pone de manifiesto la necesidad de modificar los procesos de enseñanza-aprendizaje y dar paso a aquel que permita desarrollar los diferentes pensamientos matemáticos los cuales son definidos por los lineamientos y retomados por los estándares como: el numérico, el espacial, el métrico o de la medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional (MEN, 2006, p. 56), pues de alguna manera esto garantizaría mejor desempeño no sólo a nivel de pruebas, sino en los diferentes campos de desarrollo y la vida diaria.

Teniendo en cuenta que uno de los instrumentos que nos permiten identificar el alcance de los aprendizajes de los estudiantes son las pruebas externas, realizadas por el ICFES denominadas Pruebas Saber, las cuales evalúan las competencias de las áreas de lenguaje, matemáticas y competencias ciudadanas, realizadas para los grados 3°, 5°, 7º y 9°, a continuación, se presenta algunos de los resultados de la institución CENSO, específicamente para grado noveno durante los años 2013, 2014, 2015 y 2016 en el área de matemáticas, centrando nuestra mirada en los obtenidos en el componente numérico-variacional, que como veremos más adelante se relaciona con las competencias del pensamiento algebraico.





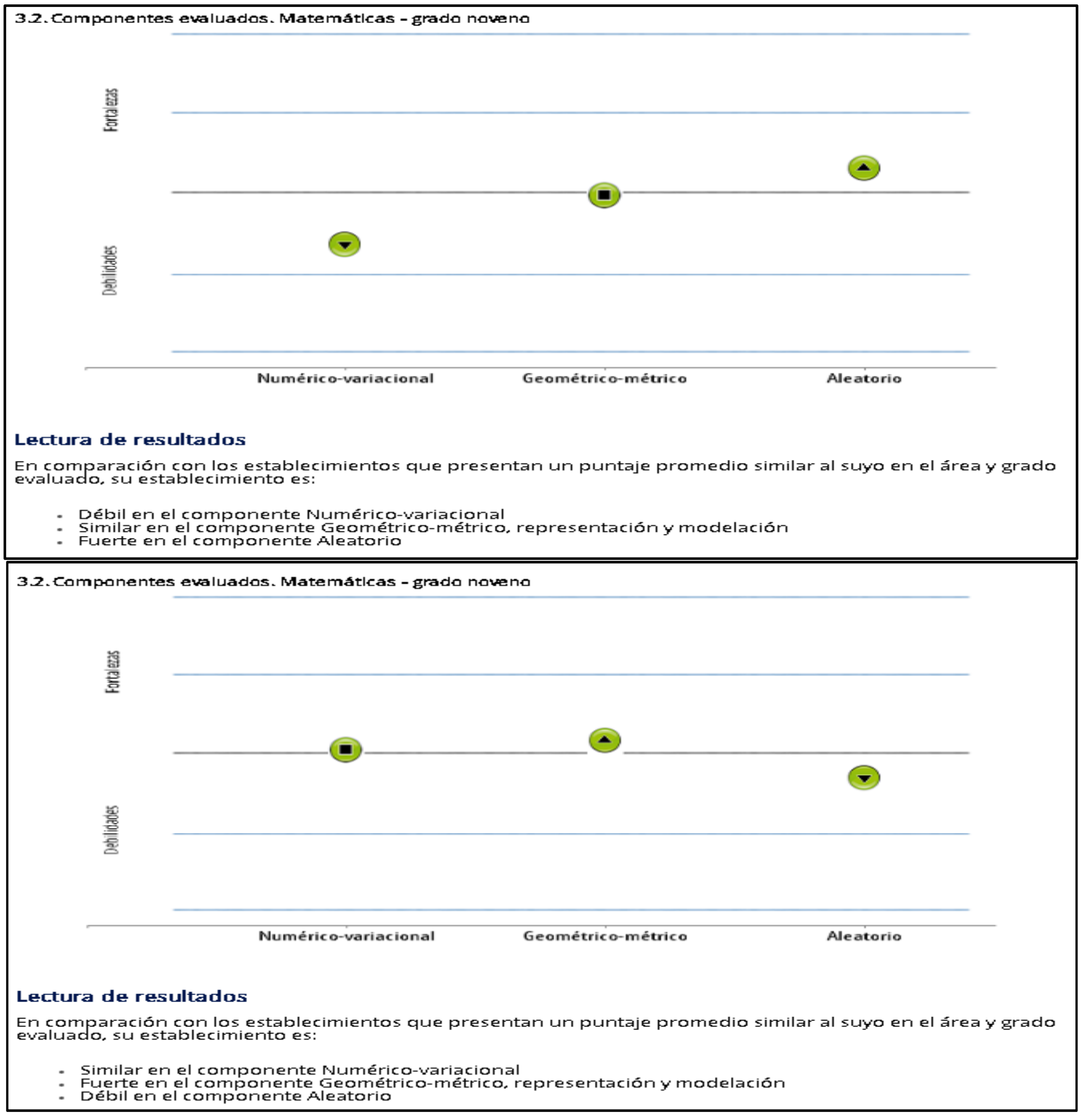


Figura 1. Resultados Pruebas Saber noveno CENSO 2014-2016[1]

Según los lineamientos establecidos en la aplicación de las Pruebas Saber, se definen tres componentes, numérico-variacional, geométrico- métrico y aleatorio, nos enfocaremos en el componente numérico-variacional, que constituye el marco de la investigación, según los lineamientos de las pruebas:

> Corresponde a aspectos asociados a los números y la numeración, su significado y la estructura del sistema de numeración; las operaciones, sus propiedades, su efecto y las

[1]Tomado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx)

> relaciones entre ellas; el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos el lenguaje simbólico (algebraico), a la variación inversa y el concepto de función. (MEN, 2015, p. 72).

En este componente se encuentra inmersos los procesos propios del pensamiento algebraico, se tomaron para el análisis el reporte por componentes de los últimos cuatro años, donde se compara con respecto a las instituciones que obtuvieron un puntaje similar, cuya escala de comparación desde la media establece que: es débil cuando se encuentra por debajo, similar cuando se encuentra en la media y fuerte cuando está por encima de la media, en los años 2013, 2014 y 2015 se encuentra por debajo, es decir, se clasificó como débil en este componente, y en 2016 se muestra una leve mejoría ubicándose en un nivel similar.

En relación con el componente Numérico-Variacional, desde dicha prueba se evalúan tres tipos de competencia: (1) Comunicación, representación y modelación, (2) Razonamiento y argumentación y (3) Planteamiento y resolución de problemas; evaluadas a través de unos indicadores para cada una de estas competencias. Estableciendo que el estudiante, cuando llega a grado noveno está en capacidad de:

Tabla 19. Competencia: comunicación, representación y modelación

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-variacional	1. Identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. 2. Identifica expresiones numéricas y algebraicas equivalentes. 3. Establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. 4. Reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos. 5. Describe y representa situaciones de variación relacionando diferentes representaciones.

Tabla 20. Competencia: razonamiento y argumentación

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-variacional	1. Reconoce patrones en secuencias numéricas. 2. Interpreta y usa expresiones algebraicas equivalentes. 3. Interpreta tendencias que se presentan en un conjunto de variables relacionadas. 4. Usa representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. 5. Reconoce el uso de propiedades y relaciones de los números reales. 6. Desarrolla procesos inductivos y deductivos con el lenguaje algebraico para verificar conjeturas acerca de los números reales.

Tabla 21. Competencia: planteamiento y resolución de problemas

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-variacional	1. Resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales. 2. Resuelve problemas que involucran potenciación, radicación y logaritmación. 3. Resuelve problemas en situaciones de variación y modela situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

Figura 2. Competencias evaluadas en el componente numérico-variacional

Como observamos en la figura anterior, algunas de las competencias de los estudiantes están relacionadas con los procesos de generalización y con los usos del lenguaje algebraico, a partir de análisis de procesos de variación. Igualmente encontramos la importancia de desarrollar este tipo de actividades con el fin de afianzar los procesos del pensamiento algebraico. (MEN, 2015, pp.76-77)

Por otra parte, en las tareas realizadas durante la clase de matemáticas se ha logrado identificar que, a lo largo de su proceso de formación, los estudiantes experimentan dificultades asociadas a los procesos propios del álgebra (generalización, modelación, resolución de ecuaciones, etc.). Unido a lo anterior, la práctica de estrategias como la mecanización de procesos, a través de realización de ejercicios tipo “la practica hace al maestro” colocando ejercicios muy similares a los utilizados en el ejemplo los lleva a la simple repetición, impidiéndoles realizar análisis y por ende obtener aprendizajes significativos. Lo anterior es evidente, cuando se cambian las dinámicas de clase y por ejemplo, se inicia proponiéndoles solucionar una situación problema previa al desarrollo de una temática específica, que les permita reflexionar y traer aquellos elementos o conceptos trabajados con anterioridad, en este caso, se evidencia que ellos esperan que el docente de la respuesta del ¿qué hacer? y ¿cómo hacerlo?, pues manifiestan no estar preparados, más aún, si se encuentran que el docente no da solución y al contrario continua indagándoles con el fin de encaminarlos para que por sí mismos encuentren una solución adecuada, esto les genera tensión y en algunos casos desinterés. En trabajos como el realizado por Kieran (1989, citado por Rojas y Vergel 2013) se evidencia que una dificultad asociada específicamente con el proceso de aprendizaje del álgebra escolar tiene que ver con el cambio de las convenciones respecto al trabajo previo que venían realizando en aritmética, de lo cual se puede deducir que el distanciamiento procedimental entre la básica y la media escolar impide la superación dificultades y el mejoramiento del desempeño escolar, no sólo en el área de matemáticas sino en procesos asociados a otras áreas del conocimiento.

1.1.1. El pensamiento algebraico.

Durante las últimas décadas ha existido una gran preocupación por el desarrollo del pensamiento matemático esto ha llevado a realizar diversas investigaciones en este campo. Alrededor del proceso enseñanza aprendizaje del pensamiento algebraico Gónzalez (2013) realiza un estudio donde hace un acercamiento a la conceptualización de pensamiento algebraico manifestando que "Pensar algebraicamente está relacionado con un uso eficaz del lenguaje algebraico caracterizado por la introducción de tales símbolos, un mismo objeto puede representarse de formas diversas y es usual que una notación particular tenga distintos significados" (p. 1164) , además se refiere a las dificultades presentes en el tránsito entre la educación básica y la media, siendo una de estas el enfrentarse a esa nueva matemática, donde la indeterminancia se hace presente, expresada a través de un lenguaje propio (símbolos alfanuméricos), así mismo reporta que los textos escolares usados por los maestros no aportan al desarrollo de pensamiento algebraico.

Por otra parte, Serres (2011) realiza un análisis sobre lo que se entiende por álgebra escolar, pues el proceso de enseñanza se ve permeado por las concepciones que el maestro de la misma. Determina que en la mayoría de los casos ésta es entendida como una actividad, como una acción, Kieran (2004, citado por Serres, 2011) plantea la existencia de tres tipos de actividades del álgebra escolar: generacionales relacionadas con las formas de expresión, transformacionales relacionadas con las operaciones entre expresiones algebraicas y de global/nivel donde es utilizada como herramienta para la modelación, generalización, estudios de cambio, entre otras. Así mismo, refiere que el objetivo del álgebra escolar "consiste en un proceso de generalización para formular expresiones algebraicas o patrones, ecuaciones y funciones, el cual utiliza el lenguaje algebraico y su simbología en busca de precisión; para luego resolver problemas y diseñar modelos matemáticos" (Serres, 2011, p.126). Entre las conclusiones establece que procesos de generalización se hacen necesarios e importante en la introducción al estudiante al álgebra, determinando también permiten un acercamiento natural al lenguaje algebraico; por otra parte, la importancia de recurrir a la discusión dentro de aula como una forma de identificar las fortalezas y limitaciones presentes en los estudiantes.

Por su parte, Vergel (2014) nos presenta un estudio titulado formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria, donde realiza varios análisis sobre los procesos realizados por los estudiantes desde los principios teóricos y metodológicos de la teoría cultural de la objetivación, basándose en tareas de generalización desarrolladas por los estudiantes. En ella se advierte de la importancia que tiene la observación y análisis de la emergencia de medios semióticos usados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad, estos permiten evidenciar la generación de pensamiento algebraico, aunque no siempre ligado al lenguaje alfanumérico, así mismo establece que este tipo de intervenciones en el aula aportan a que se logren ver las matemáticas más allá de procesos con los que siempre se ha asociados (memorísticos, mecánicos, entre otros).

A partir de lo anteriormente expuesto notamos que existe una estrecha relación entre el pensamiento algebraico y el lenguaje algebraico, pero la existencia de uno no implica la existencia del otro. Pensar algebraicamente implica procesos de generalización, modelación, etc., mientras que usar el lenguaje algebraico involucra hacer uso de símbolos alfanuméricos desde sus diferentes significados y operar con ellos, no quiero decir que no es importante el uso del lenguaje en los procesos de pensamiento algebraico, sino que este puede desarrollarse aun cuando no se tenga evidencia del lenguaje, pues pueden emerger otros medios semióticos que permitan designar y expresar la relación establecida.

1.1.2. Generalización de patrones.

Como se afirmó anteriormente una de las tareas que permite el desarrollo del pensamiento algebraico es la generalización de patrones. Radford (2013) establece que los procesos de generalización se dan desde tres campos: lo fenomenológico, epistemológico y lo semiótico. En el campo de lo fenomenológico, donde se pone en juego la percepción que se tiene acerca de la secuencia, es decir, la forma como establece las características que hacen común las figuras de las secuencias dadas; luego pasa a lo epistemológico, donde se hace una extrapolación de las características encontradas para extenderla a otros términos; por último, lo semiótico relacionado con la forma de denotar la generalidad encontrada. Así mismo, establece un camino que permite llevar al estudiante a realizar procesos de generalización.

La generalización de patrones es una estrategia que se puede utilizar con estudiantes de corta edad, lo que hoy en día conocemos como álgebra temprana, introduce a los niños en este campo del saber de una forma natural y principalmente se realiza desde la generalización, una de las bondades que nos presenta el trabajo realizado por Vergel (2014), donde las tareas son realizadas por un grupo de estudiantes de grado cuarto y quinto de educación básica primaria, exponiendo la forma como en dichos niveles hay evidencia de procesos de generalización algebraica, aclarando que quizás no hay una aparición del lenguaje algebraico desde lo alfanumérico lo cual no significa que no se empiecen a mostrar los primeros rasgos de un pensamiento algebraico. Con base en lo anterior, podemos deducir que “usar el lenguaje algebraico no es sinónimo de pensar algebraicamente”, pensar algebraicamente los patrones nos permite la posibilidad de ese desarrollo, pero cómo se hace evidente este proceso, a través de los medios semióticos que son movilizados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad, en interacción con otros.

El trabajo de Rojas & Vergel (2013) sobre los procesos de generalización y pensamiento algebraico mencionan algunas de las dificultades encontradas en la transición de la aritmética-álgebra, donde se referencian el resultado de investigaciones de Kieran (1989) y el Grupo Pretexto (1990), entre las cuales cabe resaltar la concatenación de símbolos, uso de paréntesis, usos del signo igual, interpretación de la letra en contexto matemáticos, noción de variación y concepto de variable; también resaltan la generalización de patrones como un camino para abordar este proceso desde temprana edad, facilitando a los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico.

De igual manera, en otros trabajos desarrollados se muestra la importancia de realizar actividades a partir de secuencias figurales, Radford por su parte ha llevado a cabo varias investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico desde los procesos de generalización, donde además se han logrado establecer o tipificar las clases de generalización realizadas por los estudiantes, de acuerdo con las características de las producciones realizadas, pudiendo ser de tipo aritmético o algebraico. "Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término al otro (utilizando expresiones como hay que añadir dos cuadrados), llegamos a una generalización aritmética" (Radford, 2013, p. 7), es decir, se establece una regla u operación a partir de la comunalidad encontrada entre los términos, pero no una expresión que permita develar la estructura numérica y espacial de cualquier término. En cuanto a la de tipo algebraico se da cuando "la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término" (Radford, 2013, p.7), la relación encontrada permite extender la secuencia no solo a los términos subsecuentes, sino a cualquier término de la secuencia, es decir, se ha establecido una regla general.

Villa (2006) realiza una reflexión en relación con la generalización de allí cabe anotar que se evidencian muchas de las bondades que trae el desarrollo de este tipo de tareas en el aula de clase, en cuanto al desarrollo del álgebra escolar, también establece la importancia de la reflexión desde los procesos realizados por los estudiantes a partir de gran variedad de respuestas y de expresiones que surgen al generalizar de forma simbólica un patrón.

Callejo (2015) hace una reflexión frente a la forma como comúnmente está diseñado el currículo de matemáticas, fraccionando y privilegiando algunas de sus ramas, entre ellas la aritmética, desconociendo la importancia que a nivel histórico y en proceso enseñanza-aprendizaje tienen las generalizaciones, en este también define generalización como el proceso en el cual en primer lugar, se identifica la comunalidad de los elementos conocidos, posteriormente extiende un razonamiento que le permite establecer los elementos más allá del rango establecido y por último se puede obtener un resultado general que permite determinar casos particulares**,** además hace referencia a varios autores que de una forma u otra han dado aportes desde los trabajos realizados a nivel de procesos de generalización y reflexiona sobre la importancia que tiene la revisión de las prácticas educativas que se deben dar en la educación matemática.

1.2. Planteamiento del problema

Documentalmente existen algunos trabajos de investigación donde se trata el problema de la generalización, también es conocido que en los resultados de pruebas nacionales como las Pruebas Saber 9 (fig. 1), los niveles de comprensión de problemas asociados al desarrollo del pensamiento variacional han arrojado en general bajos desempeños, relacionados con los problemas existentes en tareas de generalización, modelación, entre otras. En este sentido, es posible pensar que una de las condiciones que generan estas dificultades pueden estar asociadas a las tendencias didácticas tradicionales centradas en el conocimiento, cuyo poseedor y transmisor es el docente, donde la participación de los estudiantes es limitada y la evaluación está sujeta a la memorización, situación que obstaculiza el desarrollo del pensamiento. De alguna manera podríamos afirmar que se desconocen las propuestas didácticas que actualmente encontramos para abordar la enseñanza, enmarcadas dentro de los lineamientos, estándares curriculares y diversas investigaciones que se han llevado a cabo en relación a los procesos de enseñanza-aprendizaje de diferentes objetos matemáticos. En el ejercicio de la practica docente me he enfrentado a otra dificultad asociada a el paso de lo concreto (juego, material didáctico) a la abstracción de los conceptos relacionados, que conllevan un aprendizaje, pues el estudiante centra su atención en el material, pero se le dificulta relacionarlo con conceptos matemáticos.

Teniendo en cuenta lo mencionado, es preciso anotar que los estudiantes de grado octavo de la CENSO presentan bajo rendimiento académico en el área de matemáticas, debido a razones como: la predisposición frente al trabajo específico de la asignatura, falta de motivación por el aprendizaje debido a la carencia de sentido que ellos le encuentran a los procesos realizados, entre otros; lo anterior permite reflexionar sobre las prácticas educativas, pero también motiva interrogantes como: ¿de qué manera han sido abordados los cinco pensamientos en los ciclos anteriores de su proceso, en especial el pensamiento algebraico?, ¿cómo se ha trabajado el problema de la variación?, ¿qué procesos de generalización se han utilizado?, ¿cuál ha sido el lenguaje algebraico utilizado?, al parecer como se ha hecho tradicionalmente se deja el abordaje del álgebra de manera formal en grado octavo, desconociendo que el desarrollo de los cinco pensamientos se debe dar a lo largo del proceso educativo en la escuela.

Desde la TCO se propone que los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, se basan en dos dimensiones: la del ser y la del saber, desde una postura sociocultural donde "concibe la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas sociales constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2014, pp. 135-136), así mismo, los principios teóricos de la TCO nos hace un llamado a observar otros elementos que se dan dentro de este proceso los cuales dentro del aula hemos desconocido o despreciado, pues en general siempre se ha dado un valor importante a los ejercicios realizados usando lápiz y papel. Define entonces el aprendizaje como "procesos sociales de toma de conciencia crítica en los que intervienen diferentes medios semióticos puestos en juego por los estudiantes (lenguaje, gestos, símbolos, artefactos, etc.)" (Miranda, Radford, & Guzmán, 2013, p. 183), la observación de estos otros medios usados por los estudiantes en el desarrollo de una determinada tarea, permiten evidenciar la adquisición de saberes y la transformación del ser, esto apoyado también en lo que se ha evidenciado en "las nuevas teorías del aprendizaje, es que pensamos no sólo con la ayuda del lenguaje y de los símbolos, sino también a través de los sentidos (Radford, 2009, p.244).

1.2.1. Objeto de estudio y pregunta de investigación.

Radford (2010) sostiene que la generalización de patrones es una manera de desarrollar el pensamiento algebraico, entendiéndose la generalización como "un proceso que involucra el reconocer en diferentes patrones (aritméticos y geométricos), una serie de relaciones de variantes e invariantes entre los diferentes términos y un modo sucinto para expresarlo" (Villa, 2006, p.141), este se puede dar en dos niveles diferentes los cuales dependen de la abducción realizada siendo de tipo aritmética o algebraica; en este proceso se generan una serie de hipótesis desde las características observadas de los elementos dados, a partir de establecer las relaciones de comparación (diferencias, similitudes), estas hipótesis hacen parte de un procesos abductivo, el cual puede permitir en primer lugar pasar de un término a otro consecutivo (relación aritmética), dándose una generalización de tipo aritmético, o en segundo lugar, dada desde una abducción analítica en la que se genera una relación que es asumida como principio la cual permite determinar cualquier término de la sucesión. Partiendo de lo anteriormente mencionado, se ha llegado a la siguiente pregunta la cual orienta el trabajo de investigación:

¿Qué tipo de generalización (aritmética-algebraica) desarrollan los estudiantes de octavo grado del Colegio Entre Nubes Sur Oriental IE, al realizar tareas de generalización de patrones de secuencias figurales?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general.

Identificar el tipo generalización (aritmética-algebraica) que desarrollan los estudiantes de grado octavo del Colegio Entre Nubes Sur Oriental IED al enfrentarse a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales.

1.3.2. Objetivos Específicos.

- Identificar y describir los recursos semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes al realizar tareas de generalización de patrones.
- Caracterizar los medios semióticos de objetivación identificados.
- Describir la naturaleza del proceso abductivo desarrollado por los estudiantes cuando abordan tareas de generalización.

1.4. Justificación

El estudio de las Ciencias y en especial de las matemáticas se ha desarrollado de forma exponencial a lo largo de la historia, quizá porque ha estado ligado con la capacidad inherente del ser humano para imaginar. En este sentido, podríamos afirmar que el hombre empezó a hacer matemáticas cuando intentó realizar tareas como ordenar, sintetizar, esquematizar, analizar y simbolizar, de ahí en adelante sus aplicaciones y aportes han sido valiosos, en especial en el campo de la bélica, la agricultura, la arquitectura, la economía, la navegación, la ingeniería y la mecánica entre otras.

Con base en lo anterior, es preciso mencionar que el pensamiento matemático ha sido esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología y ha mantenido un estrecho vínculo con el surgimiento y evolución del lenguaje, aunque su enseñanza se haya visto limitada a los contenidos, creyendo que a través de la repetición sistémica de ejercicios y problemas los individuos logran ser más competentes.

Por otra parte, es evidente que así como el desarrollo de las matemáticas ha servido como fuente e indicador de progreso, también han estado presentes en el desarrollo de conflictos sociales tales como guerras, crisis económicas, etc., lo cual ha llevado a la reflexión en torno a que no sólo deben enseñarse como un conjunto de conocimientos teóricos, sino también enseñarse cómo utilizarlos, relacionarlos y multiplicarlos en beneficio de la sociedad; en definitiva no solo saber-ser, también saber-hacer en todos los contextos.

Así las cosas, se notó que cuando se cambiaba el esquema tradicional de los problemas, la mayoría de los estudiantes que hicieron parte la presente investigación no sabían cómo dar respuesta a los mismos, dando lugar a preguntas como: "Profe: ¿Qué tenemos que hacer?, ¿Qué operación hago?, ¿Cómo la hago?", o simplemente la tendencia a realizar una operación aritmética al azar, aún si entender el requerimiento del problema o no resolverlo.

Todo lo anterior, ha causado que la preocupación actual frente a la enseñanza de las matemáticas haya cambiado, lo cual no significa que se debamos abandonar el aprendizaje de procesos algorítmicos (suma, resta, multiplicación, división) por el contrario, se debemos propender por el desarrollo del pensamiento matemático, pero ya no como simple ejercicio de repetición, y enfocarnos en el desarrollo y potencialización de los tres saberes (hacer, saber y ser), pues como seres integrales no podemos ni debemos desprendernos de ninguno de éstos, en este sentido se proponen los principios de la Teoría Cultural de la Objetivación, que hacen se referencia al desarrollo de los procesos de enseñanza- aprendizaje, donde se ponen en juego seres y los saberes, y se le resta importancia a la adquisición de conocimientos que suelen ser poco o nada importantes para los jóvenes en edad escolar y para gran parte de la comunidad educativa, reconociendo que todo el conocimiento se fundamenta y tiene validez y por tanto aplicabilidad únicamente en la interacción continua de seres históricamente constituidos y en constante transformación.

De esta forma, las matemáticas han tomado un papel protagónico cuando se trata de explicar científicamente la realidad, pero además por su aporte en la solución de problemas concretos como los presentados por las ciencias naturales entre otras. En este sentido, las matemáticas a través del tiempo han tomado un rumbo diferente al puramente explicativo deductivo, pues cada vez están más atadas a la manipulación y transformación de la realidad física y se han desligado de la especulación propia de la contemplación y del mero planteamiento de hipótesis.

En suma, al trabajar la Teoría Cultural de la Objetivación, se intenta según Radford, (2014) "entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje del alumno" (p.133), para lo cual es necesario identificar y entender el papel que jugado y juega el lenguaje en las dinámicas que al interior de la escuela se desarrollan y que están inmersas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, con el fin de promover el saber-ser y el saber-hacer, partiendo observación (comunicación, representación y modelación), pasando por el razonamiento y la argumentación y llegando al planteamiento y resolución de problemas concretos.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se trabajarán los tres aspectos teóricos fundamentales de la investigación. En primer lugar, el pensamiento algebraico desde un acercamiento a algunos elementos históricos y a los procesos que favorecen su desarrollo, enfocándonos en la generalización de patrones. En segundo lugar, algunos elementos teóricos de la TCO la cual representa en la presente investigación el fundamento teórico.

2.1. Sobre el pensamiento algebraico

Durante el proceso histórico de la matemática, surge el álgebra definida como:

> La palabra «álgebra» es de origen árabe, deriva del tratado escrito por el matemático persa Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi, titulado *Kitab al-yabr wa-l-muqabala* (en árabe كتاب الجبر والمقابلة) (que significa "Compendio de cálculo por el método de completado y balanceado"), el cual proporcionaba operaciones simbólicas para la solución sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas. Etimológicamente, la palabra «álgebra» بر□ (yabr), proviene del árabe y significa "reducción". (Wikilibros, 2015).

En el proceso histórico del álgebra, primitivamente se desarrolló en una etapa conocida como retórica, esta se caracteriza por la descripción en lenguaje natural de los problemas y sus soluciones, en ella no existía aun el uso de símbolos y operaciones, así mismo se realizó un acercamiento al significado de variable. Posteriormente, la etapa sincópala las cual se caracteriza por el uso de abreviaciones para enunciar incógnitas o valores desconocidos, de igual manera siguen utilizando la descripción de los procesos. La última etapa es conocida como simbólica, en esta etapa se comienzan a utilizar símbolos alfanuméricos para expresar cantidades y los signos para las operaciones. Proceso histórico que duro varios siglos hasta llegar a lo que hoy en día conocemos como álgebra.

El proceso histórico referido anteriormente no tuvo como punto de partida el uso del lenguaje alfanumérico, surge del planteamiento de diversas situaciones problemas, con el fin de lograr expresar las soluciones encontradas, pero durante mucho tiempo en los procesos de enseñanza del álgebra se realizó desde currículos cuya pretensión estaba enfocada en la mecanización y repetición de operaciones donde el único cambio aparente que se tenía era la aparición de letras combinadas con números. Algunos hasta "aprendimos" que 5m+3m=8m, asociándolo a expresiones como "5 manzanas más 3 manzanas es 8 manzanas" (letra como objeto), pero no la existencia de una relación multiplicativa "5 veces m", de allí se derivaron muchas de las dificultades que presentaron en el aprendizaje de esta "nueva" asignatura, pues ella exige tres cambios significativos: (1) la concatenación de símbolos, (2) uso de paréntesis y (3) usos del signo igual Kieran (1989 citado por Rojas & Vergel, 2013), además de las diferentes interpretaciones asociadas a la letra en contexto algebraicos dadas por los estudiantes: (1) letra evaluada, (2) letra no usada, (3) letra como objeto, (4) letra como incógnita,(5) letra como numero generalizado y (6) letra como variable (Küchemann, 1978, citado por Rojas, et al., 1999, pp.31-32).

Surge entonces el pensar el álgebra más allá del uso de un lenguaje orientado desde los diferentes procesos de pensamiento, en Colombia se desarrolla una propuesta que de la mano de los lineamientos curriculares y que trazan un camino que busca organizar los diferentes procesos matemáticos que el niño debe desarrollar durante su vida escolar denominado estándares de matemáticas, uno de los ejes planteados en esta propuesta es el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, relacionado con procesos como:

> Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006, p. 66)

el cual debe ser desarrollado con el fin de potenciar el aprendizaje de las funciones y de sistemas analíticos, ya que este pensamiento cumple un papel importante en la compresión y análisis de situaciones de variación y cambio, así como la modelación de procesos que se dan la vida cotidiana, a nivel no solo de las matemáticas sino de otras ciencias como las naturales y sociales. De alguna manera esta definición nos hace pensar que es necesario volver a lo esencial, al pensar el álgebra como un proceso cuya finalidad debe estar encaminada en dar solución a problemas desde la generalización, la modelación, entre otros. Donde lo simbólico no deja de ser importante pero ya no es lo primero.

En Vergel (2015) encontramos que se asume "el pensamiento algebraico como una forma de reflexionar matemáticamente" (p. 78), el cual se distingue por tres vectores o componentes analíticos: la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica, los cuales son evidenciados a través de las acciones de los estudiantes, teniendo que cuenta que la actividad matemática es multimodal. En cuanto a la indeterminancia se asocia aquello contrario a la determinancia, siendo algunos objetos básicos como las incógnitas, variable, entre otros, siendo denotadas por los estudiantes a través de diferentes medios semióticos como los señalamientos, signos indexicales, deícticos, etc... El segundo, la analiticidad, como la forma de trabajar los objetos indeterminados, se establece el carácter operatorio de los objetos básicos, y por último la designación simbólica o expresión semiótica como la forma de nombrar o referir los objetos. En el desarrollo de este pensamiento se hace uso de las regularidades las cuales se encuentran en sucesiones y en secuencias, a partir de analizar la forma como cambia, es decir, aumenta o disminuye, la forma de la secuencia, en otras palabras, la estructura espacial y numérica, así como conjetura la forma de los siguientes términos, por último, intentar formular un procedimiento que permita establecer el patrón de comportamiento. Resaltando la importancia de este tipo de actividades.

> Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. (MEN, 2006, p.67).

La generalización de patrones permite abonar el camino hacia la configuración de sistemas algebraicos, así como también el uso del lenguaje alfanumérico propio de esta rama de las matemáticas.

Teniendo en cuenta los procesos que se desarrollan en a nivel del pensamiento algebraico, se establecen tres niveles o estratos de pensamiento algebraico: factual, contextual y simbólico, cada uno de ellos definido a partir de los medios semióticos movilizados por los estudiantes en una actividad reflexiva; Radford (2010, citado por Vergel, 2015) define el pensamiento algebraico factual, como la capacidad de movilizar medios semióticos como gestos, ritmos, y demás actividades perceptuales, dando lugar a la indeterminacia que hace su aparición de forma implícita, es decir, no forma parte del discurso, pero se reflejada a través de acciones concretas, considerando que la actividad matemáticas es multimodal. En cuanto al pensamiento algebraico contextual, hacen su aparición frases representativas (dos veces el número de la figura más uno), en ellas se refiere a lo indeterminado de manera explícita, en otras palabras, realiza una descripción del término general. En el pensamiento algebraico simbólico las frases claves son remplazadas por símbolos alfanuméricos.

2.1.1. Sobre la generalización de patrones.

Dentro de los lineamientos y estándares de matemáticas (MEN, 2006) se establecen cinco pensamientos: numérico, pensamiento espacial, métrico, aleatorio y variacional, los procesos de generalización están enmarcados dentro del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, cuya finalidad es "analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre como de las ciencias y de las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas" (MEN, 1998, p.49) con respecto a las actividades que favorecen se encuentran: los diferentes tipos de representación, la introducción al concepto de función y plantea como herramienta necesaria el uso de patrones, a partir de escenarios geométricos o numéricos para reconocer y describir las regularidades o patrones con variaciones de tipo aditivo y multiplicativo.

Cuando los estudiantes realizan tareas referentes a la solución de problemas, donde se hace necesario operar con objetos indeterminados presentan dificultades que podría ser subsanadas si desde temprana edad se hiciera un trabajo consiente y consistente con ellos, donde una de las posibles tareas podrá ser la generalización de patrones como una herramienta para lograr este objetivo, que consiste en establecer las características (cualidades) de un objeto o de un conjunto de objetos, identificando lo que tienen en común, pero también lo que los hace particulares o diferir entre sí, lo cual permite extenderlo a un conjunto mayor, este proceso se da a nivel general en las diferentes ciencias, pues permite conjeturar sobre diferentes casos a partir de pocos ejemplos.

En cuanto a la generalización de patrones Radford propone la siguiente definición:

> Generalizar un patrón algebraicamente descansa en la capacidad de notar una comunalidad sobre algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que esta comunalidad se aplica a todos los términos de S y ser capaz de usarla para proporcionar una expresión directa de cualquier término de la secuencia S (Radford, 2010, p. 42)

con base en lo anterior, es posible entender que la generalización de patrones nos permite desarrollar las capacidades de abstracción (particularizar) y extrapolación (universalizar) sobre todo aquello que encontramos, a partir de un(os) término(s) o a un conjunto de ellos.

Radford (2010) advierte que no siempre va a ser posible llegar a una generalización algebraica y que nos podemos enfrentar con otros tipos de generalización, denominados inducción ingenua y generalización aritmética, éstos dan cuenta de la abstracción que tiene el estudiante frente a la tarea propuesta. Determinados a través de la abducción realizada desde las observaciones de las características comunes de los términos dados.

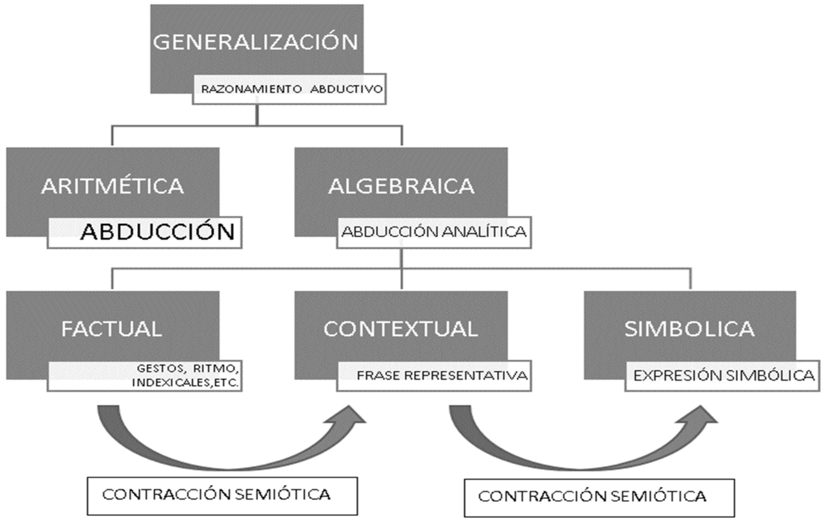
En otras palabras, podríamos decir que la generalización de patrones requiere un tipo de razonamiento abductivo, definido como:

> Si en presencia de ciertos elementos observables de un fenómeno no manifiesto en toda su dimensión, se concluye que éstos pertenecen a una clase particular de objetos, se estará en presencia de otra clase de inferencia a la que Peirce denominó abducción o hipótesis, la que se presenta como la inferencia de un caso a partir de la regla y el resultado (Bar, 2001, pp.169-170).

Podemos afirmar que durante el desarrollo de la tarea los estudiantes generan hipótesis las cuales son puestas a prueba para determinar el patrón de la secuencia. Desde la cual podemos caracterizar el proceso realizado por ellos. Se establece que existe una inducción ingenua cuando se llega a otros términos de la secuencia a través del ensayo-error o por una simple casualidad; cuando la hipótesis planteada se caracteriza por generalizar una coincidencia local, la cual le permite pasar de un término a otro siguiente, podríamos determinar que la generalización realizada es aritmética; cuando la hipótesis establecida es asumida como principio y permite generar cualquier término de la secuencia estamos frente a una generalización algebraica. La generalización algebraica a su vez puede ser factual (la indeterminacia es expresada en acciones concretas como señalamientos, gestos, etc.), contextual (la indeterminancia se hace explicita y realiza la descripción del término general) o simbólica (frases claves son representadas por símbolos alfanumericos).

2.1.2. Sobre los estratos de generalidad.

A partir del acercamiento al concepto de generalización establecemos el siguiente esquema el cual nos permite visualizar los tipos de generalización propuestos por Radford (2010) desde de los procesos mentales y de la emergencia de medios semióticos.



Esquema 1.Generalización .

Los estratos de generalidad o tipos de generalización (Radford, 2010), son evidenciados a través de los procesos realizados por los estudiantes al enfrentarse a tareas como secuencias figurales, secuencias numéricas, etc., en ellas es necesario en primer lugar, percibir las distintas relaciones tanto de forma como de cantidad que se dan entre los elementos de la secuencia, proceso que se realiza en el campo de lo fenomenológico, lo cual permite generar las figuras siguientes a la secuencia dada, este análisis puede llevar a una generalización aritmética, estableciendo el tipo de abducción realizado, siendo esta utilizada únicamente con la finalidad de pasar de un término a otro consecutivo, desde una relación aritmética.

En tanto a la generalización algebraica de secuencias figurales Radford (2013) sugiere que se desarrolla en tres momentos o fases, inicialmente en la toma de conciencia de las propiedades en común, la cuales se establecen a partir de los casos particulares, en segundo lugar, la posibilidad de extender la propiedad a los términos subsecuentes y por último, la capacidad de deducir una expresión la cual permita establecer cualquier término de la secuencia. En este caso y para que la generalización sea algebraica se debe tener en cuenta que la abducción realizada por los estudiantes sea analítica, es decir, no se llega a la generalización desde el ensayo-error, sino desde el decubrimiento de las caracteristicas de la secuencia desde la estructura numérica y la estructura espacial.

En cuanto a la generalización algebraica ésta se desarrolla a su vez en tres niveles: factual, cuando logra encontrar una comunalidad de los términos que permitan relacionar y establecer la cantidad de elementos de cualquier figura, expresada en acciones concretas. Contextual, cuando recurren a mostrar la generalidad a través de la comunalidad encontrada en los términos, indicación para encontrar cualquier figura, es decir, se construye una frase representativa de los términos de cualquier figura de la secuencia y, por último, la generalización algebraica simbólica cuando se presenta la aparición de símbolos alfanuméricos, existiendo contracción semiótica donde se cambia la frase "cualquier figura" por la n. Cabe resaltar que no siempre la aparición de símbolos alfanuméricos nos garantiza la existencia de una generalización algebraica.

2.2. Sobre la Teoría Cultural de la Objetivación – TCO

La teoría cultural de la objetivación surge a través de la necesidad de acercarse a los elementos cognitivos y sociales que permean el aula en el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta que en dicho proceso no solo interviene el objeto matemático en sí (el saber), sino que también seres social y culturalmente constituidos y activos (el ser), en otras palabras "el saber es generado por los individuos en el curso de las prácticas sociales constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2011, p. 43) por naturaleza somos seres sociales, nuestras costumbres y en general nuestra cultura ha surgido y se han robustecido a lo largo del tiempo, permitiéndonos descubrir y enfrentarnos a nuevos retos, conocimientos y formas cada vez más civilizadas de relacionarnos de una manera particular con el medio y con los demás, sin olvidar que las sociedades nunca son estáticas y que por el contrario se transforman a partir de diferentes interacciones cada vez más complejas en torno a lo escolar, familiar, social, afectivo, etc., y en general en todos los ámbitos de la vida.

Con base en lo anterior, la educación se erige como un ejercicio de transformación del individuo y como un elemento constitutivo de las prácticas e identidad social.

> La Teoría de la Objetivación parte de una posición política – conceptual que reposa en una idea general acerca de la educación y que puede explicarse de la siguiente manera: la educación en general y la enseñanza y aprendizaje en particular no tratan de saberes únicamente, tratan de saberes y de seres. (Radford, 2014, p.135).

En este sentido, debemos replantear la idea con base en la cual, la educación es considerada como la acción de acercar al estudiante a la aprensión y memorización de múltiples conocimientos teóricos (conceptuales) que muchas veces nunca se llevan a la práctica en el desarrollo de la cotidianidad y recordar que educar hace referencia a la acción de criar y alimentar, pero también al ejercicio de llevar, conducir, sacar, es decir permitir el paso de un estado de pasivo ideal a otro activo experimental. Parafraseando al filósofo ateniense Platón quien concibe la educación como un proceso de perfeccionamiento y embellecimiento del cuerpo y el alma, podemos concluir que más allá de educarnos para el conocimiento, debemos prepararnos para la vida.

Retomando la Teoría Cultural de la Objetivación que desarrolla Luis Radford, y que surge como respuesta a grandes interrogantes sobre el papel que juega la cultura y la sociedad en el aprendizaje y aplicabilidad de los conceptos matemáticos y recordando que dicha teoría a su vez se basa en el trabajo sociocultural de Vygotsky y el materialismo dialéctico, es preciso intentar darle una visión diferente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entendiendo que tanto enseñanza como aprendizaje deben fundamentarse en las interacciones y construcciones de conceptos que se dan a partir de una labor conjunta (no aislada) entre maestros y estudiantes, centrada en dos elementos importantes que interactúan y se construyen mutuamente seres-saberes, de ésta forma, el aprendizaje como "procesos sociales de toma de conciencia crítica en los que intervienen diferentes medios semióticos puestos en juego por los estudiantes (lenguaje, gestos, símbolos, artefactos, etc.)" (Miranda, et al., 2013, p. 183). En esta teoría aparecen dos objetivos principales, “la comprensión y producción de saberes y subjetividades en el aula, así como la identificación de formas pedagógicas de acción que conllevan a una enseñanza y aprendizaje significativos” (Radford, 2014, p. 136). El conocimiento aparece como algo que está en constante movimiento que se codifica a través de las interacciones de y con los otros y con el mundo, el cual es actualizado a partir de la actividad.

En este punto, y con el fin de entender la relación entre la TCO y el Materialismo Dialéctico, es preciso recordar que este último fue desarrollado de manera conjunta por Friedrich Engels y Karl Marx en su preocupación por entender de una manera filosófica el mundo (naturaleza, la sociedad humana y el pensamiento) y que surgió en la década de los cuarenta del siglo XIX, en continua interrelación con las prácticas del movimiento obrero revolucionario de la época y que propendió por introducir a las prácticas educativas los conceptos de ser y hacer, la idea materialista dialéctica del conocimiento se basa en la distinción entre el potencial (algo que puede suceder, es decir, posibilidad) y el Actual. Radford (2014) en referencia al materialismo dialéctico afirma el conocimiento no es algo que se posea, este se adquiere o construye desde las diferentes acciones personales, no es una entidad psicológica o mental, basándose en la distinción entre lo que se considera potencial y lo real.

La TCO nos ofrece una posibilidad distinta de entender los procesos de enseñanza-aprendizaje, desde una postura sociocultural, en la que se hacen importantes las diferentes interacciones que se dan a interior de las aulas que permiten a los estudiantes la adquisición de saberes y la transformación del ser. Así mismo, pone de manifiesto que la actividad matemática es multimodal, llevándonos a reflexionar sobre las diferentes formas de expresión que son utilizadas por los estudiantes más allá de lo observado comúnmente en las producciones escritas, pues ellos utilizan diferentes recursos semióticos los cuales les permiten objetivar “traer al frente” el conocimiento.

Desde los objetivos del presente trabajo se pretende identificar y describir los medios semióticos que emergen durante el desarrollo de tareas de generalización de patrones, teniendo como precedente los principios teóricos mencionados anteriormente.

3. METODOLOGÍA

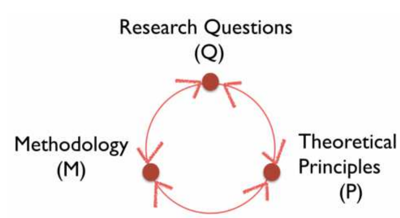
En este capítulo trataremos específicamente lo concerniente a la metodología utilizada en el proceso de investigación en el aula, denominada multi-semiótica. Así mismo, los elementos que se tuvieron en cuenta para determinar las tareas que se iban a proponer desde lo teórico y los resultados del pilotaje.

3.1. Diseño metodológico

Radford (2015) establece que una metodología, debe estar estrechamente relacionada con algunos principios teóricos y estos a su vez con la o las preguntas de investigación, afirmando:

> una metodología, M, está siempre en relación con algunos principios teóricos, P. Estos principios teóricos no sólo proporcionar el soporte conceptual de concebir hechos y a la metodología con su convincente dimensión epistemológica, pero también nos permiten formular de manera específica las preguntas de investigación. (Radford, 2015, pp. 548-549) [Traducción del autor]

con el objetivo de precisar la metodología planteada realiza el siguiente esquema:



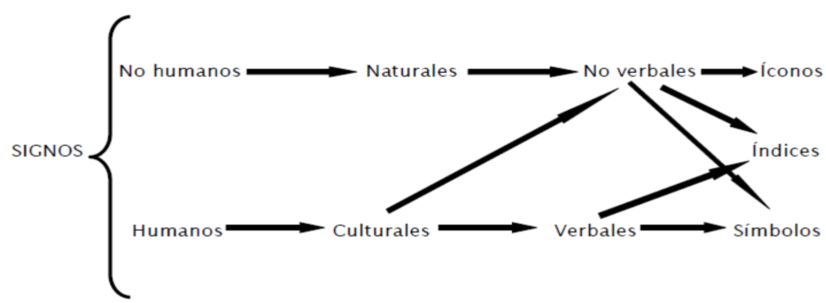
Esquema 2. Relación dialógica principios teóricos, metodología y pregunta de investigación (Radford, 2015)

En el esquema notamos la dependencia que existe entre los tres elementos, los principios teóricos, es decir, en particular dentro de la TO, distinguimos los procesos de objetivación y subjetivación , como inherentes al proceso de enseñanza- aprendizaje, partiendo del hecho de que el aprendizaje se da desde la interacción que se originan en los diferentes espacios, la cual se hace evidente desde los medios semióticos que son movilizados, de la misma manera concibe la actividad no como simplemente hacer algo, sino como las diversas acciones que se realizan en pro de dar una solución adecuada a la situación presentada o la contribución a la satisfacción de necesidades colectivas constituyéndose como la unidad mínima de análisis. "La actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica" (Radford, 2006, p. 7), es decir, se hacen importante las formas de representación de los objetos de estudio, pues se considera el lenguaje de las matemáticas un lenguaje universal, por tanto, los signos son dotados de sentido y significado. Cobrando una gran importancia hablar de semiótica en la educación matemática y de las ciencias. La semiótica es entonces la ciencia encargada del "estudio de los signos, de las estructuras y de los procesos significativos", de esta manera se hace comprensible que la metodología planteada desde la TO sea denominada multisemiótica, se suma a los esfuerzos por comprender y de alguna manera dilucidar a través de los medios semióticos movilizados por los estudiantes el proceso de aprendizaje de un objeto determinado. A su vez ligado, a la pregunta de investigación, en este caso, determinar los tipos de generalización realizada por los estudiantes al resolver tareas de patrones figurales. Por lo tanto, es necesario a su vez referirse al signo.

> Los seres humanos estamos dotados de esa facultad que nos permite crear, adquirir, aprender y usar códigos constituidos por signos. La comunicación humana está, precisamente, ligada a esa capacidad de interpretar unos sonidos, unos gestos, unas imágenes y unas marcas, como signos de otras realidades acerca de las cuales un interlocutor quiere llamar nuestra atención. (Rincón, 2016, p.2).

Podemos entonces decir que nuestro papel de docente-investigador está en el interpretar el proceso y comprensión de los estudiantes frente al objeto de estudio a través de los signos que son utilizados en la actividad matemática.

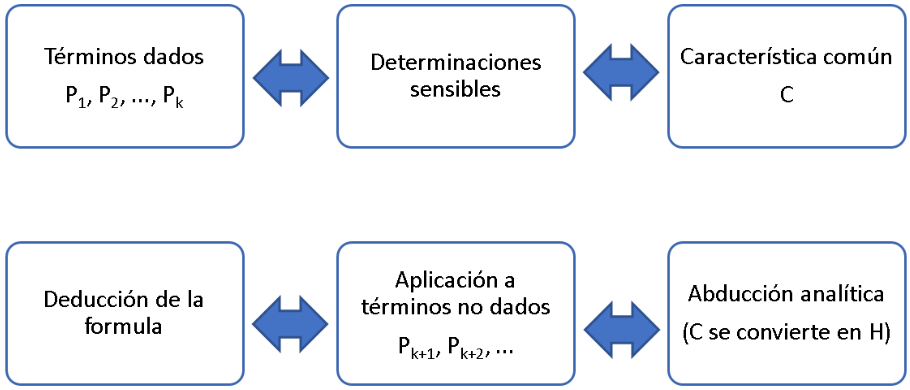
De este modo es importante destacar la siguiente clasificación realizada por Rincón (2016) en la cual afirma que no es posible realizar una general y única argumentando la existencia de diversos criterios que se entrecruzan. Inicialmente realiza una primera clasificación a partir de interprete que puede ser humano o no humano, relacionando estas a la capacidad de creación de otros lenguajes como la música, las señales de tránsito, etc., creadas y utilizadas por el hombre, y las otras utilizadas por los animales, dotadas de sentido a través de la naturaleza; en segundo lugar, según el ámbito en el que se dan, naturales y culturales, en la primera manifestando la capacidad de significar propio de la naturaleza y la otra, desde las creaciones culturales del hombre, que adquieren un significado particular desde los acuerdos establecidos entre grupos de personas; en tercer lugar, según su estructura, verbales entre las que encontramos lo oral y lo escrito, y no verbales, como la música, las señas utilizadas por los sordomudos, entre otros; por último, según su relación con el significado haciendo referencia la clasificación hecha por Pierce, en íconos, los cuales tienen una semejanza figurativa, índices o signos deícticos, los cuales guardan una relación físico-espacial y los símbolos, los cuales son una representación netamente convencional. Finalmente presenta el siguiente esquema, en el podemos notar como se interrelacionan las clasificaciones dadas, como afirma inicialmente el autor. Dentro del análisis de multisemiótico, denotamos entonces la gran importancia que tiene los signos desde sus diversas perspectivas y formas de clasificación.



Esquema 3. Clasificación de los signos (Rincón Castellanos, 2016, p.6)

3.1.1. Fases del diseño.

Inicialmente se realizó un rastreo de trabajos que se han desarrollado en torno a la generalización de patrones (Vergel 2014, Moreno 2014, Callejo & Zapatera 2014, Chalé Can 2015, Guzmán 2013), de allí se establecieron algunas de las tareas, fijándose principalmente en la forma de las secuencias figurales presentadas en estos documentos. Para las preguntas se tiene en cuenta que ellas permitan seguir el camino propuesto hacia la generalización.

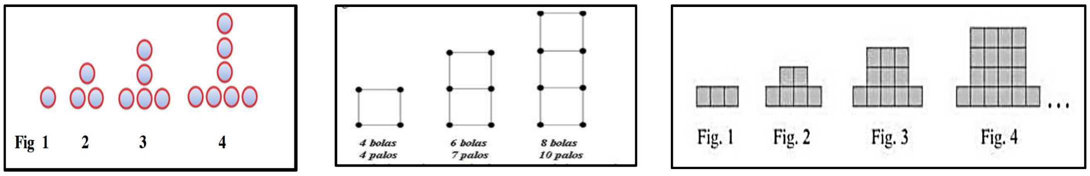


Esquema 4. Estructura de la generalización de secuencias figurales (Radford, 2013)

El esquema anterior nos muestra la estructura de la generalización de secuencias figurales (Radford, 2013), por tanto, en las tareas se tiene en cuenta que las preguntas elaboradas y/o tomadas de los documentos permitan que el estudiante realice dicho proceso, por esta razón son organizadas así: las primeras preguntas tenían como finalidad descubrir las características comunes de los términos dados, que permitieran extender los términos subsecuentes, desde la estructura espacial y la estructura numérica, las siguientes hacia encontrar términos más grandes, con el fin de establecer algunas hipótesis sobre el comportamiento de términos particulares y las ultimas determinar el comportamiento de cualquier término de la secuencia.

Estas tareas inicialmente fueron objeto de un pilotaje, éste se desarrolló con 4 estudiantes de grado octavo (802) del CENSO, cuyas edades oscilan entre los 13 y 16 años, se realiza la invitación a participar a 6 estudiantes, con desempeños académicos alto, básico y bajo, teniendo en cuenta la escala de valoración adoptada por la institución CENSO, dos de cada uno de los niveles mencionados, pero en el momento de iniciar la implementación de las tareas solo cuatro de ellos contaban con el permiso de los padres. El pilotaje se hizo con el fin de comprobar si las tareas eran apropiadas para la edad de los mismos, y evidenciar si en los procesos realizados por estos estudiantes era posible establecer los tipos de generalización, desde los diferentes medios semióticos utilizados durante la actividad.

Se implementaron tres de las tareas que se habían seleccionada para realizar la investigación, dos de ellas eran secuencias lineales y una cuadrática, dadas a partir de las siguientes figuras:



Secuencia 1 Secuencia 2 Secuencia 3

Figura 3. Secuencias utilizadas en el pilotaje

Las preguntas que se utilizaron estaban acorde con la estructura planteada por Radford (2013) las primeras orientadas a determinar las figuras subsecuentes, cuya finalidad es establecer la comunalidad desde la estructura numérica y espacial, posteriormente términos específicos pero ya no consecutivos, por último llegar a una expresión que permita encontrar cualquier término, de tal manera que estas permitan ir vislumbrando los diferentes tipos de pensamiento algebraico desarrollados por los estudiantes.

Durante el pilotaje se recogieron datos de audio, video y hojas de trabajo, los cuales fueron analizados, desde los elementos teóricos de la TCO, en ellos se encontró que los estudiantes durante el proceso de generalización inicialmente hacen uso de medios semióticos como señalamientos y conteos, lo que les permite determinar algunas características comunes de los elementos de la secuencia; también se observó que al realizar la representación de las figuras siguientes entre las condiciones que los estudiantes establecen como relevantes fue la cantidad, o sea, la estructura numérica, tres de ellos se fijaron también en la estructura espacial, la forma como estaban dispuestos espacialmente los círculos que componían la figura, solo en uno de los casos encontramos que el argumento utilizado para la representación fue: "*aumenta dos de una figura a otra*", sin tener en cuenta que unas estaban dispuestas de forma horizontal y las otras vertical, llegando a la representación que se muestra a continuación:

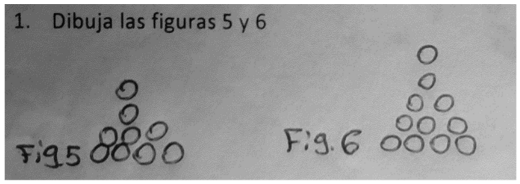
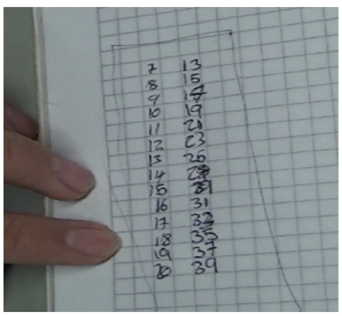


Figura 4. Representación preguntas 5 y 6 realizadas por Fabián

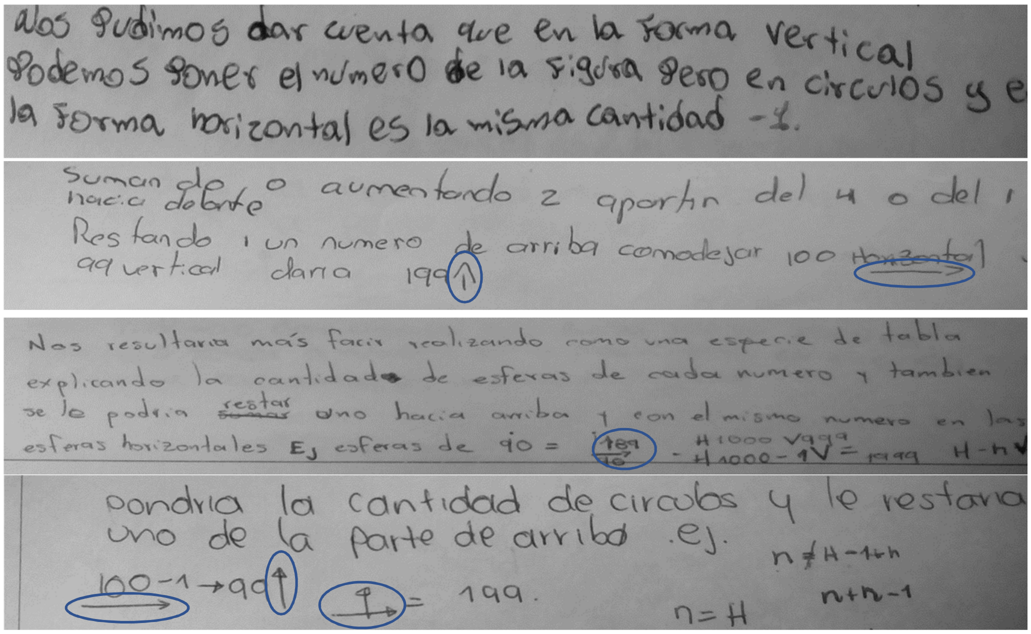
Otro de los recursos utilizados para determinar la cantidad de elementos de otras figuras de valores no consecutivos fue la elaboración de tablas, donde asume como principio la fórmula de recurrencia en la que la figura siguiente está formada por la cantidad de círculos de la anterior aumentada en dos, desde la regularidad encontrada (en particular para la primera secuencia +2) construyen la siguiente tabla:



En la primera columna aparece el número de la figura, a partir de la 7, pues gráficamente ya tenía la representación hasta la figura 6, y en la segunda establecen la cantidad de círculos de cada figura, a partir de la relación aritmética (+2) establecida entre las figuras.

Figura 5. Recurso semiótico utilizado por los estudiantes para hallar términos subsecuentes

La tabla les permite dar respuesta a la cantidad de elementos (círculos) que componen las figuras de la secuencia pequeñas no consecutivas. En este sentido y teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes (Fig.6) podemos inferir que la generalización realizada en esta primera tarea fue de tipo algebraica contextual, donde utilizan una frase representativa, la cual es construida a partir de la comunalidad encontrada y la relación que determinaron entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la componen. Una de ellas fue: "*nos pudimos dar cuenta que en la forma vertical podemos poner el número de la figura pero en círculos y en la forma horizontal es la misma cantidad -1*", las otras producciones son similares, expresadas a través de la relación de cantidad de la figura y la disposición de los círculos tanto horizontales como verticales, así mismo para ellos se hace importante afianzar este proceso de generalización a través de ejemplos que permiten comprobar la hipótesis realizada, la cual es asumida como un principio o regla general, en este sentido, deducimos que los estudiantes han realizado una abducción analítica. Así mismo, se evidencio el uso de signos como flechas para relacionar la estructura espacial con la estructura numérica de las figuras. El uso de símbolos alfanuméricos no es muy claro aún, aunque uno de ellos hace uso de estos para expresar la relación.



Nos pudimos dar cuenta que en la forma vertical podemos poner el numero de la figura pero en circulos y e la forma horizontal es la misma cantidad -1.

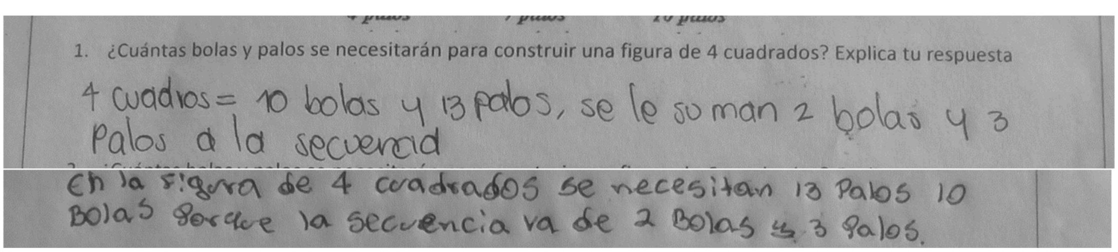
Suman de hacia delante o aumentando 2 apartir del 4 o del 1
Restando 1 un numero de arriba como dejar 100 ~~horizontal~~
99 vertical daria 199

Nos resultaria más facil realizando como una especie de tabla explicando la cantidad de esferas de cada numero y tambien se le podria ~~sumar~~ restar uno hacia arriba y con el mismo numero en las esferas horizontales Ej esferas de 90 = 189 - H 1000 V 999 H 1000 - 1V = 1999 H-h

pondria la cantidad de circulos y le restaria uno de la parte de arriba .ej.
100-1 → 99 = 199.
n≠H-1+n
n+n-1
n=H

Figura 6. Producción de los cuatro estudiantes pregunta 5(¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta)

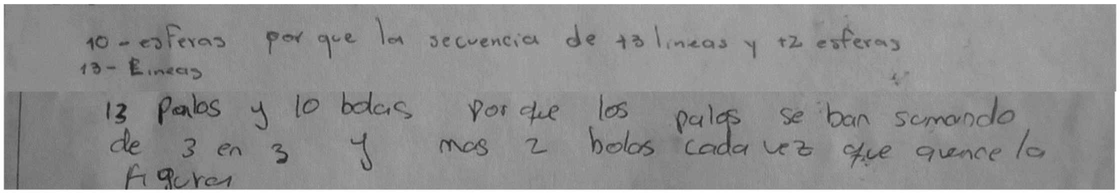
En la segunda tarea realizada existían dos relaciones diferentes las cuales se solicitaba generalizar separadamente, la primera figura-cantidad de bolas y segunda figura-cantidad de palos. En este caso existían una información adicional en la presentación de la secuencia (cantidad de bolas y palos de las primeras figuras), a partir de esta información ellos establecen que entre una figura y otra consecutiva había un aumento de dos bolas y tres palos, esto les permitió fácilmente determinar las cantidades de las figuras siguientes.



1. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados? Explica tu respuesta

4 cuadros= 10 bolas y 13 palos, se le suman 2 bolas y 3 palos a la secuencia

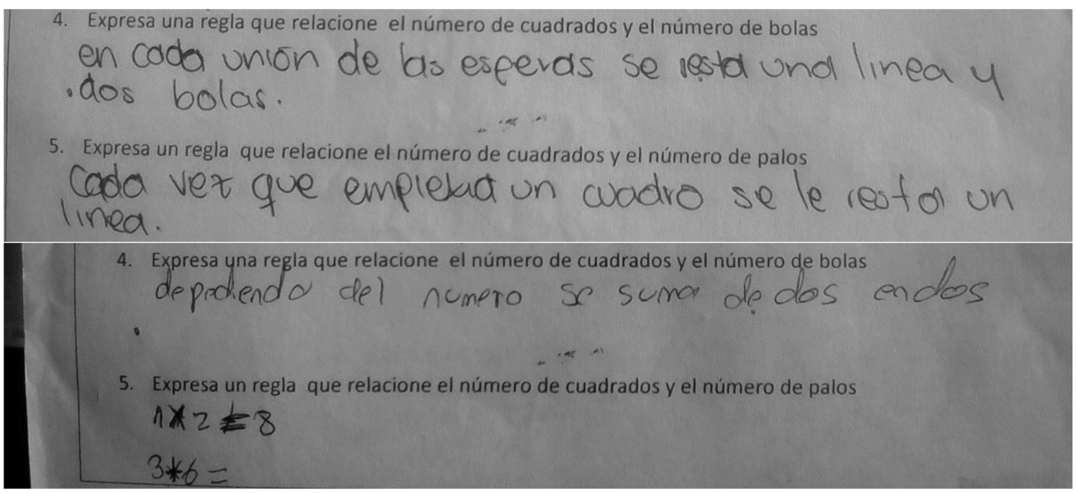
En la figura de 4 cuadrados se necesitan 13 Palos 10 Bolas porque la secuencia va de 2 Bolas y 3 palos.


10 - esferas por que la secuencia de +3 lineas y +2 esferas
13 - Lineas

13 Palos y 10 bolas por que los palos se ban somando de 3 en 3 y mas 2 bolos cada vez que avence la figura

Figura 7. Producción de los estudiantes pregunta 1, secuencia 2

Al indagar por las otras figuras, lo hicieron a partir de la relación aditiva encontrada, más dos (+2) en relación a las bolas y más tres (+3) en relación a los palitos, en este caso nos encontramos frente a una generalización de tipo aritmética, pues la hipótesis planteada permite pasar de un término a otro teniendo como precedente la relación aditiva encontrada, pero esta no es útil cuando se trata de cualquier figura, así mismo, una de las estrategias utilizadas para dar solución fue la composición de las figuras dadas, por eso otra relación que ponen de manifiesto es que al unir dos cuadrados estos comparten un palo y dos bolas, a continuación, se presentan dos de las soluciones dadas por los estudiantes.


4. Expresa una regla que relacione el número de cuadrados y el número de bolas

en cada unión de las esperas se resta una linea y dos bolas.

5. Expresa un regla que relacione el número de cuadrados y el número de palos

Cada vez que empleza un cuadro se le resta un linea.

4. Expresa una regla que relacione el número de cuadrados y el número de bolas

dependiendo del numero se suma de dos en dos

5. Expresa un regla que relacione el número de cuadrados y el número de palos

1*2=8

3*6 =

Figura 8. Producción de los estudiantes preguntas 4 y 5.

En la tercera tarea resultó fácil establecer la relación entre la figura y la cantidad de cuadrado a partir de la estructura espacial, a continuación, se presenta una de las producciones de los estudiantes, las respuestas dadas por el grupo son similares, debido a que estas se dieron a partir de la interacción entre ellos.

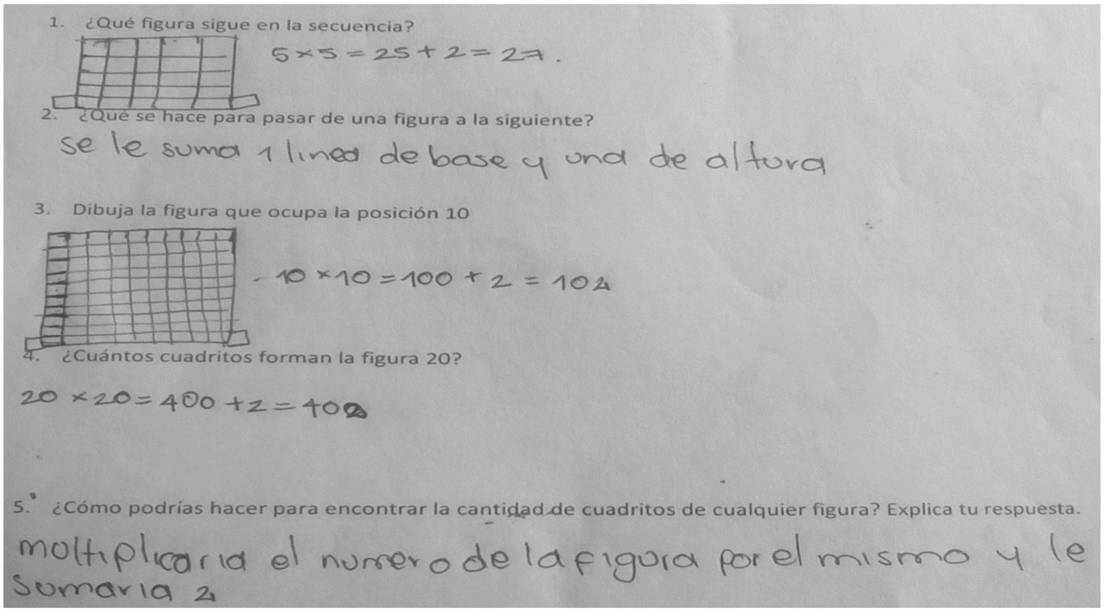


Figura 9. Producción tercera tarea

En esta se evidencia que se ha establecido la comunalidad de los elementos de la secuencia a partir de la relación con la estructura espacial, ellos notan que en el centro de las figuras se forma un cuadrado cuyo lado corresponde al número de la figura y adicionalmente en cada lado hay un cuadrado de 1x1, lo cual hace que ellos determinen la cantidad de cuadrados de cualquier figura a partir de la relación "*multiplicar el número de la figura por el mismo y le sumaria 2*", la cual fue usada para dar respuesta a las preguntas 3 y 4. Podríamos en este caso determinar según la evidencia descrita anteriormente la existencia de una generalización algebraica de tipo contextual.

En las tres secuencias presentadas a los estudiantes se evidenció el uso de diferentes recursos semióticos entre ellos los conteos, los señalamientos, el uso de otros signos como las flechas para indicar la estructura espacial de las figuras de las secuencias y de esta manera relacionar con la estructura numérica, elaboración de tablas, entre otros. De igual manera, evidenciamos que el uso de símbolos alfanuméricos fue escaso, solo se dio en la primera actividad y las relaciones esencialmente se da en términos de frases representativas, las cuales nos dan indicios de generalizaciones de tipo algebraico contextual. En este sentido podemos afirmar que efectivamente las tareas propuestas, son adecuadas para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, así mismo las preguntas fueron claras para los estudiantes, por tanto, la decisión que se tomo fue utilizar todos los instrumentos planeados sin realizar modificaciones y ajustes a los mismo.

3.1.2. Fase de implementación.

Partiendo de la importancia que tiene en la actividad del hombre la interacción con otros en la construcción del conocimiento, se establecen grupos de trabajo dentro del aula, los cuales no tienen ningún tipo de condicionamiento. Durante la implementación de las tareas en el aula, estas se dan en diferentes momentos, los cuales no necesariamente son desarrollados de forma lineal: presentación de la tarea, cuyo responsable es el docente, trabajo en pequeños grupos, discusión profesor-estudiantes, plenarias donde los pequeños grupos presentan sus ideas y las defienden frente a los otros grupos, en los diferentes momentos de discusión la función del docente debe estar encaminada a orientar el proceso, a partir de preguntas y realizar la retroalimentación del proceso, como muestra la figura 10. Cada sesión de trabajo tuvo una duración de noventa (90) minutos. En total se realizaron 6 (seis) sesiones de trabajo, únicamente se aplican las seis primeras tareas planteadas debido también a que la disposición de grupo fue disminuyendo en su interés.

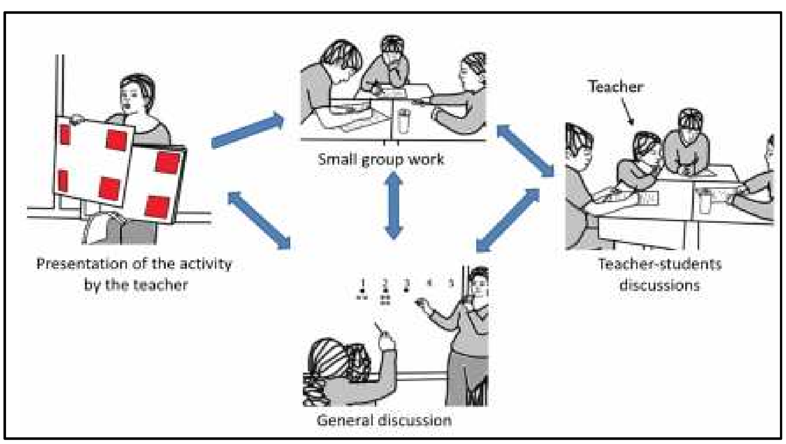


Figura 10. Actividades de clase como un sistema emergente (Radford, 2015. p.556)

3.1.3. Fase de recolección.

Durante la implementación se recoge información desde diferentes medios, entre ellos, grabación de video y audio, dentro de los parámetros establecidos por esta metodología se hace importante recoger los registros visuales a través del video, que permiten observar medios semióticos como gestos, señalamientos, entre otros, y registros de audio los cuales deben hacerse en las mesas de trabajo, tanto como en las plenarias, las cuales permiten tener evidencia de las discusiones dadas al interior de cada grupo, así como también los conteos y ritmos utilizados al desarrollar la actividad; hojas de trabajo, donde se evidencia el trabajo individual del estudiante, en este se registran las operaciones realizadas, las conclusiones y respuestas dadas a la actividad; notas de campo, son audios que realizan los observadores y/o el docente, contiene observaciones sobre lo que sucedió en el aula, estas pueden ser desde la dimensión ética o aportes desde el proceso matemático realizado; y notas realizadas en el tablero, en los momentos de plenaria uno de los recursos que se puede utilizar es el tablero, por tanto se hace importante tener un registro de lo realizado en este.

3.1.4. Fase de procesamiento de datos.

En esta fase se realiza la constitución de los datos, a partir de elementos como la transcripción de los diálogos hechos al interior de cada grupo, estos no se realizan de la totalidad de los audio y/o videos, sino de aquellos episodios donde la actividad desarrollada por los estudiantes arrojan elementos de procesos propios categorizados en la teoría (objetivación y subjetivación) y las preguntas de investigación, haciéndose evidentes otros momentos del diálogo como pausa, vacilaciones verbales, aparición de gestos, entre otras; de igual manera se escanean las hojas de trabajo realizadas de forma individual y grupal realizados por los estudiantes, las notas de campo, y demás recursos utilizados en la observación, como el objetivo principal de dar cuenta tanto de los procesos que se evidencian desde la teoría, como desde la pregunta de investigación.

4. ANÁLISIS MULTI SEMIÓTICO

En este capítulo describiremos la forma como fueron constituidos los datos a partir de los principios teóricos, metodología y la pregunta de investigación. Así mismo, desarrollamos algunos análisis de las actividades matemáticas desarrolladas en torno a las tareas propuestas, las cuales nos permiten realizar un acercamiento al tipo de generalización realizado por los estudiantes.

4.1. Descripción

En el capítulo anterior se trató de explicar la importancia que tienen los diferentes medios semióticos movilizados por los estudiantes en el proceso enseñanza-aprendizaje, puesto que ellos permiten evidenciar la compresión que se tiene del objeto de estudio. Partimos entonces del hecho que los signos según su relación con el significado se pueden clasificar en íconos, índices y símbolos, por lo que cobra gran importancia la recolección de la información desde diferentes medios, entre los cuales tenemos: escrito (hojas de trabajo), audio-video (registro tomado de los videos).

La información recolectada fue almacenada en varias carpetas digitales, en la primera se encuentran las producciones individuales clasificadas por estudiante y por grupo (hojas de trabajo), en una segunda, se almacenaron los videos los cuales se clasificaron por tareas, a su vez, estos se identificaron de acuerdo con los grupos de trabajo.

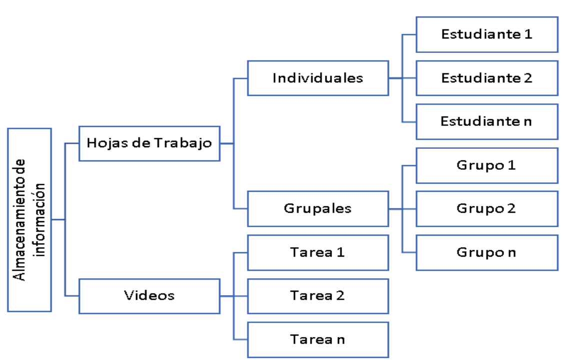


Figura 11. Estructura del almacenamiento

La recolección de la información se realizó con el grupo 801 del CENSO, formado por 33 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre los 13 y 17 años, se aplicaron seis de las siete tareas inicialmente planteadas, debido a que en el desarrollo de la tarea seis los estudiantes mostraron poca disposición para continuar con el trabajo. A su vez los estudiantes fueron organizados en 7 grupos de 4 estudiantes y un grupo de 5, los cuales además de las hojas individuales de trabajo debía realizar otra que correspondía a las respuestas que en consenso en el grupo construían, después de hacer el trabajo individual, es decir, contamos con 198 hojas de trabajo individual aproximadamente, teniendo en cuenta que en algunas sesiones de trabajo no asistieron todos los estudiantes y 48 hojas de trabajo grupal. Así mismo, contamos con los videos registrados por sesión de las actividades de los diferentes grupos y de las plenarias. Teniendo en cuenta la información recolectada, se realizará la constitución de los datos, a partir de los elementos teóricos de la TO y de la pregunta de investigación.

4.1.Análisis de la actividad matemática

El análisis de la actividad se realiza a partir de la información recolectada en las hojas de trabajo tanto individuales, como grupales realizadas por los estudiantes, así como también los registros audiovisuales de las actividades, inicialmente se dedica un tiempo a revisar uno a uno los videos de las sesiones de trabajo, con el fin de establecer aquellos episodios donde se evidencia, en primer lugar, los procesos llevados por los estudiantes camino a la generalización, a través de los signos verbales y no verbales utilizados durante la actividad matemática (proceso de objetivación), así mismo como aquellos que dan cuenta de la subjetivaciones o procesos asociados al volverse en.

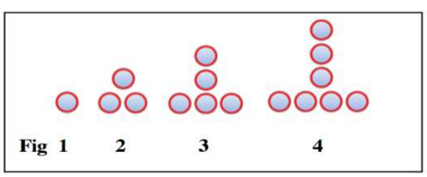
Después de establecer los episodios se realiza la transcripción de los diálogos realizados en dicho episodio, señalando a su vez signos no verbales utilizados, como los gestos, signos indexicales (espaciales y temporales) y se compara con lo realizado en las hojas de trabajo. A partir de la contrastación de estos elementos y los fundamentos teóricos sobre los procesos de generalización, se realiza el análisis con el fin dar respuesta a la pregunta de investigación.

4.2.1. Tarea 1.

La primera indicación que se les da a los estudiantes antes de desarrollar la tarea planeada es que se organicen en grupos de 4 estudiantes, estos no tienen ningún tipo de condicionamiento, simplemente ellos eligen entre sí con quienes van a trabajar, teniendo en cuenta que, dentro de la TO, el saber se da a través de la interacción con otros. En esta primera sesión de trabajo se pretende que los estudiantes se familiaricen con este tipo de tareas y al uso de la cámara en el aula.

Se presenta la tarea a trabajar, inicialmente desde la pregunta qué entienden ellos por una secuencia, a lo cual responde que es algo que sigue, que se comporta de la misma manera, sin ahondar en la respuesta se solicita que trabajen de manera individual y posteriormente compartan las respuestas obtenidas en los grupos formados.

La primera tarea es de la forma 2n-1, con n=1, 2, 3, …, expresada a través de la siguiente secuencia:



1. Dibuja las figuras 5 y 6
    a. ¿Cuántos círculos hay en la figura 5?
    b. ¿Cuántos círculos hay en la figura 6?
2. ¿Hay alguna manera de encontrar los círculos de la figura 15, sin construir la figura? Explica tu respuesta
3. Juan quiere construir la figura 20, explica lo que debe hacer para construirla.
4. Santiago tiene una figura de esta secuencia. Él usó exactamente 25 círculos. ¿A qué número de la figura corresponde? Explica la manera en que procediste para encontrar la respuesta.
5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta.

Figura 12. Tarea 1 (secuencia y preguntas)

La estructura de las tareas en general tienen la intencionalidad de permitirnos ver el proceso de generalización de los estudiantes desde los tres vectores, inicialmente identificar la característica en común de los elementos de la secuencia, que les permitirá construir los términos siguientes (pregunta 1), luego, poder extender esas características encontradas para establecer tanto la estructura numérica como espacial de algunos términos no consecutivos de la secuencia (preguntas 2, 3 y 4), por ultimo establecer el término general de la secuencia (pregunta 5).

A continuación, se presentan algunas de las respuestas dada por uno de los grupos. Este grupo está formado por Vanessa (V), Yuli (Y), Erika (E) y Carol (C). Ellas deciden presentar por separado la forma en la que realizaron la actividad, sí bien se propuso un trabajo grupal, se les permitió que ellas realizaran su presentación individual, pues había realizado procesos diferentes y habían establecido aún acuerdos.

El siguiente diálogo pertenece a la intervención realizada por la estudiante Carol

L1. P: ¿Qué hicieron?
L2. [Toma la vocería Carol]. Pues yo iba sumando una (+1) a los circulitos de abajo y una (+1) a los circulitos de arriba
L3. Explícame en la figura cómo quedaron
L4. C: Pues quedaron 5 abajo que es el número de la figura [señala los cinco círculos y luego encierra entre sus dedos el número 5] y cuatro arriba y así en la seis
L5. P: O sea que, ¿cómo hiciste para la figura 15?
L6. C: Para la figura quince, pues iba sumando de a dos por cada uno, entonces em la 7 es 13, en la 8 es 15 y así sucesivamente hasta llegar a la quince.
L7. P: ¿Es necesario siempre ir sumando los dos para poder saber cuántos hay en cada secuencia?
L8. C: No, porque me di cuenta de que ehh que la figura decía 5, entonces abajo van 5 círculos y arriba van menos 1 y así se suma.
L9. P: ¿O sea que en la figura cien qué pasaría?
L10. C: Serían cien números abajo. Cien círculos abajo (juntamente con la profesora). Y serían 99 arriba, serían pues 199

Cuando se indaga por el proceso realizado inicialmente quien toma la vocería es la estudiante Carol la cual narra lo que ella particularmente realizó para dar respuesta a cada uno de los requerimientos de la tarea. Durante su intervención hace uso de diferentes medios semióticos como gestos con las manos para denotar la disposición horizontal y vertical de los círculos, igualmente usa señalamientos para relacionar estructura numérica y espacial, entre otros. Inicialmente explica que la forma como percibió la secuencia fue a través del aumento de cantidad de círculos arriba y abajo, estrategia que utiliza para graficar las figuras siguientes, es decir, las figuras 5 y 6, expresándolo en L2 "*Pues yo iba sumando una (+1) a los circulitos* *de abajo y una (+1) a los circulitos de arriba*", la cual es utilizada para extender la secuencia a las figuras siguientes, es decir, figuras 5 y 6. Posteriormente cuando se pregunta por la figura 15, afirma: "*Para la figura quince, pues iba sumando de a dos por cada uno, entonces en la 7 es 13, en la 8 es 15 y así sucesivamente hasta llegar a la quince*", es decir a partir de la relación +2, en este momento ha asumido esta como principio, lo cual nos permite afirmar que hasta este momento ella realiza una generalización aritmética, que le permite establecer la cantidad de elementos de figuras pequeñas.

Es importante tener en cuenta que en este primer diálogo la estudiante menciona otra relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos acomodados horizontalmente, como se evidencia en L4: "*Pues quedaron 5 abajo que es el número de la figura [señala los cinco círculos y luego encierra entre sus dedos el número 5] y cuatro arriba y así en la seis"*, durante esta explicación la estudiante se apoya en señalamientos (Fig.13), evidenciándose la convergencia de medios semióticos para expresar una idea sobre el comportamiento de la secuencia, la cual le puede dar indicios sobre el comportamiento general de la secuencia

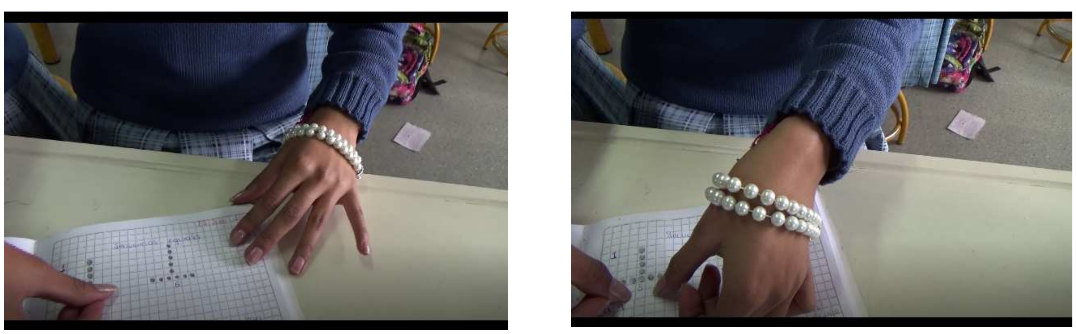


Figura 13. Señalamientos utilizados por Carol para explicar la comunalidad establecida

Se continúa con la indagación a partir de la pregunta entonces: *"¿es necesario siempre ir sumando dos (+2) para saber cuántos hay en cada figura?*", a lo que ella responde: "*No, porque me di cuenta de que ehhh, la figura decía 5, entonces abajo van cinco y arriba va menos 1, y así se suma*", se apoya en gestos con las manos (figura 14 imágenes centro e izquierda) para denotar la relación entre la estructura numérica y la espacial. Cuando se le solicita la cantidad de círculos de la figura 100, nuevamente a través de los gestos ella indica la forma como espacialmente están organizadas las figuras indicando que horizontalmente la cantidad, es igual al número de la figura y verticalmente corresponde a la misma cantidad -1, siendo necesario para ella el uso de valores determinados para explicar el comportamiento de la secuencia, la propiedad común que establece la estudiante es usada para determinar cuántos círculos componen cada figura. Para este momento ella muestra evidencias de haber alcanzado una generalización algebraica, en tanto realiza una abducción analítica, asumiendo como principio la regla establecida entre el número de la figura solicitada y la cantidad de elementos que la componen como la suma de los círculos acomodados de forma horizontal y vertical, pero siempre lo hace mediante valores determinados, evidenciado en la forma como responde a la pregunta 5.

5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta.

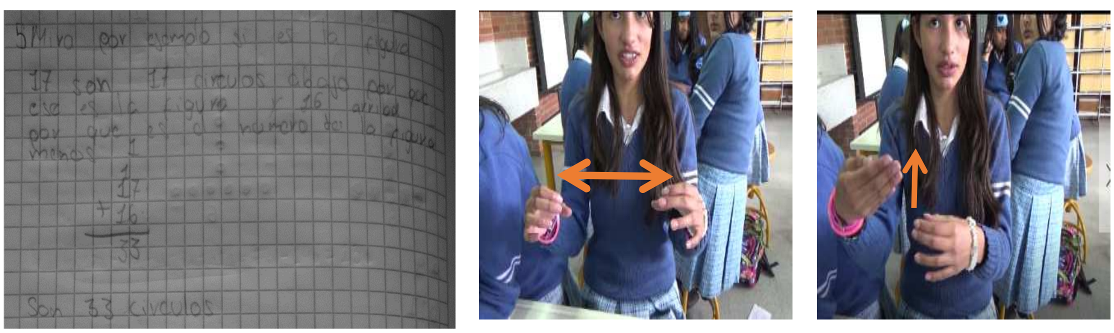


Figura 14. Producción Carol-Gestos utilizados para exponer la solución de pregunta 5

Existe aquí una evidencia de que la estudiante encontró una comunalidad que le permite establecer la estructura numérica - espacial de cualquier los elementos de la secuencia, pero aún no alcanza el nivel de enunciación a través una frase representativa de cualquier término o el uso de símbolos alfanuméricos, es decir, operar con lo indeterminado, por lo tanto podríamos concluir que en esta primera actividad ella realiza una generalización algebraica de tipo factual (acciones), en ella "hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos de actividad perceptual" (Vergel, 2015, p. 198), en este tipo de generalización lo indeterminado no hace parte del discurso.

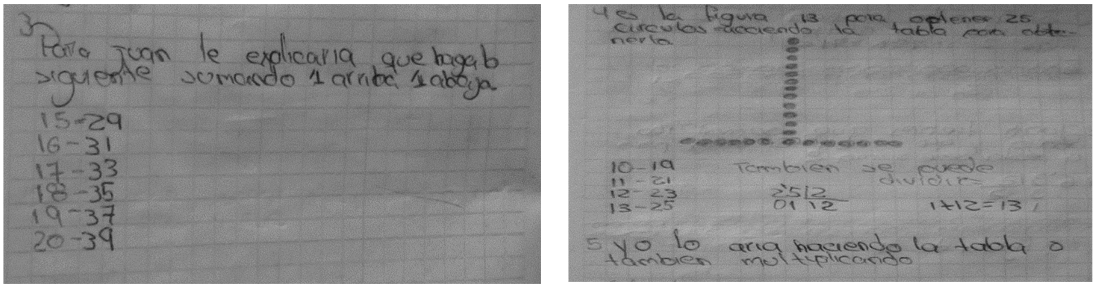


Figura 15. Producción de Erika tarea 1

En el caso de Erika, ella establece una relación que le permite determinar la cantidad de círculos (estructura numérica) y su disposición horizontal y vertical (estructura espacial), basándose en la relación "*sumando 1 arriba 1 abajo*", usa como recurso semiótico la construcción de una tabla que le permite determina la estructura numérica, pero la hace adicionando 2 de un término al otro, para responder a la pregunta 5, lo hace desde la comunalidad y la relación aditiva encontrada entre figuras consecutivas (Fig.15), es decir desde la relación aditiva +2, lo que nos lleva a concluir que la generalización realizada por esta estudiante es de tipo aritmética, pues la hipótesis planteada está dada a través de la recurrencia entre los términos. El diálogo con esta estudiante fue muy corto, ella comenta que al principio fue un poco difícil encontrar la relación pero que fue ayudada por Carol, que le explicó, pero no da mayor detalle de ello, podríamos notar de esta manera la importancia que tiene la interacción entre los diferentes miembros del grupo, pues esto permite que los estudiantes con dificultades puedan iniciar su proceso de comprensión frente a las relaciones entre los términos de las secuencias.

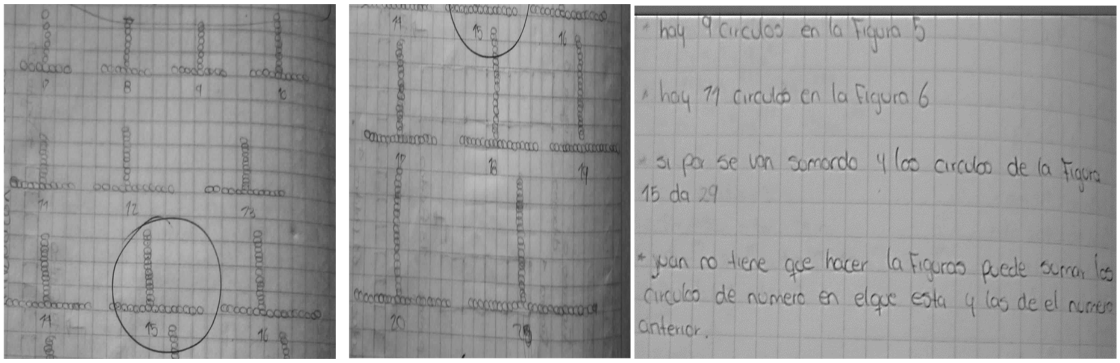


Figura 16. Producción de Yuli tarea 1

En el caso de Yuli ella recurre inicialmente al uso de la representación gráfica (estructura espacial) a partir de la relación encontrada, adicionando un círculo horizontal y uno vertical (primera determinación realizada por la estudiante), para desde allí, establecer la cantidad de círculos de cada figura (Figura 16), esto le permitió dar respuesta a la estructura numérica de los términos subsecuentes (pequeños) y de esta manera responder a la solicitud de las preguntas 2, 3 y 4, aunque también notamos que en las figuras realizadas hay un salto de la figura 20 a la 25, lo que nos lleva a suponer que la estudiante ha establecido una comunalidad entre los elementos de la figura. Posteriormente se indaga si para ella se hace necesario el manejo de lo concreto, como lo evidencio en las soluciones anteriores, se sostuvo el siguiente diálogo con la estudiante:

L1: Y: Yo en vez de hacer la tabla hice las figuras
L2: P: Tú hiciste las figuras. ¿Y qué pasaría entonces con la figura cien, tendrías que hacer todas las cien figuras para saber cuántos circulitos son?
L3: Y: No, no necesariamente tengo que hacer las figuras
L4: P: ¿Entonces?
L5: Y: Puede hacer los 100 circulitos (señalando una de las figuras en la acomodación horizontal) y arriba los 99 (muestra la secuencia realizada en el cuaderno)
L6: P: ¿Y cómo sabes que es así?
L7: Y: Porque…porque yo entendí aquí (señalando de la figura 2 de la secuencia), que aquí abajo va el numerito y arriba va (gestos refiriéndose anterior), algo así entendí
L8: P: ¿Qué abajo iba cuál?
L9: Y: El dos… y arriba va el uno, y así sucesivamente, como decir aquí abajo van tres y aquí arriba van dos, aquí abajo van cuatro y acá arriba van tres. (utiliza signos indexicales sobre las figuras, para indicar la cantidad a medida que los menciona)
L10: P: O sea que en la quince cómo te quedaron
L11: Y: En la quince yo hice los de abajo los quince circulitos y arriba los catorce
L12: P: Ah, ok. Entonces por eso sabes que serían 199 en la figura cien
L13: Y: Sí señora

Como se muestra en la transcripción (2), aunque no expresa de manera escrita la estructura especial y numérica de las figuras de la secuencia, al movilizar otros medios semióticos evidencia tanto en los señalamientos como en la explicación verbal, que reconoce la estructura de la secuencia y que esa comunalidad que ella encontró le permite establecer para cualquier figura la cantidad de círculos que la componen.

Por ejemplo en L9: "*Yuli: el dos… y arriba va el uno, y así sucesivamente, como decir aquí abajo van tres y aquí arriba van dos, aquí abajo van cuatro y acá arriba van tres*"(figura 17), utiliza señalamientos que permiten relacionar la forma o estructura espacial de las figuras de la secuencia, así como también la relación numérica entre los círculos que se encuentran organizados de forma horizontal con el número de la figura y de estos la relación -1 con los círculos organizados de manera vertical.

La comunalidad encontrada, le permite establecer la cantidad de círculos de cualquier figura, es decir, realiza una abducción analítica, la cual se reafirma cuando la estudiante hace uso del deíctico "*y así sucesivamente*", este nos indica que Yuli interpreta que el comportamiento de la secuencia permanece de la misma manera, en otras palabras, mediante esta frase indica que se ha establecido el comportamiento de todos los términos de la secuencia, lo que nos lleva a deducir que en este caso que Yuli, a través de esta primera tarea demuestra haber alcanzado una generalización algebraica factual, pues aunque tiene la capacidad de establecer la estructura espacial y numérica de cualquier figura, está debe ser para un valor determinado, es decir, aun no aparece la forma de nombrar lo indeterminado.

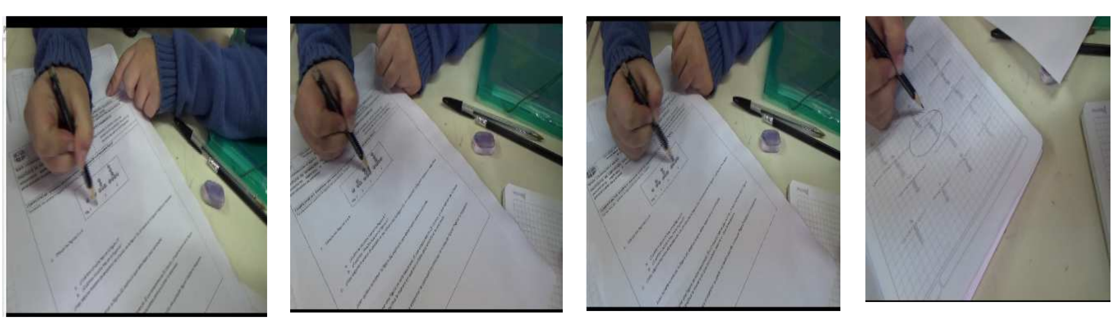


Figura 17. Secuencia de gestos donde Yuli muestra a través de las figuras inicialmente dadas la relación entre la cantidad de círculos horizontales y verticales, asociándolo también con la figura solicitada en el ítem 3 (15)

En el caso de Vanessa su trabajo se centra en la realización de otro tipo de registro, recurriendo a la tabulación, pues el hallazgo que ella hace frente a la secuencia es que, entre una figura y otra consecutiva existe un aumento de dos (+2), tanto en las preguntas sobre figuras específicas como en la última pregunta donde se le pide para cualquier figura, ella establece la misma relación aritmética de ir sumando dos.

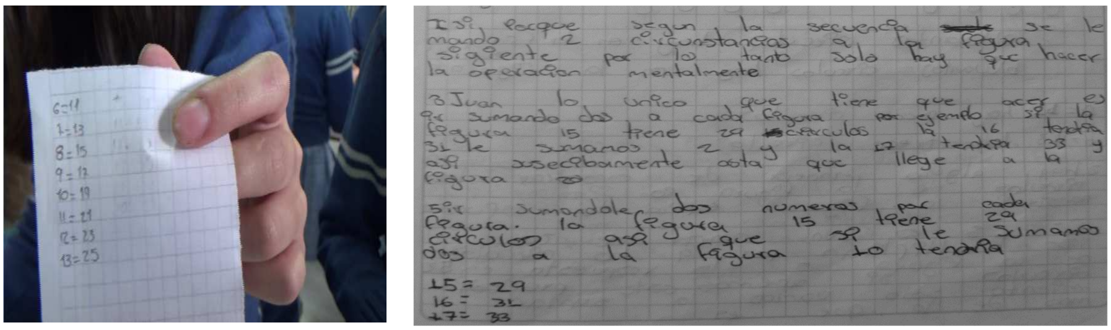


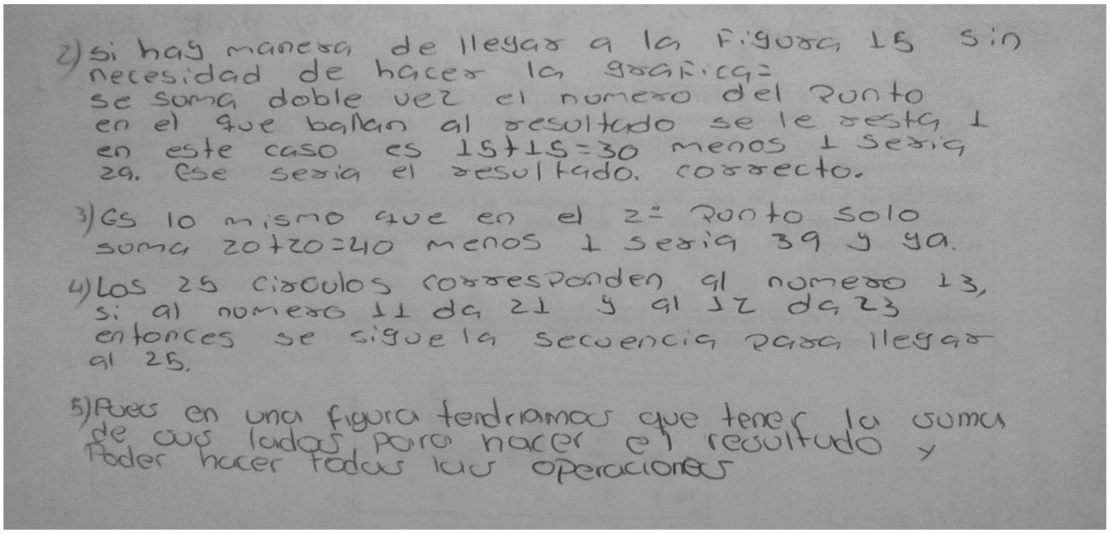
Figura 18. Producción de Vanessa tarea 1.

Evidenciado en las producciones realizadas por la estudiante, esto nos lleva a pensar que la relación que se hace es netamente numérica, no se alcanza un nivel de enunciación de la generalidad, que permita establecer la cantidad de elementos para cualquier figura sin realizar la tabulación podría decirse que se trata de una generalización de tipo aritmética, pues esta solo le permite pasar de un término a otro consecutivo.

En la producción grupal ésta se limita a explicar la generalidad de los términos a través de un ejemplo para un caso numérico concreto, es decir, notamos que aun para ellos es necesario trabajar desde valores específicos, la indeterminancia no hace parte aún del discurso de este grupo. De igual manera en el cierre de la actividad este grupo hace énfasis en que una de las dificultades está en expresar la forma como ellos están pensando las secuencias. Así mismo, se evidencia el uso de recursos semióticos como los señalamientos, deícticos, tablas, entre otros.

Grupo Haile, Omar, Cristian y Robinson

Al acercarse a otro de los grupos se encuentran las siguientes respuestas sobre el trabajo realizado, en torno a la tarea planteada:



2) si hay manera de llegar a la figura 15 sin
necesidad de hacer la grafica:
se suma doble vez el numero del punto
en el que vallan al resultado se le resta 1
en este caso es 15+15=30 menos 1 seria
29. ese seria el resultado. correcto.

3) es lo mismo que en el 2º punto solo
suma 20+20=40 menos 1 seria 39 y ya.

4) Los 25 circulos corresponden al numero 13,
si al numero 11 da 21 y al 12 da 23
entonces se sigue la secuencia para llegar
al 25.

5) Pues en una figura tendriamos que tener la suma
de sus lados para hacer el resultado y
poder hacer todas las operaciones

Figura 19. Producción del grupo Haile, Cristian, Omar y Robinson.

Intervención de Omar (O) y Cristian (C)

L1. C: Nosotros estamos haciendo así
L2. O: O sea es que…
L3. C: Sí en el 4 [señala en la hoja la figura 4 de la secuencia]
L4. O: Sumamos dos veces el número, o sea, digamos va en orden, ¡cierto! [señala con el esfero desde el 1 hasta el cuatro], entonces sumamos dos veces el 4, sí [señala la figura 4, en el número]
L5. C: Entonces el cuatro da 8
L6. O: Al sumar ese cuatro da 8, y a ese 8 se le resta 1 para quede el número de círculos y dan 7 [señala la figura completa]
L7. C: Uno para que den 7, y así sucesivamente
L8. O: Y así sucesivamente
L9. C: En el cinco, nos dio [destapa el cuaderno donde hizo la figura y señala la figura]
L10. O: Pues 10, o sea 5+5 da 10 y ahí son…
L11. C: 9 círculos, 10 menos 1, nueve y así sucesivamente
L12. O: Y así continúa hasta…
L13. C: Hasta infinito
L14. O: Y así lo utilizamos para el resto

Figura 20. Serie de señalamientos utilizados por Omar y Cristian.

Se evidencia una toma de conciencia de la propiedad en común frente a la estructura numérica, a través de la similitud que establecen entre el número del término de la secuencia con la cantidad de elementos que se ubican en la parte horizontal, en L4 cuando Omar afirma: "*digamos va en orden*" mientras indica a partir de señalamientos con el esfero los números de los términos de la secuencia dada (fig. 20), esto evidencia que una de las determinaciones encontradas es el orden en el que las figuras están organizadas, luego dicen que se debe sumar el mismo número y restarle uno, pues notan que en la parte vertical siempre hay uno menos. Podemos decir que en este momento los estudiantes han realizado una generalización a partir de las propiedades en común de los términos dados, los cuales permiten contestar a la pregunta sobre cuántos y cómo están acomodados, realizan una abducción la cual es puesta a prueba mediante la ejemplifican con el término 4 el cual estaba dado inicialmente y les sirve para confirmar esta relación, luego realizan la misma acción para extender la secuencia a partir del hallazgo realizado.

Posteriormente, los dos estudiantes afirman que continúa comportándose de la misma manera, haciendo uso del deíctico espacial y así sucesivamente, lo que nos lleva a concluir que los estudiantes han interpretado que el comportamiento a lo largo de la secuencia es el mismo. Afirmación que es confirmada cuando utilizan la relación encontrada entre el número de la figura y la cantidad de elementos que la componen para establecer la forma y número de cualquier figura particular (respuesta 2, fig. 19), es decir, realizan una generalización algebraica de tipo contextual. Donde asumen como principio la relación encontrada, en otras palabras, realizan una abducción analítica, la cual es un elemento esencial para establecer cuando una generalización es algebraica.

Cuando se indaga por el general, es decir, para un n cualquiera, donde se les induce a concluir preguntando específicamente por n, afirmando que este representa cualquier cantidad. A continuación, se presenta el diálogo entablado con el grupo, donde Cristian toma la vocería:

L1: P: Si decimos para un número cualquiera, por ejemplo, n, ¿cómo sería?
L2: C: n+n menos, menos, pero ahí … ¿qué se le resta?
L3: P: ¿Cuánto le restarías?
L4: C: Pues 1, pero como n no tiene números
L5: P: ¿No?, pero ¿cómo sería?
L6: C: Digamos n+n-m da un p
L7: P: ¿Menos cuánto?, ¿m un número cualquiera, o menos una cantidad fija?
L8: C: Tocaría ordenar de la a a la z, por números para poder restarlos
L9: P: ¿Cómo de la a a la z? no entiendo, o sea, ¿la a sería 1?

L10: C: La a sería 1, la b sería 2, así hasta la z
L11: P: Para poder saber cuánto es m
L12: C: Sí sería, ahí sería así y el proceso sería n+n-a para que le dé la cantidad que es
L13: P: ¿-a o -1?
L14: C: -a porque estamos hablando de letras

Durante el primer diálogo con este grupo los estudiantes establecen una relación entre el número de la figura y su estructura numérica, entonces se intenta llevarlos la construcción de una expresión simbólica de la forma n+n-1, partiendo de la pregunta por un número cualquiera, designado por n, lo cual causa en ellos tensión, pues asocia este requerimiento con tener que dar una expresión usando exclusivamente letras, afirmando: "*estamos hablando de letras*" (L14), de esta manera notamos que la asociación que hace el estudiante para designar numéricamente una letra es a través del orden lexicográfico (L10), de allí que transforme la expresión en n+n-1 en n+n-a. Aquí el problema de la generalización transciende otras fronteras, frente a la interpretación de la letra en contextos algebraicos, Rojas et al., (1999) establecen que una de ellas es como letra evaluada, es decir, asocian esta con valor numérico especifico como ocurre con estos estudiantes cuando definen el valor de la letra asociado al orden lexicográfico, a su vez este también es relacionado con niveles de desarrollo de los estudiantes, ubicándolos en este caso en un estadio inicial de operaciones concretas, donde la tendencia es a considerar la letra como un determinado número.

Grupo Ioveth, Juliana, Yuliana y Romero

En este grupo toman la vocería las estudiantes Ioveth (I) y Juliana (J). Se inicia indagando por el proceso realizado en la tarea, veamos un apartado del diálogo establecido con las estudiantes:

L1. P: ¿Qué hizo?, y ¿cómo lo hizo?
L2. J: Aquí puse cinco, acá puse los cuatro, acá abajito puse los seis [señala las figuras 5 y 6], cuatro y aquí escribí que tenía… que la figura 5 tiene 9
L3. P: Y ¿cómo sabes?, ¿cómo llegaste a que era de esa manera?
L4. J: Sumándolos. [utiliza señalamientos, desplazándose con el dedo índice para relacionar número de la figura y cantidad de círculos horizontales], acá hay uno y aquí comenzaron a ser 2, 3, 4 después 5 y después 6.
L5. P: Y ¿cómo sabes los que van hacia arriba?, ¿cómo son?
L6. J: Porque va

L7. I: Son el número anterior
L8. P: Son los del número anterior, ¿cómo sería entonces?
L9. I: Entonces aquí daría como es la 4, entonces son 3
L10. P: En el cinco entonces irían ¿cuántos?
L11. I: En el 5, podrían ser cuatro
L12. P: ¿En el seis entonces?
L13. I: Cinco
L14. J: Cuatro
L15. I: Cinco, porque es el número anterior
L16. J: Entonces me hace falta uno

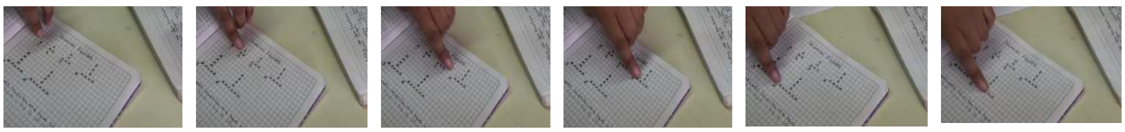


Figura 21. Serie de señalamientos utilizados por la estudiante Juliana para explicar la acomodación horizontal de los círculos de la secuencia.

Podemos notar que inicialmente las estudiantes establecen una relación entre los círculos acomodados de forma horizontal y el número de la figura, esta les permite representar gráficamente las figuras 5 y 6, que corresponden a la solicitud de la primera parte de la tarea, para esta explicación la estudiante realiza una serie de señalamientos, mientras verbaliza como se muestra en L4b: "*acá hay uno y aquí comenzaron a ser 2, 3, 4 después 5 y después 6*" hace énfasis en la construcción propia cuando en el conteo realizado utiliza la palabra "*después*" para indicar que son las nuevas figuras solicitadas, pero en la producción de Juliana se puede notar que tanto en la figura 5 como en la 6, ha establecido que van 4 círculos en la posición vertical, se procede a realizar unas preguntas que le permitan reconocer la relación con los círculos en posición vertical.

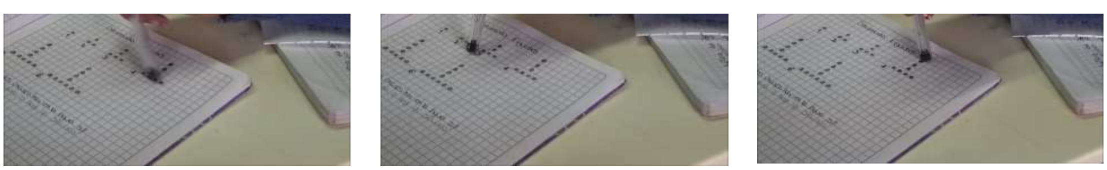


Figura 22. Serie de señalamientos por Ioveth para explicar la cantidad de círculos acomodados de forma vertical

En esta indagación interviene la estudiante Ioveth quien afirma: "*Son el número anterior*", a partir de esta relación ella explica usando como ejemplo la figura cuatro la cantidad de círculos de la posición vertical, L9: "*Entonces aquí daría como es la 4, entonces son 3*" hace uso de señalamientos para indicar la relación entre los círculos verticales y la figura anterior, esta relación y la explicación dada por la estudiante le permite reconocer a Juliana que en la figura 6 le hacía falta un círculo. Hasta este punto podemos reconocer que las estudiantes han encontrado una relación que les permitió establecer la cantidad de círculos de las figuras siguientes, se continúa con el diálogo con fin de saber si la relación es asumida como principio para cualquier figura, o simplemente utilizada en esta primera parte de la tarea.

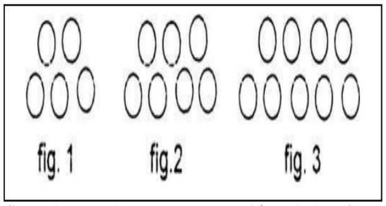
L17. P: Si quiero la figura 100, ¿cómo hago?
L18. I: Depende de la base, serían aquí 100 [hace gestos para indicar que es horizontal]
L19. Y: Y arriba 99
L20. I: 99
L21. P: Y si es la figura 1000
L22. Y: Abajo serían 1000 y arriba 999
L23. P: Y cómo sería para cualquier figura
L24. I: Pues se pone el número al que se le va… como decirlo, la base son los círculos de abajo y lo de arriba es el número anterior.

En esta segunda parte del diálogo intervienen las estudiantes Yuliana e Ioveth, podemos establecer que la relación es asumida como principio por todos los integrantes del grupo, pues no sólo les permite establecer la cantidad de círculos para un número determinado, sino que lo asumen como una regla general, realizando una generalización de tipo algebraica contextual, pues se hace una descripción del término general a través de una frase, como notamos en L24 cuando se afirma: "*la base son los círculos de abajo y lo de arriba es el número anterior*", la base hace referencia al número de la figura.

Durante la plenaria realizada al finalizar, se pide a los estudiantes que expresen sus opiniones sobre el trabajo realizado, en virtud de lo anterior éstos comentan que la tarea fue algo novedoso, aunque manifiestan haber tenido dificultades al momento de tratar de explicar los procesos realizados en cada uno de los puntos. Algunos se muestran bastante tímidos y no quieren ser grabados, con ellos se intenta entonces captar algunos de los gestos utilizados solo hasta donde ellos lo permiten para no condicionar la actividad.

4.2.2. Tarea 2.

Esta tarea es de la forma $2n+3$, con $n=1, 2, 3, \ldots$ expresada a través de la siguiente secuencia:



1. Dibuja las figuras 4 y 5
   a. ¿Cuántos círculos hay en la figura 4?
   b. ¿Cuántos círculos hay en la figura 5?
2. ¿Hay alguna manera de encontrar los círculos de la figura 20, sin construir la figura? Explica tu respuesta
3. Juan quiere construir la figura 100, explica lo que debe hacer para construirla.
4. Santiago tiene una figura de esta secuencia. Él usó exactamente 63 círculos. ¿A qué número de la figura corresponde? Explica la manera en que procediste para encontrar la respuesta.
5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta.

Figura 23. Tarea 2 (secuencia y preguntas)

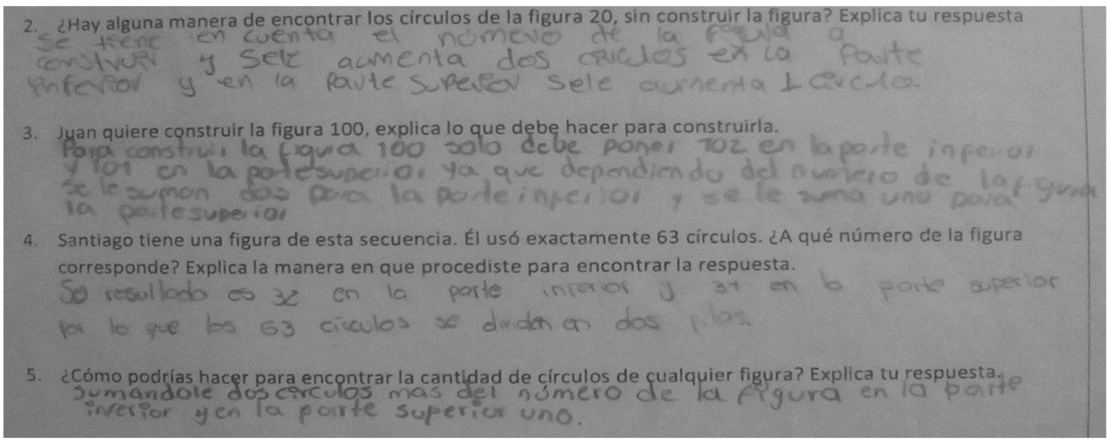
Grupo Diana, Kimberly, Ana y Valentina

Cuando se indaga por el proceso realizado en el grupo para dar respuesta a la tarea asignada, en primer lugar refieren no tener dificultad en representar la figura 4 y 5, pues al observar las figuras dadas de la secuencia encuentran que tanto en la fila inferior como en la superior hay un aumento de una circunferencia, pero cuando intentan responder lo que ocurre en la figura 20, Diana y Ana discuten la forma como cada una de ellas llegan a la solución, se evidencia que la forma como perciben la secuencia es diferente, a continuación, se presenta un apartado del diálogo sostenido entre estas compañeras.

L1. D: En la otra actividad estaba más sencillo, pero esta está un poco más difícil, pero entendible, sólo que no compartimos las mismas respuestas
L2. P: Pero ¿por qué no las comparten?, ¿en qué está…
L3. D: Ellas piensan una cosa y nosotras otra
L4. A: Ajá
L5. P: Ustedes piensan que ¿qué?
L6. A: Ellas piensan una cosa y nosotras otra. O sea, Yo pienso que se suman dos y ellas que se suma uno
L7. K: Sí, porque es que vea (tomando la hoja), en la 1 hay tres, [señalando la figura 1], acá hay 3 y le suma 1 al dos [señalando la figura 2], si me entiende
L8. A: ¿qué?
L9. K: Por eso le suma uno
L10. V: Es lo mismo que estás diciendo
L11. K: Ella le dicen que suman dos y es una no mas
L12. A: No pueden sumar una no mas
L13. P: ¿Por qué tú dices que suman dos?
L14. D: Y nosotras decimos que en la figura 20, abajo hay 21 y arriba hay 20
L15. P: ¿Por qué tú dices que suman dos?
L16. A: Porque por cada fila se suma una
L17. P: ¿Qué pasó? [Dirigiendo la pregunta a Diana, que muestra no estar de acuerdo]
L18. D: Nada profe

L19. P: ¿Por qué tú dices que no? Ella está diciendo que en cada fila se está sumando uno, ¿eso es cierto o no?
L20. K: Sí
L21. D: Uno no, profe
L22. A: En cada fila se suma 1, por eso
L23. D: Acá se le suma, se suman, se le suman dos [señalando la figura 1, fila de abajo] y cada se le va a sumar 1 siempre [señalando la figura 1, fila de arriba]
L24. A: Por eso
L25. D: ¿Sí me entiende?
L26. A: Por eso
L27. P: Y entonces, ¿cuál es la discusión de la figura 20?, ¿cómo dices tú que quedaría? [dirigiéndose a Diana], según lo que acabas de explicarle a ella ¿cómo quedaría?
L28. D: Quedaría 22 y 21 arriba, 22 abajo y 21 arriba [hace gestos con las manos indicando la acomodación espacial]
L29. A: Entonces si nos da lo mismo
L30. V: Sí, solo que los dos entendieron de manera diferente [Ana asiente con la cabeza]
L31. P: O sea, a ti también te dan 22 y 21
L32. A: Ajá
L33. P: Lo que pase es que una lo está pensando de que está sucediendo entre una figura y otra consecutiva, para ti está aumentando uno y uno en cada fila. En cambio, cuando ella lo compara, lo compara es con el número de la figura, según el número de la figura, mira que en la figura 1, en la parte de abajo comparándolo con 1 aumentó dos, mira aquí [señalando la figura 1 en la hoja] hay 1, 2 y 3 y lo mismo está ocurriendo con la figura 2, como es figura 2 para ella está aumentando 2 abajo, pero están interpretándola de forma válida las dos.
L34. D: Ya voy entendiendo
L35. A: Pero da lo mismo

Durante el diálogo de las estudiantes se evidencia que, inicialmente la relación que establecen es aditiva, en tanto se fijan que entre una figura y otra existe una diferencia de dos circunferencia, Kimberly y Diana ven la relación desde lo que aumenta cada fila (L7 y L9), mientras que Valentina y Ana lo están comparando con el total de círculos que aumenta de una figura a la otra. A partir de este diálogo podemos inferir que en ambos casos las estudiantes alcanzan una generalización de tipo aritmética, ya que la abducción realizada le sirve únicamente para pasar de un término a otro consecutivo. En medio de la discusión Diana se muestra pensativa y poco convencida de las respuestas dadas, cuando nos remitimos a L14, notamos que la respuesta inicial de Diana está dada a través de la relación aumenta 1, afirmando "*y nosotras decimos que en la figura 20, abajo hay 21 y arriba hay 20*", es decir, la relación encontrada no le permite tener claridad sobre la cantidad de círculos de la figura 20, pero más adelante y después de la intervención de sus compañeras percibe una nueva relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos que posee, en L25 "*acá se le suma, se suman, se* *le suman dos [señalando la figura 1, fila de abajo] y cada se le va a sumar 1 siempre [señalando la figura 1, fila de arriba]*", está nueva relación la asume como principio afirmando que siempre se va a realizar así, en L28 determina entonces que la cantidad de círculos a través de esta relación "*Quedaría 22 y 21 arriba, 22 abajo y 21 arriba [hace gestos con las manos indicando la acomodación espacial]*". Esta es asumida por todos los integrantes del grupo y de esta manera dan respuesta a las preguntas 2 a la 5 (figura. 6.1), en un diálogo posterior reafirman la conclusión establecida anteriormente.



2. ¿Hay alguna manera de encontrar los círculos de la figura 20, sin construir la figura? Explica tu respuesta
Se tiene en cuenta el número de la figura a construir y sele aumenta dos circulos en la parte inferior y en la parte superior sele aumenta 1 circulo.

3. Juan quiere construir la figura 100, explica lo que debe hacer para construirla.
Para construir la figura 100 solo debe poner 102 en la parte inferior y 101 en la parte superior ya que dependiendo del numero de la figura se le suman dos para la parte inferior y se le suma uno para la parte superior

4. Santiago tiene una figura de esta secuencia. Él usó exactamente 63 círculos. ¿A qué número de la figura corresponde? Explica la manera en que procediste para encontrar la respuesta.
Su resultado es 32 en la parte inferior y 31 en la parte superior por lo que los 63 circulos se dividen en dos filas

5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta.
Sumandole dos circulos mas del número de la figura en la parte inferior y en la parte superior uno.

Figura 24. Producción grupo de Diana, Kimberly, Ana y Valentina.

Frente a las dificultades encontradas el grupo refiere que cuando lograron ponerse de acuerdo con la figura 20, pudieron relacionar más fácilmente el número de círculos de cada figura.

L1. P: ¿Qué dificultades encontraron?
L2. D: Solamente una dificultad en la 20 (refiriéndose a la figura 20 del punto 2), porque no nos poníamos de acuerdo y ya después que resolvimos este punto, todas logramos entender mejor y ponernos de acuerdo en los resultados de cada pregunta.

Finalmente podemos establecer que la generalización realiza por este grupo es algebraica contextual, donde se asume como principio la relación encontrada entre el número del término como se evidencia en la respuesta 5, donde afirman que: "*sumando dos círculos más del número de la figura en la parte inferior y en la parte superior uno*", es decir, se hace uso de una frase representativa en la que se expone dicha relación, pero aún no existe evidencia del uso de símbolos alfanuméricos.

Grupo Haile, Omar, Cristian y Robinson

Se inicia el diálogo con el grupo, a partir de la pregunta que realiza el estudiante Haile sobre sí la figura 100 tendría 232 bolitas, para responder se les pide que regresen a la secuencia dada inicialmente, a continuación, se presenta un apartado del diálogo:

L1. P: Vuelvan a la secuencia inicial
L2. C: 5 bolitas
L3. P: ¿5 bolitas qué?
L4. C: Hay en la primera figura
L5. P: ¿Cómo están acomodadas esas 5 bolitas?
L6. C: Pues hay tres abajo y dos arriba
L7. P: Listo, ¿en la figura dos qué pasó?
L8. C: Se le sumaron dos, una abajo y una arriba
L9. P: Y ¿cómo quedó entonces?
L10. C: Cuatro abajo y tres arriba
L11. P: Listo,
L12. O: En la figura tres siguió el mismo proceso, siguió aumentando
L13. H: Así hasta llegar a la figura cinco, que dieron siete abajo y seis arriba, en la figura 5
L14. P: Ok, listo, en la figura 20 ¿cómo hicieron para saber?
L15. O: Nos imaginamos el número de la figura en la que vamos y vamos aumentando de dos en dos, o sea, dos bolitas
L16. H: Así hasta llegar a 20
L17. P: ¿Hicieron alguna tabla para llegar ahí? [Omar niega con la cabeza] o solo en la cabeza
L18. H: Sólo en la cabeza
L19. O: A mí en mi cabeza me dio 43 bolas
L20. P: Bueno, entonces ¿qué pasa en 100?
L21. O: Eso es lo que estamos pensando, es que yo me pongo a pensar que debe haber un proceso más rápido porque no van a poner a Juan a contar de dos en dos, tiene que haber un proceso más rápido para llegar a esta figura
L22. H: Yo digo que ese proceso es este, ¿no profe?
L23. P: Tú dices que el proceso más rápido es este [indicando la respuesta dada por Haile], bueno
L24. H: Pues si
L25. P: Entonces, la idea es
L26. O: Pero lo que yo pienso es que primero que todo no puede ser pares los números, la secuencia va impar, impar, impar, ¿sí?, por ejemplo, aquí nos habían dado 46 y me puse a pensar y no puede ser par, debe ser impar porque toda la secuencia va sumando de dos en dos.
L27. P: Listo, entonces, la idea es que hay que comparar el comportamiento de cada una de las filas con el número de la figura, si, miren la figura 1, ¿ya?, ¿cuántas bolitas hay arriba?
L28. C y O: Dos [al unísono]
L29. P: Ahora miren la figura 2, ¿cuántas bolitas hay arriba?
L30. C y O: Tres [en unísono]
L31. P: En la figura tres, ¿cuántas bolitas hay arriba?
L32. C y O: Cuatro [en unísono]
L33. P: En la figura 20, entonces ¿cuántas bolitas habría arriba?
L34. O: 20, a no, 40
L35. P: ¿Por qué?, comparen ¿cómo está aumentando ahí?
L36. C: En la figura 20 habría 21 bolitas arriba
L37. P: ¿Por qué?
L38. C: Porque si en la tres hay cuatro, entonces 20 sería 21, porque se está sumando de a uno

L39. P: Y, ¿cuantos habría entonces en la parte de abajo?
L40. C: 22
L41. P: O sea que en la figura 20, ¿cuántas bolitas hay?
L42. H: 43
L43. P: Y, ¿cuántas habían colocado?
L44. C: 43
L45. P: O sea que está correcto, ahora ¿qué pasa en la 100?
L46. C: 101 arriba y 102 abajo, entonces serían 203 bolitas en total
L47. H: ¡203 bolitas dan!

A partir de este diálogo, podemos notar varias cosas, inicialmente afirmar que la relación establecida por ellos sobre el comportamiento de la secuencia les permitió afirmar que entre una figura y otra consecutiva había un aumento de dos bolitas, está relación aditiva es usada como principio para hallar la cantidad de elementos de figuras pequeñas haciendo los conteos de 2 en 2, en este sentido podemos inferir que la generalización realizada es aritmética, en tanto, la abducción realizada solo les permite pasar de un término a otro consecutivo. Posteriormente realizan otra determinación que, aunque no les permite establecer el general si una característica de este, la cual les sirve para elegir que valores pueden o no servir, notan que la cantidad de elementos de las figuras debe ser siempre impar.

Posteriormente y a través de una serie de preguntas realizadas por la profesora, se intenta llevar a los estudiantes a una toma de conciencia sobre el comportamiento general de la secuencia, estableciendo la relación entre los elementos de cada fila con respecto al número de la figura, pues estaban enfrascados en cómo determinar la cantidad de elementos de la figura cien, finalmente el diálogo les permitió explicar lo que debe hacer Juan para construir la figura 100 (Numeral 3) y determinar que los procesos realizados por Haile eran incorrectos. Así mismo, cuando se enfrentan a la pregunta sobre cualquier figura, aunque entienden que hay una dependencia entre el número de la figura y la cantidad de elementos, afirmando en L21c: "*tiene que haber un proceso más rápido para llegar a esa figura*" generalizan a partir de la relación +2 y determinan como una característica importante que la cantidad de círculos debe ser impar.

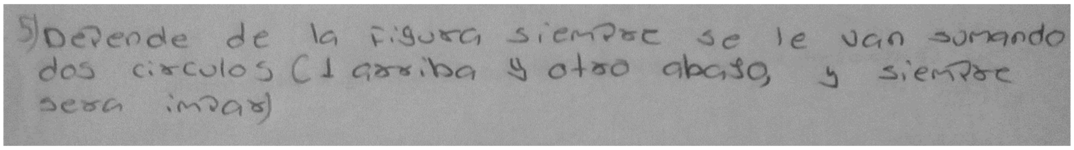
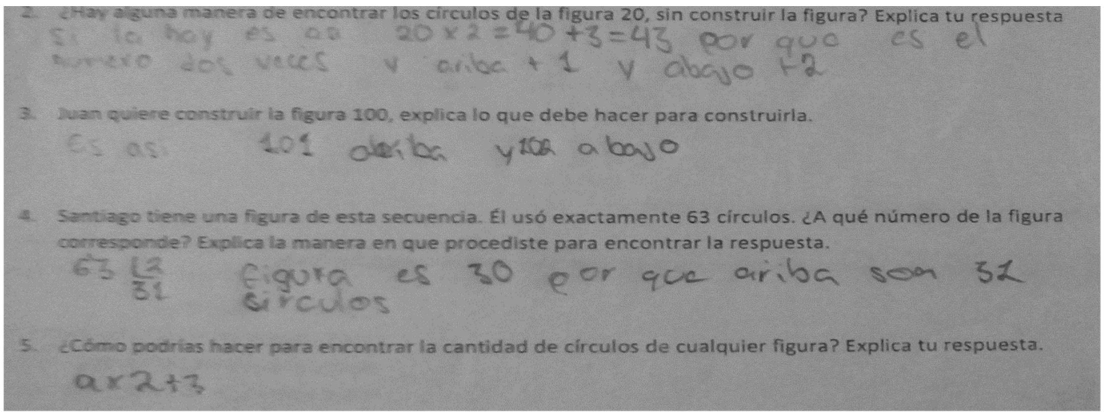

5) Depende de la figura siempre se le van sumando dos circulos (1 arriba y otro abajo, y siempre sera impar)

Figura 25. Producción escrita del grupo a la pregunta 5.

Grupo de Carol, Erika, Vanesa, Valentina

En este grupo hace aparición el uso de símbolos alfanuméricos para expresar el general, a continuación, se presenta la producción escrita:


2. ¿Hay alguna manera de encontrar los circulos de la figura 20, sin construir la figura? Explica tu respuesta

si la hay es así 20 x 2 = 40 + 3 = 43 por que es el numero dos veces y arriba + 1 y abajo + 2

3. Juan quiere construir la figura 100, explica lo que debe hacer para construirla.

Es así 101 arriba y 102 abajo

4. Santiago tiene una figura de esta secuencia. Él usó exactamente 63 círculos. ¿A qué número de la figura corresponde? Explica la manera en que procediste para encontrar la respuesta.

63 / 2 = 31 la figura es 30 por que arriba son 31 circulos

5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta.

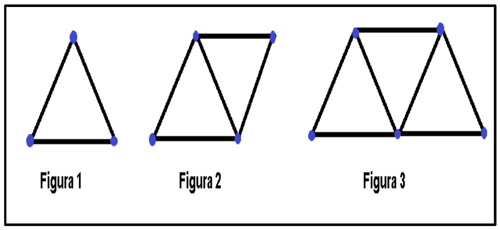
a x 2 + 3

Figura 26. Producción escrita grupo Carol, Erika, Vanesa, Valentina.

Teniendo en cuenta esta producción podríamos partir de la afirmación de la existencia de una generalización algebraica simbólica, veamos algunos elementos que evidencian esta deducción, que dan cuenta del proceso realizada, en la pregunta dos encontramos una relación aritmética utilizada para determinar la cantidad de elementos de la figura 20, además de una justificación a partir de una frase representativa de la relación desde la justificación dada a la respuesta, "*si la hay es 20 x 2 = 40 + 3 = 43 porque es el número dos veces y arriba +1 y abajo* +2", podemos decir que las estudiantes han encontrado una comunalidad de los términos de la secuencia, al establecer que con respecto al número de la figura hay uno más arriba y dos más abajo, esta es asumida como principio y es usada para contestar la siguiente pregunta, es decir realizan una abducción, notamos en esta segunda tarea existe una reducción de recursos semióticos, en el paso de la pregunta 2 a la 5, donde simplemente se limita a expresar mediante símbolos alfanuméricos la relación encontrada, la cual es utilizada para dar respuesta a las preguntas 3 y 4.

4.2.3. Tarea 3.

Esta tarea es de la forma 2n+1, con n =1, 2, 3, …expresada a través de la siguiente secuencia:



1. Dibuje la figura 5 de la secuencia
2. ¿Cuántos palillos hay en la Figura 9? Explica
3. ¿Cuántos palillos hay en la figura 100? Explica
4. Explique un procedimiento para calcular el número de palillos para una figura cualquiera

Figura 27. Tarea 3 (secuencia y preguntas)

Grupo Oswaldo, Ronald, Harley y Dinael

Inicialmente encuentran una comunalidad que les permite establecer una relación entre el número de la figura y la cantidad de triángulos de esta, relación que es usada para representar la figura 5.

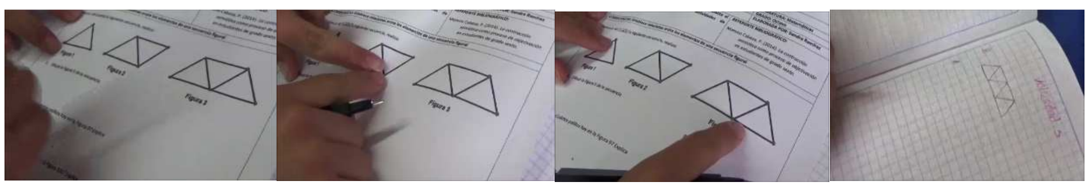


Figura 28. Secuencia de señalamientos utilizada por Ronald.

El estudiante hace uso de signos indícales para mostrar la comunalidad encontrada mientras se desplaza entre las figuras y comenta la relación entre número de figura y cantidad de triángulos en cada posición L3." R*: porque acá lo que dice la secuencia, acá la figura 1pues es 1, pues acá ya a la 2 se le suma otra, la tres se le suma otra y a la cinco ya se le suman 2 y así queda así, vea*", siendo esta la primera características determinada desde la cantidad de triángulos que forman cada figura, esto permite dar respuesta a la solicitud dada en la pregunta 1, el siguiente es el diálogo sostenido con el estudiante en este primer acercamiento a la tarea:

L1. R: ¿Así queda profe?
L2. P: ¿Por qué?
L3. R: Porque acá lo que dice la secuencia, acá la figura 1pues es 1 [señalando el triángulo de la figura 1], pues acá ya a la 2 se le suma otra, la tres se le suma otra y a la cinco ya se le suman 2 y así queda así, vea [desplaza los dedos indicando el número de la figura en relación con el número de triángulos]

Como podemos notar hasta este punto no existe ningún inconveniente frente a la relación figura cantidad de triángulos, pero en la segunda parte de la tarea hay un cambio de variables pues ahora se debe determinar la cantidad de palillos que contiene cada una de las figuras, inicialmente y mediante los diálogos establecidos con el grupo, ellos intentan solucionar a través de relaciones proporcionales la cantidad de palillos de la figura 9, estableciendo la relación si en la figura 3 hay 7 entonces en la figura 9 hay 21, posteriormente construyen la figura y constatan la información, determinando que no era posible realizarlo de esa manera. Ahora se enfrentan a la figura 100, ¿Cuántos palillos tiene?, durante la intervención del grupo dos de sus integrantes tiene una discusión, uno de ellos sostiene que como en la figura 10 hay 21 palillos, la 100 debe tener 210, esta relación la hace a partir de la suma reiterada de 21, el otro estudiante refiere la situación comentada anteriormente con respecto a la figura 9, pero no encuentra como establecer la relación, veamos un apartado del diálogo entre los estudiantes:

L1. R: Acá dice ¿cuántos palillos hay en la figura 100?, pues explicarlo...Pues acá tomando en cuenta la figura 10 hay 21 palillos, y a la 100 seria sumar 21 diez veces, ahí da el resultado de palillos que hay
L2. P: O sea si la figura 10 tiene 21 palillos la figura 100 tiene
L3. R: 210
L4. P: ¿Por qué sería 10 veces la de 10?
L5. A: No, no, no,
L6. P: ¿Por qué?
L7. A: Porque estaba haciendo la cuenta, porque toca contar los palillos, y mire acá hay dos triángulos [señalando la figura 2 de la secuencia]y mire hay 1, 2, 3, 4, 5 palillos, …, la cuenta no se puede hacer así porque queda mal porque también toca que restarles
L8. R: ¿Qué le va a restar?
L9. A: No ve que también se les está restando
L10. A: No se acuerda que con la nueve yo hice lo mismo y dio 21, y la 9 es 19, si usted lo hace así le va dar 21
L11. R: La 10 da 21 palillos
L12. A: Sí lo hacemos, así como usted está diciendo la 9 da 21 palillos, pero si lo hacemos, así como es la 9 da 19

Uno de los elementos que llaman la atención es el uso de un procedimiento en que asumen una relación proporcional no existente para intentar dar respuesta a figuras grandes, pero no asociado al número de la figura versus cantidad de elementos, es decir, la hipótesis planteada por los estudiantes está orientada desde la pregunta: ¿cuántas veces más es una figura de la otra?, desde una relación multiplicativa, los estudiantes realizan el conteo de palitos de la figura 3 formada por 7 palitos, de esta manera y usando la relación 3 es a 7 como 9 es a …, entonces en la figura 9 debe haber 3 veces lo que hay en la figura 3, concluyen entonces que figura 9 contiene 3x7= 21 palitos, se intentó retomar la secuencia para que ellos verificaran está hipótesis a partir de la comprensión de la secuencia, pero no muestran tener claridad en el comportamiento de la misma, ni numérica ni espacialmente, pues en la representación gráfica también utilizan las agrupaciones sin tener en cuenta por ejemplo, en el numeral 3 que al no acomodar de forma lineal se terminan contando dos veces los palillos de la intercesión de cada serie. No podríamos hablar de una generalización, pues el proceso realizado hasta aquí está asociado al uso de una relación proporcional inexistente en cuanto a cantidad, a pesar de las dudas del estudiante Arley frente al trabajo hecho y de las preguntas utilizadas por la profesora para intentar orientar al grupo, ellos mantienen la idea que inicialmente plantearon.

Grupo Vanessa, Yuli, Erika y Carol

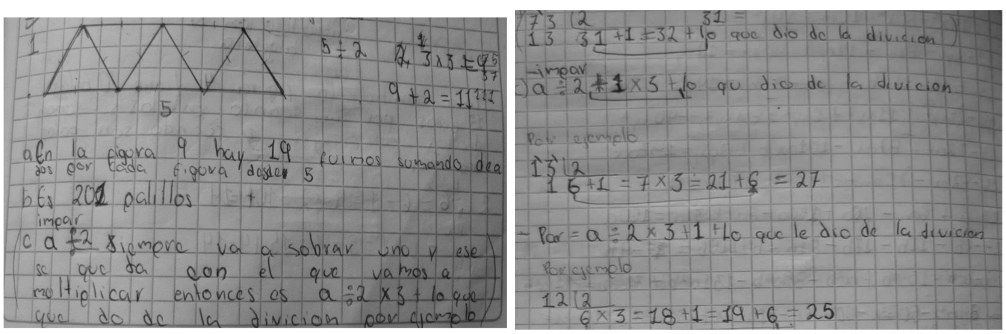


Figura 29. Producción estudiante Carol.

Se encuentran grandes fortalezas en el proceso de generalización de la estudiante Carol la cual empieza hacer uso del lenguaje alfanumérico para intentar proponer el cómo determinar la cantidad de elementos de cada figura, una posible solución donde inicialmente cuenta la cantidad de triángulos arriba y abajo (descompone la figura en los triángulos de abajo y los triángulos de arriba), en la figura uno hay un solo triángulo, en la figura 2 uno hacia arriba y uno hacia abajo, en la tres dos hacia arriba y uno hacia abajo y así sucesivamente, entonces propone dos relaciones, una cuanto la figura es par y otra para cuando la figura es impar (Fig. 29). En este caso podemos establecer que hace aparición en los procesos de la estudiante la designación simbólica del general, pero para la explicación del procedimiento que se debe efectuar en los casos propuestos (par e impar), utiliza ejemplos numéricos (figura derecha).

Durante la plenaria ella muestra a sus compañeros el proceso realizado, igualmente lo separa en pares e impares, la única intervención que hacen sus compañeros es para preguntar por qué divide entre dos, en la secuencia de imágenes, en la tercera vemos que para dar respuesta a esta pregunta ella borra la línea de la parte superior para indicar que los triángulos de abajo corresponden a la mitad de los triángulos de la figura, los cuales quedan completos y por eso ella multiplica por tres, en los dos casos, utiliza una línea para indicar que al final suma lo que dio del resultado de la división, en la cuarta se muestra como hace para establecer la cantidad de palos de la figura 4, pero únicamente va colocando los resultados mientras expresa el proceso realizado.

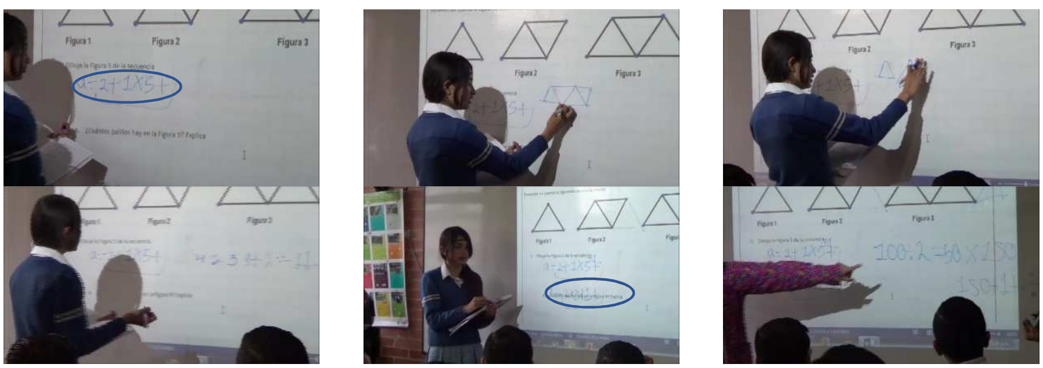
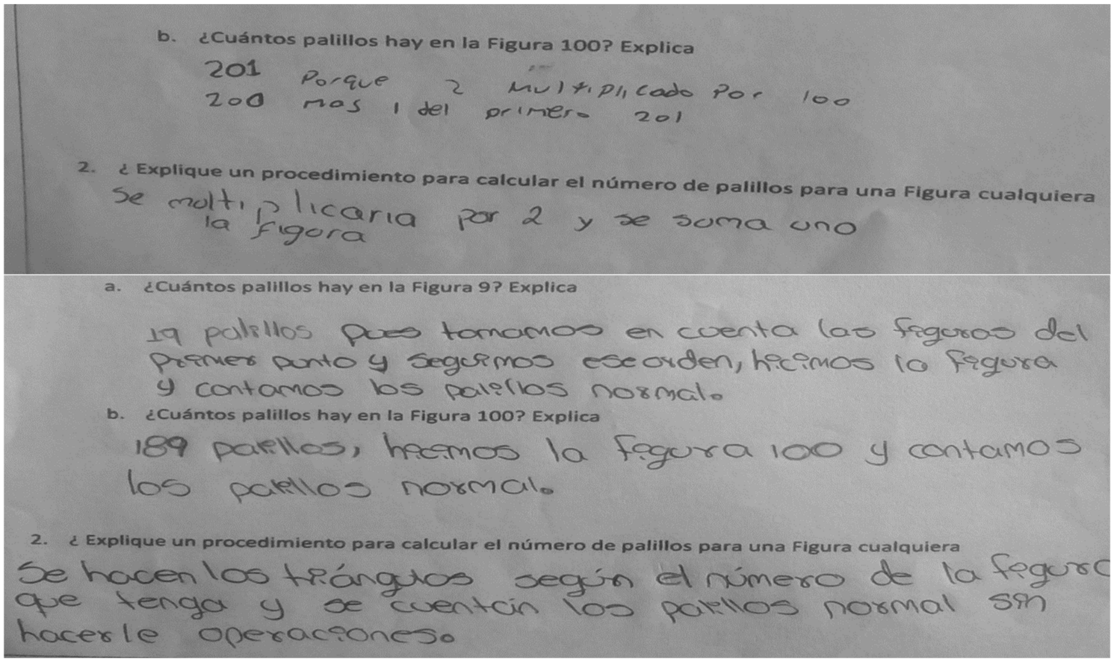


Figura 30. Secuencia de explicación término general- plenaria.

A partir de la tarea 2 la estudiante empieza a realizar generalizaciones algebraicas simbólicas, vemos la persistencia de la mayoría de los estudiantes en el uso de frases representativas únicamente, por ejemplo, en la figura 31 en la parte superior encontramos que el general es expresado en términos de la relación que se asume para todos los elementos, es decir, la existencia de una generalización algebraica contextual. En la segunda, que corresponde al grupo de Oswaldo, Ronald, Harley y Dinael, nuestra que para ellos a pesar de la discusión sostenida no fue posible establecer la regla general que asocia la cantidad de palos utilizados en cada figura, concluyen estableciendo la necesidad de partir de la representación gráfica para realizar los conteos.



b. ¿Cuántos palillos hay en la Figura 100? Explica

201 Porque 2 multiplicado por 100
200 mas 1 del primero 201

2. ¿ Explique un procedimiento para calcular el número de palillos para una Figura cualquiera

Se multiplicaria la figura por 2 y se suma uno

a. ¿Cuántos palillos hay en la Figura 9? Explica

19 palillos pues tomamos en cuenta las figuras del primer punto y seguimos ese orden, hicimos la figura y contamos los palillos normal.

b. ¿Cuántos palillos hay en la Figura 100? Explica

189 palillos, hacemos la figura 100 y contamos los palillos normal.

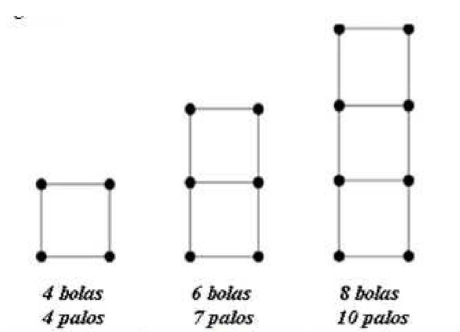
2. ¿ Explique un procedimiento para calcular el número de palillos para una Figura cualquiera

Se hacen los triángulos según el número de la figura que tenga y se cuentan los palillos normal sin hacerle operaciones.

Figura 31. Producción grupo Oswaldo, Ronald, Harley y Dinael.

4.2.4. Tarea 4.

En esta tarea refiere a dos relaciones, la primera cantidad de cuadrados con bolas utilizadas, de la forma 2(n+1), para n=1, 2, 3, … y la segunda cantidad de cuadrados con palos utilizados, de la forma 3n +1, para n=1, 2, 3, …



1. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados? Explica tu respuesta
2. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadrados? Explica tu respuesta
3. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadrados? Explica tu respuesta
4. Expresa una regla que relacione el número de cuadrados y el número de bolas
5. Expresa una regla que relacione el número de cuadrados y el número de palos

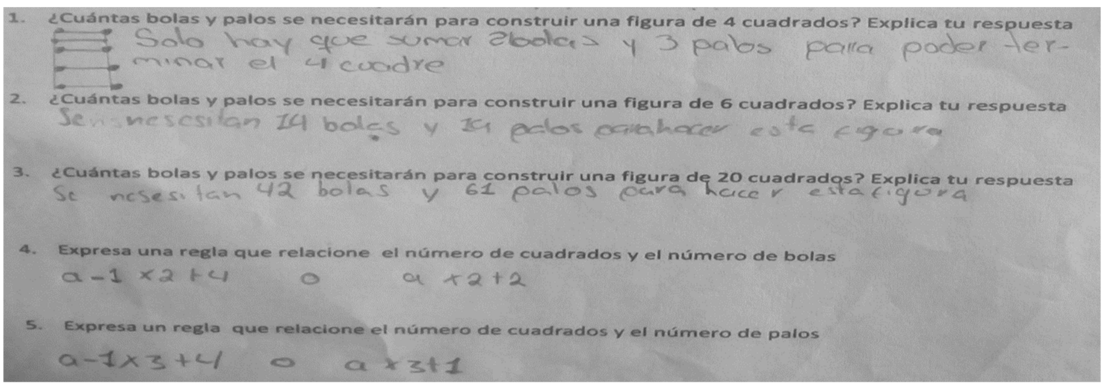
Figura 32. Secuencia 4 y preguntas de la tarea

En el planteamiento de esta tarea como se comentó en el pilotaje, se dio una información adicional, además de contar con la representación gráfica tenían el conteo de palos y bolas de las figuras dadas.

A continuación, se presentarán algunas de las producciones de los estudiantes:

Grupo Carol, Erika, Yuli y Vannesa

Este grupo evidencia que entre una figura y otra existe un aumento de 2 bolas y tres palos, pero la única diferentes es la primera cuyos palos y bolas se cuentan completos, a partir de esta relación establecen las siguientes respuestas:


1. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados? Explica tu respuesta

Solo hay que sumar 2bolas y 3 palos para poder terminar el 4 cuadre

2. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadrados? Explica tu respuesta

Se necesitan 14 bolas y 14 palos para hacer esta figura

3. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadrados? Explica tu respuesta

Se ncsesitan 42 bolas y 61 palos para hacer esta figura

4. Expresa una regla que relacione el número de cuadrados y el número de bolas

a-1 x2 +4 o a x2+2

5. Expresa un regla que relacione el número de cuadrados y el número de palos

a-1x3+4 o a x3+1

Figura 33. Producción del grupal Carol, Erika, Vanesa y Yuli.

Como se comentó anteriormente este es el único grupo que da evidencia de la designación simbólica para establecer la relación entre la figura y la cantidad de elementos, en este caso presenta dos posibles soluciones dadas a partir del análisis de la forma como cambiaban las figuras. Generalmente es Carol quien toma la vocería del grupo para explicar los resultados obtenidos, inicialmente explica como llego a la primera designación.

L1. C: Entonces para la primera fórmula entonces es a-1 porque la primera figura tiene cuatro [indica con los dedos la cantidad 4] en vez de tener los tres [indica con los dedos la cantidad], entonces a-1 x 2, porque son dos bolas y más cuatro, para sacar las bolas y para los palos, es a-1x3+4, y así, pero hay otra fórmula que creo que es más fácil, pero yo me puse a hacer esta, entonces ax2+1 y ax3+1 y pues ya esas son las dos fórmulas que tenemos

También se evidencia que la estudiante ha logrado asimilar el proceso establecido para generalizar cualquier secuencia, desde una abducción analítica, a través de una hipótesis generada al establecer la comunalidad de los términos en cuanto a su estructura numérica y espacial, así como la asociación de la forma como varían estos en relación con el número de la figura, eso hace que al interior del grupo ella sea quien toma el liderazgo y jalona los procesos de sus compañeras. Así mismo, destacamos que en las producciones individuales Yuli continúa haciendo uso de la representación gráfica como un elemento importante para establecer la cantidad de elementos.

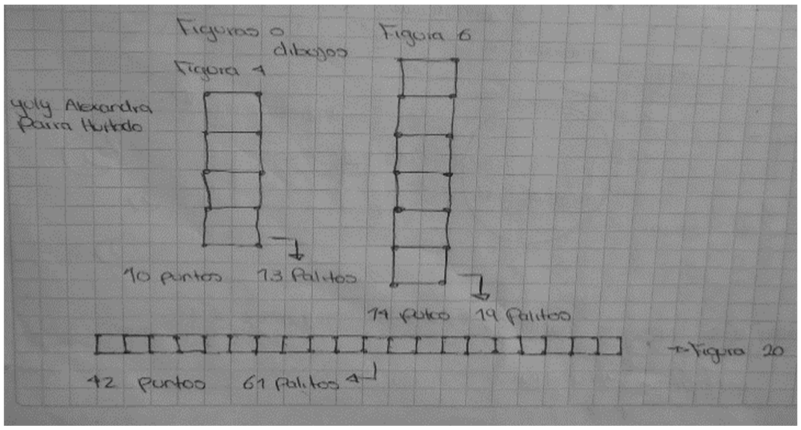
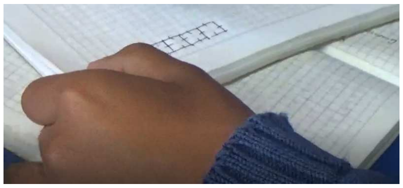
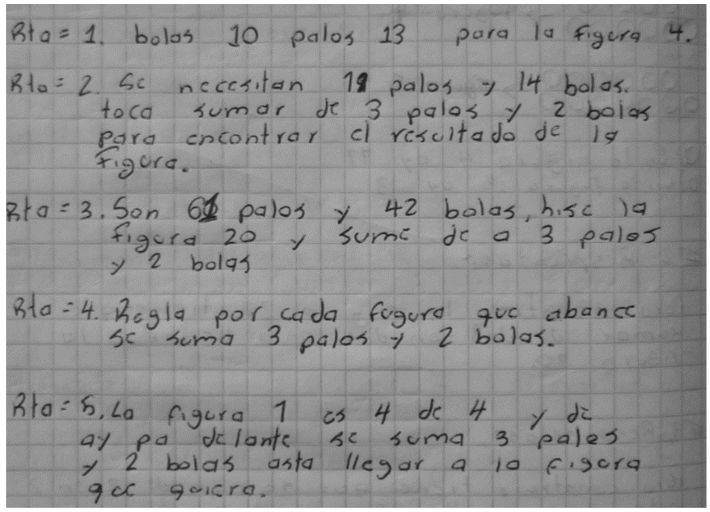


Figura 34. Producción de Yuli

Grupo de Santiago, Duvan, Dinael y Sergio

En este grupo se evidencia tanto en la producción escrita como en el diálogo sostenido que realizan la construcción de las figuras para a partir de los conteos establecer la cantidad de elementos de cada figura, así mismo perciben que la variación existente entre los términos consecutivos de la secuencia es de dos bolas y tres palos. Esta relación aditiva es asumida por ellos como regla general, siendo la forma como expresan la cantidad de bolas y palos. En este sentido podríamos deducir que estamos frente a una generalización aritméticas, ya que la hipótesis establecida solo permite pasar de un término a otro consecutivo.





Rta = 1. bolas 10 palos 13 para la figura 4.

Rta = 2. Se necesitan 19 palos y 14 bolas. toca sumar de 3 palos y 2 bolas para encontrar el resultado de la figura.

Rta = 3. Son 61 palos y 42 bolas, hise la figura 20 y sume de a 3 palos y 2 bolas

Rta = 4. Regla por cada figura que abance se suma 3 palos y 2 bolas.

Rta = 5. La figura 1 es 4 de 4 y de ay pa delante se suma 3 pales y 2 bolas asta llegar a la figura que quiera.

Figura 35. Producción grupo Santiago, Duvan, Dinael y Sergio.

Grupo Haile, Omar, Cristian y Robinson

En este grupo se evidencia que para responder a la solicitud de las primeras preguntas los estudiantes hacen uso de la relación encontrada entre los términos consecutivos, donde establecen que existe un aumento de +2 en las bolas y +3 en los palos, cuando se indaga por el término 20, explican que la operación que realizaron fue 20+20+2=42, se solicita que explique porque el +2 y esta fue la respuesta que obtuvimos:

L1. O: Porque ya habíamos hecho varias cuentas, incluso habíamos hecho aquí esta cosa [muestra la construcción de la figura] y nos daba el 42, hicimos varias operaciones y nos dio el mismo 42, entonces al ver que me daba 40 se le agregaban 2
L2. P: Llegaron a la conclusión
L3. O: De que era 42, entonces yo pensé que con el 100 se hacía lo mismo, ¿sí?, se suma dos veces el 100 y se le agrega dos
L4. P: Entonces aquí le están preguntando para cualquier figura
L5. O: Pues depende de la figura
L6. P: ¿Qué hago con la figura?
L7. O: Se le suma, se suma dos veces el número de la figura
L8. C: Por ejemplo, la figura 13, se le suma 13+13 y se le suma 2

Como se puede evidenciar los estudiantes establecen hipótesis a partir de lo encontrado en un caso particular, pero está a su vez es asumida como principio para establecer la cantidad de bolas de cualquier figura. Se aseguran de que esta relación sea la correcta haciendo la representación gráfica y además utilizan el ejemplo para apoyar su argumento. En este caso teniendo en cuenta el diálogo y la producción escrita de los estudiantes que estamos frente a una generalización de tipo algebraica contextual.

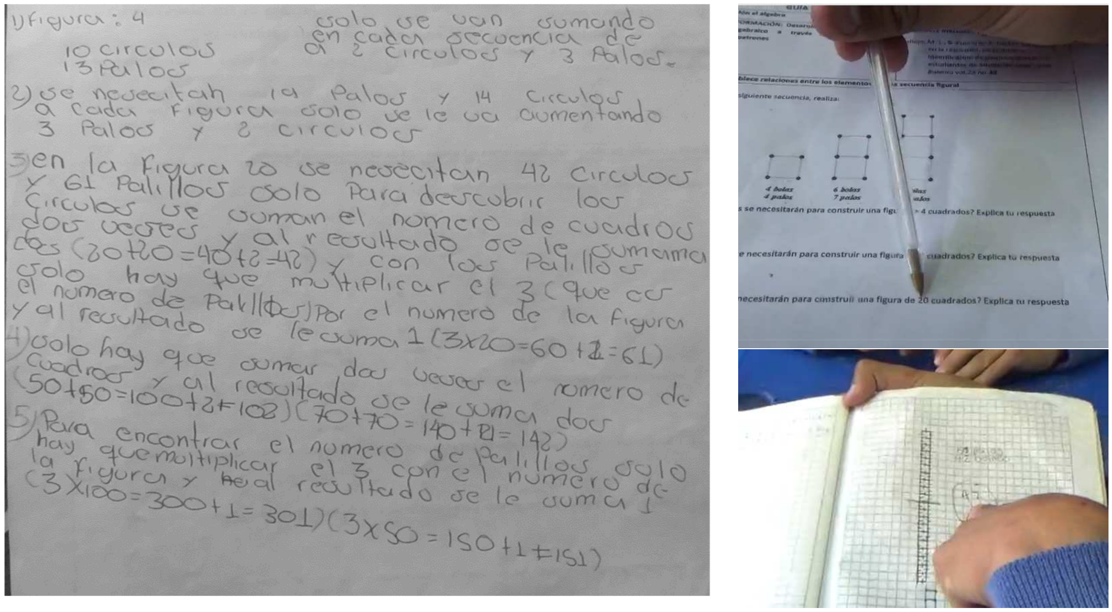
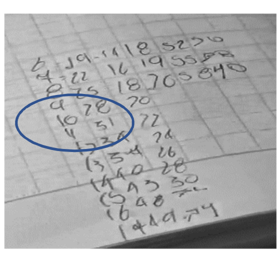


Figura 36. Producción grupo Haile, Omar, Cristian y Robinson, representación fig. 20.

Grupo Ronald, Oswaldo, Arley

Este grupo inicialmente parte de la relación aditiva entre las figuras consecutivas, para dar respuesta a las figuras 4 y 6, continuando el conteo de dos en dos y de tres en tres en el caso de los palos, así mismo recurren a la elaboración de una tabla a partir de la relación establecida para determinar la cantidad de elementos de la figura 20.

L1. O: En la primera pregunta, si la figura 3 tiene 8 bolas y 10 palos [señala la figura 3] y la figura 2 [señala la figura]tiene 7 palos, o sea las bolas se van sumando de dos en dos, entonces serían 10 bolas, y los palos se van sumando de tres en tres, entonces serían 13 palos.
L2. P: En el segundo
L3. O: En la figura 6 serían, si en la figura 4 son 13, en la figura 5 16 y en la figura 6 serían 19 y las bolas en la figura 4 son 10, en la figura 6 serían 14.
L4. R: Acá más o menos intentamos calcular para sacar la respuesta de la figura 20 [señala la tabla elaborada], en la figura 20 se necesitan 58 palos y 40 bolitas, sumando de dos en dos hacemos, sumando de dos bolitas y de tres palos



Cabe resaltar que en la tabulación realizada no tuvieron en cuenta la correspondencia que debía existir en cada una de las líneas, es así como omiten uno de los valores y por ello no coincide con las cantidades de bolas y palos.

Figura 37. Recurso tabla utilizado por el grupo.

Nuevamente usa como recurso para dar respuesta a las figuras grandes una relación proporcional no existente, cuando se cuestionan al respecto vuelven a la relación encontrada inicialmente a partir de la variación entre una figura y otra, para dar respuesta a las otras figuras solicitadas.

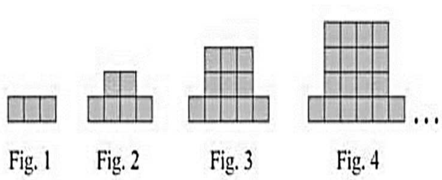
L1. O: Sí en la figura 3 hay 4 líneas de la mitad, entonces sería la figura 100, 101 líneas porque se suma una más.
L2. P: Estamos hablando de la figura 100, en la figura…
L3. O: En total cuántas, a mí medio 290 líneas
L4. P: En la cien te dio 290 líneas
L5. O: Sí, porque multipliqué el resultado de la figura 20 por cinco, y también lo hice con los puntos
L6. P: Y, ¿al multiplicar tuviste en cuenta que se comparten elementos?, entonces como hacemos para multiplicar

Frente a la última pregunta L6, se evidencia que no hay claridad en ellos, en cómo establecer una relación para las figuras grandes, así que nuevamente recurren a la relación inicial. En este caso les resulta más sencillo pensar el general desde la relación aditiva que es en este momento la única hipótesis que han establecida como cierta, esto nos da cuenta de una generalización de tipo aritmético.

En la plenaria realizada la presentación que se hace de las dos últimas preguntas, relacionadas con establecer la relación general de las bolas y los palos, la persona que pasó a hacer dicha explicación fue Carol, quien muestra tener claridad frente a los procesos de generalización y a través de la designación simbólica. Así mismo, mediante el testimonio de otra estudiante se mostró que una de las estrategias utilizadas para establecer la cantidad de elementos de las figuras grandes es quitar el primer cuadrado, que varía de forma diferente con respecto a las demás figuras.

4.2.5. Tarea 5.

La quinta tarea es de la forma n^2+2, donde n=1, 2, 3, …



1. ¿Qué figura sigue en la secuencia?
2. ¿Qué se hace para pasar de una figura a la siguiente?
3. Dibuja la figura que ocupa la posición 10
4. ¿Cuántos cuadritos forman la figura 20?
5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de cuadritos de cualquier figura? Explica tu respuesta.

Figura 38. Tarea 5 (secuencia y preguntas)

En esta tarea se cambia de secuencias cuyo término general es una relación lineales a una relación cuadráticas, en este caso se espera que la estructura espacial permita establecer más fácilmente la relación, teniendo en cuenta que en centro se forma un cuadrado de lado igual al número de la figura y a los dos costados de este se adiciona un cuadrado, a continuación, se presentan algunas de las producciones realizadas por los estudiantes.

Grupo Karen, Natalia, Vanessa y Nayerly

En esta tarea evidenciamos que la percepción que algunos estudiantes tiene de la secuencia difiere en gran medida a la que inicialmente se creía que podía darse desde los resultados del pilotaje, pues una de las relaciones que ellos establecen es a partir de la variación vista desde la filas y las columnas, por ejemplo, en este grupo la primera relación que establecen es la estructura numérica de las figuras dadas, lo cual para ellos hace confuso el establecer cómo es la figura siguiente, a través de algunas preguntas realizada por la profesora llegan a una nueva relación, notando que la forma de las figuras de la secuencia se asemeja a un sombrero y que cada sombrero es de un tamaño mayor al anterior, posteriormente relacionan la variación entre la cantidad de filas que existen y de esta manera dan solución a la pregunta 1. A continuación se presenta un apartado del diálogo sostenido con el grupo:

L1. P: ¿Cómo están acomodados los cuadrados?
L2. N: Acá hay tres cuadritos solos, y acá va aumentando el número acá arriba, pero solo…[pausa], o sea es como…, eso parece como sombreritos ahí chiquitos [señala la figura2], mediano [señala figura 3] y pequeño. Va aumentando una escala más
L3. P: ¿Cómo es esa escala que va aumentando?
L4. K: La siguiente no sería 7 abajo
L5. O: Y cinco arriba
L6. N: En la primera figura hay 1, una escala no más de cuadritos, acá en la siguiente dos, y acá tres y así van aumentando
L7. P: Bueno, ¿qué figura sigue?
L8. N: La cinco. Siete abajo, y espere… sería 7 abajo y 4 columnas de 5 cuadritos. Listo profe, ya entendí

A partir del diálogo y de las nuevas determinaciones que se generaron a partir de éste las estudiantes establecen una relación entre la estructura numérica y espacial de los siguientes términos, así mismo determinan como regla general: *"solo es multiplicar los cuadritos de* *arriba con la suma de los del lado, cuando ya se tiene el resultado se le suman los 2 cuadritos que están por fuera. O también solo contando*" (fig. 39). Así mismo, se evidencia el uso de flechas para indicar la cantidad de elementos de las filas y columnas de la figura, relacionado con ejemplo de una figura especifica.

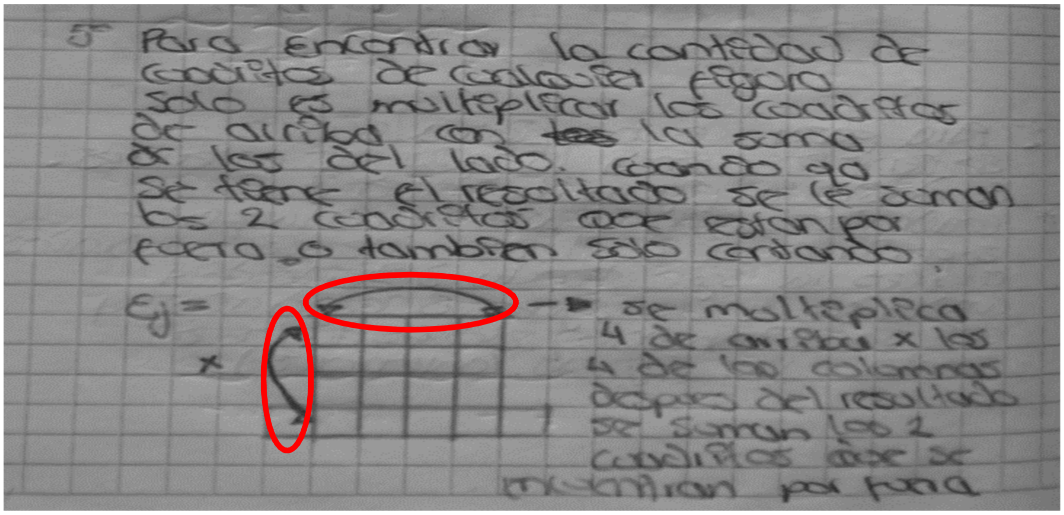


Figura 39. Producción de Karen, Natalia, Vanessa y Nayerly

En este caso, podemos afirmar que existe una generalización algebraica, donde se utiliza una frase representativa para dar cuenta de la estructura numérica de la secuencia, así mismo notamos una de las formas de reafirmar esta relación es a través de la ejemplificación de un caso específico.

Grupo Carol, Erika, Vanessa, Erika Y Angie

En este grupo nuevamente evidenciamos a través de la producción escrita realizada la existencia de una generalización algebraica simbólica, sin embargo, en este caso la expresión utilizada es de la forma axa+2, no existe evidencia de reducción de términos, en particular el uso de potenciación, así mismo, el uso que se le da al igual como una manera de establecer el orden de las operaciones.

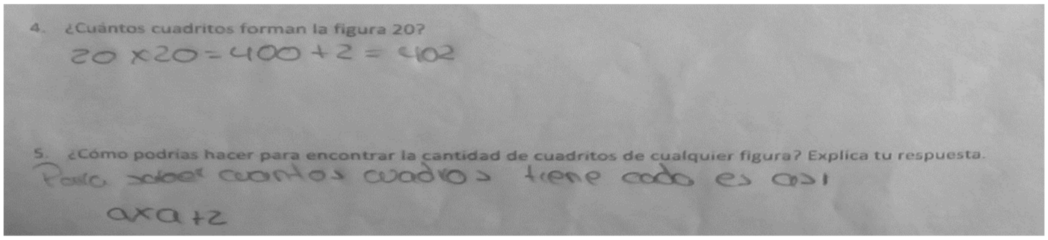


Figura 40. producción del grupo Carol, Erika, Vanessa, Erika Y Angie

Este grupo continúa realizando el mismo tipo de generalización, siendo uno de los más avanzados de la clase, sin embargo, en las participaciones de las plenaria ha empezado a inquietar a los otros frente a la designación simbólica realizada. Por ejemplo, en la plenaria de esta tarea el estudiante Oswaldo, aunque en la producción (Fig. 41 parte superior) no existe una claridad frente a la forma como determinar el número de cuadritos de cualquier figura, presenta la siguiente relación (Fig. 42 Parte inferior).

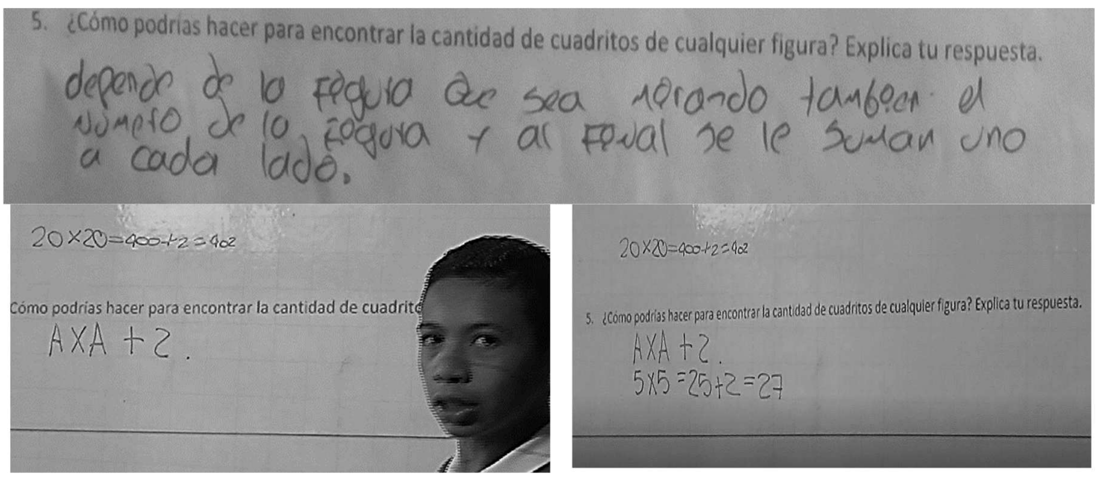


Figura 41. Producción Oswaldo plenaria

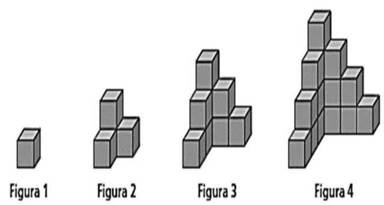
Cuando se le solicita que realice la explicación, aunque establece la relación para cualquier figura se apoya en el ejemplo de un caso particular, hablar de lo indeterminado aun presenta dificultades en la instanciación como parte del discurso del estudiante. Utilizando un ejemplo, es decir, valores determinados para explicar la regla escrita. Además evidenciamos que utiliza el signo = (igual) para establecer el orden de las operaciones, no como una relación de equivalencia.

L1. O: Pues A es una figura cualquiera, voy a hacer el ejemplo más bien. Sería 5, esta es la figura 5, entonces seria 5x5=25+2=27
L2. C: La fórmula para hallar cualquier figura

De igual manera observamos que el estudiante hace uso del signo igual para dar orden a las operaciones y que los demás compañeros se refieren a la respuesta del estudiante como la fórmula para cualquier término.

4.2.6. Tarea 6.

La sexta tarea es de la forma n^2, con n=1, 2, 3, …



1. Dibuje la Figura 4 de la secuencia
2. ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9?
3. ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100?
4. Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.

Figura 42. Tarea 6 (Secuencia y preguntas)

Esta tarea genero varias dificultades inicialmente en cuanto a la representación de la figura puesto que a diferencia de las otras secuencias en esta es una figura en tres dimensiones. A continuación, mostramos una de las representaciones de la figura 5, realizada por un grupo de estudiantes:

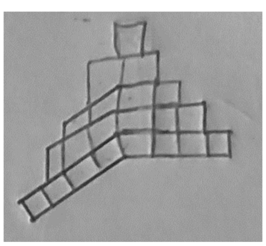


Figura 43. Figura 5 de la secuencia elaborada por un estudiante

Se evidencia que la representación realizada solo cuenta con dos dimensiones, así mismo en los conteos que los estudiantes realizaban omitían los cubos que se encontraban en la parte de atrás de la figura.

Grupo José, Marlon, Duván y Daniel

La primera relación encontrada por los estudiantes de este grupo les permite determinar que el paso entre una figura y otra es el aumento de una nueva fila en la parte inferior, la cual tiene dos cubos más que la fila inferior de la figura anterior, de esta manera realizan la representación gráfica de la figura 5

Posteriormente apoyados en un dibujo de dos dimensiones establecen la cantidad de cubos que forman la figura 10. En este caso uno de los estudiantes explica que en la figura 10, la columna más alta tiene 10 cubos y se le va bajando de uno, de 10 a 9, de nueve a 8, de 8 a 7 y así sucesivamente, a excepción de la primera fila cuanto todas de a dos, teniendo en cuenta los dos lados de la figura (Fig. 44).

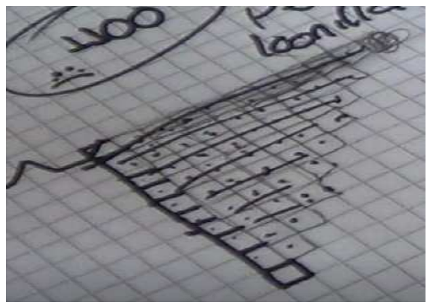


Figura 44. Construcción de apoyo para el conteo

Esta generalidad es utilizada por ellos para determinar que el número de cubos de la figura 10 es 100, posteriormente cuando se enfrentan a la pregunta de la figura 100, intenta asociarlo a lo realizado anteriormente, determinando que se debe multiplicar por 10 y sumar el número de la figura, 100x10+100=1100.

Cuando se solicita que expliquen lo que realizaron en este caso en particular se intenta llevarlos a concluir que el procedimiento utilizado no es correcto, pero ellos continúan afirmando lo mismo, es decir, que el total es 1100. Podemos establecer que la abducción realizada por este grupo solo les permite moverse en valores pequeños, partiendo de una relación aditiva.

Grupo Oswaldo, Ronald, Santiago y Arley

En el trabajo realizado por este grupo, observan que la estructura numérica es posible establecerla a través de la suma de la cantidad de cubos de cada una de las filas, para ello utilizan como instrumento la calculadora

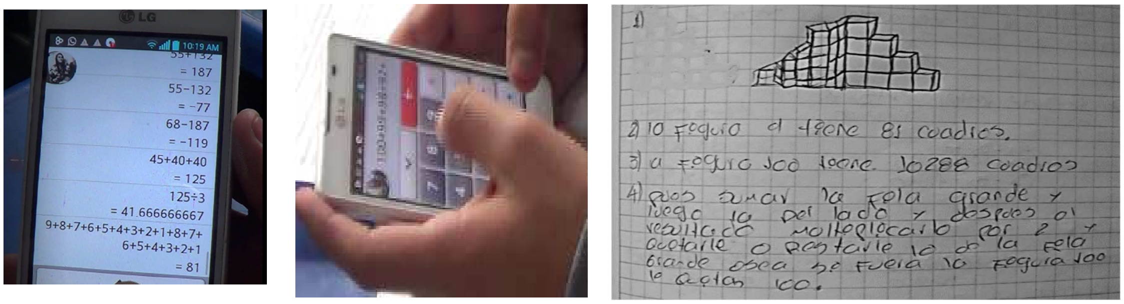


Figura 45. Producción del grupo Oswaldo, Ronald, Santiago y Arley

En particular está mostrando la operación realizada para obtener la cantidad de cubos de la figura 9, establece que la cantidad de cubos de las filas de los lados tienen la misma cantidad. A partir de esta relación intenta dar respuesta a la figura 100, usando nuevamente la calculadora para facilitar los cálculos, pues la operación resulta un poco extensa, comienza a realizar la suma desde 100 hasta 1 y establece que ese resultado se multiplica por dos y posteriormente se le deben restar 100 de la columna más alta. A continuación, mostramos un apartado del diálogo con el estudiante:

L1. O: Fácilmente, como si fuera la 9
L2. O: 100+99+98+ y así de ahí para abajo
L3. P: ¿Te vas a poner a hacer toda esa cuenta? Esos eran los de un lado, pero te acuerdas de que toca contar los del otro lado
L4. O: Sólo hago [continúa haciendo la operación en la calculadora (Fig.45)]

En la relación utilizada para establecer el general, podríamos deducir que los estudiantes realizan una generalización algebraica contextual, si bien, el procedimiento planteado no es el más sencillo, si permite establecer la estructura numérica de cualquier figura.

Grupo Kimberly, Ana, Diana y Vanessa

En el caso de este grupo el primer acercamiento que hacen a la secuencia es a partir del número de cubos que conforman cada columna, lo que les permite a través de la suma determinar el número total de cubos.

Posteriormente relacionan la cantidad de cubos de cada figura con el cuadrado del número de la misma.

L1. K: Porque vea 2 por 2 cuatro y acá hay cuatro [señala la figura 2], 3 por 3 nueve y acá hay 9 [señala la figura 3], 4 por 4 serían 16 y aquí hay 16 [señala la figura 4]

L2. P: Y en la 5, entonces ¿cuántos hay?
L3. K: 5 por 5 son 25, pues yo creo no? [verifica contando los cuadros de la figura construida]

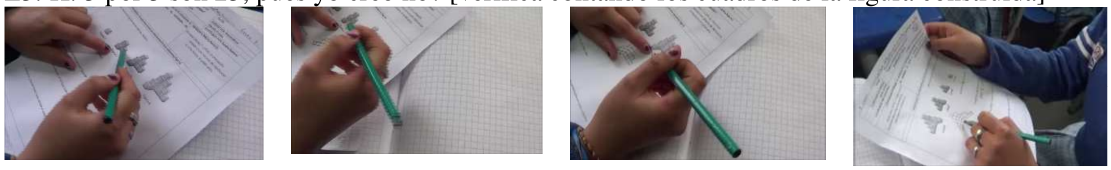
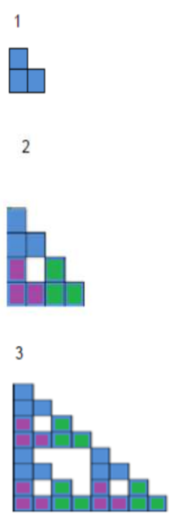


Figura 46. Secuencia de señalamientos utilizados por Kimberly

La relación establecida entre el número cubos de la figura y los números cuadrados perfecto, lo que les permite hablar del general en términos de "*se multiplica el número de la figura por el mismo número, ejemplo 9x9=81*", en este caso se presenta una generalización algebraica contextual, donde la indeterminacia hace parte del discurso, aunque aún se evidencia el uso de determinancia numérica para ejemplificar la relación encontrada.

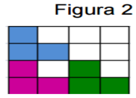
4.2.7. Tarea 7.

En esta tarea se establecen diferentes relaciones: cuadros sin pintar cuya secuencia es de la forma 4^n-3^n, con n=1, 2, 3, …; cuadros pintados secuencia de la forma 3^n, con n=1, 2, 3, total de cuadros secuencia de la forma 4^n, con n=1, 2, 3, …



1. Dibuja la figura 4, 5 y 6.
2. Encierra todas las figuras en un cuadro grande que las envuelva y traza una cuadricula sobre cada una, así:

Figura 2



3. Cuenta los cuadros en cada figura y completa la tabla

FIGURA	CUADROS SIN PINTAR	CUADROS PINTADOS	TOTAL, DE CUADROS.
1	1	3	4
2	7	9	16
3	37	27	64
4			
5			
6			

4. Sin elaborar el dibujo intenta completar la tabla hasta la figura 9, ¿Cómo lo harías?
5. Qué harías si te pidieran encontrar los datos de la figura 100.

Figura 47. Tarea 7 (Secuencia y preguntas)

Esta tarea no fue desarrollada por los estudiantes, debido a lo poca disposición que mostraron en la tarea 6, se tomó la decisión de no hacerlo pues se considera que es importante la actitud con la que se asumen las diferentes actividades realizadas dentro del aula.

5. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

Teniendo como precedente que la actividad matemática es multimodal, durante el desarrollo de las tareas evidenciamos la emergencia de diferentes medios semióticos movilizados por los estudiantes que permitían denotar las relaciones establecidas entre los elementos de las secuencias en su estructura espacial y/o numérica. Se evidencia la presencia de conteos, signos indexicales, iconos (flecha), tablas, representaciones graficas bidimensionales, gestos con las manos, señalamientos (con dedos y objetos), frases representativas y uso de símbolos.

Los conteos son usados generalmente al iniciar el desarrollo de las tareas y a través de ellos establecen la relación de aumento entre los elementos de una figura y otra consecutiva, realizando un primer acercamiento a la estructura numérica y la extensión a los términos subsecuentes. El recurso flecha al igual que los gestos con las manos fueron utilizados por los estudiantes para relacionar la estructura espacial en cuanto a la disposición horizontal y vertical de las figuras de la secuencia. Las tablas usadas como un recurso que permitía extender a otros términos la relación aditiva encontrada inicialmente en la secuencia en cuanto a la cantidad de elementos que la componían (estructura numérica). La representación gráfica de los términos siguientes a partir de la relación establecida de aumento de una figura a otra, para dar respuesta a la cantidad de elementos de las figuras siguientes. También fue utilizada en la tarea 3 con el fin de descomponer la figura en triángulos de abajo y triángulos de arriba y de esta manera poder encontrar una regla que permitiera establecer la cantidad de palillos utilizados. Otro uso fue la representación bidimensional de los cubos de la tarea 6 vistos de frente con el fin de facilitar el conteo de los elementos que componía la figura.

Encontramos deícticos como “así sucesivamente” y “así sigue hasta infinito” para denotar que la relación establecida se cumplía para todos los términos de la secuencia. Otros deícticos utilizados fueron “aquí”, “acá” acompañados generalmente por señalamientos (con dedos u objetos) para indicar la disposición espacial en relación con el número de la figura. Emergen signos indexicales "*acá hay uno y aquí comenzaron a ser 2, 3, 4 después 5 y después 6*" usados como una forma de extender la secuencia a los términos subsecuentes.

Destacamos también el uso de frases con las que intentaban explicar como a partir de las relaciones encontradas se podían construir otros términos bien sea consecutivos o en otros casos la descripción del término general de las secuencias. Por último, destacamos el uso de símbolos alfanuméricos para denotar la generalidad de la característica en relación con el número de la figura y la cantidad de elementos que la formaban.

Frente a los procesos de abducción podemos inferir que en la mayoría de los casos los estudiantes parten de la comunalidad encontrada en los términos dados inicialmente para proponer una regla o hipótesis que les permita relacionar la manera cómo estos cambian, generalmente a través de una relación aditiva que les permite moverse entre términos consecutivos (fórmula de recurrencia), por ejemplo, expresiones como "*Para la figura quince, pues iba sumando de a dos por cada uno, entonces en la 7 es 13, en la 8 es 15 y así sucesivamente hasta llegar a la quince*", "*nos imaginamos el número de la figura en la que vamos y vamos aumentando de dos en dos, o sea, dos bolitas*", "*Regla por cada figura que avance se suma 3 palos y dos bolas*".

Así mismo, encontramos evidencia de abducciones analíticas, en estos casos la hipótesis planteada va más allá de determinar los términos de forma secuencial (regla de recurrencia), esta regla permite establecer una relación entre el número de la figura y la estructura numérica y/o espacial. Por ejemplo, "*sumando dos círculos más del número de la figura en la parte inferior y en la parte superior uno*", "*solo depende de la figura que sea, se suma dos veces el número de la figura y al resultado se le suma 1*", "*para encontrar el número de palillos sólo hay que multiplicar por tres el número de la figura y al resultado se le suma 1*", igualmente se evidenció que estas hipótesis son puestas a prueba para valores determinados, los cuales son utilizados como ejemplo para reforzar la relación dada.

En cuanto a la pregunta de investigación, destacamos que en las tareas de secuencias cuya forma del término general se da a partir de una relación lineal, se evidenció que una de las primera determinación que realizaban es de tipo aditivo, permitiéndoles generar hipótesis que los lleva a la construcción de los términos consecutivos, es decir, extender la secuencia a los términos subsecuentes desde este proceso, en algunas ocasiones denotado a través de la elaboración de tablas, representación gráfica o simplemente realizando la suma mentalmente. Esta determinación en algunos casos se mantiene para expresar el general, es decir, realizan una generalización de tipo aritmética, proceso que se mantiene a lo largo de las actividades. Para algunos el apoyo de la representación gráfica se da debido a la dificultad que tuvieron en el interior de los grupos de discusión para establecer la cantidad de elementos, siendo un camino alternativo y para ellos confiable dibujar la figura solicitada.

En cuanto a las generalizaciones algebraicas, en la mayoría de los casos se dan desde lo contextual, evidenciadas a través del uso de frases representativas para expresar la forma general de los términos de la secuencia, donde aparece la indeterminancia como parte del discurso cuando se refieren a la comunalidad de los elementos de la secuencia en términos de la relación entre el número de la figura y la cantidad de elementos, relacionando con el carácter operatorio de esta, en frases como: "*solo depende de la figura que sea, se suma dos veces el número de la figura y al resultado se le suma 1*", de igual manera en algunos casos además de construir la frase, realizan un ejemplo donde aplican la fórmula planteada, como una forma de explicar la hipótesis planteada.

Los procesos que dan cuenta de la designación simbólica que evidencian una generalización algebraica simbólica, son muy escasos durante el proceso. Por ejemplo, una de las estudiantes desde la segunda tarea plantea las relaciones a través de operaciones representadas simbólicamente, donde designa la ***a*** como el número de la figura, al presentar las soluciones algunos intentan imitar este proceso y dar respuesta al término general de la secuencia a través del uso de símbolos alfanuméricos, aunque como lo comentamos anteriormente esta no fue la generalidad del proceso. Otro ejemplo, lo encontramos en la primera tarea al interactuar con uno de los grupos, se intentó a través de la formulación de preguntas llevar a los estudiantes a realizar una generalización algebraica simbólica y aunque reconocían la relación existente entre los elementos que constituían cada términos, bien sea a través del ejemplo con valores determinados o de frases representativas, no fue posible que esas expresiones fueran traducidas a lenguaje simbólico, pues aún existen dificultades en la interpretación de la letra como una forma de representar el general, algunos de ellos entienden esta relación únicamente desde el orden lexicográfico.

Así mismo, en algunos grupos se evidencia el uso de una relación proporcional para determinar la cantidad de elementos de los términos grandes, cuestionándose sobre ¿desde las figuras que tengo cuántas veces debo sumarlas por sí mismas (suma reiterada) o multiplicarlas para llegar a la que me piden?, por ejemplo, para la 100, teniendo la 10, debo sumar 10 veces o multiplicar por 10. Usando con mayor frecuencia procesos aditivos.

En el análisis realizado logramos evidenciar que el hecho que un estudiante realice durante una tarea una generalización de tipo algebraico no implica necesariamente que en la siguiente ocurrirá lo mismo, en algunos casos por el contrario algunos pasaron a una generalización aritmética, debido al grado de dificultad y de comprensión que los estudiantes hacían de esta.

Resaltamos que, dentro del proceso de implementación en el aula, una de las fortalezas que encontramos son las diferentes formas de interacción que se dieron entre los diferentes los estudiantes, pues estos de alguna manera permitieron llevar a los estudiantes a la comprensión de las secuencias realizadas, desde la confrontación de las respuestas con otros. Además de lo anterior, la implementación de plenarias permitió mostrar otras formas de interpretación de la tarea propuesta que pueden ser igualmente válidas, no con el ánimo de convencer, sino de compartir las experiencias que pueden contribuir a la formación de saberes.

Durante las diferentes interacciones con los grupos de trabajo, en la mayoría de los casos uno o dos estudiantes son los que toman la vocería para explicar los procesos realizados, la actitud de los demás es atender a la explicación y sólo en casos que consideran necesaria su intervención para aclarar o preguntar lo hace. En el interior de los grupos si se da la participación de todos los miembros del mismo.

CONSIDERACIONES FINALES

Al finalizar la primera tarea propuesta se realiza una plenaria donde los estudiantes participantes expresaron que para ellos este trabajo fue algo novedoso, pero que se encontraron con algunas dificultades al momento de explicar los procesos realizados en cada uno de los puntos.

Durante la implementación de las tareas algunos estudiantes se muestran tímidos y no quieren que sus rostros sean tomados por la cámara, en estos casos se optó por grabar únicamente los gestos realizados con las manos, para evitar condicionar la actividad.

Si bien el objetivo de este trabajo estaba enfocado a determinar los tipos de generalización realizada por los estudiantes sigue existiendo una preocupación por el cómo lograr que emerjan formas de expresión a través de la designación simbólica de la característica encontrada, pues como se evidenció en los análisis presentados para ellos la letra representa un valor específico generalmente asociado al orden lexicográfico.

Otra situación que generó interrogantes fue la dificultad que evidenciaron varios estudiantes al realizar las gráficas de las figuras siguientes en la tarea 6, en este caso la secuencia era de figuras en tres dimensiones, pero ante la imposibilidad de hacerla recurrieron al uso de dos dimensiones, si bien esto les permitía acercarse a la estructura numérica no correspondía a la solicitud dada. En este sentido, nos preguntamos sobre cómo fortalecer los procesos que permitan reconocer y representar objetos en tres dimensiones.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Bar, A. (2001). Abducción. La inferencia del Descubrimirnto. *Cinta moebio 12*, 169-174.

Callejo, M. L. (2015). Generalización y pensamiento algebraico. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas No. 68*, 5-8.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema 28(48)*.

Chalé, S. D. (2015). La visualización en la resolución de patrones. *Memorias XIV CIAEM-IACME*.

Gónzalez, A. (2013). Estudio del Pensamiento Algebraico en los libros de texto venezolanos. *VII CIBEM*, (págs. 1164-1171). Montevideo, Uruguay.

Guzmán, N. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la Aritmética generalizada (Tesis de Maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2015). Pruebas saber 3°, 5° y 9°. *Lineamientos para las aplicaciones muestrales y censales 2015*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto al punto (0,0). *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Educations Vol. 2(2)*, 183-208.

Moreno, P. C. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto (Tesis de Maestría).* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, (Esp)*, 7-21. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509902

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4 (2)*, 37-62.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas . En D. Á. Vallès, *L'activitat docent intervenció,* *innovació, investigació [teacher's activity: Intervention, innovation, research]* (págs. 33-49). Girona (España): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la Generalización. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutierrez, & M. y. Molina, *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (págs. 3-12). Granada: Comares.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132-150.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, 8(18)*, 547-567.

Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, Cognición y Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12(2)*, 215-250.

Rincón, C. A. (2016). *Unidad 1: Lenguaje y Semiótica.* Obtenido de Aprende en línea (Universidad de Antioquía): http://aprendeenlinea.udea.edu.co/boa/contenidos.php/cb10887d80142488399661377b684b60/511/1/contenido/capitulos/Unidad1LenguajeySemiotica.PDF

Rojas, P. J., & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación científica y tecnológica*, 760-766.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., & Mora, L. (1999). *La transición Aritmética-Algebra.* Bogotá D. C.: Universidad Disitrital-Gaia.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12(1)*, 122-142.

Vergel, R. (Mayo de 2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento temprano. *PNA*, 193-215.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *Tecno Lógicas (16)*, 139-151.

Wikilibros. (2015). Obtenido de https://es.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1ticas/%C3%81lgebra/Introducci%C3%B3n