

II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática 2013
**UNIDAD DIDÁCTICA MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLVER SISTEMAS DE
ECUACIONES LINEALES 2X2**

Mónica Liliana Bernal, Diana Paola Castro, Alvaro Andrés Pinzón, Fernando Torres
Universidad de los Andes, molibeva@gmail.com
Universidad de los Andes, dianapao29@gmail.com
Universidad de los Andes, aapinzon.mat@gmail.com
Universidad de los Andes, fernantotmateus@gmail.com

RESUMEN.

En esta ponencia se muestra la experiencia de aula generada desde el diseño, la implementación y la evaluación de la unidad didáctica titulada "Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2" que se ha fundamentado desde el procedimiento de Análisis Didáctico. Se presentan las bondades y aportes de una secuencia elaborada a partir de tres tipos de tareas: de transición, de aportes a los objetivos previstos y transversal, así como la contribución de materiales y recursos al alcance de los objetivos de aprendizaje. El trabajo presentado expone los apartes del trabajo final elaborado por un grupo cuatro profesores de Bogotá y Cundinamarca en la concentración en Educación Matemática de la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes.

ABSTRACT.

This paper shows the classroom experience generated from the design, implementation and evaluation of the teaching unit entitled "Graphical method for to solve systems of linear equations 2x2" which has been based since Didactic Analysis procedure. We present the benefits and contributions of a sequence made from three types of tasks: transition, contributions to the objectives and cross, as well as the contribution of materials and resources achieve to the learning objectives. The work sets asides the final work produced by a group of four teachers from Bogotá and Cundinamarca in concentration in Mathematics Education, Master of Education from the University of the Andes.

PALABRAS CLAVE: *Expectativas de aprendizaje, sistemas de ecuaciones, análisis didáctico, materiales manipulativos.*

1. INTRODUCCIÓN.

Tradicionalmente las practicas de aula en las que se aborda la solución de sistemas de ecuaciones lineales hacen un especial énfasis en los métodos algebraicos, dejando poco o ningún espacio para el método gráfico. Considerando esta realidad, se determinó diseñar e implementar una unidad didáctica sobre este último método con el fin de potenciar capacidades que el método algebraico por sí solo no desarrolla en los estudiantes.

2. DESARROLLO DEL TEMA.

El diseño propuesto se centra en fortalecer el desarrollo de las competencias del estudio PISA, que se relacionan directamente con los procesos generales establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2006). Rico (2005) indica que la competencia Modelar incluye que el estudiante estructure el campo o situación que va a modelarse; traduzca la realidad a una estructura matemática; interprete los modelos matemáticos en términos reales: trabaje con un modelo matemático; reflexione, analice y ofrezca la crítica de un modelo y sus resultados; comunique acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y, dirija y controle el proceso de modelización, por lo que la secuencia didáctica diseñada hace especial énfasis en el desarrollo esta competencia en la solución de situaciones relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico, ya que este método

II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática 2013

permite establecer una relación funcional de las variables y presentarlas de manera sistemática en una gráfica. En el estudio del foco de contenido se identificaron cinco sistemas de representación: verbal, simbólico, numérico, gráfico y ejecutable, y dos subestructuras matemáticas que organizan los fenómenos asociados a los sistemas de ecuaciones lineales; dichas subestructuras dependen de si existe o no una relación funcional entre las variables. A su vez, los fenómenos en los que se contextualizan las tareas fueron clasificados en tres contextos de acuerdo a la acción descrita por las variables: combinar, comparar e igualar. Finalmente, de acuerdo con la cercanía del estudiante con el ámbito de los fenómenos, estos se clasifican en situaciones personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

La unidad didáctica fue diseñada para once sesiones con siete tareas enfocadas a la consecución de tres objetivos generales: (a) Aplicar el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas y la solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas; (b) Comprender la noción de solución de un sistema lineal relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano; y (c) Modelar gráficamente situaciones no rutinarias mediante sistemas de ecuaciones lineales estableciendo la relación funcional entre variables.

Dentro del diseño de la unidad didáctica se construyó una tarea denominada “tarea transversal” contextualizada en el deporte Fórmula 1 y desarrollada en cada una de las sesiones.. También se elaboraron dos tareas de transición entre objetivos.

Las tareas propuestas en la unidad didáctica presentan situaciones en las que se requiere que el estudiante realice traducciones entre los diferentes sistemas de representación, es decir, que describan un mismo objeto matemático utilizando lenguaje simbólico, verbal, numérico, gráfico o ejecutable. La siguiente figura muestra la relación entre las sesiones de clase, los objetivos y las tareas diseñadas.

Sesiones	→	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Objetivos	→	APLICAR			COMPRENDER			MODELAR			Ecuacartas	
Tareas	→	FR	SE		RP	ER		BC	CO/HE	GP		
Partes de la tarea transversal	→	GRAN PREMIO DE BRASIL										Examen
	→	MOTIV	P	E	E	E/R	R	R	R	R	R	
		Planteamiento (P)			Ejecución (E)			Resolución (R)				

FR: Figuras con 3 rectas; SE: Sistemas equivalentes; RP: Rectas en el plano; ER: Encontrando rectas; BC: Bus y carro; CO: Copias; HE: Heladería; GP: Gran premio de Brasil (tarea transversal).

Con la intención de amenizar ciertos procesos al momento de resolver las tareas, motivar al estudiante y establecer relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos abordados, se diseñó material manipulativo y ejecutable para algunas sesiones. De esta forma, la unidad didáctica incluye tareas en las que se utilizan acetatos superpuestos, una plantilla en Excel, el uso del software Geogebra y un juego llamado Ecuacartas.

La unidad didáctica se implementó durante tres semanas en el Colegio Compartir Bochica de Bogotá, en un grado noveno con estudiantes de edades que oscilaban entre los 15 y 17 años, organizados en parejas mixtas, niño-niña. El grupo estaba compuesto por 44 estudiantes, 24 mujeres y 20 hombres.

El análisis de datos se centró en las estrategias de resolución y el logro de aprendizaje de los estudiantes al desarrollar cada tarea. También se identificaron las capacidades que permitieron el alcance de los objetivos.

3. CONCLUSIONES O RESULTADOS.

Para el análisis de datos, en primer lugar se analizó el desarrollo de las tareas, seguido de la valoración en el alcance de los objetivos por parte de los estudiantes a partir de la información obtenida con los siguientes instrumentos:

- grabaciones de video,
- diario del profesor,
- entrevistas informales, y
- diario del estudiante.

Las grabaciones de video brindaron un panorama global de las dinámicas grupales, estrategias de resolución de algunos grupos y actuaciones de los estudiantes que no se pudieron identificar con los otros instrumentos. El diario del profesor integró las estrategias utilizadas por los estudiantes y las capacidades no previstas en la planeación. El diario del estudiante permitió complementar la información registrada por el profesor en su diario y lo registrado en los videos.

En el desarrollo de las primeras cuatro tareas se evidenció cierta dificultad de los estudiantes para asociar dichas actividades con la tarea transversal. Esta relación no era explícita por lo que fue necesario hacer una actividad de refuerzo y así resaltar que cada actividad desarrollada tenía elementos que podía contribuir al desarrollo de la tarea transversal, lo cual generó posteriores relaciones con las demás actividades. El trabajo con conceptos como velocidad, distancia y tiempo también favorecieron el desarrollo de dicha tarea.

Respecto al uso de material manipulativo y ejecutable, los estudiantes mostraron mayor motivación en la manipulación de los acetatos superpuestos. El uso de Geogebra proporcionó una visión más dinámica del plano cartesiano permitiendo realizar rotaciones, traslaciones y reflexiones tanto de rectas como del plano mismo.

Referente al alcance de los objetivos, encontramos lo siguiente:

Objetivo 1. Aplicación del método gráfico. Los estudiantes no presentaron mayores dificultades en la resolución de las tareas. Como parte de los hábitos desarrollados en los temas previos (función lineal, ecuaciones de primer grado con una incógnita), 90% de las parejas representaron los sistemas de ecuaciones activando una primera capacidad que consistía en realizar una tabla de valores para luego trazar las rectas, pocos hicieron uso de la relación entre los parámetros de una ecuación y su gráfica.

Objetivo 2. Comprensión del método. Es justo mencionar que el 60% de los estudiantes lograron relacionar el número de soluciones con la posición relativa de las rectas. Centrar su atención en hallar siempre “una solución”, sin considerar relevante la disposición de las rectas. En cambio, les resultó relativamente fácil comprender la equivalencia de sistemas.

Objetivo 3. Modelación. Los resultados obtenidos fueron bastante variados. Desde aquellos en los que los estudiantes sólo lograron plantear las ecuaciones sin interpretarlas como un sistema, hasta aquellas parejas que lograron solucionar una situación abierta haciendo uso del método gráfico.

Los siguientes son los resultados encontrados al evaluar la solución de la tarea Gran Premio de Brasil F1:

- 100% de los grupos identificó las variables que intervienen en la tarea del Gran Premio de Brasil Fórmula 1.
- 40% logro proponer sistemas de ecuaciones a partir de la información recogida, y de ellos el 50% lo hace de forma estándar.
- 80% asocio la pendiente de la recta con la velocidad de los autos.
- 40% sustituyo valores en las ecuaciones para formar una tabla.
- 30% de los grupos uso el método gráfico para solucionar la tarea y de ellos el 20% uso adecuadamente escalas numéricas para representar las velocidades de los autos.

Pero no solo se obtuvieron resultados relacionados con los tres objetivos. También se observó que los estudiantes desarrollaron habilidades que facilitaron el trabajo cooperativo relacionado con la asignación de responsabilidades y la dinámica de participación; desarrollaron capacidades

II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática 2013

relacionadas con simplificación de modelos físicos, como el concepto de velocidad en el desarrollo de las tareas Bus y carro y Gran Premio de Brasil. La representación lineal de la velocidad representó un verdadero reto para varias parejas. También fueron evidentes dificultades al ignorar o tener que promediar aceleraciones y desaceleraciones que se dan en competencias como la Fórmula 1.

El trabajo desarrollado por las parejas mostró compromiso e interés por las tareas. Las presentaciones de sus soluciones a la tarea transversal evidenciaron creatividad y motivación por hacer el trabajo lo mejor posible; se identificaron con facilidad los roles que se asumieron al interior de las parejas

Por último, los estudiantes manifestaron dificultades con la activación de capacidades relacionadas con la sistematización de la información. En la tarea transversal los datos dados no eran suficientes para su solución y se requería consultar y discriminar más información numérica —por ejemplo, establecer las distancias que separan los carros al partir—.

El análisis didáctico permitió diseñar una unidad estructurada y coherente. Las expectativas de aprendizaje cubren el foco de contenido y abordan el estándar curricular seleccionado: *Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales*. La secuencia de tareas pone en juego los diferentes sistemas de representación del tema, los contextos a partir de su estructura semántica, las situaciones y competencias propuestas en PISA.

Es valioso mencionar, que el diseño de la unidad didáctica representa una novedad en su género, pues vincula dos tipos especiales de tareas: de transición entre objetivos y transversal. Las capacidades relacionadas en estas tareas abordan principalmente la competencia Modelar. El desarrollo de estas tareas se facilitó por la forma en que la tarea transversal fue pensada, pues retoma las capacidades desarrolladas en otras tareas para luego aplicarlas en un contexto real y abierto para que el estudiante modele situaciones como la velocidad de móviles con sistemas de ecuaciones lineales.

AGRADECIMIENTOS.

- 1-Dra. Isabel María Romero de la Universidad de Almería (España), tutora del grupo de autores.
- 2-Dr. Pedro Gómez Guzmán, director de la concentración en Educación Matemática de la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes.

REFERENCIAS.

- Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. y Romero, I. (en prensa). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 . En P. Gómez (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1 (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1893/>
- Institución Educativa Compartir Bochica (2010). PEI: Formación en valores y en empresa para el desempeño en sociedad. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Bogotá DC, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. Conferencia impartida en el VI Seminario de Primavera: la Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Madrid, España.
- Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la Educación Matemática crítica. Bogotá: una empresa docente.