



UNIVERSIDAD VIRTUAL
ESCUELA DE GRADUADOS EN EDUCACIÓN

**Limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato con bajo
desempeño académico al modelar polinomios a partir de un contexto**

Maestría en Educación

Presenta:

Rosa Catalina Rozo Vásquez

Asesor tutor:

Dra. Elvira G. Rincón Flores.

Asesor titular:

Dr. Leopoldo Zúñiga

Villavicencio, Meta, Colombia

Octubre, 2012

Dedicatorias

Dedico este gran logro a Dios, por haberme acogido en sus brazos, haberme protegido y sanado; por haberme dado una segunda oportunidad de vida y así con su fuerza poder llegar al final de este camino.

A mi hermosa hija Paula Alejandra por la paciencia, la compañía y sus abrazos en aquellos momentos de desánimo en que necesité alzar la mirada para seguir adelante; a ella que es el motor de mi vida y por quien doy todo.

A mi esposo por su apoyo incondicional, por la motivación, por su confianza en mí, porque con su ejemplo me demuestra que se debe persistir e insistir hasta el final; a él que me ha enseñado que se pueden alcanzar los imposibles.

A mi Mamá, la más noble mujer que ha dado todo por mí, que ha estado siempre ahí a espera por mí para quererme, cuidarme y ayudarme con su amor a salir adelante.

A mi Padre, ejemplo de fuerza de voluntad.

A mis hermanos Jair y Helena porque también de ellos es el logro y a mi hermanita Diana por su extrema cercanía.

A mis amigos, por sus consejos, respaldo y buenos deseos.

Agradecimientos

A la Mtra. Elvira G. Rincón Flores, asesora de tesis por su ardua labor de acompañamiento académico; pero sobre todo por su sentido humano, apoyo y motivación durante todo el proceso.

Al Dr. Leopoldo Zúñiga Silva y todo el equipo docente que hizo posible el desarrollo del proyecto de tesis; muchas gracias por sus enseñanzas.

Al Tecnológico de Monterrey en México y a la Corporación Universitaria Minuto de Dios en Colombia, por brindarme la oportunidad de superación profesional.

A la Institución Educativa John F. Kennedy del Municipio de Villavicencio (Meta - Colombia), por abrirme las puertas y haberme permitido llevar a cabo la investigación.

A mis estudiantes, que me motivan a seguir en continuo mejoramiento personal y profesional.

Y a todos mis compañeros de maestría que me apoyaron y compartieron sus conocimientos en procura del crecimiento colectivo.

Limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato con bajo desempeño académico al modelar polinomios a partir de un contexto.

Resumen

La presente investigación fue abordada desde un enfoque cualitativo, con el propósito de describir los factores que intervienen en las limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato al modelar por medio de una expresión algébrica un contexto real que involucra la suma de polinomios; esto desde el análisis de las actitudes, los ambientes de aprendizaje y los procesos de modelación desarrollados por los estudiantes. Realizada con veinte estudiantes de tercer grado de bachillerato con bajo desempeño en el área de matemáticas con edades en un rango de trece y quince años; pertenecientes a una institución educativa de carácter oficial, ubicada en un sector urbano del municipio de Villavicencio en el departamento del Meta- Colombia.

En este sentido, el marco teórico se centró en la fundamentación del proceso de modelación, las problemáticas en torno al aprendizaje de las matemáticas, las problemáticas del aprendizaje de la modelación matemática y los errores frecuentes de los estudiantes; de modo que desde el marco del enfoque cualitativo, se emplearon la observación participante, la prueba de evaluación y la entrevista como instrumentos de recolección aplicados a los veinte estudiantes pertenecientes a la muestra.

En conclusión esta investigación permitió explicar la influencia que tienen sobre el desarrollo de los procesos de modelación, las actitudes de los estudiantes, las estrategias de enseñanza, los ambientes de aprendizaje, la enseñanza de las fases del proceso de modelación y los obstáculos epistemológicos como factores intervinientes que permitieron categorizar en un nivel de modelación implícito el proceso de modelación desarrollado en el aula por los estudiantes participantes; así como también vislumbrar alternativas de fortalecimiento de dichos procesos.

Índice

Capítulo 1: Planteamiento del problema	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	6
1.2.1. Preguntas subordinadas	11
1.3. Objetivos de la investigación	11
1.3.1. General	11
1.3.2. Específicos	11
1.4. Supuestos de la investigación	12
1.5. Justificación de la investigación	13
1.6. Limitaciones y delimitaciones	15
1.6.1. Limitaciones	15
1.6.2. Delimitaciones	17
Capítulo 2: Marco teórico	19
2.1. Modelación matemática	20
2.2. Problemáticas en torno al aprendizaje de las matemáticas	33
2.2.1. Problemáticas asociadas a la epistemología	34
2.2.2. Problemáticas asociadas a la psicogénesis	36
2.2.3. Problemáticas asociadas a la motivación y la actitud	41
2.2.4. Problemáticas en torno al aprendizaje de la modelación matemática	45
2.3. Errores frecuentes cometidos por los estudiantes en el desarrollo de actividades matemáticas	48
2.4. Investigaciones relacionadas	51
2.4.1. Estado del arte de las aproximaciones teóricas de las investigaciones realizadas por el Grupo de Discusión de Modelación y Tecnología (M y T)	52
2.4.2. Didáctica de la modelación matemática en los cursos de Física y Matemáticas	55
2.4.3. Sentido de realidad y modelación matemática	57
2.4.4. La reprobación en Matemáticas. Dos Experiencias	59
2.4.5. Mathematical Modelling and Knowledge Transference	59

Capítulo 3: Metodología	63
3.1. Método de investigación	63
3.2. Participantes en el estudio	65
3.3. Instrumentos de recolección de datos	69
3.3.1. La observación del participante	69
3.3.2. La prueba de evaluación	71
3.3.3. La entrevista	72
3.4. Aplicación de instrumentos	73
3.4.1. Fase 1: Observación participante	74
3.4.2. Fase 2: Aplicación de la prueba de evaluación	76
3.4.3. Fase 3: Aplicación de la entrevista	77
3.5. Estrategias para el análisis de datos	78
Capítulo 4: Análisis y discusión de resultados	82
4.1. Aspectos generales	83
4.2. Resultados generales	84
4.2.1. La observación participante	84
4.2.1.1. <i>Asistencia a clase</i>	86
4.2.1.2. <i>Interés</i>	87
4.2.1.3. <i>Cumplimiento con los compromisos asignados para la casa</i>	88
4.2.1.4. <i>Cumplimiento con las actividades de la clase</i>	90
4.2.1.5. <i>Participación</i>	91
4.2.1.6. <i>Preparación para la clase</i>	92
4.2.2. La prueba de evaluación	94
4.2.2.1. <i>Traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático</i>	95
4.2.2.2. <i>Traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal</i>	97
4.2.2.3. <i>Crea contexto a una expresión algebraica</i>	99
4.2.2.4. <i>Suma de monomios con ayuda gráfica</i>	101
4.2.2.5. <i>Relación de cantidades con apoyo gráfico</i>	103
4.2.2.6. <i>Proceso de modelación completo</i>	104
4.2.2.7. <i>Trasmisión de conocimiento matemático</i>	107
4.2.3. La entrevista	108
4.2.3.1. <i>Perspectiva frente al área. Fácil o difícil</i>	108
4.2.3.2. <i>Causas del bajo desempeño</i>	109
4.2.3.3. <i>Experiencias desmotivantes</i>	109

4.2.3.4. <i>Experiencias motivantes</i>	110
4.2.3.5. <i>Ambientes de aprendizaje</i>	110
4.2.3.6. <i>El proceso de suma aplicado a la solución de problemas</i>	111
4.2.3.7. <i>Transmisión del conocimiento matemático</i>	113
4.3. Análisis e interpretación	114
4.3.1. La actitud de los estudiantes frente al área	114
4.3.1.1. <i>Actitud desfavorable</i>	114
4.3.1.2. <i>Actitud favorable</i>	115
4.3.2. El ambiente de aprendizaje	116
4.3.2.1. <i>Estrategias</i>	117
4.3.2.2. <i>Construcción colectiva del conocimiento</i>	118
4.3.3. Nivel de modelación.	119
Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones	125
5.1. Conclusiones	125
5.2. Recomendaciones	132
Apéndices	141
Apéndice A. Formato Lista de Control observación participante.....	136
Apéndice B. Prueba de evaluación a estudiantes.....	137
Apéndice C. Entrevista a estudiantes.....	138
Apéndice D. Carta de consentimiento a la rectora.....	139
Apéndice E. Carta de consentimiento a estudiantes.....	140
Apéndice F. Ficha de seguimiento y observación a un estudiante.....	141
Apéndice G. Ficha de caracterización de un estudiante.....	142
Apéndice H. Fotografías de aplicación de la prueba de evaluación.....	143
Apéndice I. Prueba de evaluación desarrollada por un estudiante.....	144
Apéndice J. Cuadro de codificación de cada estudiante.....	147
Apéndice K. Fotografías del ambiente de aprendizaje.....	148
Apéndice L. Participación de los estudiantes en clase.....	149
Referencias	150
Curriculum Vitae	155

Índice de tablas

Tabla 1.	Funciones ejecutivas desarrolladas de acuerdo a la edad	39
Tabla 2.	Características y recursos correspondientes a la observación participante	75
Tabla 3.	Características y recursos correspondientes a la aplicación del cuestionario	76
Tabla 4.	Características y recursos correspondientes a la aplicación de la entrevista	78
Tabla 5.	Relación entre los niveles de cumplimiento en las diferentes categorías establecidas en la observación participante	93
Tabla 6.	Fases de modelación realizadas en torno a la suma de expresiones algebraicas	120

Índice de figuras

Figura 1.	Descripción del proceso de modelación de referencia Rodríguez (2007, 2010)	56
Figura 2.	Nivel de interés de los estudiantes durante el desarrollo de las clases de álgebra	87
Figura 3.	<i>Figura 3.</i> Nivel de cumplimiento con los compromisos dejados para la casa	89
Figura 4.	Nivel de cumplimiento con los compromisos en clase	91
Figura 5.	Nivel de participación en clase	92
Figura 6.	Confusión entre multiplicar un número por dos y elevar un número a la dos	95
Figura 7	Respuesta dada por estudiantes que no leyeron las instrucciones	95
Figura 8	Traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático	96
Figura 9	Traducción inadecuada de exponentes	97
Figura 10	Traducción en la que se mencionan verbalmente los elementos de cada término	98
Figura 11	Traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal	98
Figura 12	Contexto creado a las expresiones algebraicas planteadas	99
Figura 13	Error en el manejo de los exponentes	100
Figura 14	Contexto creado a expresiones algebraicas	100
Figura 15	Errores en el manejo de los exponentes al determinar una expresión correspondiente al perímetro	102
Figura 16	Reducción de términos sin tener en cuenta los exponentes	103
Figura 17	Error en la agrupación de términos semejantes	104
Figura 18	Apoyo gráfico en la suma de expresiones algebraicas	104

Figura 19	Proceso de modelación completo	105
Figura 20	Relación acertada de la respuesta matemática con el contexto real	106
Figura 21	Errores en la agrupación de términos	107
Figura 22	Errores en la agrupación de términos y representación gráfica	107
Figura 23	Transmisión del conocimiento matemático	108

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

Este proyecto fue diseñado con el ánimo de describir los factores que intervienen en las dificultades que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato para modelar situaciones del contexto real mediante la suma de expresiones algebraicas, como un primer paso al planteamiento de posibles soluciones que solventen dichas dificultades. Surge como necesidad educativa en el contexto de una institución de carácter oficial a razón del bajo desempeño de los estudiantes de tercer grado de bachillerato frente al área de la matemática, en contraste con la importancia que trae la trasmisión del conocimiento matemático a otras disciplinas y teniendo en cuenta la dificultad que implica para la enseñanza y el aprendizaje el carácter abstracto de las mismas (De Vries y Kamii, 1991).

1.1. Antecedentes

En la actualidad, el contexto de las nuevas generaciones: la era mencionada por Frade, (2009) como la era de la “galaxia de Marconi”, en la que los medios visuales imperan en los medios de comunicación y así mismo en la realidad que habitan, los estudiantes, dejan poco tiempo para reflexionar frente a las situaciones reales presentadas habitualmente en el entorno escolar de manera poco relacionada con los contenidos académicos, generando en los estudiantes la pérdida de la motivación y un

distanciamiento cada vez mayor entre el contenido educativo y las representaciones mentales o *conceptos*.

Si bien, el aprendizaje desde el enfoque constructivista es entendido como el cambio en las representaciones mentales como resultado de la experiencia individual (Ormron, 2008), según Cizek (1997) en Frade (2009), en donde se realiza el procesamiento activo de la información; es catalogado además como una consecuencia del pensamiento; de modo que si el sujeto no piensa, no aprende. Este hecho permite considerar la inclusión de los procesos de pensamiento -entendidos como una actividad mental- en las aulas de clase a fin de propiciar el desarrollo de habilidades de pensamiento en relación a las funciones ejecutivas que permiten identificar el estímulo o problema (organizar, planear, ejecutar la acción, evaluarla y prever la consecuencias); las habilidades de pensamiento micrológicas que permiten conocer las características del fenómeno (comprender, analizar, sintetizar y evaluar); o en el mejor de los casos habilidades de pensamiento de orden superior que permiten utilizar el conocimiento en la solución de problemas (Frade, 2009).

Lo anterior, ha ampliado las expectativas frente a las metas de aprendizaje en los estudiantes de los diferentes niveles educativos de manera que puedan enfrentar los retos de la actual sociedad; ha generado una resignificación del conocimiento, dejando de ser una construcción aislada para verse como un conjunto de partes articuladas desde distintos ámbitos, disciplinas y perspectivas de producción del mismo (Frade, 2009); y ha acentuado vital importancia en la transferencia de conocimiento como capacidad de orden superior (Caramena, 2009). Así, organizaciones a nivel mundial han manifestado

esta necesidad de articulación mediante un nuevo paradigma educativo; la UNESCO particularmente, expresó durante la Conferencia Mundial de Educación en 1998 de Fráncfurt, Alemania y en la de 2000, la necesidad de “...propiciar el aprendizaje permanente y la construcción de competencias adecuadas para contribuir al desarrollo cultural, social, económico y de la sociedad de la información” (Frade, 2009, p. 23).

Específicamente el área de matemáticas ha ocupado desde siempre un lugar privilegiado en el contexto educativo gracias a su rol como herramienta que facilita la representación de diferentes situaciones de la realidad mediante modelos que además de explicar, permiten solucionar problemas; esto ha hecho que las matemáticas alcancen gran auge precisamente ahí en los nuevos escenarios ofrecidos por la sociedad de la información donde a partir del uso de procesos de modelación y sus aplicaciones se logra sobrepasar la función educativa centrada en la construcción del conocimiento para llegar a su trasposición desde las diferentes disciplinas (Blomhoj, 2008).

La modelación matemática ha sido supeditada a la acción del hombre desde sus primeras representaciones con jeroglíficos, y es considerada como puente entre el conocimiento matemático construido en el aula de clases y el contexto real donde tendrá que ser utilizado dicho conocimiento; ha permitido desde su función sustitutiva-
heurística, sustitutivo-teórica, aproximativas y explorativa-pronosticadora, descritas por Boullosa, Lage y Hernández en el 2009, relacionar los conocimientos previos del estudiante con las teorías, contraponerlos en función de las problemáticas del entorno y crear aproximaciones mediante los modelos, en aras de alcanzar la generalidad del nuevo conocimiento por medio de teorías.

Llevar la modelación matemática al aula de clases requiere incorporar en ella la enseñanza del proceso de modelado y por ende propiciar el aprendizaje de los estudiantes en torno a éste proceso. Esto trae consigo reformas en las estructuras curriculares y por ende en los planes de estudio, pero sobretodo exige cambios rotundos en las prácticas al interior del aula; pues es necesario que los maestros establezcan estrategias didácticas y pedagógicas con las cuales garanticen que los estudiantes vivan en el aula cada una de las fases del proceso de modelado, desarrollen procesos de modelación implícito –inconsciente-, explícito – centrado en el proceso- o crítico – centrado en el análisis crítico- (Greer y Verschaffel, 2007) y desarrollen competencias de modelación por un lado en el marco de la descripción de las habilidades y actitudes, y por otro en base a la complejidad de los procesos de modelación en cuanto a las descripciones de los resultados en cada nivel (Henning y Keune, 2007).

Esta investigación particularmente trató de los factores que intervienen en las dificultades que presentan los estudiantes de tercer año de bachillerato frente a la modelación matemática en relación al uso de las expresiones algebraicas. En este sentido se mencionaron algunos de los factores intervinientes, en el marco de las actitudes (Gómez Chacón, 1998), algunas de las dificultades señaladas en distintas investigaciones (Aravena y Caamaño, 2007; Blomhoj, 2008; Herrera, 1988; Rodríguez, 2010) al respecto de la modelación matemática al igual que aquellas manifestadas en el uso de las expresiones algebraicas en distintos contextos.

Establecer las regularidades y sus relaciones, es lo que permite precisamente acercarse a un proceso de modelado; sin embargo el conocimiento matemático es llevado al aula de clase mediante la transposición didáctica de los métodos usados por los expertos, por lo que se desarrollan aislados de la realidad; así los modelos se trasponen de la actividad matemática y no surgen de la interacción del estudiante con las situaciones reales. Esto hace que el estudiante no pueda asumir una situación real y en base a ella formular hipótesis pseudo científicas que le sirvan como base para iniciar el proceso de modelación matemática que lo lleve a la solución y generalización de resultados (Rodríguez, 2010).

Del mismo modo, la construcción de conocimiento matemático como producto de operaciones aritméticas realizadas sin tener como premisa las relaciones existentes entre las variables presentadas en la situación problema, ocasionan un efecto nefasto particularmente, sobre el uso de las expresiones algebraicas en la solución de problemas. Cañadas, Lupiáñez, Maz, Molina y Palarea, en el 2011, afirman que éste efecto se origina gracias al carácter procedimental de la aritmética; ya que los estudiantes adquieren modismos netamente procedimentales que conducen a seleccionar las operaciones necesarias para la solución del problema en vez de buscar alternativas que permitan establecer relaciones entre las variables para determinar un modelo y con ayuda de este explicar la situación y dar la solución al problema.

Por lo anterior, la enseñanza de la matemáticas se subordina al trabajo con algoritmos apartados de la realidad; asignándose un rol equivocado a las matemáticas, quitándoles su imperante función en el desarrollo científico y por ende en los demás

ámbitos de la sociedad. Desarticular los conocimientos matemáticos de la realidad del estudiante crea una barrera entre el estudiante y sus posibilidades de transformar su entorno (Aravena & Caamaño, 2007; Herrera, 1988).

La experiencia docente, el bajo desempeño y la actitud de los estudiantes de tercer grado de bachillerato corroboran la existencia de dificultades en proceso de aprendizaje de los conocimientos matemáticos correspondientes a este ciclo; tal vez en relación a las dificultades expuestas anteriormente u otras circunstancias de tipo didáctico que de una u otra forma están alejando a los estudiantes de la posibilidad de relacionar el contexto real con el conocimiento construido en las aulas. En este sentido, identificar y clasificar el tipo de dificultad que presentan los estudiantes, permite a su vez identificar los focos que las generan al igual que determinar a futuro un plan de acción que incluya estrategias para solventarlas; beneficiando en primera medida a los estudiantes y en segundo a la comunidad educativa en general.

1.2. Planteamiento del problema

En acuerdo con las exigencias de la actual sociedad de la información, es necesario que la escuela propicie la formación de estudiantes competentes que puedan integrarse a la sociedad de manera eficaz y eficiente actuando como forjadores del desarrollo de los distintos factores sociales (Frade, 2009); en este sentido la formación matemática ha logrado una imperante posición frente a este reto educativo y desde luego social ya que históricamente han sido las matemáticas consideradas como ciencia de los modelos (Herrera, 1988); razón por la cual desde las distintas instituciones educativas a nivel

mundial, han venido siendo reestructurados los currículos en aras de dar cumplimiento a dichas metas educativas otorgando un lugar privilegiado a la modelación matemática y sus aplicaciones, en virtud de sus ventajas sobre el aprendizaje de los conocimientos matemáticos y su trascendencia sobre otras áreas de conocimiento (Blomhoj, 2008).

Llevar al aula de clases el desarrollo de los procesos de modelación hace que los estudiantes deambulen en ambientes propicios que ofrezcan todas las herramientas para llegar a la determinación de modelos, su aplicación y generalización de resultados (Rodríguez, 2010); es decir los ambientes de aprendizaje deben garantizar que el estudiante alcance no alguno de los niveles de modelación definidos por Greer & Verschaffel en el 2007 como implícito, explícito o crítico, centrados respectivamente en actividades cotidianas realizadas de forma inconsciente, los procesos que conducen al modelo o la actividad crítica en la solución del problema), sino el más alto, centrado en el sentido crítico de los productos matemáticos a razón de que éstos no sean empleados sin ningún tipo de comprensión frente a sus supuestos o el concepto a modelar en sí. El modelo sacado de la situación real puede retribuir influyendo en ella misma; cumpliendo con la perspectiva realista sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelación descrita por Blomhoj, (2008) que reconoce el vasto uso de los modelos matemáticos en diversas disciplinas científicas y tecnológicas como un enfoque interdisciplinario que extiende el rol de solucionar problemas reales en el aula de clases, al desempeño futuro de los estudiantes en el marco de la educación superior y como profesionales.

Es de reconocer que pese a los intentos por lograr el cambio en las prácticas educativas al interior de las aulas, se han presentado diferentes perspectivas desde el enfoque epistemológico frente al modelado; una de estas pragmática y utilitarista,

fundamentada en la aplicación del conocimiento matemático en el contexto real, con sentido científico-humanista que centra su atención en la capacidad de los estudiantes para identificar y crear relaciones entre los elementos matemático y la realidad; otra emancipadora, con sentido socio-critico- y una integradora que recoge las bondades de las anteriores en una relación de los fines pragmáticos, científicos y matemáticos (Kaiser, y Sriraman, 2006); lo cual hace que la incorporación de la modelación desde los planes de estudios tenga distintas interpretaciones, reflejadas en una amplia gama de objetivos y argumentos que cobran fuerza y resignifican tal vez de manera errada la modelación matemática en la escuela.

Blomhoj, (2008), cuestiona además de la articulación entre la modelación y los planes de estudio, la coherencia de las teorías desarrolladas en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de los modelos matemáticos, pues es necesario homogenizar las perspectivas a razón de que desde un solo punto de vista sean reconocidos y determinados los desafíos didácticos: objetivos de aprendizaje, razones fundamentales para conseguir los objetivos en los diferentes niveles de educación, ideas sobre cómo apoyar a los maestros en la implementación de metas de aprendizaje asociadas a diferentes formas de organizar la enseñanza, desde lo teórico y lo práctico contemplando el análisis de las dificultades de aprendizaje en relación al modelado.

En aras de homogenizar las perspectivas, se aclaran las fases integradas en el proceso de modelación que dirigen al estudiante desde una situación real hasta la generalización de un conocimiento anteriormente elaborado como producto de la actividad mental y en el mejor de los casos de la interacción social (Rodríguez, 2010); éste proceso fundado en la lectura de los elementos que integran el problema (Cañadas

et al, 2011), que se encuentran de manera implícita en el contexto real del problema y que deben ser identificados para poder establecer relaciones entre ellos a fin de expresarlas en el marco de modelos pseudo- concretos (Rodríguez, 2010); para lo que se requiere por parte del estudiante la capacidad para realizar una lectura analítica aritmética o algebraica que corresponde al proceso de traducción de la situación del marco verbal al marco matemático particularmente, que vislumbra el uso de un tipo de lenguaje aritmético o algebraico según como se haya realizado el análisis: una lectura aritmética conlleva al uso del lenguaje aritmético; mientras que una lectura algebraica conduce al uso del lenguaje algebraico (Cañadas et al, 2011). Si bien las expresiones algebraicas permiten representar una situación real mediante el uso de herramientas matemáticas y el modelo es el producto de la modelación (Boullosa et al, 2009) entonces, se puede afirmar que las expresiones algebraicas hacen parte del gran conjunto de modelos matemáticos.

La preocupación por incorporar estrategias y métodos didácticos que contribuyan a la construcción de aprendizajes significativos se acoge desde su modelo pedagógico holístico y humanista en la Institución Educativa en que fue llevada a cabo la investigación, la cual se esfuerza por cumplir con la perspectiva integradora y realista del proceso de modelado en el área de matemáticas (Blomhoj, 2008; Kaiser, y Sriraman, 2006), ya que reconoce la influencia en los procesos de desarrollo de pensamiento ampliando las competencias no solo en la formación matemática sino en otras áreas; sin embargo se observó bajo desempeño académico en un alto porcentaje con relación al área de matemáticas como reflejo de deficiencias en los procesos de enseñanza o

aprendizaje, bien sea como producto de los diseños curriculares o por prácticas pedagógicas desarticuladas.

En este sentido, se consideró valioso conocer si los estudiantes de tercer grado de bachillerato realizaban procesos de modelación matemática durante el desarrollo de las clases de álgebra, de igual manera establecer los niveles de competencia de los estudiantes frente a estos procesos en relación al uso de las expresiones algebraicas y por supuesto identificar los factores que intervienen en las dificultades que poseen en el momento de modelar situaciones reales empleando las expresiones algebraicas como medio de establecer relaciones entre una situación real y el conocimiento matemático, específicamente en el paso de la situación real a modelos pseudo concreto; a razón de esto cabe dar respuesta al cuestionamiento:

¿Qué factores intervienen en las limitaciones que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato al modelar por medio de una expresión algébrica un contexto real que involucre la suma de polinomios?

El objetivo fue describir los factores que intervinieron en las dificultades que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato para llevar los contextos reales al contexto matemático mediante el uso de modelos que involucran la suma de polinomios; como un primer paso al planteamiento de estrategias que permitan a futuro solventar dichas dificultades, de modo que los estudiantes de tercer grado de bachillerato tengan mejor desempeño académico en relación al área de matemáticas y las demás áreas contempladas en los planes de estudio; esperando además que el éxito académico de los estudiantes se vea reflejado en la trascendencia de sus aprendizajes en los desempeños

futuros correspondientes a los demás ciclos de educación en bachillerato, su educación superior y en su desempeño laboral y profesional.

1.2.1. Preguntas subordinadas

- ¿Qué tipo de actitudes manifiestan los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas, ante la enseñanza de la suma de expresiones algebraicas?

- ¿Cómo es desarrollado el proceso de modelación matemática por los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas, haciendo uso de la suma de polinomios?

- ¿En qué nivel de modelación se encuentran los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño en el área de matemáticas?

1.3. Objetivos

1.3.1. General

Describir los factores determinantes en las dificultades que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato para modelar situaciones del contexto real mediante la suma de expresiones algebraicas, como un primer paso al planteamiento de posibles soluciones al problema.

1.3.2. Específicos

- Identificar las actitudes de los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas, ante la enseñanza de la suma de expresiones algebraicas.

- Conocer las características del proceso de modelación matemática en relación a la suma de expresiones algebraicas desarrollado por los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño en el área de matemáticas.
- Conocer en qué nivel de modelación se encuentran los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño en el área de matemáticas

1.4. Supuestos de investigación

En primera instancia se consideró como una de las dificultades presentadas en los estudiantes para usar adecuadamente las expresiones algebraicas en el tránsito del contexto real al matemático a la lectura aritmética, a la identificación de las cantidades; realizada frente a las situaciones objeto de estudio dejando de lado la lectura algebraica centrada en la búsqueda de las relaciones existentes entre los elementos matemáticos del problema (Cañadas et al, 2011).

Por otro lado se consideró la posibilidad de encontrar como dificultad o problema “la dicotomía entre el papel de la modelación en la construcción del conocimiento y el papel de la misma en realizar aproximaciones del funcionamiento de los procesos naturales” (Cordero et al, 2009, pp. 1718-1719); por lo que es necesario realizar un cambio en las estrategias didácticas y los ambientes de aprendizaje (Cordero et al, 2009), en procura de la construcción colectiva de conocimiento; de modo que aquí se consideró el nacimiento de otra dificultad en cuanto al desarrollo de los procesos, ya que estos pudiesen haber sido desarrollados en el marco de los modelos tradicionales, donde el número de recursos y ambientes para el logro de aprendizajes significativos fuese

mínimo de modo que no fueran tenidos en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, las actitudes y las diferencias individuales reduciendo el proceso de construcción de conocimiento a interpretaciones individuales (Lozano, 2005).

La relación entre esas representaciones o formas de interpretar la realidad que manifiesta el estudiante está directamente asociada a otro problema que define Cordero et al, (2009) como la ausencia de la enseñanza de los métodos de modelación (las etapas de la construcción de un modelo, sus criterios de elección, sus métodos de parametrización, su validación entre otros).

En relación a las dificultades es factible afirmar que los índices de bajo desempeño académico en el área de matemáticas por parte de los estudiantes de tercer año de bachillerato están directamente relacionados a las limitaciones que tienen para modelar situaciones reales mediante expresiones algebraicas.

1.5. Justificación

La importancia de la investigación, se fundó en el papel imperante que cobra el desarrollo de las habilidades de pensamiento en el entorno escolar, como herramienta que permite a los estudiantes construir su propio conocimiento y a partir de él y su interacción con diversas situaciones previamente planeadas por el maestro, pueda transmitir este conocimiento a otras disciplinas (Frade, 2009).

En este sentido, se consideró que las distintas instituciones educativas específicamente en Colombia, bajo las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN) han intentado mediante la incorporación de modelos curriculares basados en

competencias propiciar los conocimientos, destrezas y actitudes, necesarias para que los estudiantes desarrollen competencias –que integran los conocimientos, las habilidades de pensamiento, destrezas y actitudes- con las cuales el estudiante sea capaz de darle solución a problemas cognitivos extraídos del contexto real y que luego de la realización de una secuencia didáctica, éste pueda analizar, explicar, verificar, proponer soluciones y generalizar sus resultados frente a otras situaciones reales (Frade, 2009).

Como pudo verse, es importante en la sociedad actual buscar en todo momento la relación de conocimientos, y en este sentido la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática recibe un lugar especial debido a sus alcances frente a su relación con otras ciencias; ya que como afirman Berrio, M; Bustamante, C; Ocampo, D; Osorio, J y Villa, J. (2009), las matemáticas aplicadas a otras ciencias y desde el ámbito educativo la modelación tiene vínculos con el estudio de situaciones y solución de problemas propias del entorno, ya que se asume como una actividad científica que se involucra en la construcción de modelos propios de las demás ciencias.

Sin embargo, no es raro encontrar maestros de matemáticas que continúan desarrollando sus clases desde la rigidez de los modelos tradicionales; por cuanto se encuentra un elevado índice de pérdida estudiantil frente al área (Álvarez y Castañeda, 2004). Es este índice de pérdida el que refleja un bajo desempeño en los estudiantes de tercer grado de bachillerato y por consiguiente la ausencia de habilidades de pensamiento por medio de las cuales el estudiante logre acercarse a la representación de una situación real mediante un modelo matemático con el que además alcance una explicación teórica de su realidad.

Indagar acerca de las dificultades que tienen los estudiantes para llevar una situación real al contexto matemático empleando expresiones algebraicas dentro del proceso de modelación matemática, es el primer paso para la búsqueda de situaciones didácticas que inmersas en secuencias didácticas integren los elementos necesarios para desarrollar en los estudiantes esas habilidades de pensamiento necesarias para incorporarse exitosamente en la sociedad. En este sentido, la presente investigación puede servir como punto de inicio a nuevas investigaciones asociadas al tema. La institución educativa donde se realizó el estudio contó con un diagnóstico claro a partir del cual pudo preguntarse ¿de qué manera han influenciado el tipo de enseñanza, la didáctica y los ambientes de aprendizaje en las dificultades que presentan los estudiantes?

1.6. Limitaciones y delimitaciones del estudio

1.6.1. Las limitaciones. Se pudo encontrar como obstáculo el hecho que desde una perspectiva subjetiva, los estudiantes ofrecieron interpretaciones distorsionadas acerca de los procesos de modelación, esto hizo que algunas de sus respuestas en la prueba de evaluación y en la entrevista no tuvieran nada que ver con los procesos de modelación; de modo que el análisis de dichas respuestas no contribuyeron a la determinación de los objetivos. También en la prueba de evaluación, se resalta el hecho de que algunos estudiantes leyeron de forma errada las preguntas y así contestaron las preguntas con literales a y b, como si fuesen preguntas de selección con única respuesta dejando anulada la posibilidad de análisis del proceso de modelación en estos casos.

En contraste, se encontró el hecho de que las prácticas educativas y los ambientes de aprendizaje empleados por el profesor del área se constituyeran en mayor parte en el modelo tradicional y por ende en procesos de modelado implícito (Greer y Verschaffel, 2007), haciendo que la investigación se limitara a la explicación de las causas y características de este hecho, dejando de lado el análisis a profundidad de procesos de modelación en otros niveles.

Por otra parte, aunque se determinaron fechas para la recolección de los datos a partir de la programación institucional, estas se vieron postergadas debido a que la institución educativa incluyó en su cronograma de actividades espacios destinados a la celebración de jornadas lúdicas, culturales y deportivas; además de algunas otras realizadas de manera extraordinaria, reduciendo algunos periodos de clase, haciendo que tanto maestros como estudiantes se concentraran en la realización de dichos eventos y por ende que la aplicación de los instrumentos de recolección no fuese de manera puntual. El anterior aspecto generó mayor inconveniente de manera particular en el seguimiento hecho a los estudiantes mediante la ficha de control usada para la recolección de evidencias de avance en los estudiantes con bajo desempeño en el área de matemáticas durante las observaciones en clase; ya que los estudiantes no llevaban las fichas de control pensando que tal vez en los horarios extraordinarios se saltaban las clases de matemáticas; razón por la cual en varias oportunidades al pedirle a los estudiantes las fichas para hacer los registros correspondientes de acuerdo a su desempeño y dejar sellado dicho registro con la firma del maestro, los estudiantes no las entregaban o las entregaban pero incompletas.

1.6.2. Las delimitaciones. Para esta investigación fueron escogidos como muestra un grupo de veinte estudiantes entre un total de 84 estudiantes de grado octavo pertenecientes a una institución educativa del sector público en la región oriental de Colombia; dichos estudiantes, presentaron como característica especial un historial de bajo desempeño en el área de matemáticas; por lo que contrario a lo que estipulan los estándares de competencias básicos establecidos por el MEN (Ministerio de Educación de Colombia) en el 2006; evidenciaron bastante dificultad en sus procesos de aprendizaje de la suma y resta de polinomios, en relación específica al adecuado manejo de los términos semejantes, los signos, los exponentes y la determinación de un proceso para llevar a cabo dichas operaciones entre otros elementos. Por lo anterior, fueron observados los procesos de modelación llevados a cabo por estos estudiantes al interior de las clases de algebra; teniendo en cuenta el uso de las expresiones algebraicas como herramienta de representación de las situaciones del contexto real; de modo que se pudiera observar específicamente las características del tránsito del proceso llevado a cabo por los estudiantes para llevar una situación del contexto real al contexto matemático; observando además las características del contexto escolar y de los ambientes de aprendizaje en el que se desarrollan las clases.

En cuanto a la ejecución, se siguió el enfoque cualitativo, a fin de hacer una descripción de los factores que intervienen en las dificultades que presentan los estudiantes frente al proceso de modelación matemática en relación del uso de expresiones algebraicas en el transito del contexto real al contexto matemático; basado en los métodos etnográficos y de sistematización de experiencias, ya que éstos

permitieron emplear estrategias como la recolección de datos desde la observación, el uso de entrevistas y notas de campo (Mayan, 2001), las cuales permitieron vivenciar las experiencias de los estudiantes, mientras ellos desarrollaban los procesos de modelación.

El estudio fue puesto en práctica durante junio y agosto del año 2012, tiempo en el que se realizó la recolección y análisis de datos.

Capítulo 2

Marco Teórico

Si bien consideran los expertos que la educación es la puerta que integra a un individuo a la sociedad, es una necesidad de toda persona formarse matemáticamente para lograr incorporarse de manera eficiente y eficaz en la sociedad; a fin de que pueda contribuir a su desarrollo; no se puede pensar en alguna situación de la naturaleza en la que las matemáticas no estén presentes, esto las muestra como herramientas para explicar y comprender las infinitas interacciones del mundo. Estas entre otras, son las razones por la cuales desde la escuela como órgano social en el que las personas adquieren conocimientos formales dentro de un proceso de formación holístico, debe esforzarse por garantizar el éxito de los procesos de enseñanza reflejados en aprendizajes significativos respecto al área, de manera que los conocimientos disciplinares sean relacionados con los diferentes contextos de la naturaleza y permitan a los estudiantes establecer representaciones mentales con las cuales expliquen su entorno actuando de manera flexible a los cambios. En aras de vislumbrar un camino hacia este tipo de formación matemática, desde la matemática educativa se han presentado estudios basados en la modelación matemática respecto a la enseñanza y el aprendizaje; por cuanto se ha tomado este tema como eje central de esta investigación con el fin de describir los factores que intervienen en las dificultades que presentan los

estudiantes de grado octavo para modelar situaciones del contexto real mediante la suma de expresiones algebraicas.

Por consiguiente se presentó la revisión de los principales conceptos y experiencias realizadas en torno a la modelación matemática como herramienta de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases; iniciando con algunos conceptos frente a los modelos cognitivos en relación a los procesos de pensamiento, mostrando algunas dificultades que en base a ellos se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y finalizando con algunas experiencias relacionadas con el tema.

2.1. Modelación Matemática

Entender el proceso de aprendizaje como *“un cambio permanente en las asociaciones o representaciones mentales como resultado de la experiencia”* (Ormron, 2008, p.5), implica un cambio en los procesos de pensamiento, que subyace en el cerebro -*“órgano rector de la persona; es lo que siente, piensa y actúa”* (Frade, 2009, p. 61)- y se refleja en la capacidad de análisis, y de toma de decisión frente a un problema, en donde intervienen además del conocimiento disciplinar, situaciones afectivas y actitudinales que cambian la percepción del problema. La relación entre estas situaciones muestra dos aspectos:

1. El cerebro “actúa como un todo complejo, como un sistema que no puede ser separado cuando se le educa; esto es, que no hay conocimientos independientes de la actitud que se despliega o de las emociones que se

generan, o bien, conocimientos separados de las habilidades de pensamiento que los construyen” (Frade, 2009, p. 62). Por cuanto las actividades de pensamiento son dadas de manera holística, integrando los diferentes dominios asociados al problema.

2. La necesidad de que el estudiante en su proceso de aprendizaje adquiera habilidades mentales que le permitan habituarse de manera flexible a los cambios del contexto.

En base a estos, se considera que los ambientes de aprendizaje deben estimular el desarrollo de las funciones de pensamiento; que vienen siendo hoy por hoy una preocupación latente a nivel mundial; al respecto la Organización de la Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por sus siglas en inglés) expresó al respecto durante la Conferencia Mundial de Educación en 1998 de Fráncfort, Alemania y en la de 2000, que: “ Existe la necesidad de propiciar el aprendizaje permanente y la construcción de competencias adecuadas para contribuir al desarrollo cultural, social, económico y de la sociedad de la información” (Frade, 2009, p. 23).; pues si bien debe asegurarse los procesos de construcción de conocimiento, es aún más relevante conducir los procesos educativos al desarrollo de habilidades que permitan al estudiante desenvolverse eficaz y eficientemente en los diferentes contextos; por cuanto el desarrollo de esas habilidades traducidas en competencias se supedita al uso del conocimiento y así mismo a la construcción y desarrollo de las estructuras mentales.

Ahora, si el pensamiento es una actividad de la mente (Frade, 2009), desarrollar habilidad de pensamiento tiene que ver lógicamente con la capacidad del individuo para

asociar de manera estratégica el conocimiento existente con un nuevo estímulo; de modo que ese conocimiento ya adquirido produzca habilidad y la habilidad nuevo conocimiento (Frade, 2009); depende del ejercicio que se le permita ejecutar al cerebro, mientras más se ejercite mayor habilidad va a adquirir o por el contrario correrá el riesgo de atrofiarse si no se utiliza.

La experiencia de los estudiantes y la de los maestros entre otros aspectos comunes vistos en los entornos educativos, muestran que la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas ocupan una posición importante en el proceso formativo de un individuo, ya que el estudio de sus conocimientos, su apropiación, adecuación y aplicación posibilitan su inclusión en la sociedad; González (2005, p. 3, citado por Rolfo, Rincón, y Domínguez, 2011) afirma al respecto que “Tener una buena formación matemática es importante para continuar con estudios superiores y para obtener buenas oportunidades laborales”, y no está de más, si es que su uso es obligado tanto en situaciones simples como en situaciones complejas del contexto real. Este hecho justifica por un lado, que las matemáticas sean consideradas como área fundamental en el desarrollo de los procesos educativos escolares a nivel mundial; y por otro, la marcada preocupación por elevar la calidad en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, incorporando estrategias que conduzcan a cambios en las prácticas escolares específicas del área, a fin de acercar el conocimiento disciplinar a las situaciones que circundan al estudiante, de modo que mediante el desarrollo de actividades particulares en el ámbito escolar, el estudiante desarrolle habilidades para formular, modelar y solucionar problemas de su entorno, pues éste último viene a ser la meta terminal del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

A lo anterior se suma que las matemáticas sean descritas como “la ciencia de los modelos” (Herrera, 1988), a razón de que los conceptos matemáticos son inventados por el hombre como modelos de situaciones ocurridas en la naturaleza y desde luego resultan como una representación de las mismas; sin embargo las matemáticas han aparecido históricamente como el “coco” en la escuela gracias a la desarticulación de los conocimientos disciplinares con el contexto real y la transposición didáctica de los métodos empleados por los expertos, al aula de clase produciendo apatía hacia sus contenidos y por ende la individualización de los conocimientos matemáticos; es decir sesgados para muchos y como privilegio de pocos.

Ese calificativo de ciencia de los modelos dado a las matemáticas trasciende a otras ciencias y acentúa la importancia sobre el desarrollo de las habilidades de pensamiento y por ende en los modelos cognitivos presentes en los estudiantes, entendidos como una creación humana y definidos a partir de un conjunto de elementos y sus reglas de operación interna (Herrera, 1988), asociados a las representaciones mentales con que un individuo organiza la información que requerirá en determinado momento.

Herrera, (1988) agrega además los valores matemáticos como elementos o características clave en el desarrollo del pensamiento matemático, que desde luego deben incorporarse al aula de clases; entre estos elementos menciona la claridad, que resulta del análisis exhaustivo que conlleva a la construcción de un nuevo concepto; la precisión, que aparece cuando el pensamiento crítico agota la ambigüedad; el rigor, que permite lanzar afirmaciones irrefutables; la sencillez, que permite transformar lo difícil

en fácil, la generalidad manifestada por la aplicación general dada a los conceptos sobre diferentes situaciones, explicadas sin caer en la repetitividad; y por último la unidad conceptual, dada en la medida en que se disminuyen las nociones básicas; sin estos no sería posible desarrollar las características esenciales del pensamiento matemático y mucho menos se tendría un punto de inicio hacia el desarrollo de las competencias adecuadas para contribuir al desarrollo cultural, social, económico y de la sociedad de la información (Frade, 2009).

En este sentido, los modelos cognitivos reconocidos como “un patrón recurrente, una forma y una regularidad en o las actividades de las experiencias” permiten al estudiante expresar sus ideas y formalizar la construcción de conceptos, ya que “surgen como estructuras significativas principalmente a partir de nuestros movimientos corporales en el espacio, nuestras manipulaciones de objetos y nuestras interacciones físicas”; abriendo la necesidad de incorporar en los ambientes de aprendizaje herramientas interactivas que permitan el acercamiento del estudiante – con sus conocimientos- a la realidad contextual, de manera que logre descubrir las relaciones que existen entre eso que “sabe” y que no puede aplicar; es decir, los alumnos presentan un conocimiento carente de significado para ellos, ya que aunque han sido capaces de estudiarlo, no han construido aproximaciones al concepto” (Cantoral y Farfán, 2003); de modo que es importante el estudio del contexto físico en el proceso de construcción de los conceptos como producto del ejercicio fenomenológico. Este último debe permitir el principio de generalización definido por Ormron, (2005, p. 231). Como un “fenómeno por el que las situaciones que resultan familiares o parecidas a las del experimento

realizado que se den, hacen que la respuesta sea la misma que se dio en el experimento”, y entendido como camino hacia la búsqueda de esas regularidades que irán a conformar las diferentes formas de representación mental.

Boullosa; Lage y Hernández. (2009) reconocen la existencia de la modelación desde el origen de la humanidad, manifestada por las esculturas y pinturas realizadas por los primeros asentamientos como forma de representar los objetos o fenómenos de su cotidianidad; desde luego estas representaciones han evolucionado al punto de llegar a ser consideradas como *modelos*; determinados por situaciones como el desarrollo de la matemática y su aplicación en otras ciencias, que han hecho de la modelación un método para la obtención del modelo que “*exige de un proceso con sus vías, formas y caminos que permita abordar, así como explicar, los fenómenos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento*” (Boullosa; Lage y Hernández, 2009, p. 3) y que requiere tanto de la aplicación de un modelo anteriormente conocido como de la creación de un nuevo modelo. De esta manera Boullosa et al, (2009, p. 1) define la modelación como “*método teórico de la ciencia*” que no puede desligarse de los conocimientos teóricos y prácticos, y que le confieren desde el punto de vista gnoseológico las funciones sustitutiva-
heurísticas, sustitutivo-teóricas, aproximativas y explorativa-pronosticadora; que las explican de la siguiente manera:

1. Sustitutiva-*heurísticas*: se relaciona con el conocimiento previo del estudiante, que sirve como base en la construcción de una teoría más amplia o de una estructura más compleja y contribuye además en el avance de las representaciones.

2. Sustitutivo-teóricas: se da como producto de esa construcción teórica más amplia, ésta aporta una explicación teórica al objeto o fenómeno de estudio y puede ser entendida como producto de la función anterior.
3. Aproximativas: acorde a las exigencias cognoscitivas, ésta etapa contrapone los conocimientos previos y la teoría con nueva información, haciendo de esta última un requisito para un acercamiento al fenómeno u objeto de estudio; no como patrón pero si como una aproximación a este.
4. Explorativa–pronosticadora: se basa en las características particulares del fenómeno (estructura, funciones, comportamiento y proyección) “que al ser exploradas permiten elaborar el pronóstico extrapolando las características y cualidades que lo distinguen desde el objeto o proceso original al modelo y viceversa” (Boullosa et al, 2009, p. 5).

Del mismo modo se le atribuyen a la modelación matemática diversas perspectivas en el marco de la matemática educativa; por su parte Kaiser y Sriraman, (2006) señalan al respecto las siguientes perspectivas:

1. Perspectiva pragmática: centrada en objetivos utilitaristas; es decir la capacidad que tienen los estudiantes para aplicar el conocimiento matemático en la resolución de problemas. Encierra una visión científico- humanista que por un lado distingue las matemáticas como ciencia y por otro las pone a disposición de los ideales de la educación.

2. Perspectiva emancipadora: que asume el desarrollo socio- crítico de la enseñanza de las matemáticas. En qué punto las matemáticas contribuyen al desarrollo social.
3. Perspectiva integradora: explica las aplicaciones del modelo en función de diversos niveles de objetivos; es decir las aplicaciones que el modelo pueda llegar a tener en relación al ámbito científico, matemático y pragmático.

Esta última cobra importancia en base a que los conocimientos se presentan en la naturaleza de forma integrada y no disgregada; por tanto manifiesta una razón válida para la implementación del proceso de modelado con el fin de integrar en las prácticas educativas diversos contextos reales.

Estas funciones y perspectivas del modelado se relacionan con los niveles de modelación *implícito*, *explícito* y *crítico*, expuestos por Greer y Verschaffel, (2007) a partir de la modelación entendida como la correspondencia entre las características de las situaciones reales, alguna estructura matemática y el desarrollo adecuado de operaciones matemáticas; cuyos resultados son contrastados nuevamente con el contexto de la situación real. De este modo Greer y Verschaffel, (2007) atribuyen a cada nivel de modelado las siguientes características:

1. Modelado implícito: enfatiza en aquellas acciones matemáticas realizadas por los estudiantes casi de forma inconsciente, pero que exigen los principios matemáticos de la simplificación idealizada y la precisión (mencionados también por Herrera, 1988), presentadas de forma tan habitual que el mínimo elemento

agregado a la situación real genera perturbación, de modo que se ve reducido a la aplicación de esquemas matemáticos en múltiples situaciones.

2. Modelado explícito: atribuye una especial atención al proceso llevado a cabo en el modelado integrando variados ejemplos de modelos, términos de modelado y conceptos con los cuales se busca trascender las limitaciones del modelado anterior y poder cumplir con los objetivos sociales.
3. Modelo crítico: visualizan las dos caras de las matemáticas, la primera como medio de entender el mundo tanto físico como social y la segunda como el conjunto de estructuras formales con las que se representan precisamente esos mundos.

La importancia de éste último radica en que a partir de las matemáticas se logra explicar, reflejar o representar una realidad, mediante la modelación o remodelación de una situación, éstas últimas como repercusión en la realidad cumpliéndose los objetivos sociales de la educación: la transformación social.

Berrio et al, (2009), en acuerdo con Herrera (1988) y Boullosa et al, (2009); Lage y Hernández, (2009) señalan que las diversas definiciones dadas por diferentes autores como Biembergut y Hein (2004:106) y Rutherford, (1978: 5) a los modelos matemáticos no hacen más que estrechar la relación de las matemáticas con el mundo real, ya que los definen como *“un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”* (Berrio et al, 2009, p. 162).

La modelación cognitiva juega entonces, un papel fundamental en la adquisición y transformación del conocimiento, por cuanto se basa en la articulación de características recurrentes de hechos y percepciones de los estudiantes con situaciones cambiantes en el contexto educativo; como afirma Cordero et al, (2009) la modelación corresponde a un acto de articulación de dos entes, que permite la construcción de nuevas entidades, como producto de la experimentación, toma de datos e interacción con el fenómeno que permite establecer diferencias entre diversos agentes.

En este sentido, considerando que el modelado hace factible la relación de conceptos y significados de modo que se produzcan conocimientos nuevos asociados de forma implícita a la realidad, de manera que el estudiante no solo tenga conocimientos sino que sepa aplicarlos y que la adecuada formación en matemáticas facilita las posibilidades de estudio y laborales de las personas y así mismo del desarrollo científico, se considera interesante incorporar la modelación matemática al aula con plena conciencia de la necesidad de recrear los ambientes de aprendizaje mediante estrategias que faciliten la interacción de los estudiantes desde las bondades de sus diferencias como un primer paso a la aproximación del concepto y a la transformación de conocimiento; es decir, centrando la atención en la construcción social del conocimiento que como dicen Cantoral, y Farfán, (2003), “significa abrir el ámbito escolar y adicionar al campo de las matemáticas otras prácticas de referencia” que alimenten los procesos de modelación en el aula y trasciendan la escuela.

Los aspectos señalados anteriormente, en acuerdo con lo expreso por el MEN en el 2006 en el documento N° 3 de Estándares básicos de competencias, conducen

certeramente a los estudiantes hacia un aprendizaje significativo y comprensivo; es decir a un aprendizaje matemático por competencias que no puede ir separado de los modelos de aprendizaje epistemológicos, desde los cuales los conocimientos matemáticos contribuyen tanto a la solución de problemas internos o externos a las mismas matemáticas como a la producción de procesos y técnicas de solución (MEN, 2006); mediante aprendizajes que permiten la reestructuración de un cuerpo de conocimientos acumulados. Distinguiendo así dos facetas de las matemáticas, *la práctica y la formal* centradas cada una de ellas en la relación del sujeto con su entorno y en la argumentación matemática respectivamente; lo que permite establecer a su vez relación con el conocimiento matemático procedimental y el conocimiento matemático conceptual que hacen referencia por un lado al *saber qué* y al *saber por qué* y por otro al *saber cómo, cuándo y qué hacer*; lo que en último determina ser *matemáticamente competente* (MEN, 2006).

En acuerdo, el Ministerio de Educación de España (2009), sostiene al respecto, que el desarrollo de problemas orientados a cada uno de los tipos de conocimientos contribuyen a adquirir habilidad en cuanto a la intuición geométrica o de cálculo al igual que a construir habilidad en cuanto al uso de mecanismos de razonamiento intra – matemáticos y que estos además constituyen en la modelación matemática la *competencia para el conocimiento y la interacción con el mundo físico* a razón del desarrollo de problemas complejos asociados con la realidad.

El MEN (2006) en Colombia, basado en Lynn Arthur Steen (1988) sostiene que la modelación está dada en función de la detección de esquemas que representan las

regularidades ocurridas en un fenómeno o situación y que mediante ese proceso de modelación o matematización son reconstruidas mentalmente; de manera que se puede afirmar que un estudiante ha desarrollado habilidades en los procesos de modelación en la medida en que construya modelos mentales o gráficos que bien, le permitan brindar información acerca la solución de un problema intra o extramatemático; lo que permite afirmar en acuerdo con Maaß (2006) que un estudiante es matemáticamente competente en la medida en que tenga capacidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en diversos contextos -intra o extramatemáticos- de manera voluntaria de acuerdo a la motivación que tenga para poner este conjunto de conocimientos en acción.

En relación a lo anterior, Maaß (2006) basado en las consideraciones teóricas realizadas por Blum y Kaiser propone una lista de sub-competencias asociadas al proceso de modelación; entre éstas se encuentran las siguientes:

1. Competencias para entender el problema y crear un modelo basado en la realidad donde el estudiante:
 - Formula hipótesis para el problema y simplificar la situación.
 - Reconoce las cantidades que intervienen en la situación e identifica las variables clave.
 - Determina relaciones entre las variables.
 - Busca entre la información dada aquella importante y aquella irrelevante para la solución del problema.
2. Competencias para establecer un modelo matemático a partir del modelo real, aquí el estudiante puede:

- Matematizar cantidades y establecer relaciones entre ellas.
 - Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones, haciéndolas menos complejas.
 - Elegir notaciones matemáticas apropiadas para representar situaciones gráficamente.
3. Competencias para resolver cuestiones matemáticas, donde el estudiante muestra dominio en cuanto a:
- Usar estrategias heurísticas tales como la división de problemas para tener problemas por partes; además, de establecer relaciones y problemas homólogos en donde se pueda reformular el problema, por ejemplo mediante el cambio de datos.
 - Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema.
4. Competencias para interpretar los resultados matemáticos en contraste con una situación real, relacionadas a la capacidad del estudiante para:
- Interpretar los resultados matemáticos en contextos extra-matemáticos.
 - Generar soluciones a una situación especial.
 - Emplear el lenguaje matemático en la comunicación de la solución a un problema.
5. Competencias para la validación de la solución, aquí el estudiante está en capacidad de:
- Revisar y reflexionar críticamente sobre las soluciones encontradas.

- Revisar varias veces las partes del modelo en todo el proceso de modelación para asegurarse de que la solución se ajuste a la situación planteada.
- Reflexiona sobre otras maneras de solucionar los problemas.
- Cuestionar el modelo general.

Puede verse que las competencias señaladas están directamente relacionadas con cada una de las fases del proceso de modelación propuestas por Rodríguez (2007, 2010) (Ver figura 1) y como afirma Maaß (2006) con el proceso de metacognición desarrollado por los estudiantes.

2.2. Problemáticas en torno al aprendizaje de las matemáticas

El polivalente rol asignado a las matemáticas en virtud de la diversidad de su intervención en las ramas de la ciencia a través de la historia, ha propiciado la planeación de caminos que desde la enseñanza conlleven al aprendizaje de múltiples conocimientos cambiantes y necesarios para la comprensión y solución de diversas situaciones en los contextos ofrecidos por cada una de las áreas del conocimiento (Gil y De Guzmán, 1993); de modo que el aprendizaje y más aún, la aprehensión de conocimientos, garantizada en la construcción significativa de conceptos se forje inherentemente en medio de dificultades y errores; tal como lo afirman Engler, Gregorini, Hecklein, Müller, y Vrancken, (s, f, p. 12) cuando manifiestan que *“Los errores no aparecen por azar, sino en un marco conceptual basado en conocimientos*

adquiridos previamente”; de modo añadiendo que no desaparecen y que por el contrario persisten y resurgen en las estructuras formadas por los estudiantes, pero que pueden ser utilizados a favor del mismo aprendizaje.

A continuación se presenta un análisis de las dificultades que desde la epistemológica, psicogénesis, la motivación y la actitud; presentan los estudiantes durante su proceso de aprendizaje; además aquellas frecuentes en el aprendizaje de la modelación matemática en su tránsito de los contextos reales al contexto matemático.

2.2.1. Problemáticas asociadas a la epistemología. En acuerdo con las dificultades que surgen como consecuencia de la multiplicidad de inclusión de los conocimientos matemáticos en los contextos reales y el valor que en este sentido cobra el aprendizaje de las matemáticas frente a sus fines sociales; es importante indagar en relación a los errores que con mayor frecuencia cometen los estudiantes durante el desarrollo de sus actividades habituales de aprendizaje en el área. En este sentido, la experiencia docente y las investigaciones que desde la matemática educativa han sido realizadas al respecto de las dificultades en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Del Puerto, Minnaard, y Seminara, 2006), muestran cómo en el producto de las actividades escolares y en el contexto de los estudiantes, se manifiestan dificultades que subyacen en diversos factores, y “...se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas” (Del Puerto et al, 2006, p. 1).; es decir en múltiples errores que aparecen de manera tan habitual en los procesos de aprendizaje, que no se concibe el aprendizaje en la ausencia

de éstos; de modo que deben ser identificados, estudiados y tomados como punto de referencia para que el estudiante a partir de ellos logre un reajuste de ideas que lo acerquen a la construcción de nuevo conocimiento.

Por un lado, vale considerar que los estudiantes al interior de las aulas de clase en repetidas ocasiones basan el desarrollo de sus actividades en una serie de conceptos que han sido construidos bajo deficiencias y que al ser exteriorizados obstaculizan la construcción de nuevos conceptos, ya que éstas deficiencias impiden que los estudiantes afronten adecuadamente las zonas de desarrollo próximo (Frade, 2009), truncando la posibilidad de que ellos desde el desarrollo de las actividades propias de la clase se acerquen a la veracidad del conocimiento. En este sentido se explican las dificultades de los estudiantes como producto de los llamados *obstáculos epistemológicos* (Del Puerto et al, 2006); establecidos como aquellos conceptos errados que obstaculizan el avance en la construcción de nuevos conocimientos.

Lo anterior se manifiesta en un fenómeno habitual contra el que los maestros deben batallar continuamente y que corresponde a *la falibilidad del conocimiento humano* (Del Puerto et al, 2006); es decir en el uso de conocimientos errados que se presentan como verdaderos y que hasta tanto no sean sometidos a un proceso de revalidación que los hagan verídicos ante las nuevas situaciones en las que se aplica el conocimiento, no dejarán de causar dificultades durante la construcción y desarrollo de conceptos.

Si bien, la veracidad de un conocimiento se sostiene en función de su correspondencia efectiva frente a la solución de problemas emergentes de los contextos reales en que se desenvuelven los estudiantes y en los cuales deben desarrollar sus desempeños (Frade, 2009), resulta valioso buscar estrategias que contribuyan durante las clases a maximizar las oportunidades de construcción y verificación de conocimiento; atendiendo a los conocimientos previos y a la extrapolación de técnicas con las que los estudiantes logren el éxito de la aplicación de esos conocimientos previos y de las antiguas técnicas de solución de problemas –tal vez mejoradas- en una nueva situación (Del Puerto et al, 2006); lo contrario conlleva entonces al error.

Al respecto, Del Puerto et al, (2006), alude la dificultad que desde el empirismo y el racionalismo existe para determinar la fuente única de conocimiento, por lo que basado en Popper afirma que resulta más significativo centrarse en la búsqueda de estrategias que ayuden a identificar y eliminar el error; mencionando entre estas, la crítica constante que llevada a cabo sobre el conocimiento errado convierte el error en un oportunidad de aprendizaje. Del mismo modo basado en Brousseau y Bachelard, señala dificultades que subyacen en el entorno psicogenético; por cuanto indica dificultades relacionadas con los estadios de aprendizaje de los estudiantes, la didáctica y los mismos métodos que han protagonizado el proceso de aprendizaje.

2.2.2. Problemáticas asociadas a la psicogénesis. Las problemáticas que conforman este apartado, señalan una relación entre el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo evolutivo de los estudiantes, ya que a partir de los estadios de desarrollo cognitivo estos tendrán “... modos típicos de enfocar los problemas” (De Vries y Kamii,

1991, p. 8); es decir que aprenderán los conceptos de acuerdo a su etapa de desarrollo de operaciones cognitivas y en base a ellos resolverán los problemas habituales de su entorno.

De acuerdo con De Vries y Kamii (1991), Piaget centra su teoría de desarrollo del pensamiento desde la epistemología y la psicología, en aras de explicar en qué consiste el conocimiento y la visión del niño en relación a la naturaleza del pensamiento; afirma que el camino a la verdad del conocimiento muestra una íntima relación entre el empirismo y el racionalismo; por un lado, en virtud de la existencia de un conocimiento físico o empírico asociado a los objetos y cuya base es externa; y por otro considerando la existencia del conocimiento matemático o racional asociado a las abstracciones y cuya base es interna es decir que se origina allí en el interior de la persona.

Si bien, el conocimiento matemático corresponde al conocimiento racional es importante conocer en qué manera los estudiantes se están apropiando de los conocimientos matemáticos transmitidos por el profesor; además de conocer cuáles son las condiciones favorables para que sea dada dicha apropiación. En acuerdo a lo anterior, Piaget y García (2004) sostienen que la psicogénesis está relacionada con origen de las representaciones mentales del universo en el niño; por lo que resulta ser una excelente alternativa hacia el esclarecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes en los diversos niveles de desarrollo evolutivo y por ende educativo.

Desde las aportaciones que hacen De Vries y Kamii (1991) centrados en Piaget, se mencionan las fases en las que se desarrolla la inteligencia y por ende se construye el conocimiento humano:

1. Maduración: cuando el niño comienza a andar
2. Las experiencias con objetos: asociadas al sentido físico
3. La transmisión social: conceptos bien conocidos por los empiristas
4. La equilibración: en sentido lógico- matemática.

Están ligadas indiscutiblemente al desarrollo evolutivo del sujeto; pues en acuerdo a su edad se definen las operaciones ejecutivas; así lo afirma Frade (2009, p. 392), soportada en Piaget “el tipo de operaciones que pueden hacer los niños y niñas depende de su edad: durante la niñez se despliegan las operaciones concretas, y en la adolescencia emergen las operaciones abstractas”; justificándose en el proceso de mielinización neuronal que aumenta gradualmente de acuerdo a la edad y se relaciona directamente con el desarrollo funcional. Esto se asocia a los “... intercambios específicos con el mundo exterior...” (De Vries y Kamii, 1991, p. 26), es decir, al aprendizaje. Así se asevera que el proceso de enseñanza debe estar planeado acorde a las etapas de desarrollo de pensamiento o capacidades cognitivas de los estudiantes para no extralimitar las posibilidades cognitivas de quien aprende y permitir el desarrollo de las funciones ejecutivas de las habilidades de pensamiento correspondientes a la edad (Frade, 2009).

A continuación se muestra en la tabla 1 un resumen proporcionado por Frade (2009, p. 393) acerca de las funciones ejecutivas frías o calientes conocidas como capacidades que tienen los estudiantes para identificar los problemas en relación a lo emotivo o cognitivo respectivamente.

Tabla1.
Funciones ejecutivas desarrolladas de acuerdo a la edad.

Edad	Funciones ejecutivas “frías”	Funciones ejecutivas “calientes”
0 a 12 meses	-Desarrollo de la capacidad para elegir un objetivo y dirigir el comportamiento hacia él.	-Tiene expectativas sobre lo que los otros pueden hacer en torno a ellos.
3 a 7 años	-Control de la atención: atención sostenida y atención selectiva. -Elección del objetivo, iniciativa, planeación, resolución de problemas y pensamiento estratégico (cómo me comporto en situaciones determinadas), procesamiento de la información. Flexibilidad en el pensamiento (no obstinarse con algo) -Memoria de trabajo: qué sigue cuando trabajo	-A partir de los 4 años se deja ver la capacidad para distinguir lo verdadero de lo falso -Comprensión de claves no verbales (gestos y movimientos) por el juego simbólico
7 a 11 años	-Resistencia a distraerse -Elaboración de hipótesis y su comprobación de manera consciente -Control del impulso (principio del autocontrol) -Fluidez verbal -Secuencia motora -Planeación	-Emerge razonamiento moral
12 a 21 años	-Autorregulación -Autocontrol -Monitoreo del desempeño	-Autorregulación y autocontrol emocional

Estas funciones ejecutivas tanto cognitivas como emotivas se ligan a las capacidades de construcción de los conocimientos, tanto físicos como lógico-matemáticas y sociales, y están en acuerdo con las habilidades de pensamiento correspondientes al periodo sensorial-motriz y preoperacional, el nivel preoperatorio, el

de operaciones concretas y el de operaciones abstractas catalogadas por Piaget como estadios de desarrollo cognitivo (De Vries y Kamii, 1991).

Particularmente en el periodo sensorial- motriz y preoperacional el conocimiento es construido mediante el juego por lo que este "... debe ser el primer contexto en el que los educadores incitasen el uso de la inteligencia y a iniciativa (De Vries y Kamii, 1991, p. 23)"; mientras que en periodo sensomotor el interés del niño se centra en los aspectos físicos por cuanto aprende sobre los objetos; es decir aprende desde su mundo físico; por su parte en el periodo preoperatorio el conocimiento relacionado a los aspectos físicos y lógico-matemáticos son indiferenciados, dominando en el pensamiento del niño el aspecto físico y en consecuencia todo su conocimiento estará dado en términos de lo observable, "... el niño preoperacional trata de entender los fenómenos y producir los efectos deseados estableciendo relaciones...(De Vries y Kamii, 1991, p. 30)" entre eso que observa, intentando construir estructuras mediante la abstracción; pero es en el periodo de operaciones concretas en que el aspecto lógico-matemática se disocia parcialmente del mundo físico permitiéndose la construcción de dichas estructuras, iniciando con contenidos fáciles de estructurar como las cantidades visibles, seguido de otras de mayor dificultad. En la etapa de operaciones formales la forma lógico-matemática llega a diferenciarse suficientemente del contenido físico permitiendo el desarrollo de operaciones complejas, como dice De Vries y Kamii (1991, p. 30) "...para posibilitar las operaciones sobre operaciones...", es decir mediante abstracciones reflexivas, aquellas que permiten abstraer lo no observable.

Lo anterior es lo que tal vez corresponde a la mayor dificultad del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a razón de que no es fácil transmitir algo que no se puede ver y más aún transmitir relaciones entre construcciones mentales – operaciones sobre operaciones-; esto en base a De Vries y Kamii, (1991, p. 28) cuando afirma que “... el conocimiento matemático no es observable porque está construido a partir de las relaciones que el mismo niño ha creado entre los objetos y cada relación que él cree es una relación entre las relaciones que él creó antes”, lo que hace que el ser humano en esta etapa –de adolescencia- tienda a continuar en la búsqueda de relaciones entre los objetos sin determinar factores causales y por ende dedicándose a procesos alejados de la lógica pura.

2.2.3. Problemáticas asociadas a la motivación y la actitud. Pese a los bajos desempeños académicos registrados en la Asociación Internacional de Evaluación del Rendimiento Escolar (IEA) respecto al área de matemáticas, la búsqueda de factores intercurrentes en el fenómeno ha sido ampliado en los últimos años, pasando del análisis de las relaciones entre los rendimientos y los factores cognitivos -conocimientos y capacidades-, al análisis de influencia que tienen las emociones al respecto (Hidalgo, Maroto y Palacio, 2005); razón por la cual se toman en referencia la motivación y la actitud, en su papel frente al alcance de los aprendizajes en el área de las matemáticas.

En este sentido, se considera la motivación como “*un estado interno que nos anima a actuar, nos dirige en determinadas direcciones y nos mantiene en algunas actividades*” (Ormron, 2008, p.480) y como factor determinante del aprendizaje; ya que independiente de las capacidades que tenga el estudiante, es el motor que lo impulsa a

realizar determinada actividad y a buscar alternativas o estrategias para hacerla; condicionando además que a futuro continúe realizándolas.

La motivación por ende está asociada a la voluntad del individuo; por lo que interviene también en la *actitud o disposición* con que el estudiante realice sus actividades (Castañeda y Álvarez, 2004); puede llegar a formar parte de las características de la personalidad, y a influir en mayor o menor medida en la toma de decisiones frente al caso específico de la realización de actividades que lo conlleven al aprendizaje (Ormron, 2008); determinando respectivamente una baja en el desarrollo de los desempeños o por el contrario desempeños de funciones ejecutivas de nivel superior (Castañeda y Álvarez, 2004; Frade, 2009).

Gómez Chacón (1998, p. 185), apoya lo anterior afirmando que “... *las emociones intervienen en el aprendizaje de forma significativa ya sea facilitándolo u obstaculizándolo, desempeñando un papel en la comunicación de intenciones de los estudiantes hacia los demás...*”; confirmando de este modo la necesidad de considerar la dimensión afectiva - conjunto de sentimientos y humores paralelos a la cognición- a la hora de diseñar estrategias o ambientes que potencialicen el aprendizaje de los estudiantes. Esta dimensión afectiva entre otros elementos integra las creencias que tienen fuerte estabilidad y corresponden en parte al dominio cognitivo, las actitudes que predisponen el comportamiento según sean positivas o negativas -corresponden al dominio cognitivo y afectivo-, los valores asociados a aquello que el hombre ama o estima, y las apreciaciones.

Del mismo modo la actitud que como ya se mencionó anteriormente está implícitamente ligada a la disposición y forma para hacer las cosas, es un indicador de comportamiento frente a un área de conocimiento y desde luego en los resultados académicos, *entre estas la dificultad y el rechazo* (Hidalgo et al, 2005); por cuanto para aprender matemáticas se deben inculcar actitudes positivas hacia el área y así se posibilite el acceso consciente del estudiante a los conceptos (Castañeda y Álvarez, 2004) y desde luego a la construcción, transformación y transmisión de conocimiento. Hidalgo et al, (2005) señala frente al tema de las actitudes el especial cuidado que se debe tener frente a las actitudes matemáticas que meramente cognitivas causales de la dificultad, y las actitudes frente a las matemáticas en las que predomina lo afectivo sobre lo cognitivo, referidas puntualmente a la forma de ver el área, su valoración, el interés hacia ella y hacia su aprendizaje.

Como se ha podido ver el aprendizaje y desempeño de los estudiantes se ve afectado de manera positiva o negativa por la motivación, emociones y actitudes que trae consigo el estudiante a los ambientes de aprendizaje (Hidalgo et al, 2005), específicamente desde el ámbito afectivo *las dificultades se asocian a las vivencias emocionales del área.*

A continuación se toma como referencia algunos aportes hechos por Hidalgo et al, (2005) y se presentan algunas relaciones que afectan el aprendizaje en el área de las matemáticas y que tienen que ver con las vivencias emocionales de los estudiantes:

1. Estímulos asociados a las matemáticas como reacciones de su profesor, mensajes sociales, de sus compañeros de clase; y que impulsan a frustran futuras actuaciones en los ambientes de aprendizaje.
2. Opinión del maestro en relación a sus estudiantes. Se encuentra con frecuencia que los altos desempeños corresponden a aquellos estudiantes que mantiene una adecuada relación de intercambio con su maestro.
3. Relación metodología – actitud. Taylor (1989) y Aiken (1970) en Hidalgo et al, (2005) afirman que se reduce la actitud negativa hacia las matemáticas casi en un 50% cuando son aplicadas metodologías menos tradicionales. Mientras más pasiva sea esta menor será la actitud favorable en el área.
4. Relación actitud – edad; ya que a medida que se avanza en la edad, es menor la probabilidad de que se mejore la actitud frente al área.
5. Relación actitud – adolescencia; ya que se ha identificado que durante la adolescencia disminuyen las actitudes positivas en relación a las matemáticas, debido a los cambios emocionales que sufren los estudiantes en esta etapa.
6. Relación actitud- creatividad del maestro; en los primeros niveles de enseñanza en virtud de que a mayor creatividad del maestro, mejor será la actitud y gusto del estudiante por el área. Aspecto que puede ser trasladado a los niveles de educación secundaria.
7. Creencias acerca del éxito y el fracaso.

Las relaciones presentadas anteriormente dejan ver algunas de las características tanto de los estudiantes con actitudes positivas frente a las matemáticas como de aquellos con actitudes negativas; además de una que otra relación de las actitudes de los estudiantes con sus maestros que determinan igualmente la actitud hacia las matemáticas.

Por lo anterior, es evidente la necesidad de direccionar los ambientes de aprendizaje a la potencialización de la motivación y la buena actitud en los estudiantes de modo que así como lo afirma Maslow en Ormrond, (2008), ésta permita que en todo momento ellos permanezcan en la constante búsqueda de satisfacer sus necesidades; de modo que acentúen con mayor motivación intrínseca y su motivación al logro.

2.2.4. Problemáticas en torno al aprendizaje de la modelación matemática.

Cordero et al, (2009) señala algunos problemas referidos al aprendizaje y la enseñanza de la modelación matemática; al respecto afirma que la primer falencia radica en que la mayor parte de las leyes de la naturaleza son explicadas mediante modelos matemáticos, de modo que aunque la modelación se superpone al conocimiento matemático y a la mayoría de las ciencias, la relación entre el conocimiento matemático y las situaciones del entorno, no se ve reflejada en los currículos; por cuanto las prácticas educativas realizadas en el aula quedan alejadas del contexto real del estudiante. Este hecho corresponde a una dificultad por cuanto en la realidad no se concibe el conocimiento disgregado (Frade, 2009); sin embargo allí al interior de las aulas los maestros se las ingenian para mostrar desarticuladamente los contenidos.

Un segundo problema radica en que no se da cumplimiento a la dicotomía dada a la función epistemológica que tiene la modelación matemática: conocer y aproximar -es decir, por un lado se enmarca en la construcción de conocimiento y por otro en las aproximaciones dadas a los procesos naturales- que tampoco es llevada al aula de clases mediante la enseñanza y mucho menos por medio del aprendizaje; vale considerar que ésta dicotomía debe darse completa, pues si no hay construcción de conocimiento, tampoco se llevarán a cabo aproximaciones a los procesos naturales desde el conocimiento matemático. Frade en el 2009 afirma al respecto que un máximo del proceso de aprendizaje corresponde al logro de habilidades de pensamiento superior con las que los estudiantes demuestran habilidades macrológicas que les permiten la toma de decisiones frente a un problema, la elaboración de hipótesis, verificación, diseñar escenarios y ser crítico entre otras actividades que proyectan el aprendizaje significativo sobre su realidad.

Esta disgregación dada entre el conocimiento matemático y los procesos naturales conllevan a un tercer problema, de tipo social y epistemológico ya que pese a la necesidad de adquirir una adecuada formación matemática, el conocimiento matemático es individualizado de manera que son pocos los que adquieren el conocimiento y muchos quienes se privan de él; “lo que ha privado la modelación matemática de la potenciación mencionada por parte de la sociedad” Cordero et al, (2009). De este mismo modo Cordero et al, (2009), en contraste con las necesidades que históricamente se han pronunciado sobre la formación matemática, señala como problema la carencia de la enseñanza de los procesos de modelación matemática, en

relación a que no es impartida la enseñanza de “las etapas de la construcción de un modelo, sus criterios de elección, sus métodos de parametrización, su validación entre otros”.

Lo anterior debido en parte, a la complejidad imputada a los procesos de modelado gracias a la dificultad que se crea a la hora de vincular la experiencia con los procesos matemáticos ligados al diseño (Greer y Verschaffel, 2007), también porque el modelado no ha venido siendo desarrollado de la mano con los planes de estudio como una cadena o escalera desde los primeros ciclos educativos, de tal forma que desde cada uno de los peldaños se permita el avance y la consolidación de los procesos anteriores.

En este sentido si el proceso de modelado no es simple, se requiere por un lado de pericia por parte de los maestros para vincular la actividad en el aula con la del entorno próximo y con la actividad social, a fin de que el estudiante sea capaz de modelar críticamente; siendo competente tanto en el dominio del saber cómo en el del saber hacer (Frade, 2009), con un valor agregado: explicando y viviendo su mundo de manera consiente, con fundamento teórico y poco alejado de su práctica.

Pese a la ausencia de la enseñanza de la modelación, Cordero et al, (2009) presentan algunos aspectos que pueden representar dificultad a la hora de incorporar la modelación en el aula:

1. Por un lado la transposición didáctica, al intentar llevar al aula de clase problemas en los que el estudiante debe acercarse a la modelación practicada por los expertos.

2. El conocimiento previo de los estudiantes en relación al contexto donde se modela. Este influye certeramente en la modelación. Al respecto “Los conocimientos previos están relacionados con el concepto” Rolfo et al, (2011).
3. Juegan un rol importante al respecto las intuiciones y percepciones propias.

En cuanto a la relación de estas dificultades, Rolfo et al, (2011) afirman que “se ha detectado que los estudiantes tienen habilidad para operar pero no para aplicar” y afirma además que otra dificultad es “la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, pues los alumnos pueden saber utilizar fórmulas y definiciones preestablecidas, pero estas habilidades no garantizan que hayan adquirido el conocimiento matemático”

2.3. Errores frecuentes cometidos por los estudiantes en el desarrollo de actividades matemáticas.

Si bien, desde el enfoque epistemológico y de la psicogénesis, se relacionan obstáculos epistemológicos manifestados en errores presentes en las diversas actividades matemáticas, que van desde el desarrollo de actividades sencillas centradas en la solución de operaciones, hasta la solución de problemas que surgen de contextos reales y que implican identificar relaciones entre cantidades; estos trascienden en los resultados de los exámenes que presentan los estudiantes a fin de ser evaluados. Éstos aparecen como producto de la aplicación sistemática de procedimientos sostenidos en falencias; algunos de ellos los presenta Lozano (2005, pp. 243-244):

1. Errores al leer las instrucciones del examen.
2. Errores por descuido o falta de atención (por ejemplo, errores al transcribir un número, al usar la calculadora, al copiar una fórmula, al leer alguna pregunta, etc.).
3. Errores de concepto acerca del significado de una idea o de las limitaciones para aplicar alguna fórmula o procedimiento.
4. Errores provocados por deficiencias en conocimientos previos.
5. Errores de transferencia o aplicación (dificultad para aplicar conceptos matemáticos en problemas prácticos).
6. Errores de traducción de lenguaje común a lenguaje matemático y viceversa (dificultad para codificar problemas en palabras a símbolos matemáticos).
7. Errores de estudio (por ejemplo, inadecuada selección del material de estudio para el examen).
8. Errores en la aplicación de estrategias para tomar exámenes (por ejemplo, inadecuadas estrategias para manejar el tiempo, para seleccionar la mejor respuesta en exámenes de opción múltiple, para evaluar el grado de dificultad de cada problema, para considerar el valor de cada reactivo, etc.).

Incluyendo además errores asociados a factores de la personalidad como la motivación y las actitudes e igualmente, los deficientes hábitos de lectura y de estudio arraigados en los estudiantes; ampliándose el ámbito de los factores involucrados en las dificultades y errores presentados por los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas al entorno emotivo del estudiante.

Pues bien, las características propias de las matemáticas, en sí mismas hacen que el aprendizaje de las matemáticas requiera procesos cognitivos de orden superior estratégicamente desarrollados para que garanticen su asimilación; esto corresponde a una de las dificultades que se presenta tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas (Hidalgo et al, 2005), ya que no basta con retener unos conocimientos aislados; sino que se debe acudir a estrategias con las que se de la asociación y transformación de estos en aras de su aplicabilidad en la solución de problemas (Hidalgo et al, 2005).

Del mismo modo se presentan dificultades gracias al carácter acumulativo del área; ya que los conocimientos adquiridos en un ciclo o nivel contribuyen al desarrollo de nuevos conocimientos y mejores interpretaciones en niveles superiores; por lo que en la medida en que el estudiante haya minimizado los vacíos conceptuales y procedimentales podrá alcanzar desempeños altos mediante el desarrollo de funciones ejecutivas superiores y por el contrario aquel que retenga vacíos desde niveles iniciales, acumulará una serie de inconsistencias que truncarán su avance en los aprendizajes.

Otro factor asociado a la complejidad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, está ligado a la multiplicidad de los ámbitos en que se requiere la presencia de los conocimientos matemáticos; sumado a la necesidad de cambio de los mismos paralelamente a las nuevas situaciones de los contextos reales (Gil y De Guzmán, 1993); a la necesidad de transformar la información que arrojan dichas situaciones al lenguaje matemático y como lo afirma Del Puerto et al, (2006), a las dificultades presentadas gracias a los obstáculos epistemológicos, de psicogénesis y asociados a la motivación y actitud frente al aprendizaje de las mismas; trayendo consigo errores matemáticos transmitidos sistemáticamente en las actividades matemáticas cuyo reflejo se palpa en la reprobación de los exámenes con que se mide el aprendizaje de los estudiantes (Lozano, 2005) y por ende en los bajos desempeños académicos y que se manifiestan.

Por lo anterior, la práctica en la escuela debe orientarse al desarrollo de actividades que permitan reorganizar los contenidos de la obra matemática para traerlos de manera elaborada al contexto escolar (Cordero, 2001) y no mediante la transposición didáctica

disciplinar que desmotiva, obstaculiza y aleja en mayoría a los estudiantes del logro de aprendizajes significativos (Rodríguez, 2010). Es así como la modelación matemática cumple su función en cuanto a la construcción y transformación de conocimiento, ya que ofrece un camino bien definido por el que los estudiantes pueden transitar relacionando las características especiales de una situación real con modelos matemáticos que además de explicar, brindan solución a problemas en el marco de la situación presentada que posteriormente pueden llegar a ser generalizados y llevados a campos de acción pertenecientes a otras disciplinas en las que más que la aplicación de un conocimiento disciplinar matemático se aprecie de manera eficiente como aquellos aprendizajes adquiridos permiten la transformación de un contexto real (Castañeda y Álvarez, 2004).

Lo anterior centra entonces su razón en lo que se podría concebir como el paradigma del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; es decir ese vínculo teórico – práctico que ubica en la posición acertada a las matemáticas dejándola por encima de la simple utilización de los modelos ya existentes –situación presentada en el mayor de los casos en las disciplinas intermedias- y llevándola a la trascendencia y optimización del aprendizaje en otras áreas (Castañeda y Álvarez, 2004).

2.4. Investigaciones relacionadas

El estudio de la modelación de las matemáticas en relación a los procesos de aprendizaje corresponde al centro de acopio de la matemática educativa (Cordero et al, 2009), a razón del auge de la incorporación de los procesos de modelación al aula de

clases y de las diferentes concepciones frente al tema. Por un lado están quienes se refieren erróneamente a la modelación como una aplicación de la matemática y orientan en base a esta connotación sus prácticas educativas (Cordero et al, 2009); están quienes perciben la modelación como el conjunto de regularidades en las actividades o fenómenos que sumados a un conjunto de reglas representan la realidad e intentan explicar, predecir y solucionar aspectos de un fenómeno o situación (Berrio et al, 2009); y otras percepciones como la del grupo de investigación llamado Grupo de Modelación y Tecnología (MyT), amparado por la RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) que concibe la modelación como una construcción social del conocimiento (Cordero et al, 2009).

2.4.1. Estado del arte de las aproximaciones teóricas de las investigaciones realizadas por el Grupo de Discusión de Modelación y Tecnología (M y T). Al respecto de los estudios desarrollados en torno a la modelación matemática, se menciona el realizado por Cordero, F; Suárez, L; Mena, J; Arrieta, J; Rodríguez, R; Romo, A; Casteanu, A y Solís, M. en el 2009 dentro del grupo de Discusión de Modelación y Tecnología (M y T). El estudio nace por la preocupación que proporciona la errada concepción de la modelación, considerada como una aplicación del conocimiento matemático y no como lo que es, *una construcción social de conocimiento*. Así, pretenden determinar el estado del arte de la modelación de la matemática enfatizando en tres tópicos: el epistemológico, el científico y el social; desde la reorganización de la matemática, la construcción de conocimiento y su aportación o huella dejada en la sociedad respectivamente.

Desde el ámbito epistemológico señalan el problema que representa “la dicotomía entre el papel de la modelación en la construcción del conocimiento y el papel de la misma en realizar aproximaciones del funcionamiento de los procesos naturales” (Cordero et al, 2009, pp. 1718-1719), pues por un lado la modelación según Cordero et al, (2009) en la labor de construir conocimiento llama a la necesidad de resignificar la enseñanza y por ende el aprendizaje, en cuanto a un cambio en las estrategias didácticas y en los ambientes de aprendizaje, ya que esa construcción colectiva de conocimiento solo se da en la medida en que se abran los espacios de interacción en el aula, en donde cobran gran importancia las diferencias individuales de los estudiantes (Lozano, 2005); y en cuanto a las aproximaciones asociadas a los procesos naturales, se afirma que serán manifestadas en cuanto exista una relación cercana entre los modelos creados y la realidad del estudiante. La relación entre esas representaciones o formas de interpretar la realidad que manifiesta el estudiante está directamente asociada a otro problema que define Cordero et al, 2009) como la ausencia de la enseñanza de los métodos de modelación (las etapas de la construcción de un modelo, sus criterios de elección, sus métodos de parametrización, su validación entre otros), que en algunos casos puede verse no solo en los ciclos de la escuela secundaria sino también en la formación de los mismos maestros; haciéndose aún mayor la problemática frente a este aspecto, ya que dicha ausencia es replicada en las aulas de clase generando poca motivación en los estudiantes (Berrio et al, 2009).

En cuanto a la construcción de conocimiento matemático, se declara importante incluir el dueto formado por la modelación y la graficación, ya que estas dos en conjunto

forjan “habilidades de aplicación y visualización de los conceptos matemáticos” (Cordero et al, 2009, p. 1720), que desde la socioepistemología hacen su contribución a partir del uso de las gráficas en la representación de las características de las diferentes situaciones, manifestadas mediante el diseño de un modelo; Cordero et al, (2009), particularmente asocia la graficación y la modelación con la representación de las relaciones entre variables y su razón de cambio; es así como a partir de este dúo se intenta dar un nuevo significado a las ecuaciones diferenciales cuyo efecto surte en la capacidad de emplear el conocimiento ya adquirido en la predicción y simulación (comportamiento tendencial y el comportamiento al cambiar los coeficientes en la expresión algebraica) mediante modelos que tienen lugar especial tanto en la escuela como fuera de ella.

El estudio muestra que la modelización tiene lugar en contextos que van mucho más allá de la escuela, ya que explica, representa y relaciona las situaciones reales, calando en disciplinas intermedias propias de la formación profesional que, como en el caso de las ingenierías toman los modelos ya existentes y los adaptan a los nuevos contextos presentados en la práctica; mostrándose una manera en que los procesos de modelado inciden en la sociedad como factor eminente en cuanto a la representación, explicación y medio de solución de problemas.

Por lo anterior, el grupo M y T hace evidente la necesidad de incorporar la modelación al sistema educativo; sin embargo pese a esta necesidad Cordero et al, (2009) menciona algunas dificultades que se encuentran a la hora de insertar este proceso al entorno escolar; entre estas la transposición didáctica de la modelación

realizada por los expertos y pretendida en el ámbito escolar, el conocimiento previo de los estudiantes frente a su contexto, a la disciplina y el manejo de las herramientas matemáticas para la realización del modelado (proceso). El grupo cuenta además de estudios realizados en torno a las praxeologías de las tareas dejadas asignadas a los muchachos a fin de que realicen procesos de modelado y las dificultades encontradas al respecto, referidas principalmente a la dificultad que tienen los estudiantes para llevar una situación real al modelos pseudo-científico (Rodríguez, 2010).

2.4.2. Didáctica de la modelación matemática en los cursos de Física y Matemáticas. Ruth Rodríguez Gallegos del Departamento de Matemáticas del ITESM Campus Monterrey (Monterrey, N.L., México) en el 2010, presenta un estudio realizado en torno a la descripción del proceso de modelado, las estrategias usualmente empleadas por los maestros para llevar a cabo la modelación en el aula, la inclusión de actividades experimentales en tareas no usuales a fin de determinar las estructuras correspondientes a las actividades del proceso de aprendizaje de los estudiantes (las praxeologías), la transposición del proceso de modelado realizado por los expertos y llevado a los contextos escolares, y algunas de las dificultades presentadas a la hora de realizar procesos de modelación en el entorno escolar.

Acota el rol de las matemáticas en cuanto a la modelación de situaciones propias de otras disciplinas, y por ende la necesidad de crear en los estudiantes la llamada cultura matemática de modo que a partir de esta puedan dar solución a las diferentes problemáticas presentadas en su entorno real; para esto, presenta una serie pasos o fases respecto al proceso de modelación seguidas por el estudiante en aras de dar solución a

un problema y lograr la generalización del modelo matemático. Rodríguez, (2010) señala que el estudiante debe partir de la situación real (SR), para ir a los modelos pseudo-concretos (MPC) mediante el uso de hipótesis implícitas o explícitas, posteriormente para recurrir al modelo matemático (MM), a los estudios matemáticos (EM), al resultado pseudo-concreto (RPC), la confrontación del resultado con la realidad (CMR) y por último la generalización y las previsiones (G).

La figura 1. Muestra las etapas de la modelación matemática definidas por Rodríguez, (2007) y expuestas por Rodríguez (2010)

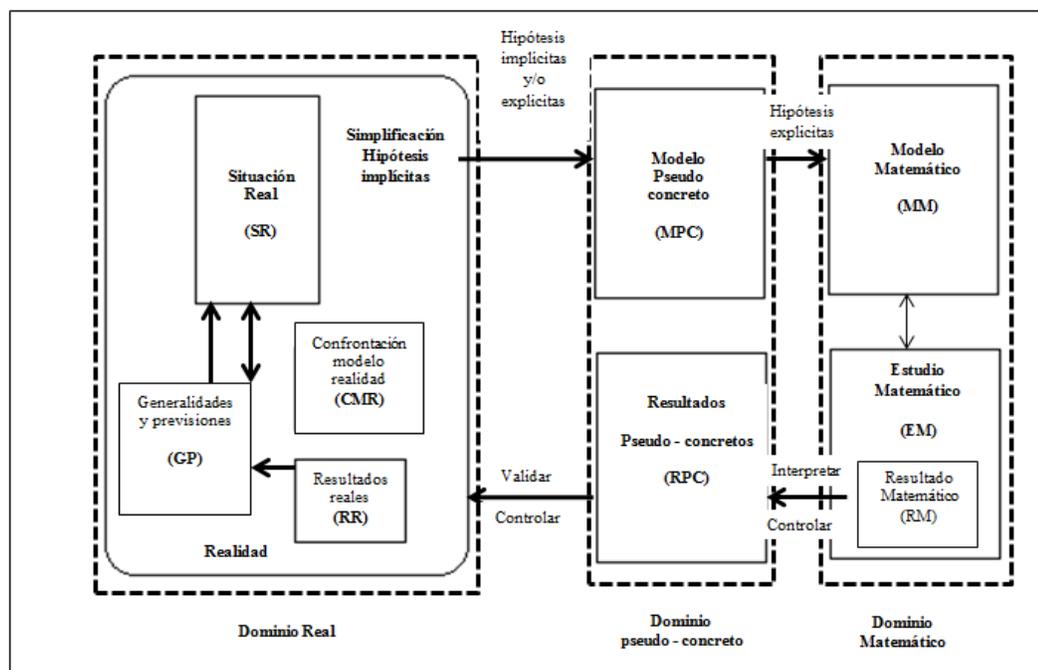


Figura 1. Descripción del proceso de modelación de referencia Rodríguez (2007, 2010).

Añade que el análisis de los tipos de tareas y ejercicios realizados por los estudiantes permite ver que en muchos casos la mayor dificultad se da en cuanto al paso del modelo pseudo-concreto al modelo matemático, acentuándose la necesidad de incluir

en el proceso educativo la enseñanza del proceso de modelación. Cabe resaltar que pese a la dificultad que se tiene frente al paso de la situación real a los modelos pseudo-concreto se debe guiar al estudiante a la confrontación modelo- realidad hasta hoy ausente en las aulas de clase.

Por otra parte recomienda incorporar la mayor cantidad de fases del proceso de modelado en las tareas y demás actividades que deban realizar los estudiantes a fin de contribuir al desarrollo de habilidades asociadas al proceso de modelado; para lo cual propone capacitación docente al respecto.

2.4.3. Sentido de realidad y modelación matemática. Berrio, M; Bustamante, C; Ocampo, D; Osorio, J y Villa, J, en el 2009 describen los resultados de un estudio de casos desarrollado en una subregión del departamento de Antioquia en Colombia, donde indagan acerca del rol desempeñado por la modelación matemática en el aprendizaje de los conocimientos al interior del aula de clases; consiguen determinar la influencia de las reflexiones del sentido de la realidad sobre la modelación matemática y sus aplicaciones en el aula de clases. Partiendo de la definición de los modelos matemáticos como “*un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación*” (Berrio et al, 2009, p. 162) y a su vez categorizando las percepciones de la realidad llevadas por los docentes de manera espontánea y muchas veces errada a las clases; anulando los beneficios que trae relacionar la realidad con el entorno educativo y dejando apatía por el área.

Apoyados en la clasificación que hace Alsina en el 2007, respecto a las realidades, se presentan los siguientes tipos de realidades: las realidades falseadas, que se camuflan

entre palabras cotidianas para aparentar una situación; inusuales, que son poco comunes pero se presentan como habituales; caducadas, como cuando el maestro presenta ejemplos remotos que el estudiante difícilmente puede asociar con las necesidades actuales; ocultas, como aquellas no observables que conducen al desarrollo de ejercicios meramente formales cuyos resultados difícilmente pueden ser contrastados; no adecuadas, en el caso de aquellas realidades que se presentan inoportunamente en el aula, ofendiendo o confundiendo al estudiante; y por último presentan las realidades inventadas que a menudo conllevan al estudiante a cometer errores.

Realizan la investigación mediante el estudio de casos y presentan sus resultados en base a “Alberto”, un profesor de secundaria que utiliza realidades no adecuadas o inventadas para extrapolar las matemáticas del aula de clase; evidenciando cómo la relación de la matemática con la realidad se hace mediante la aplicación y no mediante la modelación, razón por la cual él como docente y sus estudiantes en su rol de receptores pasivos, no visualizan esas regularidades que tienen los fenómenos naturales y de los cuales surge la matemática, que como menciona Rodríguez (2010), corresponde a la dificultad que tiene en este caso el maestro en primera instancia y que transmite a los estudiantes, para ir del contexto o situación real (SR) y por consiguiente para dar continuidad al proceso de modelación.

Por lo anterior, Berrio et al, (2009), proponen a los docentes del área presentar en el aula realidades tangibles que acerquen al estudiante a contextos familiares en los que ellos puedan indagarse hasta encontrar la manera de trascender por cada uno de las fases de la modelación hasta llegar a dar respuesta a problemas reales; esto como forma de

“cumplir una de las funciones sociales de la modelación en las matemáticas escolares” (Berrio et al, 2009, p. 170)., añadiendo que dar sentido a la realidad al interior de las clases hace que la modelación cumpla tanto con la función de interpretación de las problemáticas, facilitando su explicación y solución, así como también con su función transformadora de la realidad subjetiva mediante la resignificación de la realidad objetiva.

2.4.4. La reprobación en Matemáticas. Dos experiencias. Castañeda, A., y Álvarez, M de J. en el 2004, se fundamentan en los trabajos de Vygotsky, Leontier, Luria y Galperi, que refieren el aprendizaje como actividad social, para explicar la relación existe entre la reprobación matemática en los estudiantes de dos instituciones educativas de preparatoria y la actitud de éstos hacia la materia. Para lo cual emplean metodología correlacional en vista del análisis que realizan en torno a dos variables: la actitud y la reprobación.

Establecen unos niveles de reprobación y diseñan instrumentos de recolección de datos (cuestionarios) que les permiten identificar el nivel de reprobación frente a las actitudes de los estudiantes, de modo que al contrastar los instrumentos de recolección de datos con los resultados académicos logran establecer la relación entre las variables en cuestión.

Los resultados obtenidos dejan ver diferencias en los niveles de reprobación entre las instituciones objeto de estudio; además se muestra cómo efectivamente la poca disposición frente al área acarrea mayor dificultad en la realización de las tareas y por ende la reprobación. Por su parte el análisis de los resultados deja como hallazgo el

hecho de que las prácticas tradicionales por medio de las que eran impartidas las clases mostraban mayor indisposición en los estudiantes hacia el área; de modo que se dé como reflexión y recomendación la implementación de estrategias, ambientes de aprendizaje y recursos que contribuyan a incrementar la motivación de los estudiantes para el aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

2.4.5. Mathematical Modeling and Knowledge Transference. Una investigación referente a la modelación matemática la presenta Caramena, (2009), con ella se pretende hacer un acercamiento a los procesos de enseñanza llevados a cabo en la educación superior; que se menciona en cuanto a la importancia que resalta en cuanto al proceso de enseñanza de las matemáticas y su trascendencia a otros campos de conocimiento; mostrando la acentuación de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el éxito de los estudios realizados en torno a las ingenierías. Esta importancia se fundamenta en las metas que deben cumplir los procesos educativos, reflejados en los planes de estudio, y que se presumen reflejar en los campos de trabajo.

De modo que con la investigación se propone determinar que tan bien preparados salen los estudiantes de ingeniería en relación a los conocimientos matemáticos; tomando como referencia la incorporación de los procesos de modelación matemática en el desarrollo de las clases. Se fundamenta en la transferencia de conocimiento como proceso cognitivo que permite llevar el conocimiento de una ciencia a otra, de modo que los conocimientos ya aprendidos deben ser movido mediante procesos mentales hasta que puedan ser utilizados en la solución de nuevas situaciones reales que representen un nuevo conflicto cognitivo.

Esta investigación muestra como resultado la relevancia de garantizar procesos de aprendizaje significativo en los niveles de preparatoria en aras de que el estudiante siga su rumbo hacia la educación superior con bases sólidas que le permitan tener buen desempeño tanto en la construcción del conocimiento matemático como en su transposición.

Para concluir se enfatiza en la necesidad de incorporar procesos de modelación en las practicas referidas al aprendizaje de conocimientos matemáticos, entendiendo este proceso como bien lo expone Boullosa et al, (2009, p. 1) asumido como un “*método teórico de la ciencia*” que no puede desligarse de los conocimientos teóricos y prácticos, y que le confieren desde el punto de vista gnoseológico las funciones sustitutiva-
heurísticas, sustitutivo-teóricas, aproximativas y explorativa–pronosticadora; y que deja como producto inmediato el modelo señalado como “*un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación*” (Berrio et al, 2009, p. 162). De modo que desde cada una de sus perspectivas, funciones y competencias permanezca en todas y cada una de las actividades diseñadas para la construcción, pero sobre todo transmisión de conocimiento de unas disciplinas a otras; de modo que se puedan sopesar las necesidades y dificultades que desde los diferentes entornos entorpecen los desempeños de los estudiantes. Entre estas la incoherencia entre el papel de la modelación matemática y las practicas descontextualizadas llevadas al interior de las aulas, que alejan del contexto real al estudiante y truncan la posibilidad de actuar efectivamente de su entorno (Cordero et al, 2009); la falta de cumplimiento frente a la dicotomía dada a la función epistemológica que tiene la modelación matemática: conocer y aproximar, la

disgregación que se presenta entre el conocimiento matemático y los procesos naturales, la individualización del conocimiento matemático y entre otras la complejidad imputada a los procesos de modelado gracias a la dificultad que se crea a la hora de vincular la experiencia con los procesos matemáticos ligados al diseño (Greer y Verschaffel, 2007).

Capítulo 3

Metodología

El siguiente apartado presenta las particularidades que desde el enfoque cualitativo fueron tenidas en cuenta en el desarrollo de la investigación; implicadas por sus objetivos, determinantes tanto para la selección de la muestra como para el diseño de los instrumentos de recolección y por ende, de las estrategias de análisis de la información.

Por lo anterior se determinó de manera dirigida una muestra de veinte estudiantes de grado tercero de bachillerato que había presentado dificultades en cuanto al desarrollo de las actividades matemáticas y habían obtenido bajo desempeño académico frente al área; cuyas edades corresponden a un rango de edad entre los trece y los quince años. Dichos estudiantes estuvieron incluidos en un programa de apoyo de bajo desempeño en el área de matemáticas ofrecido por la misma institución educativa de carácter oficial, en la cual se llevó a cabo la investigación.

3.1. Metodología de la investigación

Atendiendo al objeto de estudio de la presente investigación “describir los factores que intervienen en las dificultades de que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato en su tránsito del contexto real al contexto matemático en cuanto al uso de las expresiones algebraicas mediante la suma de polinomios; se siguió un enfoque

cualitativo, soportado en el método etnográfico combinado con la sistematización de experiencias.

Lo anterior en virtud de que el enfoque cualitativo permite “reconstruir la realidad tal como la observan los actores de un contexto definido” (Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 9); por lo que se pretendió en la investigación, reconocer, interpretar y explicar los factores que intervienen en las dificultades a partir del análisis de la realidad individual de los estudiantes participantes de modo que además se pudiera establecer el nivel de modelación y las competencias alcanzadas por los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas. Con el apoyo de estrategias de recolección de datos como la observación participante, las entrevistas y las notas de campo ofrecidas por el método etnográfico (Mayan, 2001), se pudieron vivenciar y precisamente reconstruir las experiencias de los estudiantes en los diversos momentos en que se desarrollaron las actividades matemáticas asociadas a la modelación de situaciones mediante la suma, resta, multiplicación y división de polinomios, al interior de la clase.

Del mismo modo fueron consideradas las bondades de la metodología de la sistematización de experiencias haciendo énfasis en la interpretación crítica de las mismas a partir de su ordenamiento, comparación y reconstrucción; en aras de descubrir y explicar la lógica de los procesos vividos, hasta la descripción de cada uno de los factores intervinientes en el proceso; manifestando cómo fueron relacionados entre sí, y por qué fueron dados de esta manera (Jara, 1998); esta sistematización permitió categorizar los eventos encontrados, de modo que se pudo realizar el registro de nuevos

datos sobre la marcha; es decir, mientras transcurrió la experiencia, retomando todos los elementos claves que en ésta intervinieron (Jara, 1998).

De acuerdo con Jara (1998), cuando sugiere establecer claramente la delimitación del objeto de estudio y por ende las experiencias que se pretenden sistematizar, al igual que los periodos de tiempo y lugar, y los ejes de sistematización; es decir los aspectos principales de las experiencias o aquellos en los que se centra mayor interés; se realizó la sistematización de la información de manera parcial atendiendo como ya se mencionó a los factores que contribuyen a la descripción de los factores que intervienen en las dificultades de los estudiantes de tercer grado de bachillerato para modelar por medio de una expresión algebraica situaciones reales asociadas a la suma de polinomios; estableciéndose como técnicas e instrumentos de recolección de datos la entrevista semi-estructurada, la observación participante y la prueba de evaluación.

3.2. Participantes en el estudio

La muestra fue asumida como una fracción de la población sobre la cual se realizó el estudio, es decir que correspondió al subconjunto de la población del cual se recolectaron los datos (Hernández et al, 2006) y que contenía las características que se requerían medir; del mismo modo se tuvo en cuenta que la investigación estuvo ceñida por el enfoque cualitativo, por lo que la muestra fue seleccionada de manera dirigida y como bien lo señala Hernández et al, (2006) correspondió a una selección de tipo no probabilística, a razón de que el investigador ya había estado inmerso en el campo de estudio y desde luego había tenido la oportunidad de conocer las particularidades del

contexto escolar y de algunos casos de estudiantes con dificultades en el desarrollo de las actividades matemáticas por lo que su participación pudo resultar significativa en el estudio.

En este sentido y valorando los aportes de Giroux y Tremblay (2008), en relación a la homogeneidad de la muestra objeto de estudio; se seleccionó una muestra correspondiente a un grupo de 20 estudiantes con bajo desempeño en el área de matemáticas entre un total de 84 estudiantes de tercer grado de bachillerato cuyas edades oscilan entre los trece y quince años; 5 de ellos jovencitos y 15 niñas de estratos socio-económicos 2 o 3 y en un 50% vecinos del sector. El grupo participante a su vez pertenecía a la jornada de la mañana en donde funcionaban dos grupos de grado octavo, 8-1 y 8-2, conformado cada uno por 42 estudiantes que de manera simultánea recibían orientación para el aprendizaje de los contenidos matemáticos en un total de 4 horas semanales, de acuerdo con lo establecido en el currículo institucional.

Del mismo modo en acuerdo a los estándares de competencias básicos establecidos por el MEN en el 2006, y el plan de estudios definido en el PEI (Proyecto Educativo Institucional) de la institución educativa a la cual pertenecen los estudiantes; éstos debían estar en capacidad de demostrar habilidades de desempeño al menos en nivel básico en relación al diseño de situaciones problema propias del entorno en las que requirieran el planteamiento de expresiones algebraicas, cuya solución fuese dada mediante la aplicación de la suma y resta de polinomios; implicándoles el manejo de conceptos básicos tales como variable, constante, coeficiente, término, expresión algebraica, grado de un monomio y reducción de términos semejantes principalmente.

En contraste a lo anterior, los estudiantes pertenecientes a la muestra compartían entre sí el hecho de manifestar dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que presentaban confusión en cuanto al uso adecuado de conceptos básicos necesarios para la solución de situaciones del entorno mediante la suma y resta de polinomios; ocasionándoles bajos desempeños durante los dos periodos académicos transcurridos con anterioridad en el año escolar. Aunque vale resaltar que algunos de ellos, ya habían obtenido bajo desempeño en el área a lo largo de su historia académica. Esta situación también se vio reflejada en las pruebas diagnósticas aplicadas por los profesores al inicio del año escolar, consideradas por Frade (2009) como la evaluación inicial; cuyos resultados mostraron dificultades en casi el 70% del total de los estudiantes de ambos grupos, permitiendo identificar deficiencias en el desarrollo de las actividades matemáticas asociadas por un lado a las operaciones entre números enteros y racionales, principalmente en la potenciación y el uso de signos; y por otro a la interpretación de los problemas planteados; en asocio a la poca capacidad para identificar en ellos las cantidades y sus relaciones.

Se manifiesta que la inmersión del investigador en el contexto escolar propio de los estudiantes participantes en el estudio –cerca de dos años-, fue un factor determinante para la selección de la muestra, ya que a partir de las experiencias vividas con estos grupos, se logró identificar características especiales en cada uno de ellos. Por lo anterior, se pudo decir que los veinte estudiantes cumplieron con características similares que hicieron que la muestra fuera efectivamente de tipo homogénea (Giroux y Tremblay, 2008). Entre estas similitudes se puntualizaron: el rango de edad ubicado entre los trece y quince años, la poca motivación y actitud desfavorable frente al curso,

la baja participación, realización de procesos errados, aportes errados durante las clases, distracción durante las clases, desorden en la toma de apuntes, indisciplina y el bajo rendimiento en matemáticas.

Vale resaltar además que los estudiantes participantes en el estudio estuvieron vinculados a un proyecto de matemáticas de la institución educativa a la que pertenecen, denominado “Superando ando”, iniciado a partir de abril del 2010 como estrategia de apoyo a los estudiantes con bajo desempeño académico en el área de matemáticas. Dicha ayuda fue brindada convenientemente a los diez estudiantes de más bajo desempeño académico y actitud negativa frente al área de cada uno de los grupos o cursos conformados en cada uno de los grados o niveles de bachillerato impartidos en la institución. A estos estudiantes se les entregó una ficha de caracterización personal (Ver apéndice G) en la que se vio reflejado el historial de desempeño académico en el área en relación a sus hábitos de estudio, los recursos empleados, apoyo y acompañamiento familiar, entre otros factores que fueron considerados influyentes en el desarrollo de las actividades matemáticas y que en contraste con los resultados diagnósticos permitieron a los docentes del área definir los errores y dificultades más frecuentes, como punto de partida para la implementación de actividades de refuerzo y tareas especiales a las cuales se les hizo seguimiento semanal y por clase, mediante un formato de seguimiento individual o lista de control (Ver apéndice F).

Lo anterior atiende a las apreciaciones de Mayan (2001), quien sostiene que dentro del ámbito de la indagación cualitativa es factible trabajar sobre muestras seleccionadas intencionalmente, a razón de que estas contribuyen a dar una respuesta que satisfaga tanto los objetivos como las preguntas de la investigación; teniendo en cuenta lo valioso

que resulta incluir a quienes pueden ofrecer más y mejor información, y un mejor contexto, adecuado y pertinente para la obtención de información más clara y precisa sobre un fenómeno; así como a Salamanca y Crespo (2007) quienes añaden al respecto, que el muestreo puede realizarse en relación a criterios demográficos estandarizados como género, raza, edad, ocupación, nivel de instrucción, etc.; categorías importantes en la medida en que aportan a la teoría que se está desarrollando y que pueden ser complementadas con el análisis de otras categorías establecidas por el investigador.

3.3. Instrumentos de recolección de datos

Teniendo en cuenta que el enfoque de la investigación fue de tipo cualitativo en el marco de la etnografía conjugada con la sistematización de experiencias y que la población objeto de estudio fue homogénea; ya que compartieron dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y por ende, bajos desempeños en aprendizaje de las mismas, se implementaron como instrumentos de recolección de datos la entrevista semi-estructurada o entrevista semidirigida, la observación participante y una prueba de evaluación con el fin de obtener información que permitiera reconocer, interpretar y explicar las dificultades de los estudiantes participantes así como el nivel de modelación y las competencias alcanzadas por ellos.

3.3.1. La observación del participante. El proceso de observación se planteó como mecanismo de recolección de la información, como una forma de complementar los datos obtenidos mediante los demás instrumentos de recolección, la entrevista y la prueba de evaluación. Estuvo como instrumento de recolección adicional ya que pudo usarse para obtener información de primera mano, extraída del contexto habitual en que

fueron desarrollados los procesos (Giroux y Tremblay, 2008) y en el mismo instante en que se realizaron, lo que permitió tener un acercamiento directo e inclusive la apropiación de las situaciones vivenciadas sin interferir en el desarrollo normal de las conductas de quienes participaban; de acuerdo a Mayán (2001), actuando en el escenario, de modo que el investigador adquirió conciencia a través de las experiencias personales de quienes estaban involucrados; posiblemente haciendo lo que ellas hacían, al observar todo por completo y convirtiéndose en un miembro más, para comprender la naturaleza del grupo, desde la objetividad requerida para registrar y analizar las observaciones.

Lo anterior considerando que aunque la observación por el investigador pudo tomar varias perspectivas, dependiendo del escenario o del grado de vinculación del investigador, el enfoque fue dado asumiendo al investigador como participante; por tanto al haber estado inmerso en el ambiente donde se efectuaron las acciones, se involucró en éstas pero en un segundo plano; es decir, sin interferir en ellas.

Así, el investigador inmerso en el escenario de los estudiantes pudo crear una perspectiva interna de los procesos de modelación desarrollados, determinar sus perspectivas, niveles y relaciones entre los factores cognitivos y características emocionales y actitudinales que alimentaron la investigación; es por esta razón que la observación además fue de tipo sistemático; es decir, fue planificada e intencionalmente registrada en una estructura realizada objetivamente llamada lista de control o “formato de seguimiento a estudiantes” (Ver apéndice A); de modo que la información fuera verificable, confiable y así tuviera sentido y garantías de científicidad

(Martínez, 2007). Dicha lista de control correspondió a una ficha empleada para hacer seguimiento a los estudiantes vinculados al proyecto de matemáticas “superando ando” desarrollado por la institución educativa de la que como se tomó la muestra. En esta fueron definidos los indicadores o categorías sobre los cuales se hizo énfasis en la observación, atendiendo a los comportamientos y manifestaciones externas por parte de los estudiantes y el grado en que estas se produjeron; de modo que el investigador registró la información relevante en cada una de las clases y por semana acerca de las actitudes, comportamientos, participación y desempeño en las actividades matemáticas realizadas por cada uno de los estudiantes.

El registro de la lista de control, se hizo de acuerdo a las directrices dadas por el proyecto “superando ando”, teniendo en cuenta los indicadores que integran la lista de control o formato de seguimiento listados en la parte superior y chequeados mediante sus respectivos códigos en las casillas correspondientes a cada periodo de observación definidos por semanas y periodos de clases; además de aquellas casillas en las que se registran las firmas de acudientes, estudiantes y maestro, como evidencia de la participación y compromiso de cada una de las partes. Las características de la lista de control o formato de seguimiento pueden apreciarse en el apéndice A.

3.3.2. La prueba de evaluación. Este instrumento correspondió al segundo instrumento de recolección empleado en la presente investigación; consistió en un conjunto de preguntas relacionadas con las variables a medir (Hernández et al, 2006); se consideró una herramienta eficiente ya que por medio de esta se pudo analizar la realidad, causas y toma de conciencia sobre el aspecto analizado por parte del colectivo implicado en la investigación (Martínez, 2007), en él se propuso la solución seis

ejercicios matemáticos, cinco de ellos con literales a y b a los que se esperó que cada uno de los estudiantes participantes respondieran libremente utilizando sus propias palabras y procedimientos (Giroux y Tremblay, 2008). Con la aplicación del instrumento se pretendía que en la práctica los estudiantes manifestaran sus dificultades para traducir el lenguaje verbal al lenguaje matemático, mediante el uso de una expresión algebraica; mostrar sus dificultades para pasar del lenguaje matemático al lenguaje verbal mediante el paso de una expresión algebraica al lenguaje verbal; para realizar la suma de expresiones algebraicas apoyados en gráficos; dificultades para identificar las cantidades inmersas en un problema; para establecer relaciones entre las cantidades y las dificultades asociadas al seguimiento de procesos mecanizados en los que se hace uso de la memoria. La prueba de evaluación puede apreciarse más adelante como apéndice C.

3.3.3. La entrevista. Se adoptó la entrevista semi-estructurada o semidirigida, definida por Giroux y Tremblay (2008, p. 269) como una técnica en la que “... el investigador verifica que el entrevistado le comunique su punto de vista sobre ciertos aspectos precisos del tema de discusión, dejándolo en libertad de abordarlos en el orden que juzgue conveniente.”, de modo que se brindó al estudiante la confianza para que expresara sin cohibiciones sus expectativas, vivencias, creencias y hasta miedos frente al área. Permitiendo así obtener de los entrevistados respuestas más matizadas; es decir, que brindaran mayor información ante el aspecto o categoría estudiada; favoreciendo en este caso particular que los estudiantes no limitaran sus respuestas a alternativas únicas propuestas por el investigador (Giroux y Tremblay, 2008). Lo anterior en aras de identificar dificultades más que de tipo procesual, aquellas relacionadas con la

motivación y actitud del estudiante frente al área. Se consideró además que la entrevista fuera de tipo semi-estructurado porque ésta daba la posibilidad de recolectar datos de los individuos participantes a través de un conjunto de preguntas abiertas formuladas en un orden modificable de acuerdo a las necesidades particulares presentadas al interactuar con los participantes (Mayán, 2001).

Atendiendo precisamente a estas necesidades propias de la investigación, la entrevista empleó además el diseño tópico para aprender más acerca del tema en cuestión, teniendo en cuenta el deseo de ahondar en las experiencias de los estudiantes de tercer grado de bachillerato acerca de sus procesos de modelación, estableciendo las perspectivas de modelación y procesos, considerando otros factores que determinan dificultades que subyacen en otros campos. Así, la entrevista tomó elementos de tipo evaluativo (Mayán, 2001); apoyándose en preguntas de experiencia o conducta usadas para solicitar lo que la persona hace o ha hecho, sus opiniones, valoraciones, conocimientos, seguimiento o sondeo para explorar un tema con mayor profundidad y orientadas al detalle inician con ¿quién?, ¿dónde?, ¿qué?, ¿Cuándo? y ¿cómo?, (Mayán, 2001); como puede verse en el apéndice B.

3.4. Aplicación de instrumentos

La presente investigación tiene tres fases o momentos de recolección de datos, cada uno llevados a cabo de manera independiente y teniendo en cuenta las normas de ética en la investigación, por lo que se dio inicio a la aplicación de los instrumentos

señalados anteriormente con el diligenciamiento de los formatos o cartas de consentimiento por parte del directivo de la institución y de cada uno de los estudiantes participantes en el estudio (Ver apéndices D y E); dejándoles claro los objetivos y metodología de la investigación. De esta manera los participantes fueron enterados de su papel, responsabilidades y del producto o expectativas de la misma, en aras de que tuvieran buena disposición y se sintieran a gusto mientras participaban en el proceso investigativo.

3.4.1. Fase 1: Observación participante. El investigador realizó la observación participante en el aula de matemáticas asignada para los estudiantes de tercer grado de bachillerato de los cursos 8-1 y 8-2, en el transcurso de las clases desarrolladas entre los meses de mayo y junio, valiéndose en algunas oportunidades de instrumentos de video grabación para tener evidencia grabada del contexto general de aprendizaje y de las actividades desarrolladas por los estudiantes de los grados octavos en donde estaba incluida la muestra; además, de fotografías, la lista de control diseñada por la institución educativa para hacer seguimiento a los estudiantes de bajo desempeño vinculados al proyecto de matemáticas “superando ando”, donde se llevó el registro de los aspectos cognitivos, actitudinales y conductuales manifestados por los estudiantes en cada una de las clases de matemáticas, centrándose especialmente en la asistencia a la clase, la puntualidad, participación, desarrollo de las actividades, cumplimiento de tareas y comportamiento. Así, atendiendo a las características de la ficha de control, se hicieron evidentes los indicadores de cumplimiento de los estudiantes en las cuatro horas de clase llevadas a cabo durante la semana.

En este mismo sentido, el investigador de manera objetiva realizó además notas de campo con las cuales complementó la información obtenida mediante la ficha de control; de modo que pudo además registrar los sucesos realizados por los estudiantes participantes en el estudio –y el proyecto superando ando- así como también del grupo en general y de las características de los ambientes de aprendizaje en que se desarrollaron las clases; tales como factores externos que pudieron intervenir en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. La información obtenida mediante las notas de campo fueron registradas en un cuadernillo seleccionado para tal fin haciendo registro de fecha, hora, grupo, actividades desarrolladas y sucesos especiales, y posteriormente fue contrastada con la información obtenida por los demás instrumentos de recolección para alimentar el análisis de los hallazgos. A continuación se muestra en la tabla 2 el resumen las características y recursos empleados en la fase 1.

Tabla 2.

Características y recursos correspondientes a la observación participante.

Instrumento a aplicar	Acciones del alumno	Acciones del profesor	Categorías y/o indicadores a observar	Recursos y materiales	Tiempo Aproximado
Observación participante	Cada uno de los estudiantes realizará las actividades habituales durante las clases de matemáticas.	Adecua el espacio y organiza los tiempos y recursos para llevar a cabo la observación de las acciones de los estudiantes durante las clases de matemáticas.	-Asistencia a clase -Interés -Cumplimiento con los compromisos asignados para la casa -Cumplimiento con las actividades de la clase -Participación -Preparación para la clase	-Estudiantes participantes -Investigador -Lista de control -Video grabadora -Instalaciones de la institución educativa	-Las clases de matemáticas correspondientes a ocho semanas comprendidas entre el 30 de abril y el 22 de junio; que suman en total de 32 horas.

3.4.2. Fase 2: Aplicación de la prueba de evaluación. Esta fue aplicada durante la tercera semana de junio de 2012 en las instalaciones de la institución educativa de manera simultánea e individual a los veinte estudiantes que integraron la muestra. Para esto, con la autorización de la rectora de la institución, se citaron a los estudiantes pertenecientes a la muestra el día 20 de junio y se gestionaron los permisos ante los maestros para que los veinte estudiantes participantes se pudiesen reunir en el salón de matemáticas durante un tiempo aproximado de dos horas; ya que este último fue el tiempo establecido necesario para que de manera cómoda y tranquila fuesen desarrollados los ejercicios planteados en la prueba de evaluación (Ver apéndice H y apéndice I).

A continuación en la tabla 3 se presentan en resumen, los aspectos que integraron la prueba de evaluación, así como también las categorías de análisis, el tiempo, recursos y el rol tanto del maestro investigador como de los estudiantes.

Tabla 3.

Características y recursos correspondientes a la aplicación del cuestionario.

Instrumento a aplicar	Acciones del alumno	Acciones del profesor	Categorías y/o indicadores a observar	Recursos y materiales	Tiempo Aproximado
Cuestionario a estudiantes	Los estudiantes responden de manera individual un cuestionario con cinco preguntas abiertas, mostrando los procedimientos requeridos para la solución.	Adecua el espacio y organiza los tiempos y cuestionarios suficientes para la presentación de la prueba. Cuida la aplicación de la prueba.	- Traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático - Traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal -Crea contexto para una expresión algebraica -Suma de expresiones	-Estudiantes participantes -Investigador -Cuestionarios -Instalaciones de la institución educativa. -Salón de matemáticas.	Dos horas

			algebraicas con ayuda gráfica. -Relación entre cantidades con apoyo gráfico -Proceso de modelación completo -Transmisión de conocimiento matemático.		
--	--	--	---	--	--

3.4.3. Fase 3: Aplicación de la entrevista. La entrevista fue el tercer instrumento aplicado; para esto, se emplearon las instalaciones de la institución educativa, principalmente jardines, corredores y el salón de matemáticas; teniendo en cuenta los horarios definidos por la administración institucional. No se tuvo límite de tiempo, pero se estimó un tiempo aproximado alrededor de los cuarenta minutos empleado por cada estudiante; en este tiempo el investigador acorde al enfoque de la investigación y a las características del instrumento facilitó las condiciones para que los estudiantes contestaran ampliamente frente a cada una de los interrogantes planteados; es decir, procurando brindar en todo momento un clima confortable y de cordialidad que contribuyera representativamente al logro de los objetivos propuestos.

Las entrevistas fueron grabadas y posteriormente transcritas de modo que posteriormente el investigador de manera objetiva pudo en solitario realizar la transcripción de cada una de ellas e igualmente un análisis individual y cruzado. A continuación se presenta la tabla 4, que muestra en resumen los indicadores tenidos en cuenta en el desarrollo de la misma.

Tabla 4.

Características y recursos correspondientes a la aplicación de la entrevista.

Instrumento a aplicar	Acciones del alumno	Acciones del profesor	Categorías y/o indicadores a observar	Recursos y materiales	Tiempo Aproximado
Entrevista a estudiantes	Cada uno de los estudiantes tiene la oportunidad de intercambiar sus perspectivas frente al área.	Adecua el espacio y organiza los tiempos y recursos para llevar a cabo la entrevista.	-Perspectiva frente al área. (Fácil o difícil) -Causas de bajo desempeño. -Experiencias desmotivantes. -Experiencias motivantes. -Ambientes de aprendizaje. -El proceso de suma aplicado a la solución de problemas. -Transmisión del conocimiento matemático.	-Estudiantes participantes -Investigador -Formato de entrevista a estudiantes -Grabadora de mano -Instalaciones de la institución educativa	Cuarenta minutos por cada estudiante.

3.5. Estrategias para el análisis de datos

De acuerdo con Martínez (2007), la fase de interpretación y reflexión sobre los resultados obtenidos tras analizar los datos constituye una de las más relevantes en el proceso de investigación educativa, porque es la que lleva a establecer el verdadero significado de la información obtenida.

En aras de presentar el análisis de las nociones teóricas, más el producto de la recolección de la información empírica, se esclarecieron y contrastaron las categorías integradas en cada uno de los instrumentos de recolección e igualmente se buscaron los fundamentos que permitieron generar nuevos nodos de conocimiento frente a nuevas prácticas y dinámicas relacionadas con los factores intervinientes en las dificultades de

los estudiantes para modelar matemáticamente una situación real mediante el uso de la suma de expresiones algebraicas.

Por lo anterior y teniendo en cuenta las fases para la recolección de datos que permitieron obtener diferentes perspectivas del problema, se dio inicio al análisis de la información mediante el contraste de los datos; valorando las diferentes perspectivas expuestas por los participantes en los instrumentos aplicados sin dejar a un lado los objetivos finales de la investigación.

Por tanto se planteó la triangulación y descripción de los datos obtenidos mediante la observación, la entrevista y la prueba de evaluación aplicada a los estudiantes a razón de dar validez a los hallazgos arrojados por la investigación (Hernández et al, 2006 y Martínez, 2007). Es así como se realizó en un primer paso la codificación de cada uno de los estudiantes empleando el término E1, E2, E3, hasta E20; posteriormente se codificaron con los términos P1, P2, P3, a cada una de las preguntas planteadas tanto en la prueba de evaluación como en la entrevista; de manera que con ésta codificación se facilitó el trabajo de análisis mediante rejillas de contraste con las que fue realizada la descripción de los hallazgos a partir del análisis de manera horizontal de cada una de las categorías o indicadores señalados en cada uno de los instrumentos de recolección (Ver apéndice J). En cuanto al análisis de los datos obtenidos mediante la observación, se empleó una rejilla de contraste horizontal teniendo en cuenta seis de los indicadores señalados en la lista de control como puede verse en la tabla 5.

En acuerdo a lo anterior, se realizó la descripción de los principales hallazgos obtenidos mediante la observación a partir de la comparación entre las frecuencias de cumplimiento de los estudiantes en relación a los indicadores codificados, estableciendo además subcategorías mediante una escala nominal o niveles de cumplimiento *ideal*, *medio* y *nulo* (Martínez, 2007); de manera similar fue realizado el análisis de los datos obtenidos en la prueba de evaluación, estableciendo como subcategorías las respuestas *correctas*, respuestas con *error de tipo conceptual*, *no lee las instrucciones*, respuestas con *incoherencias* y respuesta nula.

Por su parte, el análisis de los datos obtenidos en la entrevista fue realizado partiendo de la transcripción textual y objetiva de cada una de las entrevistas y posteriormente, también mediante el uso de las escalas nominales o niveles *ideal*, *medio* y *nulo* en donde se fue reflejada la frecuencia en las respuestas dadas respecto a cada indicador. Fue así como las sesiones grabadas y re-escuchadas apoyaron la realización de nuevos registros que en un primer paso formaron parte de la bitácora de análisis (Hernández et al, 2006); con la que más fácilmente se pudieron clasificar los hallazgos correspondientes a cada una de las categorías codificadas previamente y que al ser contrastadas con los fundamentos teóricos contribuyeron a la explicación al problema.

En definitiva, se deja claro que la presente investigación fue dirigida bajo el enfoque cualitativo, apoyada en el método etnográfico y de sistematización; teniendo en cuenta que el objetivo se centra en describir los factores que intervienen en las dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de bachillerato para modelar una situación real mediante la suma de expresiones algebraicas, estableciéndose como

criterios de selección de la muestra el bajo desempeño de los estudiantes y actitudes desfavorables frente al área; por lo que se define como muestra a diez estudiantes de cada uno de los grados 8-1 y 8-2 para un total de veinte estudiantes integrados a un proyecto de matemáticas llamado “superando ando” desarrollado en la institución educativa a la cual pertenecen. La selección de la muestra fue de manera intencional o dirigida, atendiendo a la necesidad de homogenización de la misma y esperando obtener mayor información frente al tema de estudio; sobre la cual se aplicaron como instrumentos de recolección la observación participante, la entrevista y la prueba de evaluación que sirvió para mostrar los procesos seguidos por los estudiantes en la resolución de ejercicios que requieren modelar situaciones reales mediante la suma de expresiones algebraicas. La información obtenida fue analizada mediante rejillas de contraste, que permitieron identificar y clasificar la información correspondiente a las categorías de primer y segundo nivel para realizar la descripción correspondiente al problema de investigación.

Capítulo 4

Análisis y discusión de resultados

El presente capítulo tuvo como finalidad dar a conocer los resultados obtenidos en la investigación, mediante la descripción de los hallazgos más frecuentes y relevantes situados en los datos obtenidos a partir del desarrollo de cada una de las fases metodológicas asociadas a la observación participante, la prueba de evaluación y la entrevista aplicada a un grupo de veinte estudiantes de grado octavo que manifestaron bajo desempeño en el área de matemáticas.

En este sentido se presentan algunos factores que permitieron afirmar que los estudiantes participantes se encuentran en un nivel de modelación implícito; entre estos factores se señalan principalmente, su poca motivación durante las clases de matemáticas, los obstáculos epistemológicos como la confusión entre elevar a la dos y multiplicar por dos, y la enseñanza centrada en la trasposición de los conocimientos matemáticos y desarrollados en un ambiente pedagógico tradicional que limitó su proceso de modelación a la realización de operaciones que sólo en pocas ocasiones se asociaron a contextos reales (Ver apéndice K) . Es así como el proceso de modelación desarrollado estuvo ceñido en una perspectiva pragmática desde donde cumplió funciones de tipo sustitutiva – heurística.

4.1. Aspectos generales

La recolección de los datos fue llevada a cabo con un grupo de veinte estudiantes de los grados 8-1 y 8-2 (diez de cada uno) escogidos a conveniencia ya que tienen en común un desempeño bajo en el área de matemáticas, razón por la cual fueron incluidos en un proyecto institucional que buscó brindarles apoyo pedagógico a fin de que éstos superaran sus dificultades de aprendizaje frente al área. Por lo anterior, dentro de la clase se les hizo seguimiento especial en cuanto al cumplimiento de tareas, participación en clase, desarrollo de actividades durante las clases y el interés, así como también la preparación previa de los temas que serían desarrollados durante el curso de álgebra. Dichas observaciones fueron llevadas a cabo en un formato diseñado por la institución, denominado hoja de control a estudiantes y seguimiento al proyecto “*superando ando*” (Ver apéndice A); lo que permitió observar el desempeño clase a clase de cada estudiante por un periodo de ocho semanas.

En base a lo anterior, fue aplicado el primer instrumento de recolección correspondiente a la observación participante, en donde la maestra titular del curso de álgebra actuó como participante observador tomando el registro de los desempeños de los estudiantes clase a clase y demás aspectos asociados a la motivación y actitud de los mismos frente al desarrollo de las actividades propuestas tanto para las clases como aquellos compromisos asignados para la casa. La información se recolectó entre inicios de mayo hasta la tercera semana de junio y fue registrada en los formatos de control y seguimiento diseñados para apoyar el desarrollo del proyecto institucional del área de matemáticas “*superando ando*” (Ver apéndice A).

Se utilizó además, como segundo instrumento de recolección, una prueba de evaluación aplicada el día 20 de junio y a la que se le asignó un periodo de dos horas; con el fin de indagar acerca de la habilidad de los estudiantes para pasar situaciones del lenguaje verbal al lenguaje matemático, del lenguaje matemático al verbal, proceso seguido para realizar una suma y una resta de polinomios, al desarrollo del proceso de modelación de situaciones reales y a la transmisión del conocimiento matemático.

Dando cumplimiento a las fases establecidas en la presente investigación, se aplicó como tercer instrumento de recolección la entrevista semi- estructurada centrada en la perspectiva que tienen los estudiantes frente al área; es decir si consideran que el aprendizaje de los temas del área de matemáticas es fácil o difícil, las causas del bajo desempeño, experiencias desmotivantes y motivantes que hayan surgido durante las clases, los hábitos de estudio, los ambientes de aprendizaje, la descripción del proceso de suma, al igual que en el proceso de la suma aplicado a la solución de problemas del contexto real.

Cabe resaltar que el grupo de estudiantes participantes estuvo integrado por cinco hombres y quince mujeres cuyas edades corresponden a un rango entre los trece y los 15 años, de los cuales dos están repitiendo grado octavo y otros tres vienen en un proceso de mejoramiento académico que ha avanzado apresuradamente.

4.2. Resultados Generales

4.2.1. La observación participante. Fue realizada por la maestra de matemáticas titular del curso de algebra, durante un periodo de ocho semanas contadas desde la semana comprendida entre el 30 de abril y el 4 de mayo hasta la semana comprendida

entre el 18 y 22 de junio lo que corresponde a un total de 12 clases observadas con los diez jóvenes de grado 8-1 frente a 14 clases observadas a los diez de grado 8-2. La maestra de matemáticas actuó como participante observador, siguiendo y registrando las actitudes y comportamientos emergentes de los veinte estudiantes durante el desarrollo de las clases de matemáticas en las que se estudiaron los temas de suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas. El registro de las observaciones fue realizado en el formato de control y seguimiento al proyecto “*superando ando*” (Ver apéndice A) teniendo como referencia los aspectos señalados en la parte superior del mismo.

En las casillas del formato se escribieron por bloque de clase y por semana los códigos del indicador o indicadores en que los estudiantes hubiesen incumplido; también se hicieron firmar por los padres o acudientes de los estudiantes.

Las clases se desarrollaron en un ambiente de enseñanza donde la maestra brindó a los estudiantes la explicación de los temas, dejándoles un espacio de interacción en donde ellos podían pasar al pizarrón, hacer preguntas y resolver ejercicios de ejemplo con los que ganaban puntos positivos adicionales a las notas registradas en la planilla de calificación (Ver apéndice L). Fue interesante ver cómo los estudiantes se manifestaron interesados en ganar éstos puntos extra, esforzándose por ser los primeros en entregar los ejercicios propuestos para explicarlos en el pizarrón; el problema fue que la puntuación positiva se asignaba a los primeros 10 estudiantes del curso que resolvían los ejercicios; razón por la cual los estudiantes con dificultad, rara vez alcanzaron a obtener puntuación adicional.

Por otra parte los estudiantes con dificultad recibieron durante las clases el apoyo de los compañeros que dominaron los temas, así por medio del trabajo colaborativo algunos realizaron procesos de andamiaje mediante los cuales pudieron dar cumplimiento a los compromisos propuestos para la clase; sin embargo menos de la mitad de la muestra mostraron buena actitud, los demás estaban siempre muy distraídos y con poco interés en el trabajo en clase, al punto de llegar a cometer actos de indisciplina como a hablar, usar el teléfono celular y pararse del puesto. Se vio que tres estudiantes haciendo caso a las sugerencias de la maestra, hacían uso de los videos temáticos ofrecidos en la página de YOU TUBE para reforzar los temas vistos y para la preparación de los temas posteriores.

A continuación se presentan los hallazgos correspondientes al ambiente de aprendizaje anteriormente descrito.

4.2.1.1. Asistencia a clase. Este aspecto se observó teniendo en cuenta que cada clase tiene una duración de dos horas, por tanto la inasistencia a una clase de matemáticas ocasionó el registro de dos fallas; de este modo el mayor registro obtenido fue de 8 horas, seguido por otro de 4 horas y seis registros cada uno de 2 horas.

Igualmente se tuvo en cuenta para el registro, las ocasiones en las que los estudiantes llegaban pasados 10, 15 o hasta 30 minutos de haber iniciado la clase; en este indicador dos estudiantes obtuvieron un máximo registro de 3 llegadas tarde, seguido de tres estudiantes que registraron 2 llegadas tarde. Vale desatacar que uno de los estudiantes coincidió en 4 inasistencias junto con 3 llegadas tarde, de un total de 14 clases observadas; lo que mostró que los estudiantes de bajo desempeño en el área de matemáticas tuvieron buena actitud frente a la asistencia a clase.

4.2.1.2. Interés. La observación y registro correspondiente a este indicador se hizo teniendo en cuenta algunas manifestaciones de actitud positiva durante las clases, entre estas la toma activa de apuntes, mirada centrada en el pizarrón y en la maestra, y muestra gestual de aceptación de las actividades y temas desarrollados en clase; frente a manifestaciones gestuales de pereza, apatía y distracción durante las explicaciones y el desarrollo de las actividades planteadas para la clase; estableciendo tres niveles de atención *el ideal, el medio y el nulo*. En *el ideal* fueron incluidos aquellos estudiantes que permanecieron en la mayoría de las clases inquietantes y activos, en *el medio*, aquellos que en algunas ocasiones manifestaron actitud positiva y en *el nulo* los que definitivamente no demostraron actitud positiva en el desarrollo de las actividades y explicaciones de la clase.

Así, los datos obtenidos en este indicador se expresan en la figura 2.

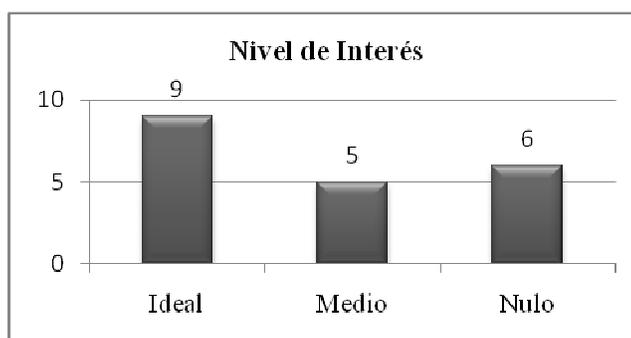


Figura 2. Nivel de interés de los estudiantes de bajo rendimiento durante el desarrollo de las clases de álgebra. (Datos recabados por el autor)

Cerca del 50% del grupo de estudiantes con dificultad en el área de matemáticas, mostraron nivel medio o nulo de interés hacia las actividades desarrolladas en el interior de la clase; se observó que la maestra intentaba repetidas veces llamar la atención de los

estudiantes mediante preguntas sencillas, pasándolos al tablero, asignándoles estudiantes monitores que les ayuden con la explicación de la solución de ejercicios o en la medida de lo posible dirigiéndoles las actividades de manera individual. Los estudiantes de nivel medio respondieron de manera favorable en algunas ocasiones; aunque lo hicieron de manera tímida sobre todo al pasar al tablero, algunos de ellos manifestaron que nunca habían lo habían hecho, argumentaban diciendo: “*yo no paso... profe, es que yo nunca he pasado al tablero*”, otros dijeron “*... profe es que yo no sé*”. Por su parte, los estudiantes de nivel nulo, al preguntarles por algún tema específico decían no saber y se distraían haciendo comentarios o dibujos en el cuaderno, ninguno de ellos participó en el tablero y al realizarles preguntas sobre las explicaciones durante la clase respondían “*... no sé profe, no entiendo*”.

Por su parte los nueve estudiantes ubicados en el nivel ideal, pasaban con confianza al pizarrón para aclarar las dudas de sus compañeros en relación a los ejercicios dejados como tarea para la casa; uno de ellos afirmó mientras explicaba a sus compañeros “*yo encontré en YOU TUBE un video donde el profesor explicaba paso por paso y estaba fácil*” y añadía “*yo lo publiqué en el face book en el grupo de 8-2 para que todos lo miraran*”. Vale resaltar que la mayor parte de los estudiantes de este nivel se acercaban a la maestra durante los descansos para pedirle que les aclarara las dudas que hubiesen resultado durante la clase; lo que pudo ocasionar un grado de acercamiento, confianza o familiaridad que aumentó en ellos el nivel de seguridad y compromiso durante las clases.

4.2.1.3. Cumplimiento con los compromisos asignados para la casa. Los registros realizados se hicieron teniendo en cuenta tres niveles de cumplimiento con los

compromisos dejados para la casa. El primero de ellos, el nivel *ideal* donde fueron incluidos aquellos estudiantes que a lo más fallaron con tres compromisos, el *medio* que corresponde a los estudiantes que incumplieron en la entrega de 4 hasta 6 compromisos y el último nivel establecido fue el *nulo* en el que se incluyeron a los estudiantes que incumplieron con 7 o más compromisos establecidos durante las ocho semanas de observación. Así, los datos obtenidos en este indicador se expresan en la figura 3.

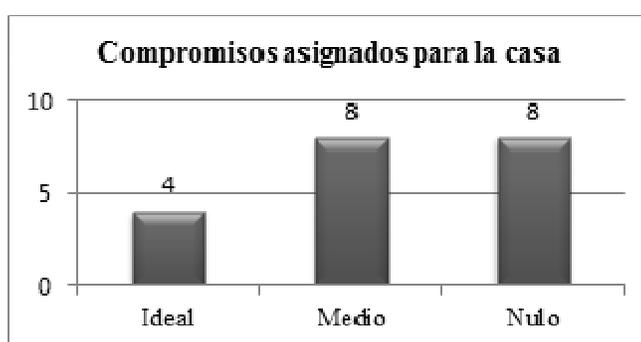


Figura 3. Nivel de cumplimiento con los compromisos dejados para la casa. (Datos recabados por el autor)

Puede verse que del grupo de estudiantes que tienen bajo desempeño en el área de matemáticas, es mínima la cantidad de estudiantes que cumplen con los compromisos para la casa. Por su parte, los estudiantes de los niveles medio y nulo corresponden a cerca del 75%, éste porcentaje raramente realizan las actividades de refuerzo y afianzamiento dejadas para la casa; hecho que repercute de manera negativa en las clases ya que limita su participación, obstaculizando el avance en el proceso de aprendizaje. Los argumentos presentados con mayor frecuencia fueron asociados respuestas como “no entendí”, “es que salí con mis papás a hacer unas vueltas y no me quedó tiempo” o “teníamos una tarea larguísima de biología y no alcancé”.

Se pudo ver que los estudiantes de los niveles medio y nulo de las categorías inasistencia, llegada tarde e interés coinciden en su mayoría con los estudiantes de nivel medio y nulo de la categoría compromisos asignados para la casa (Ver tabla 5).

En este sentido, se destaca que los estudiantes E1, E2 y E3 del grado 8-2 manifestaron en varias oportunidades haber reforzado en sus casas los temas vistos en la clase apoyados en videos temáticos de YOU TUBE, de manera que en repetidas ocasiones se ofrecieron animosamente a colaborar a la maestra en la retroalimentación de los compromisos para la casa y con las explicaciones, a espera de que sus compañeros también comprendieran los temas. Uno de ellos afirmaba *“es que yo tenía duda en la reducción de los términos semejantes, pero me metí a YOU TUBE y puse suma de polinomios y ahí un profesor explicó todo... salió facilito”*

4.2.1.4. Cumplimiento con las actividades de la clase. Se establecieron los niveles *ideal, medio y nulo*, donde los estudiantes del primer nivel pertenecieron a aquellos que a lo más tuvieron 3 incumplimientos, al segundo, aquellos que incumplieron con los trabajos en clase entre 4 y 6 veces y en el último nivel fueron los que incumplieron con 7 o más actividades diseñadas para las clases desarrolladas.

Los datos obtenidos en este indicador se expresan en la figura 4.

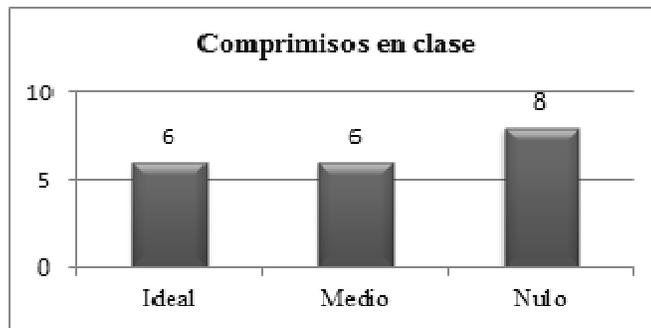


Figura 4. Nivel de cumplimiento con los compromisos en clase. (Datos recabados por el autor)

Se vio que los estudiantes puntuales, son los mismos que hacen tareas, que permanecen interesados constantemente en las clases y que además cumplen con los compromisos asignados para la misma. Por su parte los estudiantes que registraron ausencias, llegadas tarde, poco interés y que no hacían tareas, como en el caso de los estudiantes E11, E15, E18, E19 y E20 manifestaron en varias ocasiones “*dudas asociadas a operaciones básicas como potenciación o suma y resta entre enteros*”, ya que al preguntarles decían no saber. Estos estudiantes gastaron mayor cantidad de tiempo en un ejercicio y rara vez entregaron los compromisos planteados.

4.2.1.5. Participación. Se tomaron como referencia tres niveles, el primero, el nivel *ideal*, en el que se incluyeron a los estudiantes que aportaron activa, continuamente y por iniciativa propia a la clase, el segundo el nivel *medio* que agrupó a aquellos que solamente aportaban tímidamente cuando la maestra les pedía su intervención y el tercero, el nivel *nulo* donde se registraron a quienes rara vez participaron en el desarrollo de las clases.

Los estudiantes que cumplieron con los indicadores anteriores, participaron activamente en las clases; se resalta que “*los estudiantes E1, E2 y E3 realizaron varias*

veces explicaciones en el tablero acerca de las características de términos semejantes, la suma y resta”, mostrando a sus compañeros los distintos procesos. Estos tres estudiantes afirmaron haberse apoyado para aclarar sus dudas, reforzar los temas vistos y preparar los temas siguientes, en los videos temáticos que ofrece YOU TUBE y aprovechaban para invitar a sus compañeros a la búsqueda en estos recursos informáticos. Once estudiantes quedaron clasificados en el nivel nulo, su actitud fue muy pesimista, ya que se negaron a las oportunidades de participación escrita -en el tablero-, o verbal desde la silla afirmando que no participaban porque no entendían el tema. La figura 5 muestra los registros correspondientes.

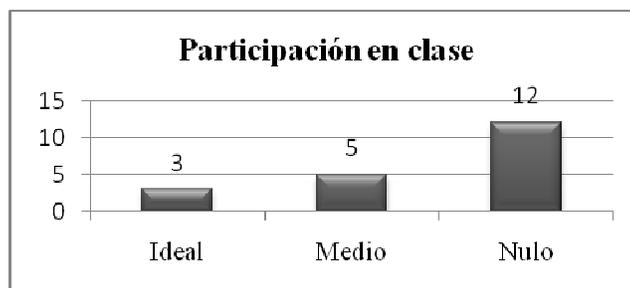


Figura 5. Nivel de participación en clase. (Datos recabados por el autor)

4.2.1.6. Preparación para la clase. En este indicador hizo referencia a la preparación previa de los temas. Los estudiantes debían por sugerencia de la maestra revisar en YOU TUBE los procesos empleados para reducir términos semejantes, sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas; esto, a medida que se iban evacuando los temas. Lamentablemente en ambos grados 8-1 y 8-2 los estudiantes no hacían la consulta previa, solamente los estudiantes E1, E2 y E3 manifestaron casi siempre haber consultado el recurso y en base a él participaban; el estudiante E7 en tres

ocasiones consultó el recurso informático. Vale resaltar que la estrategia de preparar los temas con anterioridad mostró resultados favorables en los estudiantes E1, E2 y E3, que venían de un desempeño bajo en el área y que poco a poco mediante su preparación en los temas de suma y resta de polinomios mostraron la eliminación de dudas, adquiriendo mayor seguridad durante sus aportaciones en clase.

A continuación se muestra en la tabla 5, la relación entre los niveles de cumplimiento de los estudiantes frente a las diferentes categorías.

Tabla 5.
Relación entre los niveles de cumplimiento en las diferentes categorías establecidas en la observación participante.

Estudiante	Inasistencia	Llegada tarde	Interés	C. en casa	C. en Clase	Participación
E1			Ideal	Ideal	Ideal	Ideal
E2			Ideal	Ideal	Ideal	Ideal
E3			Ideal	Ideal	Ideal	Ideal
E4		3	Ideal	Ideal	Ideal	medio
E5		2	Ideal	Medio	medio	nulo
E6		2	Ideal	Medio	medio	medio
E7		2	Ideal	Medio	Ideal	medio
E8	8		Ideal	Nulo	nulo	nulo
E9	2		medio	Medio	nulo	nulo
E10			medio	Medio	medio	nulo
E11	2		medio	Nulo	nulo	nulo
E12	2		medio	Medio	medio	medio
E13			nulo	Nulo	nulo	nulo
E14			Ideal	Medio	Ideal	medio
E15	2		nulo	Nulo	nulo	nulo
E16			nulo	Nulo	nulo	nulo
E17			medio	Medio	medio	nulo
E18	4	3	nulo	Nulo	medio	nulo

E19	2		nulo	Nulo	nulo	nulo
E20	2		nulo	Nulo	nulo	nulo

Se encontró que quienes corresponden a los niveles ideal o medio en relación a la asistencia y desarrollo de actividades para la clase y para la casa, coinciden con aquellos que se ven involucrados activamente en las clases; y que por el contrario aquellos del nivel nulo desarrollan un papel pasivo y de actitud desfavorable para su aprendizaje, ya que manifiestan dificultades cada vez mayores en el aprendizaje de las temáticas asociadas a las operaciones con expresiones algebraicas.

4.2.2. La prueba de evaluación. En esta se plantearon seis preguntas con las que se buscó recoger información acerca de las dificultades que tienen los estudiantes al modelar situaciones reales mediante la suma de expresiones algebraicas; categorizando los datos recolectados de acuerdo a seis indicadores o categorías previamente establecidas.

La prueba fue aplicada el día 20 de junio en las instalaciones de la institución educativa, en un periodo de dos horas. Al inicio se recordó a los estudiantes los objetivos de la investigación y se les pidió la mayor seriedad y la mejor disposición en aras de que la información recolectada brindara al investigador la confiabilidad requerida.

A continuación se presentan los hallazgos relevantes obtenidos en cada una de las categorías.

4.2.2.1. Traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático. Para la recolección de los datos se le pidió a los estudiantes pasar dos expresiones verbales al lenguaje matemático; una de ellas aludía a “*un número aumentado dos veces su valor*” (Ver apéndice B); y se encontró que sólo cuatro estudiantes realizaron la traducción al lenguaje matemático sin ningún problema, por lo demás un total de cinco estudiantes presentaron errores relacionados a la “*confusión entre multiplicar un número por dos y elevar un número a la dos*” (Figura 6), de igual manera cuatro escribieron incoherencias como monomios desligados de la situación planteada, entre estas “*x*” (*equis*), expresiones como “ $4y^2+$ ” (*cuatro y a la dos más ...*) o “ 1^2 ” (*uno a la dos más..*). También se resalta que “*seis de los estudiantes no leyeron con detenimiento la pregunta y señalaron como respuesta a alguno de los literales propuestos como pregunta*” (Figura 7). Sólo un estudiante dejó sin contestar la pregunta.

Las figuras 6 y 7, muestran algunas de las respuestas erradas dadas por los estudiantes ante esta categoría.

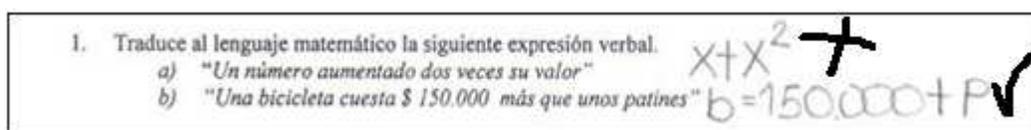


Figura 6. Confusión entre multiplicar un número por dos y elevar un número a la dos. (Datos recabados por el autor).

En la respuesta, puede verse que aunque le asignan correctamente una letra al valor desconocido y traducen acertadamente la suma entre las expresiones; los estudiantes no llevaron al lenguaje matemático la multiplicación confundiendo el término “ $2x$ ” con “ x^2 ”.

1. Traduce al lenguaje matemático la siguiente expresión verbal.

a) "Un número aumentado dos veces su valor"

b) "Una bicicleta cuesta \$ 150.000 más que unos patines"

Figura 7. Respuesta dada por estudiantes que no leyeron las instrucciones. (Datos recabados por el autor)

Como puede verse, los estudiantes encerraron el literal "a" como si fuese una opción de respuesta; mostrando el poco detenimiento hecho sobre la lectura, lo que podría considerarse como un factor de pérdida o reprobación en el área.

Del mismo modo la figura 8 representa en resumen los hallazgos en esta categoría.

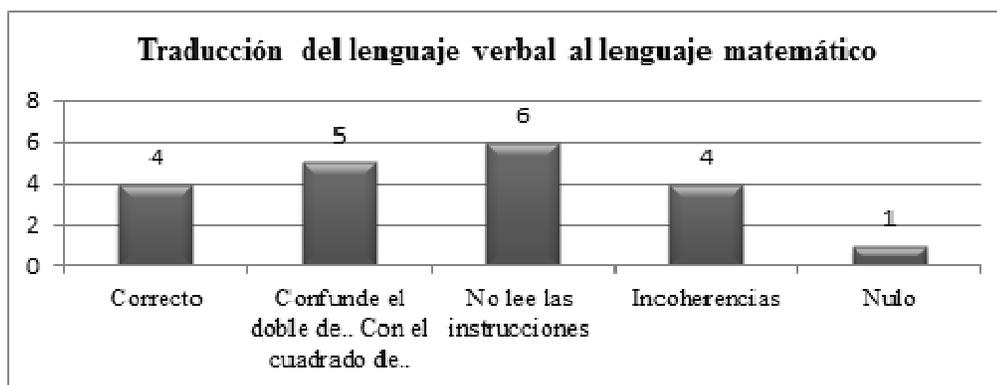


Figura 8. Traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático. (Datos recabados por el autor)

Es evidente que en la mayoría de los casos las respuestas erradas fueron dadas por la falta de detenimiento en la lectura de las instrucciones, seguido de los errores a causa de la confusión para llevar la multiplicación de un término al lenguaje matemático y en el orden respuestas que nada tienen que ver con lo que plantea la pregunta; lo que en definitiva muestra a 16 de 20, es decir el 80% de los estudiantes con alguna dificultad para llevar expresiones del lenguaje verbal al matemático.

4.2.2.2. Traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal. Se pidió a los estudiantes en esta oportunidad que pasaran dos expresiones algebraicas al lenguaje matemático, a lo que solamente un estudiante respondió acertadamente y ocho de ellos se confundieron en cuanto a la “traducción adecuada de los exponentes” (Figura 9); cuatro estudiantes responden erradamente con las frases “dos equis menos dos” y “equis a la dos más ocho” ya que mencionan verbalmente cada uno de los términos de la expresión algebraica (Figura 10). Se encontró además estudiantes que no comprendieron lo que se les preguntó y seleccionaron como respuesta a una de las preguntas indicadas en los literales a y b.

Al pedirles que tradujeran al lenguaje verbal las expresiones “ $2x - 2$ ” y “ $x^2 + 8$ ” se encontraron respuestas erradas como las siguientes:

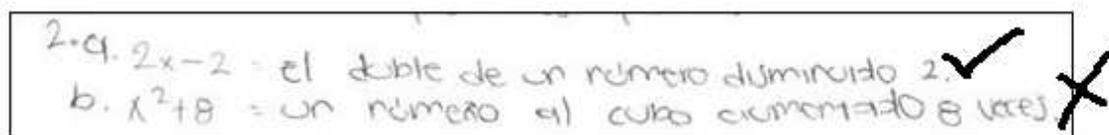


Figura 9. Traducción inadecuada de exponentes. (Datos recabados por el autor)

La figura muestra asertividad en la traducción del producto y la resta en el primer caso, sin embargo deja ver que hay confusión en la traducción de la potencia.

Del mismo modo hay evidencia de que los estudiantes no comprenden lo que deben realizar cuando se les pide que lleven una expresión matemática al lenguaje verbal; ya que para ellos traducir al lenguaje verbal es sinónimo de escribir con palabras cada uno de los elementos del término algebraico dado. Esto puede apreciarse en la siguiente figura.

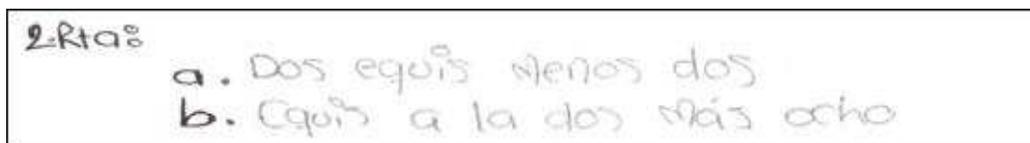


Figura 10. Traducción en la que se mencionan verbalmente los elementos de cada término. (Datos recabados por el autor).

Vale resaltar que los resultados obtenidos en cuanto a este aspecto fueron considerados como respuestas incoherentes, por cuanto se habla de un error asociado a la interpretación del estudiante acerca de lo que debe hacer y no en relación al uso adecuado de conceptos.

Los datos recolectados en la presente categoría se representan en la figura 11.

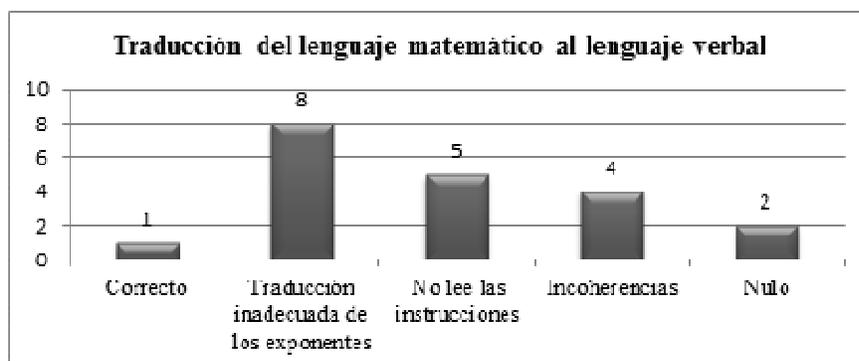


Figura 11. Traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal. (Datos recabados por el autor)

Puede verse el contraste entre el reducido número de estudiantes que llevan acertadamente las expresiones del lenguaje matemático al verbal, frente a los 19 estudiantes equivalentes al 95%, que manifiestan alguna dificultad para llevar una expresión del lenguaje matemático al lenguaje verbal, en donde se destaca como dificultad predominante la traducción inadecuada de los exponentes.

4.2.2.3. Crea contexto a una expresión algebraica. Los estudiantes debían crear el contexto a dos expresiones algebraicas, la primera de ellas correspondía al monomio $200x$ y la segunda a la diferencia de polinomios $(8mn + 10) - (-5mn)$; las respuestas obtenidas por los estudiantes dejaron ver bastante dificultad de tipo conceptual, como es el caso del manejo de paréntesis sobre todo a la hora de crear un contexto para la segunda expresión, ya que los contextos no estaban bien definidos o no tenían coherencia. Se pidió a los estudiantes lo siguiente:

1. Propón una situación problema o contexto que corresponda a cada una de las siguientes expresiones algebraicas.
 - a) $200x$
 - b) $(8mn + 10) - (-5mn)$

Se encontró que un estudiante planteó un contexto bien elaborado, pero sin embargo mostró, como puede verse en la figura 12, un error en el manejo de los exponentes.

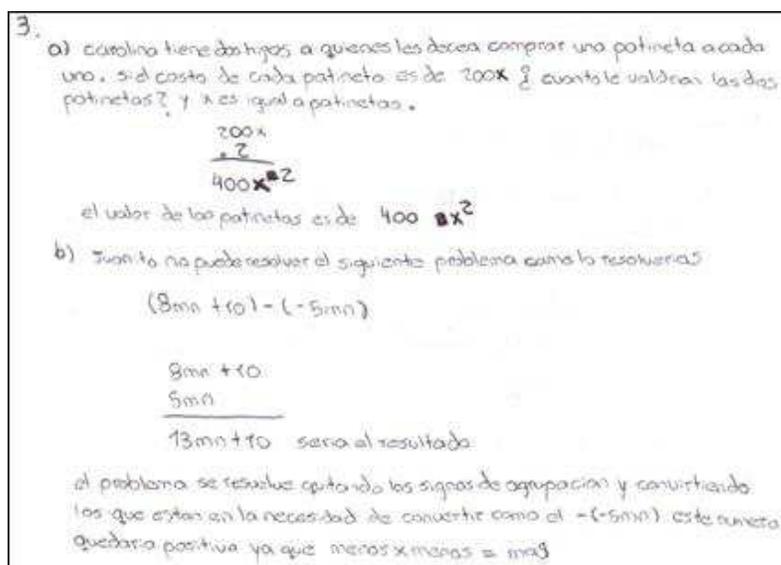


Figura 12. Contexto creado a las expresiones algebraicas planteadas. (Datos recabados por el autor)

Este ejercicio generó bastante error en las respuestas de los estudiantes, en el mayor de los casos por hacer mal uso de los conceptos; otro buen número de estudiantes no contestaron la pregunta; lo anterior puede verse en la figura 13 y en el resumen de datos registrados en la figura 14.

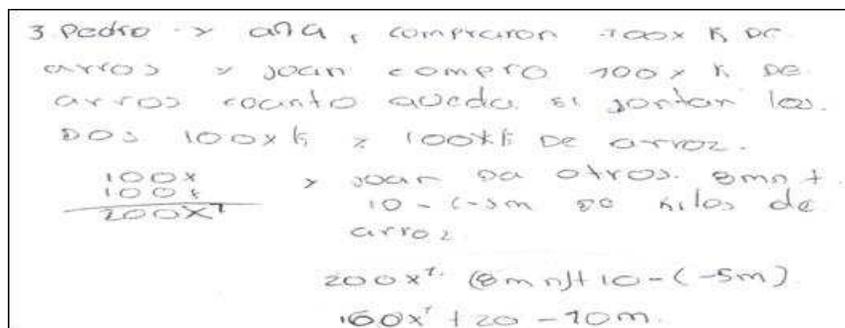


Figura 13. Error en el manejo de los exponentes. (Datos recabados por el autor)

Puede verse que los estudiantes operan los exponentes en la suma como si estuviesen multiplicando, de tal forma que suman los exponentes cuando reducen los términos semejantes.

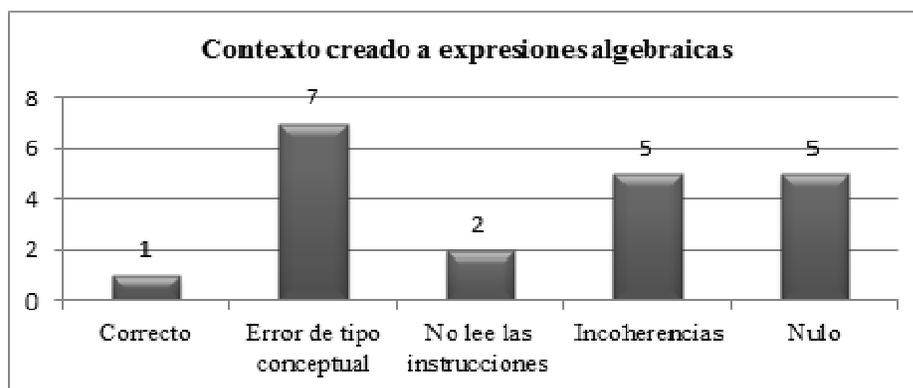


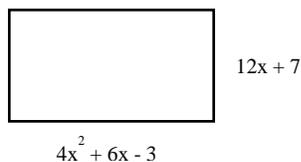
Figura 14. Contexto creado a expresiones algebraicas (Datos recabados por el autor)

La figura muestra que 19 estudiantes, es decir el 95% tienen dificultad para asociar las expresiones algebraicas a los contextos reales; destacándose como principal factor de dificultad a los errores de tipo conceptual como el manejo de los exponentes. Vale resaltar que en suma el 50% de los estudiantes en este caso no respondieron la pregunta o respondieron con afirmaciones que nada tenían que ver con lo que se les estaba preguntando.

4.2.2.4. Suma de monomios con ayuda gráfica. Para esta categoría los estudiantes debían aplicar la suma y el producto de los lados del rectángulo a fin de hallar el perímetro y el área del mismo respectivamente; se encontró que ningún estudiante realizó el ejercicio de forma correcta y en contraste once de los estudiantes “*cometieron errores relacionados al manejo de exponentes (figura 8), la confusión entre el concepto de perímetro y área, la confusión entre $2x$ y x^2 , realizan la suma de los términos sin tener en cuenta si son o no términos semejantes*” entre otros errores de tipo conceptual.

La pregunta formulada fue la siguiente:

4. Observa la siguiente figura y en base a ella encuentra:
- La expresión algebraica que corresponde a su perímetro.
 - La expresión algebraica que corresponde a su área.



Las siguientes figuras ilustran algunas de las dificultades y errores por parte de los estudiantes en la aplicación de la suma y producto de expresiones algebraicas para hallar una expresión que corresponda al perímetro y al área de un rectángulo.

a) $4x^4 + 6x^2 - 3^2 = 16x^2 + 96x^2 - 9$
 $12x^2 + 7^2 = \frac{12x^2 + 49}{16x^2 + 48x^2 + 40}$ es el perímetro de la figura X

b) $4x^2 + 6x - 3 \cdot (2x + 7) = 48x^3 + 42x^2 - 36x$
 $\frac{28x^2 + 42x - 21}{48x^3 + 28x^2 + 6x - 21}$ es el área de la figura ✓

Figura 15. Errores en el manejo de los exponentes al determinar una expresión correspondiente al perímetro. (Datos recabados por el autor)

Puede verse en la figura anterior que el estudiante comete errores al momento de determinar la expresión correspondiente al perímetro; con los cuales muestra que no tiene claro el concepto de perímetro. Por otro lado el proceso para encontrar la expresión del área del rectángulo es correcto.

Del mismo modo la figura siguiente muestra como uno de los estudiantes suma arbitrariamente los términos de las dos expresiones algebraicas dadas, sin tener en cuenta las características de los términos semejantes, en su intento por determinar las expresiones algebraicas correspondientes al perímetro y al área del rectángulo dado.

$$\begin{aligned}
 4 - a - (4x^2 + 6x - 3) + (12x + 7) \\
 (10x^3 - 3) + (19x) \\
 - 7x^3 + 19x \\
 \text{Rta} = -26x^4 \\
 b - 104x^4
 \end{aligned}$$

Figura 16. Reducción de términos sin tener en cuenta los exponentes. (Datos recabados por el autor)

4.2.2.5. Relación de cantidades con apoyo gráfico. Para esta categoría se planteó el numeral 4, en donde se presentó la siguiente situación problema:

5. A Paula se le ha asignado pintar de blanco dos paredes del colegio en las cuales se van a realizar unos murales. Si el área de la pared uno corresponde a la expresión de $3xy^2 + 7y^2$ y el área de la pared dos a la expresión $9xy^2 - 2y^2 + 3$, ¿Cuál es la expresión que determina el área total que debe pintar Paula?

En donde los debían realizar la suma entre un binomio y un trinomio, para lo cual se esperó que representaran la situación mediante un dibujo. Ningún estudiante se apoyó gráficamente y solamente dos estudiantes dieron respuesta acertada al mismo; por lo demás ocho estudiantes cometieron “errores de tipo conceptual asociados principalmente al manejo de exponentes y características de los términos semejantes (figura 17), aunque en dos casos los estudiantes multiplicaron las expresiones algebraicas en lugar de sumarlas”.

La figura 17, muestra el proceso de suma llevado a cabo por un estudiante.

$$5. \quad 3xy^2 + 7y^2 + (9xy^2 - 2y^2 + 3) \\ \rightarrow 2xy^2 - 14y^2 + 3.$$

Figura 17. Error en la agrupación de términos semejantes. (Datos recabados por el autor)

Puede verse que el estudiante a cambio de quitar el paréntesis para posteriormente realizar la reducción de términos, lo que hace es multiplicar entre sí los coeficientes de los términos semejantes conservando la parte literal con sus respectivos exponentes, así como también el término independiente.

A continuación se representan en la figura 18 los datos obtenidos.

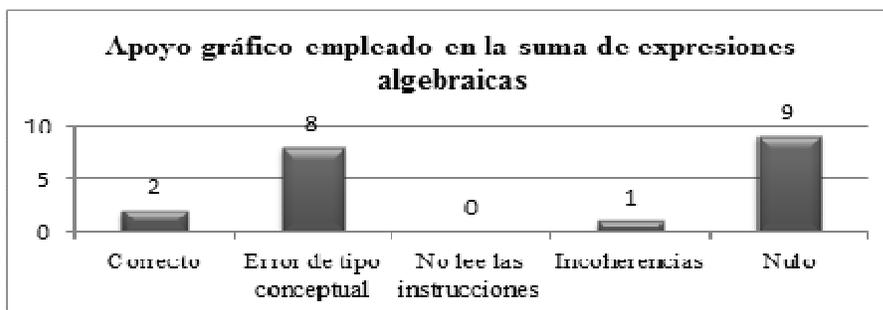


Figura 18. Apoyo gráfico en la suma de expresiones algebraicas. (Datos recabados por el autor)

Es importante resaltar que al igual que en otros de los indicadores de análisis se presentaron en buena parte errores de tipo conceptual, por lo que en este caso no se vio el apoyo gráfico y por el contrario cerca del 50% no manifestaron ningún tipo de respuesta al planteamiento dado.

4.2.2.6. Proceso de modelación completo. Para esta categoría se propuso a los estudiantes dar respuesta a la siguiente situación real mediante el análisis de la situación y la aplicación de la suma de polinomios.

6. Salomé ha comprado papel de colores amarillo y verde, con el fin de forrar un cofre que tiene forma de cubo; si el área de cada una de las caras corresponde a la expresión $10m^2 - 8mm^2 + 1$, responde:
- ¿Qué expresión determina la cantidad de papel que se requiere para forrar el cofre?
 - Si Salomé desea forrar las caras laterales con papel amarillo y las caras superior e inferior con papel verde, ¿Qué expresión algebraica corresponde a la cantidad de papel amarillo que se requiere?, ¿Qué expresión algebraica corresponde a la cantidad de papel verde?

Los resultados obtenidos están representados en la siguiente figura.

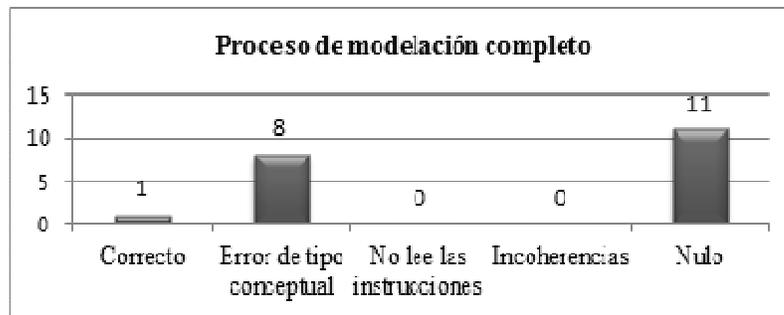


Figura 19. Proceso de modelación completo. (Datos recabados por el autor)

Puede apreciarse en la figura 19 que sólo un estudiante acertó en la respuesta, mientras que ocho manifestaron *errores principalmente en relación a la agrupación de términos semejantes y la representación gráfica* ya que “no tuvieron en cuenta que los términos semejantes tienen iguales variables e iguales exponentes” de modo que sumaron de manera arbitraria, algunos teniendo en cuenta la igualdad entre variables y otros sumando sencillamente todos los coeficientes. Los estudiantes que intentaron dar respuesta al planteamiento en su mayoría realizando la suma de las expresiones, obtuvieron la expresión correspondiente al área total, pero no avanzaron hacia la determinación de las expresiones que corresponden a la cantidad de papel requerido en cada color; es decir que no dieron respuesta matemática al problema y por ende no

brindaron una respuesta concreta al problema y tampoco llegaron a la confrontación de una solución matemática con la realidad. Fueron once los estudiantes cuya respuesta fue nula.

Algunas de las respuestas más relevantes se presentan en las figuras 20, 21 y 22.

a) $60m^2 = 48m^2 + 6$ es la cantidad de papel que se requiere

b) $60m^2 = 48m^2 + 6$

$$\begin{array}{r} 60m^2 = 48m^2 + 6 \\ - 48m^2 \\ \hline 0 = 48m^2 \\ \quad 48m^2 \\ \hline 0 + 6 \\ \quad - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \overline{) 60m^2 - 48m^2 + 6} \\ \underline{10m^2 - 8m^2 + 1} \\ \quad \times 4 \\ \hline 40m^2 - 32m^2 + 4 = \text{papel amarillo} \\ \underline{- 60m^2 + 48m^2 + 6} \\ 20m^2 - 16m^2 + 2 = \text{papel verde} \end{array}$$

1. $40m^2 - 32m^2 + 4$ es la cantidad de papel amarillo que se requiere para forrar las caras laterales

2. $20m^2 - 16m^2 + 2$ es la cantidad que se requiere de papel verde para forrar la cara inferior y superior

Figura 20. Relación acertada de la respuesta matemática con el contexto real. (Datos recabados por el autor)

La figura muestra la única respuesta acertada obtenida en este planteamiento, el estudiante parte de la expresión que corresponde a la cantidad total de superficie, mostrando la relación de la expresión con el contexto – cantidad total de papel-, para posteriormente mediante un cociente encontrar una expresión que represente cada una de las secciones de área mencionada en el problema – papel requerido para cubrir cada una de las caras del cubo-, de modo que luego multiplica acertadamente para dar respuesta a cada uno de los planteamientos – expresión que representa la cantidad de papel requeridas para cubrir las caras laterales y superior e inferior del cubo-. En el proceso descrito, el estudiante relaciona las repuestas matemáticas con el contexto.

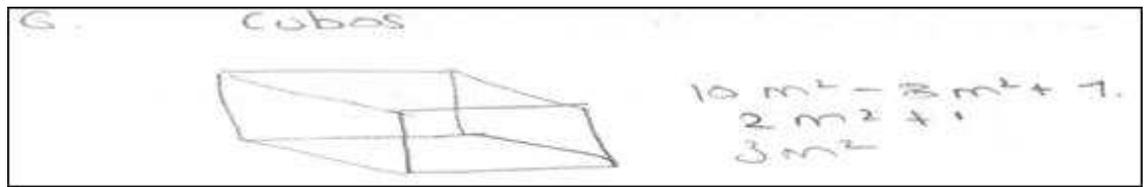


Figura 21. Errores en la agrupación de términos. (Datos recabados por el autor)

Es evidente la confusión en cuanto al proceso de reducción de términos semejantes, no hay manejo de criterios ni características de los mismos, por lo que son agrupados de manera arbitraria.

Del mismo modo en la siguiente figura se muestra la dificultad que tienen los estudiantes en relación a la elaboración representación del problema de manera gráfica; constatando además la dificultad para reducir los términos semejantes.

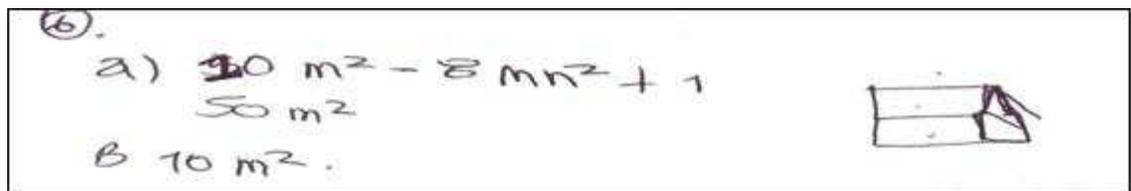


Figura 22. Errores en la agrupación de términos y representación gráfica. (Datos recabados por el autor)

4.2.2.7. Trasmisión de conocimiento matemático. Los datos registrados en esta categoría se tomaron de acuerdo a los resultados obtenidos en el inciso anterior, teniendo en cuenta únicamente si el estudiante brinda mediante el proceso de modelación una respuesta concreta, real y confrontada con la realidad.

En la figura 20 puede verse cómo el estudiante relaciona el contexto con la expresión algebraica plantea modelos matemático y los resuelve mediante una respuesta

matemática que posteriormente confronta con la realidad. Sin embargo son doce los estudiantes que están alejados de llegar a esta fase de modelación. En la figura 23 se observa la frecuencia con que los estudiantes con dificultad transmiten el conocimiento matemático.

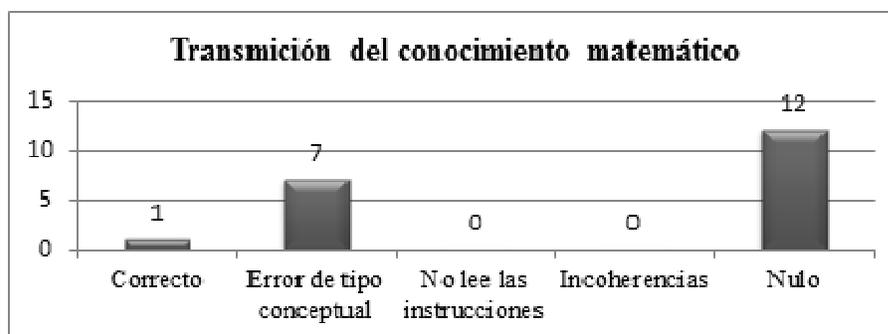


Figura 23. Transmisión del conocimiento matemático.

4.2.3. La entrevista. Fue llevada a cabo en las instalaciones del colegio durante los días 20, 21 y 22 de junio; en esta participaron veinte estudiantes que emplearon cerca de quince minutos en responder abiertamente a cada uno de los quince interrogantes planteados. Durante la aplicación, los estudiantes mostraron disposición, sin embargo algunos actuaron tímidamente, por lo que respondían sin dar detalles del tema en cuestión.

4.2.3.1. Perspectiva frente al área. Fácil o difícil. Ante esta categoría, los estudiantes manifestaron generalizadamente que la facilidad o la dificultad dada frente al aprendizaje de las matemáticas depende de la atención que a estas se les preste durante las clases; uno de los estudiantes afirmó al respecto *“Es fácil, toca ponerles mucha atención”*, otro estudiante apoyó lo anterior diciendo: *“Pues cuando uno no pone cuidado a las explicaciones es difícil; pero cuando uno si pone cuidado si... son*

fáciles”; sin embargo un pequeño grupo de tres estudiantes manifiestan que las matemáticas son difíciles; pero argumentan este hecho igual que el grupo anterior, ya que al preguntarles acerca de su percepción sobre la facilidad o dificultad para aprender matemáticas dieron respuestas como esta: *“Difíciles, porque es que yo no las entiendo muy bien y me distraigo mucho”* ; dejando claro que para ellos la atención es un factor relevante en el aprendizaje de las mismas.

4.2.3.2. Causas del bajo desempeño. Los estudiantes tuvieron divididas sus opiniones en torno a dos aspectos; el primero de ellos asociado a sus actitudes, hecho evidenciado con respuestas como *“me ha ido mal porque a veces no pongo atención y por hablar con los otros compañeros”*, *“Por no prestar atención,... no hacer tareas”*, *“No hacer los trabajos, no prestar tanta atención a las clases y no estudiar para las evaluaciones”*, entre otras, reforzando que *el poco interés y la poca atención* han sido factores determinantes en el bajo desempeño. El segundo aspecto estuvo relacionado con la dificultad que trae el manejo de los signos y los coeficientes al operar con expresiones algebraicas, uno de los estudiantes confirmó lo anterior diciendo que una de las causas de su bajo rendimiento están asociadas a *“La confusión de signos y no entiendo casi muy bien lo de la expresión algebraica”*.

4.2.3.3. Experiencias desmotivantes. Con este indicador se pretendió conocer las circunstancias o aspectos desmotivantes que hubiesen vivido los estudiantes y que de una u otra forma estuviesen interfiriendo en su desempeño en el área de matemáticas. Al preguntarle a los estudiantes si habían vivido experiencias que les hicieran perder la motivación para estudiar matemáticas, la mayor parte respondió negativamente, pero

algunos manifestaron sentirse desmotivados en las ocasiones en que no podían entender los temas, cuando reprobaban las evaluaciones –a lo que los estudiantes llamaban perder evaluaciones- o por la burla de los compañeros; un estudiante manifestó al respecto: *“Pues de pronto las bajas notas, la evaluación que me haya quedado mal... uno se desanima. La burla de los compañeros cuando algo queda mal”*, otro mencionó *“Pues cuando pierdo evaluaciones a veces me desmotivo”*.

4.2.3.4. Experiencias motivantes. Se indagó a los estudiantes por las circunstancias o experiencias dentro o fuera de la clase que de alguna forma los motivan a esforzarse en el aprendizaje de las matemáticas y se encontraron respuestas como *“me gusta cuando me saco así las notas bien en los boletines, eso lo pone a uno feliz porque pues... normal”*, haciendo énfasis en la motivación causada por los resultados o logros académicos; otras respuestas hicieron énfasis en la comprensión de los temas como factor motivante, como por ejemplo: *“Sí, tengo unas motivaciones, muchas. Que pienso ser alguien a futuro y me motiva es; en algunas clases entiendo la parte algebraica y eso me motiva más a seguir estudiando”*, y otras asociadas a la expectativa de los estudiantes frente a los nuevos temas ya que algunos respondieron así: *“A principio de clase cuando empezamos tema nuevo presto atención y miro que la matemática es llamativa y uno tiene que prestarle mucha atención ... he tenido compañeros que me explican y me intereso por la matemática; pero hay veces que enredo mucho y se me vuelve a bajar el ánimo”*

4.2.3.5. Ambientes de aprendizaje. Los resultados expuestos en esta categoría fueron encontrados de manera implícita en diferentes preguntas realizadas durante la

entrevista; un ejemplo claro de ello está cuando se preguntó por los aspectos de la clase que cambiarían para hacer que el desempeño en el área de matemáticas mejorara. La mayoría de los estudiantes respondieron que cambiarían las actitudes de los compañeros y la de ellos mismos en cuanto a *“poner más atención y menos recocha”*, otros mencionaron *“dejar de hablar tanto, poner más atención, empezar a cambiar... de la clase nada...”*, *“Poner atención en clase, no hacer indisciplina... mejorar en las tareas”*, *“Pues poner más atención y pues pasar al tablero para poder entender bien el procedimiento e irlo haciendo”*; lo anterior dejó ver que en el ambiente en que se desarrolla hay indisciplina, ruido causado por los murmullos entre estudiantes y que la explicación del profesor y los trabajos asignados para la clase no capturan la atención e interés de los estudiantes.

Por otro lado considerando que los cursos 8-1 y 8-2 están conformados por 40 y 42 estudiantes respectivamente, vale resaltar que un estudiante mencionó *“... Me gustaría que me sentara con la profesora para que ella me explicara...”*; esto considerando que el número de estudiantes asignados por cursos podría representar un factor generador de dificultades en cuanto al aprendizaje de las matemáticas y específicamente en la modelación de situaciones reales mediante el proceso de modelación terminante .

4.2.3.6. El proceso de suma aplicado a la solución de problemas. La recolección de datos en esta categoría se realizó mediante una situación que los estudiantes debían analizar y solucionar. Esta fue de tipo geométrico en donde se pedía encontrar dos expresiones, una que correspondiera al perímetro y otra que correspondiera al área de un

rectángulo del que se conocían sus dimensiones en términos de expresiones algebraicas.

Las preguntas planteadas asociadas a la situación fueron:

- Si construyes un rectángulo de base x y de altura $2x$; ¿qué proceso sigues para hallar la expresión algebraica que corresponde a su perímetro?
- En el caso anterior, ¿Qué proceso sigues para hallar la expresión algebraica que corresponde al área del rectángulo?
- En general, ¿qué pasos sigues para realizar la suma entre expresiones algebraicas?
- ¿Qué diferencias encuentras entre el proceso para realizar la suma y la resta de expresiones algebraicas?

Sólo cuatro estudiantes respondieron de forma acertada a las preguntas planteadas así: *“se suman los lados, en este caso sería $x + 2x + 2x + x$ para hallar el perímetro de la figura”*, *“Su perímetro es la suma de todos los lados, entonces un rectángulo serían cuatro lados, se suman los que son iguales; el de la base con el de arriba y se suman los de los lados”*; algunos manifestaron no recordar los procesos de suma y resta, diciendo, *“ $2x$... no me acuerdo... ¿Sumo?... no me acuerdo”*, y por último otros que dieron sus respuestas partiendo de una confusión entre los conceptos de área y perímetro, lo que condujo a que de igual manera confundieran los procesos y lógicamente llegaran a erradas respuestas; ellos respondieron como *“Multiplicar base por altura... quedaría $3x$ ”*.

4.2.3.7. Transmisión del conocimiento matemático. En esta categoría se empleó una situación real en la que los estudiantes debían encontrar una expresión algebraica que sirviera como modelo para los ingresos recibidos por la venta de minutos a celular. La pregunta que se empleó fue la siguiente:

- Si tienes punto de venta de minutos a celular y por cada minuto cobras \$200, ¿qué expresión algebraica emplearías para determinar el precio de una llamada equis número de minutos?

Uno de los estudiantes argumentó lo siguiente: “...Sería una multiplicación, multiplicar el número de minutos que por ejemplo la persona llamó y multiplicarlo por el precio. La expresión podría ser, digamos a los minutos le podríamos poner M y los números de minutos podríamos colocarle $2X$ y multiplicar $2X$ por M ”, por su parte otro estudiante dio su respuesta aun de manera más precisa así: “Pues una multiplicación 200 por X , donde X representa un número cualquiera”; en contraste otros estudiantes manifestaron no tener idea del proceso ni de la relación que pudiesen establecer entre las variables ya que argumentaron diciendo: “No sé, no entiendo...se hace la suma de cada minuto hasta que me del resultado; por ejemplo si un día se gastan 100 minutos entonces se suman todos los 100 minutos para saber el precio”.

4.3. Análisis e interpretación

La aplicación de cada uno de los instrumentos de recolección se realizó a fin de describir las dificultades que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato para llevar los contextos reales al contexto matemático mediante el uso de modelos que involucran la suma de polinomios.

En este sentido se determinaron como categorías: la actitud de los estudiantes frente al área, el ambiente de aprendizaje y el proceso de modelación.

4.3.1. La actitud de los estudiantes frente al área. Para esta categoría se tuvieron en cuenta los datos obtenidos mediante la observación participante y la entrevista semi estructurada. La observación permitió ver de cerca las actitudes favorables (de 5 estudiantes de nivel ideal y 5 de nivel medio) o desfavorables (de 10 estudiantes de nivel nulo) para el aprendizaje, descritas por los niveles ideal, medio o nulo y con los que se pretendieron clasificar las actitudes de los estudiantes en el desarrollo de las clases. Por su parte la entrevista permitió un acercamiento al reconocimiento de las situaciones personales de los estudiantes por las cuales han tenido dificultad en el aprendizaje de las matemáticas.

4.3.1.1. Actitud desfavorable. Como se puede observar en la tabla 5, la mitad de los estudiantes que presentan dificultad en la suma de expresiones algebraicas corresponden a los niveles nulos de cumplimiento en asistencia, compromisos en la casa y en la clase, y en la participación; lo que se corrobora al contrastarse con los resultados obtenidos en la entrevista donde se manifiestan los estudiantes que las causas del bajo desempeño frente al área corresponden principalmente a la distracción durante las clases

y al poco interés, de modo que las matemáticas se les hace difíciles porque, como dicen ellos porque “...*me distraigo mucho*”; esta poca disposición para actuar activamente en las clases crea mayores dificultades en la realización de tareas (Castañeda, A., y Álvarez, M de J, 2004) y por ende en el desarrollo de valores matemáticos definidos por Herrera, (1988) como la claridad, la precisión, el rigor, la sencillez, la generalidad y la unidad conceptual, que permiten el desarrollo de pensamiento matemático y de competencias que trasciendan el contexto de la matemática escolar (Frade, 2009).

4.3.1.2. Actitud favorable. El contraste mostrado en la tabla 5, muestra que alrededor de cinco estudiantes cumplieron frecuentemente con aspectos básicos como la asistencia, la puntualidad, tareas y compromisos en clase, permanecieron activos en la misma; y como se mostró en los resultados obtenidos mediante la entrevista, comenzaron a buscar alternativas de refuerzo como los videos de YOU TUBE con los que pudieron ayudarse a resolver las dudas generadas durante las clases. Esta mejora gradual en los aprendizajes, manifestaron los estudiantes, contribuyó a motivarlos a continuar esforzándose. En este sentido, es importante reconocer que en virtud de los aspectos que motivan a los estudiantes cuentan como lo afirma Hidalgo et al, (2005) las reacciones de los compañeros y del profesor, por cuanto éstas pueden impulsar o frustrar futuras participaciones; a lo que como se pudo ver hubo una respuesta positiva en el desarrollo de las clases; así lo manifestaron los estudiantes “*los compañeros dan un poco de energía para que uno se motive más en esta materia y los profesores*”.

La actitud favorable de los cinco estudiantes que calaron en un nivel de cumplimiento ideal en cada una de las categorías, pudo ser influenciada por lo que

Hidalgo et al, (2005) llama la opinión del maestro, ya que mediante la observación fue evidente que la maestra mantuvo una adecuada relación de intercambio con este grupo de estudiantes; por el contrario en una menor manera, los estudiantes que calaron en los niveles medio y nulo mantuvieron tímidas relaciones de intercambio con su maestra.

Del mismo modo, es relevante contrastar los aportes de Taylor (1989) y Aiken (1970) en Hidalgo et al, (2005) en relación a la metodología y la actitud donde afirman que las metodologías activas incrementan las actitudes favorables, mientras que las metodologías pasivas las disminuyen. Fue evidente el desarrollo magistral de los temas, en donde las oportunidades de construcción de conocimiento se daban a la luz de la participación con aportes desde la silla o en el tablero y en algunas ocasiones mediante trabajo colaborativo; pero sin el uso de algún tipo de material didáctico.

4.3.2. El ambiente de aprendizaje. Para el análisis de esta categoría se tuvieron en cuenta los hallazgos asociados a las características del ambiente donde se desarrollaron las clases, como producto de la observación participante y la entrevista semi estructurada, en contraste con las opiniones de expertos en el tema como Cantoral, y Farfán, (2003) quienes manifiestan la necesidad de abrir el ámbito escolar y adicionar al campo de las matemáticas otras prácticas de referencia que generen procesos de modelación en el aula, a partir de la interacción de los estudiantes y del trabajo en clase donde se tengan en cuenta sus diferencias y así puedan llegar a la construcción social de conocimiento. Sin embargo la realidad al interior del aula de clase se dio en el marco de la asistencia de dos cursos de grado octavo de 42 estudiantes entre los 13 y 15 años de

edad cada uno y 2 sesiones semanales de asesoría de dos horas cada una desarrolladas bajo los preceptos de la pedagogía tradicional.

4.3.2.1. Estrategias. Las clases se desarrollaron mediante una secuencia didáctica tradicional, esto significa que fue dada en función de los contenidos (Frade, 2009), dicha secuencia iniciaba con la explicación del tema -expresiones algebraicas, términos semejantes, reducción de términos semejantes, suma y resta de expresiones algebraicas y por último multiplicación y división de expresiones algebraicas, según el caso-; luego se daban a conocer ejemplos y contraejemplos, posteriormente en algunos casos – cuando el tiempo lo permitía- se elaboraba la definición o el concepto visto, se dejaban ejercicios para resolver en la clase, asignándose puntuación adicional para los diez primeros estudiantes que los realizaran de manera correcta y finalmente se evaluaba pasando al tablero, así la maestra identificaba a los estudiantes que habían quedado con dudas respecto al tema. De lo anteriormente descrito vale destacar el intento por identificar y eliminar los errores ya que como afirman Del Puerto et al, (2006) basado en Popper, resulta significativo buscar estrategias que ayuden a buscar el error y tomarlo como oportunidad de aprendizaje; sin embargo es importante resaltar que dichas estrategias deben ser replanteadas a fin de que estén enfocadas a la búsqueda de relaciones entre el conocimiento empírico y el conocimiento abstracto (De Vries y Kamii (1991), según Piaget) y no al desarrollo mecánico de ejercicios descontextualizados.

Se entiende entonces que las estrategias manejadas dentro del ambiente tradicional con que la maestra direccionó sus clases, correspondieron a una dificultad para que los estudiantes pudiesen desarrollar mediante procesos de modelación, aprendizajes

significativos, convirtiendo la construcción de conocimiento colectivo en interpretaciones individuales de los estudiantes (Lozano, 2005).

4.3.2.2. Construcción colectiva del conocimiento. Se encontró un factor determinante en la construcción de conocimiento y de afianzamiento del proceso de suma de expresiones algebraicas relacionado con la poca expectativa frente a las clases y a los temas futuros, lo que influyó en la participación de los estudiantes con dificultades en el aprendizaje, generándose distracción constante e indisciplina durante las clases. La participación de los estudiantes fue dada en el tablero o mediante el uso de la palabra desde los puestos –no se maneja la toma de la palabra, por tanto, las explicaciones y aportes de los compañeros no condujeron en la mayoría de los casos a la construcción colectiva de conocimiento-; lo que quiere decir que los espacios de participación no fueron apropiados para la interacción en el aula, donde según Lozano (2005), se pudiese llegar a la construcción colectiva del conocimiento mediante el aprovechamiento de las diferencias.

Por último se menciona como factor en la construcción de conocimiento, la apatía de los estudiantes ante la solución de problemas asociados a la suma de polinomios, ya que mostraron preferencia en resolver ejercicios de mecanización y no de modelación; aunque como pudo verse en los resultados de las entrevistas muy pocos estudiantes pudieron describir los pasos a realizarse en el proceso de la suma de expresiones algebraicas. Lo anterior porque los estudiantes están en la capacidad de identificar cantidades; es decir de hacer lecturas aritméticas y no de tipo algebraico, y en este sentido no alcanzan a determinar las relaciones existentes entre los elementos matemáticos de determinado problema (Cañadas et al, 2011).

Por otro lado es posible que se encuentre como problema “la dicotomía entre el papel de la modelación en la construcción del conocimiento y el papel de la misma en realizar aproximaciones del funcionamiento de los procesos naturales” (Cordero et al, 2009, pp. 1718-1719). En la necesidad de construir conocimiento se debe realizar un cambio en las estrategias didácticas y en los ambientes de aprendizaje (Cordero et al, 2009), propendiendo por la construcción colectiva de conocimiento.

4.3.3. Nivel de modelación. Para el análisis de esta categoría se tuvieron en cuenta los datos obtenidos mediante la prueba de evaluación (Ver apéndice B), las preguntas 9, 10, 11, 112 y 13 de la entrevista semi-estructurada (Ver apéndice C) y las manifestaciones de los estudiantes durante la observación participante; considerando como referente conceptual la idea de que la modelación es un proceso que como afirma Boullosa et al, (2009) conlleva a determinar modelos; es decir regularidades acerca de fenómenos de la cotidianidad, situaciones o cosas; que en pocas palabras relacionan las situaciones reales con el contexto matemático a fin de que en el caso específico de la matemática escolar, pueda transponer el conocimiento matemático a las situaciones del contexto real de los estudiantes. Lo anterior implicó analizar las fases del proceso de modelación matemática, sus funciones y perspectivas.

En cuanto a las fases del proceso de modelación, se tomó como referente aquellas fases mencionadas por Rodríguez, (2010) y descritas en la figura 1, de modo que lo que se intentó fue categorizar las respuestas de los estudiantes en base a ellas, para determinar hasta qué fase del proceso de modelación llegaron y así establecer el nivel de modelación desarrollado por los estudiantes de grado octavo; presentando además las

dificultades encontradas durante el mismo. En la tabla 6 se muestra el análisis de los resultados correspondientes a cada fase de modelación.

Tabla 6.
Fases de modelación realizadas en torno a la suma de expresiones algebraicas.

Fase	Resultados	Análisis
Paso de la SR al MPC	Únicamente dos estudiantes se apoyan gráficamente para poder representar un problema real, buscando a su vez organizar la información brindada en el mismo; pero sólo uno de ellos logra hacer la representación sin asignarle variables (figura 21 y 22).	Los estudiantes hacen lectura aritmética de las situaciones planteadas y desde luego no logran identificar relaciones entre las variables inmersas en un problema (Cañadas et al, 2011).
Paso del MPC al MM	La quinta parte de los estudiantes lograron pasar expresiones del lenguaje verbal al lenguaje matemático; pero se encuentran estudiantes con dificultad en el manejo de los exponentes, confundiendo el doble de un número con el cuadrado de un número. Claro está que ante la solución de un problema específico, sólo tres estudiantes lograron hacer el paso de la situación real al lenguaje matemático.	Los obstáculos epistemológicos no permitieron que los estudiantes asociaran los conocimientos previos con el nuevo conocimiento, ya que no se pueden construir conocimientos a partir de errores conceptuales (Del Puerto et al, 2006); es necesario replantear la veracidad del conocimiento ya que éstas deficiencias impiden que los estudiantes afronten adecuadamente las zonas de desarrollo próximo (Frade, 2009).
Paso del MM al EM	Al preguntarles acerca del procedimiento para encontrar una expresión que correspondiera al perímetro y al área de un rectángulo, los 16 estudiantes manifestaron con sus respuestas confusión entre los dos conceptos; razón por la cual confundieron los procedimientos; cuatro estudiantes respondieron describiendo claramente el proceso " <i>Se suman los lados, en este caso sería $x + 2x + 2x + x$ para hallar el perímetro de la figura</i> ".	Los estudiantes emplearon los modelos matemáticos, pero sólo algunos de ellos realizaron un estudio matemático en relación al proceso correspondiente a la suma de expresiones algebraicas y pudieron llegar a una respuesta matemática. Dieron respuesta a una de las funciones de la modelación matemática centrada en el conocer, pero no en las aproximaciones al contexto real que se pueden lograr con el conocimiento matemático (Cordero et al, 2009)
Paso del EM a los RPC	En las respuestas obtenidas en la pregunta 6 de la prueba de evaluación (figuras 20, 21 y 22) se ve como los estudiantes realizan un inapropiado proceso de suma porque sumaron términos que no eran semejantes.	Se pidió a los estudiantes que realizaran el proceso de modelación partiendo de la situación real hasta llegar a la generalización de la respuesta y sólo un estudiante llegó a la confrontación del modelo con la realidad. Los estudiantes no definieron previamente las características de los conceptos que debieron emplear en la solución del problema.

Paso del RPC al CMR	En la prueba de evaluación sólo un estudiante pasó correctamente una expresión del lenguaje matemático al lenguaje verbal, del mismo modo ese mismo estudiante creó un contexto adecuado a una expresión matemática determinada; por tanto entre 7 y 8 estudiantes presentan errores en cuanto a la traducción de los exponentes y de los productos; y los demás dan respuestas incoherentes. Por otro lado	A los estudiantes se les dificulta asociar los resultados matemáticos con un contexto real. Manifiestan obstáculos epistemológicos entre los exponentes y los productos y por ende en la reducción de términos semejantes (Del Puerto et al, 2006).
Paso del CMR a la G	Un estudiante argumentó todo el proceso de suma, apoyado también por la resta, producto y división de expresiones algebraicas; mencionó las expresiones correspondientes a cada una de las situaciones planteadas. De los demás estudiantes se observó que realizaron la suma, pero de manera aislada del contexto brindado en el problema, por lo que no pudieron avanzar en el proceso de modelación.	Los estudiantes realizaron las operaciones algebraicas aislando el contexto del estudio matemático, lo que les impidió llegar a respuestas matemáticas y desde luego concretas que pudiesen ser contrastadas con la realidad para ser generalizadas (Ormron, 2005).

Se encontró que los estudiantes cometen con mucha frecuencia errores asociados al desarrollo de operaciones básicas, como pudo verse: “*al multiplicar dos por x ($2x$)*” y “*al elevar x a la dos (x^2)*”, en este sentido se pueden explicar las dificultades de los estudiantes como producto de los llamados obstáculos epistemológicos (Del Puerto et al, 2006); establecidos como aquellos conceptos errados que obstaculizan el avance en la construcción de nuevos conocimientos. Lo anterior, asociado a otras dificultades que surgen al modificar las situaciones presentadas a los estudiantes, permiten categorizar su proceso de modelación en el nivel más bajo de modelación definido Greer y Verschaffel, (2007) como *nivel de modelación implícito* en virtud de que las acciones matemáticas realizadas por los estudiantes en cuanto a la modelación fueron de forma inconsciente; ya que aplicaron los principios matemáticos señalados por Herrera (1988) de forma tan

habitual que ante el mínimo cambio en las situaciones presentadas generaron perturbación y obstáculos en la solución de los problemas.

Del mismo modo mediante los datos registrados en la observación participante, la prueba de evaluación y la entrevista, se pudo evidenciar que dentro del enfoque tradicional por el que fueron desarrolladas las temáticas hubo poca participación de los estudiantes y además poco interés en cerca del 75% de los estudiantes con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas específicamente en relación a las operaciones con expresiones algebraicas; en contraste con una enseñanza basada en los contenidos (Frade, 2009); se pudo atribuir una perspectiva del proceso de modelación de tipo pragmático en acuerdo con Kaiser y Sriraman, (2006) quienes señalan que esta perspectiva está centrada ciertamente en objetivos utilitaristas; es decir la capacidad que tienen los estudiantes para aplicar el conocimiento matemático en la resolución de problemas. El ideal es lograr procesos de modelación que correspondan a la perspectiva de modelación integradora en la que el conocimiento matemático sea construido y llevado al contexto de manera integrada en los diferentes contextos reales garantizando la transmisión de conocimiento matemático a otras disciplinas.

Es así como teniendo en cuenta en análisis de los datos recolectados mediante los tres instrumentos de recolección aplicados en la presente investigación (Ver apéndices A, B y C) relacionados con las diversas definiciones y atribuciones dadas a los modelos matemáticos que como afirman Berrio et al, (2009), en acuerdo con Herrera (1988) y Boullosa et al, (2009); Lage y Hernández, (2009) señalan que las diversas definiciones dadas por diferentes autores como Biembergut y Hein (2004:106) y Rutherford, (1978:

5) a los modelos matemáticos no hacen más que estrechar la relación de las matemáticas con el mundo real, ya que los definen como *“un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”* (Berrio et al, 2009, p. 162). Se pudo evidenciar que la función que cumplen los procesos de modelación llevado al interior de la clase están orientados desde la perspectiva pragmática no pueden cumplir una función más allá de la sustitutiva – heurística en la que se requiere de los conocimientos previos del estudiante para tomarlos como base en la construcción de nuevos conceptos Boullosa et al, (2009). En este sentido, se debe resaltar que los obstáculos epistemológicos manifestados por los estudiantes son la piedra en el zapato para el avance en el desarrollo acertado de las fases del proceso de modelación y así mismo en la consolidación de mayores perspectivas, funciones y por supuesto competencias desarrolladas en cuanto al proceso.

Lo anterior demostró que los estudiantes de bajo desempeño cumplen procesos de modelación a lo más en el marco de las competencias de modelación asociadas a las habilidades para resolver cuestiones matemáticas mediante el uso de estrategias heurísticas con las que algunos estudiantes alcanzan a desarrollar problemáticas reformuladas y con cambio de datos; así como también que la mayor parte de los mismos se encuentran en los dos primeros niveles de competencias para la modelación matemática; es decir, en acuerdo a Maaß (2006) son competentes en la comprensión de problemas y la creación de modelos matemáticos mediante la formulación de hipótesis, la simplificación de situaciones, la búsqueda de relación entre cantidades y variables y la representación gráfica de situaciones, sin mostrar habilidad en la relación de sus respuestas matemáticas con el contexto real.

En definitiva, se puede afirmar que dentro de los principales hallazgos están los obstáculos epistemológicos asociados principalmente al uso de los exponentes, conceptos de área y perímetro; en un ambiente en el que poco más del 50% de los estudiantes con dificultades de aprendizaje permanecen poco motivados e incumplen con las actividades planeadas para la casa y para la clase. Por su parte se encontró un grupo de tres estudiantes que se esmeraron por superar las dificultades frente al área, para lo cual buscaron apoyo en recursos virtuales como los ofrecidos por YOU TUBE, intentaron retroalimentar sus conocimientos mediante participaciones en clase y colaborando con la explicación a sus compañeros. Fueron estos últimos estudiantes quienes ahondaron en las fases del proceso de modelación llegando sólo uno de ellos a realizar el proceso de modelación completo; lo que quiere decir que los estudiantes mostraron que tienen habilidad para operar pero no para aplicar (Rolfo et al, 2011); esto debido a que la enseñanza está centrada en la transposición de procesos mas no en la incorporación del proceso de modelación.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Mediante la presente investigación se describieron los factores que intervinieron en las limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato al modelar por medio de una expresión algebraica un contexto real que involucrara la suma de polinomios; indagando en las actitudes, motivación, ambiente de aprendizaje y procesos de modelación desarrollados por los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas.

5.1. Conclusiones

Tomando como referencia el objetivo y las preguntas de investigación, se reflexionó sobre los hallazgos obtenidos a fin de responder los planteamientos establecidos, estimando en un primer momento dar respuesta a la pregunta: ¿Qué tipo de actitudes manifiestan los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas, ante la enseñanza de la suma de expresiones algebraicas?; teniendo en cuenta las actitudes desfavorables y favorables en relación a sus efectos en el aprendizaje de la suma de expresiones algebraicas y su uso en la modelación matemática de situaciones reales.

Por un lado, las actitudes desfavorables para el aprendizaje como la poca motivación e interés en el desarrollo de las actividades propuestas tanto para la clase

como para la casa, corresponden en un factor determinante en las dificultades para modelar situaciones del contexto real mediante la suma de polinomios en los estudiantes con bajo desempeño en el área de matemáticas. Estas muestran como consecuencia el aumento gradual de vacíos conceptuales reflejados en la aparición de un mayor número de errores en los procesos efectuados en la solución de ejercicios que involucran cualquiera de las fases de la modelación matemática; ya que mientras más alejados y apáticos estén los estudiantes a las actividades y a los canales de comunicación con maestros y compañeros, se hace menor la participación en clase, la entrega de compromisos y por supuesto sus resultados académicos.

En contraste, mantener buena actitud y motivación frente al área contribuye a solventar las dificultades cognitivas. En acuerdo con Gómez Chacón (1998, p. 185) en relación a que “... *las emociones intervienen en el aprendizaje de forma significativa ya sea facilitándolo u obstaculizándolo, desempeñando un papel en la comunicación de intenciones de los estudiantes hacia los demás...*”, se afirma que los estudiantes con dificultad que buscan canales de comunicación y formas de acercamiento con sus maestros y compañeros, logran mayores avances en cuanto a sus dificultades y desde luego en sus desempeños; ellos aprovechan la confianza y el respaldo brindado por su entorno escolar y adquieren mayor compromiso frente al área.

Lo anterior estuvo ligado al ambiente de aprendizaje en el que se desarrollaron las clases de álgebra ya que este no fue propicio para el desarrollo de los procesos de modelación de los estudiantes; a razón de que se enmarcó principalmente en el modelo pedagógico tradicional, reduciendo sus recursos al uso del pizarrón, el plumón, los

textos guía y en muy pocas ocasiones de los recursos informáticos o Tics empleados por los estudiantes en sus casas o en centros de internet como herramientas de búsqueda de información; pero nunca en el aula de clases. De esta manera el ambiente de aprendizaje cobró un papel importante en los procesos de modelación ya que el número elevado de estudiantes por curso, el número de estudiantes con dificultades, los recursos físicos y la escases de recursos didácticos obstaculizaron la enseñanza de las fases del proceso de modelación limitándola a la trasposición de los contenidos disciplinares y a la aplicación de modelos matemáticos alejados del contexto real.

Esta situación es significativa ya que por medio de los recursos, los maestros disponen de diversas alternativas para el desarrollo de las clases, lamentablemente el no contar con ellos justifica que se esté orientando la enseñanza hacia los métodos tradicionales.

Por lo anterior se afirma que las estrategias de enseñanza empleadas se centraron en los contenidos y no en las oportunidades de aprendizaje que pudieran llegar a tener los estudiantes en relación al proceso de modelación; ya que mediante la observación pudo apreciarse durante las clases la enseñanza de los pasos para sumar expresiones algebraicas, que sólo al finalizar del tema se relacionan con contextos reales. Esto hace que los estudiantes mal interpreten el proceso de modelación entendiéndolo como una aplicación de las matemáticas al contexto real y no como la representación de regularidades que ocurren en los contextos reales.

Ahora bien, las actitudes desfavorables de los estudiantes con bajo desempeño en el área de matemáticas junto con los escasos recursos y las estrategias de enseñanza centradas en los contenidos, provocan que al interior de las clases se dificulte la construcción de conocimiento; ya que la esencia de las matemáticas requiere para su aprendizaje la construcción del nuevo conocimiento sobre construcciones anteriores y en el caso de los estudiantes con bajo desempeño esta construcción se da en el mayor de los casos sobre la base de errores que generan obstáculos epistemológicos (Del Puerto et al, 2006), por lo que el nuevo conocimiento se hace poco falible y poco útil al momento de llevarlo a la aplicación práctica en la solución de un problema.

Es así como se puede afirmar que los obstáculos epistemológicos manifestados con mayor frecuencia por los estudiantes se relacionan con la confusión entre el producto – dos veces un número- y el manejo de los exponentes al momento de intentar llevar una expresión del lenguaje verbal al lenguaje matemático o viceversa o al emplear los conceptos de área y perímetro en la solución de problemas.

De igual manera, desde la socioepistemología que propone la construcción colectiva de conocimiento, se aprecia que los estudiantes con dificultades para modelar situaciones reales mediante la suma de expresiones algebraicas, no participan en la construcción colectiva de conocimiento; ya que sus intervenciones en el aula son tímidas y poco nutridas. Es importante resaltar que los estudiantes no ven el error como oportunidad de aprendizaje y por el contrario tienden a tomar actitudes burlescas ante los estudiantes que realizan aportes errados.

Lo anterior se toma como punto de partida para dar respuesta al segundo planteamiento: ¿Cómo es desarrollado el proceso de modelación matemática por los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño académico en el área de matemáticas, haciendo uso de la suma de polinomios?; pues se hace evidente que la poca participación de los estudiantes debido a la inseguridad generada por la existencia de los obstáculos epistemológicos, interfiere de manera directa en su avance por las fases del proceso de modelación señaladas por Rodríguez (2010); resaltándose que cerca de

Vale resaltar que cerca de la totalidad de los estudiantes con dificultades en el proceso de modelación mediante la suma de expresiones algebraicas, llegan a lo más al uso de los MM (modelos matemáticos) con los que sólo en pocas ocasiones logran determinar una RM (respuesta matemática); del mismo modo que solo un estudiante realiza el proceso de modelación hasta la fase de RR (resultados reales) y que ninguno llega a la generalización.

Se considera que lo anterior se relaciona con el paso de las SR (situaciones reales) al MPC (modelo pseudo científico), en donde los estudiantes hacen lecturas aritméticas pero sin relacionar las variables inmersas en el problema (Cañadas et al, 2011), de modo que no realizan procesos básicos como la traducción de expresiones del lenguaje verbal al matemático o viceversa o la representación gráfica del problema real; de igual manera, en el paso del (MPC) al MM los estudiantes proponen modelos matemáticos errados como instrumentos de solución de problemas; en el paso del MM al EM (estudio matemático) la mayor parte de los estudiantes con bajo rendimiento en el área de matemáticas realiza estudios matemáticos errados ya que no identifican los pasos para realizar la suma expresiones algebraicas (Ver figura 15); lo anterior supone que un

pequeño grupo de estudiantes logra dar RM acertadas mediante el estudio matemático adecuado.

Las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a las primeras fases de modelación hacen que en el paso de las RM a RPC (respuestas pseudo concretas) los avances sean mínimos; al respecto se puede afirmar que los estudiantes que mantienen buena actitud y dan cumplimiento con los diversos compromisos frente al área son quienes alcanzan las RM. Sólo un estudiante logra realizar el proceso de modelación pasando de las RPC a la CMR (confrontación modelo-realidad) asociando correctamente las RM con el contexto real; dando paso además del CMR a los RR ya que expresa verbalmente la respuesta a un problema real (Ver figura 20).

En relación a lo anterior, se da respuesta al tercer planteamiento ¿En qué nivel de modelación se encuentran los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño en el área de matemáticas?; pues las dificultades anteriores permiten clasificar el nivel de modelación desarrollado por los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño en el área de matemáticas como implícito (Greer y Verschaffel, 2007) ya que están en un primer nivel de modelación en el que se desarrollan acciones matemáticas inconscientemente en donde simplemente se aplican esquemas matemáticos mediante el uso de los principios o valores matemáticos descritos por Herrera (1988).

Así, desde el nivel de modelación desarrollado por los estudiantes basado en la relación de sus conceptos previos – errados- como base en la construcción de estructuras más complejas, hace que las funciones del proceso de modelado se establezcan dentro

de las funciones heurísticas – sustitutivas y a su vez en una perspectiva de modelación pragmática; en virtud de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, pero sin acercarlos a los contextos.

En relación a lo anterior, se afirma que los estudiantes de grado octavo con bajo desempeño en el área de matemáticas cumplen procesos matemáticos centrados a lo más, en la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos que rara vez conducen a la relación de dichos algoritmos con la realidad; es decir que no han desarrollado habilidades en cuanto a la construcción de estructuras mentales que representen las regularidades correspondientes a determinadas situaciones reales; por tanto es factible aseverar que se encuentran en el desarrollo de las habilidades para la formulación de hipótesis, la simplificación de situaciones, el reconocimiento de cantidades, la búsqueda de información y la identificación de variables y de las relaciones entre ellas; correspondientes a los dos primeros niveles de competencias en modelación matemática señalados por Maaß (2006).

En definitiva, se encontró un primer grupo de factores asociados a la dimensión afectiva y a los ambientes de aprendizaje, que han intervenido en los procesos de modelación desarrollados por los estudiantes; entre estos la actitud desfavorable por parte de los estudiantes y la escases de recursos físicos y didácticos junto con las estrategias de enseñanza al marco de los modelos tradicionales respectivamente. Del mismo modo se señalan como un segundo grupo de factores, aquellos de tipo cognitivo como los obstáculos epistemológicos y la ausencia de procesos de construcción de conocimiento colectivo que sitúan el proceso de modelación desarrollado por los

estudiantes en un nivel de modelación implícito, cuyas funciones, perspectivas y competencias de modelación matemática se ajustan a la solución esquemática de problemas alejados de la realidad.

5.2. Recomendaciones

Los resultados dados en la investigación permiten por su parte hacer las siguientes recomendaciones en aras de mejorar los procesos de comunicación en el ambiente de aprendizaje de las matemáticas al igual que para elevar el nivel de modelación implícito y llevarlo hasta el nivel de modelación crítico.

- A los entes gubernamentales y administrativos desde los cuales son supeditados los procesos de enseñanza al interior de las instituciones educativas, minimizar el número de estudiantes por aula de clase; ya que esto obstaculiza la detección, seguimiento y eliminación de las dificultades de los estudiantes en su proceso de construcción de conocimientos.
- Considerar en el PEI (Proyecto Educativo Institucional) la dimensión afectiva como aspecto relevante en la potencialización de los aprendizajes ya que ésta dimensión condiciona las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes de modo que ante una buena actitud se puedan desarrollar mejores dominios cognitivos.
- A la institución educativa, generar espacios de capacitación para los maestros del área de matemáticas en relación al tema de la modelación matemática;

como punto de partida a la transformación positiva de los ambientes de aprendizaje.

- Redireccionar los ambientes de aprendizaje en relación a la dimensión afectiva para potencializar la motivación y la buena actitud de los estudiantes de modo que así como lo afirma Maslow en Ormrond, (2008) se les permita estar en la búsqueda constante por satisfacer sus necesidades; de modo que acentúen motivación intrínseca y su motivación al logro.
- Gestionar institucionalmente el mantenimiento, dotación y adecuación de los recursos físicos destinados para la enseñanza de las matemáticas. Esto es, invertir en la adecuación de aulas especializadas para enseñanza de las matemáticas, donde se cuente con recursos tecnológicos como computadores con conexión continua a Internet, tableros electrónicos, televisor y video beam, entre otros recursos físicos que permitan implementar diferentes alternativas de participación para los estudiantes, de modo que estos vivencien significativamente el aprendizaje y se sientan motivados a interactuar con mayor frecuencia durante las clases.
- Buscar estrategias que contribuyan durante las clases a maximizar las oportunidades de construcción y verificación de conocimiento que permitan identificar pero también eliminar los obstáculos epistemológicos y por ende el error; que favorezcan el cambio en el ambiente de aprendizaje en cuanto a la necesidad de cumplir con el rol polivalente de las matemáticas vistas como

punto de encuentro entre la escuela y los distintos contextos sociales y que además se orienten al desarrollo de funciones ejecutivas superiores.

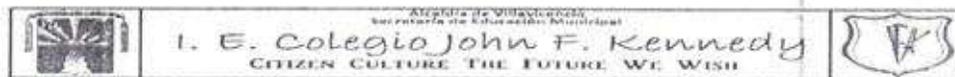
- Centrar los procesos de enseñanza en el carácter acumulativo del área; entendiendo que los conocimientos adquiridos en un ciclo o nivel contribuyen al desarrollo de nuevos conocimientos y mejores interpretaciones en niveles superiores; razón por la cual resulta complejo transmitir conocimiento idealizado y más aún transmitir relaciones entre construcciones mentales (De Vries y Kamii, 1991).
- Implementar la crítica constante sobre el conocimiento errado para que este último se convierta en oportunidad de aprendizaje (Popper en Del Puerto et al, 2006).
- Incluir en la enseñanza de las matemáticas el mayor número de fases del proceso de modelación, de modo que el nivel de modelación de los estudiantes se eleve y pase de ser implícito a ser explícito o en el mejor de los casos de tipo crítico en el que como afirma Greer & Versachaffel en el 2007 conduzcan la actividad crítica a la solución de problemas cuyas soluciones puedan ser generalizadas y contrastadas con la realidad (Rodríguez, 2010).
- Llevar el proceso de modelación al aula de clase no como una aplicación de las matemáticas sino como un proceso de representación de regularidades y de transposición del conocimiento matemático a otras áreas.
- Reflejar los procesos de modelación en los currículos para que se pueda dar cumplimiento a la construcción de conocimiento y a las aproximaciones

dadas a los procesos naturales, a perspectivas de modelación integradora – en función de diversos objetivos en relación con el ámbito científico, matemático y pragmático- y a funciones ejecutivas de nivel superior (Castañeda y Álvarez, 2004; Frade, 2009).

- Plantear una futura investigación centrada en la descripción de los factores que intervienen en la formación de los obstáculos epistemológicos de los estudiantes.

APÉNDICES

Apéndice A. Formato Lista de Control observación participante



PROYECTO DE MATEMÁTICAS
CONTROL Y SEGUIMIENTO AL PROYECTO SUPERANDO ANDO

ESTUDIANTE: _____ CURSO: _____
ACUDIENTE: _____ TELÉFONO: _____

- | | |
|---|--|
| 1. Asiste a clase | 6. Participa en clase de manera adecuada |
| 2. Asiste puntualmente | 7. Porta correctamente el uniforme |
| 3. Demuestra interés en la clase | 8. Se comporta de manera adecuada |
| 4. Cumple con las tareas y/o trabajos | 9. Prepara los contenidos con anticipación |
| 5. Realiza las actividades asignadas en clase | |

SEMANA	BLOQUE DE CLASES 1	BLOQUE DE CLASES 2	FIRMA ESTUDIANTE	FIRMA ACUDIENTE	FIRMA DOCENTE
23 - 27 ABRIL					
30 - 4 MAYO					
7 - 11 MAYO					
14 - 18 MAYO					
21 - 25 MAYO					
28 - 1 JUNIO					
4 - 8 JUNIO					
11 - 15 JUNIO					
18 - 22 JUNIO					

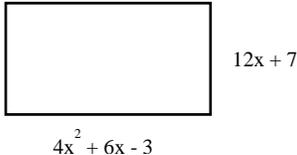
OBSERVACIONES: _____

Apéndice B. Prueba de evaluación a estuantes

UNIVERSIDAD VIRTUAL
TECNOLOGICO DE MONTERREY
CUESTIONARIO APLICADO
A ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE BACHILLERATO

Nombre del investigador: _____
Institución educativa: _____ Fecha: _____ Grado: _____
Nombre del participante: _____

Apreciado estudiante se le solicita contestar las siguientes preguntas mostrando en cada una de ellas el procedimiento empleado; representando gráficamente, simplificando y reduciendo términos cuando sea posible.

5. Traduce al lenguaje matemático la siguiente expresión verbal.
 - “Un número aumentado dos veces su valor”
 - “Una bicicleta cuesta \$ 150.000 más que unos patines”
6. Traduce al lenguaje verbal las siguientes expresiones algebraicas.
 - a) $2x - 2$
 - b) $x^2 + 8$
7. Propón una situación problema o contexto que corresponda a cada una de las siguientes expresiones algebraicas
 - c) $200x$
 - d) $(8mn + 10) - (-5mn)$
8. Observa la siguiente figura y en base a ella encuentra:
 - c) La expresión algebraica que corresponde a su perímetro.
 - d) La expresión algebraica que corresponde a su área.
9. A Paula se le ha asignado pintar de blanco dos paredes del colegio en las cuales se van a realizar unos murales. Si el área de la pared uno corresponde a la expresión de $3xy^2 + 7y^2$ y el área de la pared dos a la expresión $9xy^2 - 2y^2 + 3$, ¿Cuál es la expresión que determina el área total que debe pintar Paula?
10. Salomé ha comprado papel de colores amarillo y verde, con el fin de forrar un cofre que tiene forma de cubo; si el área de cada una de las caras corresponde a la expresión $10m^2 - 8mn^2 + 1$, responde:
 - c) ¿Qué expresión determina la cantidad de papel que se requiere para forrar el cofre?
 - d) Si Salomé desea forrar las caras laterales con papel amarillo y las caras superior e inferior con papel verde, ¿Qué expresión algebraica corresponde a la cantidad de papel amarillo que se requiere?, ¿Qué expresión algebraica corresponde a la cantidad de papel verde?

Representa gráficamente

¡GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!

Apéndice C. Entrevista a estudiantes.

UNIVERSIDAD VIRTUAL
TECNOLOGICO DE MONTERREY
ENTREVISTA SEMI-ESTRUCTURADA APLICADA
A ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE BACHILLERATO

La siguiente entrevista semi- estructurada es aplicada a fin de ahondar en las dificultades de tipo motivacional que tienen los estudiantes frente al área de matemáticas, a fin de obtener información que contribuya a determinar “las limitaciones que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato al modelar por medio de una expresión algebraica una situación real que involucre la suma de polinomios”.

Nombre del investigador: _____
Institución educativa: _____ Fecha: _____ Hora: _____
Nombre del entrevistado: _____
Sesión grabada: si__ no__

Apreciado estudiante se le solicita contestar de manera veraz y abierta las siguientes preguntas asociadas a sus actitudes frente al área de matemáticas.

1. Para ti, ¿es necesario e importante tener una adecuada formación matemática?, ¿Por qué?
2. ¿Consideras que las matemáticas son fáciles o difíciles?
3. A lo largo de tu historia académica ¿cómo ha sido tu desempeño en el área de las matemáticas?
4. ¿Cuáles crees que son las causas de tu desempeño obtenido en el área?
5. ¿Has tenido experiencias desmotivantes que te hayan llevado a preferir estudiar con mayor dedicación y entusiasmo en otras áreas y no en matemáticas?
6. ¿Recuerdas algunas experiencias motivantes que hayas tenido a lo largo de tu aprendizaje en matemáticas?
7. ¿Qué contenidos te han parecido difíciles a lo largo de tu curso de álgebra, específicamente en la suma, resta y multiplicación de polinomios?, ¿por qué?
8. ¿Qué contenidos te han parecido fáciles a lo largo de tu curso de álgebra, específicamente en la suma, resta y multiplicación de polinomios?, ¿por qué?
9. Si construyes un rectángulo de base x y de altura $2x$; ¿qué proceso sigues para hallar la expresión algebraica que corresponde a su perímetro?
10. En el caso anterior, ¿Qué proceso sigues para hallar la expresión algebraica que corresponde al área del rectángulo?
11. En general, ¿qué pasos sigues para realizar la suma entre expresiones algebraicas?
12. ¿Qué diferencias encuentras entre el proceso para realizar la suma y la resta de expresiones algebraicas?
13. Si tienes punto de venta de minutos a celular y por cada minuto cobras \$200, ¿qué expresión algebraica emplearías para determinar el precio de una llamada equis número de minutos?
14. ¿Qué hábitos cambiarías para hacer que tu desempeño en el curso actual de algebra mejore significativamente?
15. ¿Qué aspectos de la clase cambiarías para que hacer que tu desempeño en el curso actual de algebra mejore significativamente?

¡GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!

Apéndice D. Carta de consentimiento a la rectora.

Carta de consentimiento

Villavicencio, abril de 2012

Licenciada
EVA CASTRO AGUIRRE
INSTITUCION EDUCATIVA JFK
La ciudad

Yo, Rosa Catalina Rozo Vásquez estudiante del programa de MAESTRÍA EN EDUCACIÓN con acentuación en Procesos de Enseñanza Aprendizaje, de la Universidad Virtual del ITESM – UNIMINUTO, me permito solicitarle permiso para realizar una investigación centrada en la descripción de las **Limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato al modelar por medio de una expresión algébrica un contexto real que involucra la suma de polinomios**; en la que se espera contar con la participación de los estudiantes de los grados 8-1 y 8-2 de la institución.

Objetivos de la investigación:

General

Establecer el estado del arte acerca de las limitaciones que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato en su tránsito del contexto real al contexto matemático en cuanto al uso de las expresiones algebraicas.

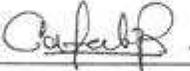
Objetivos Específicos

- Establecer las características de los procesos de modelado realizados por los estudiantes de tercer grado de bachillerato frente al uso de las expresiones algebraicas en el tránsito del dominio real al matemático.
- Identificar los factores que originan las deficiencias que presentan los estudiantes de tercer grado de bachillerato al usar las expresiones algebraicas en la modelación matemática, específicamente en el tránsito del contexto real al matemático.

Se deja claro además que la recolección de la información se hará dentro de las instalaciones del colegio y acorde a los horarios permitidos por la administración de la institución educativa.

Agradezco su atención y oportuna colaboración.

Atentamente,



Lic. Rosa Catalina Rozo Vásquez



En acuerdo firma,

Lic. Eva Castro Aguirre
Rectora de la Institución

Apéndice E. Carta de consentimiento a estudiantes.

Carta de consentimiento

Apreciado estudiante,

Por medio de la presente se le está invitando a participar de una investigación cuyo objetivo se centra en describir las **Limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato al modelar por medio de una expresión algebraica un contexto real que involucra la suma de polinomios**; como trabajo de grado para optar el título de MAESTRÍA EN EDUCACIÓN con acentuación en Procesos de Enseñanza Aprendizaje, de la Universidad Virtual del ITESM – UNIMINUTO.

Usted aportará información importante a la investigación, mediante la aplicación de tres instrumentos de recolección de datos, una entrevista, una lista de control o seguimiento al estudiante y un cuestionario o test; de los cuales la entrevista y el test serán aplicados en el mes de julio; mientras que la observación participante será realizada durante el segundo periodo académico comprendido entre los meses mayo y junio.

Los objetivos de la investigación son:

General

Establecer el estado del arte acerca de las limitaciones que tienen los estudiantes de tercer grado de bachillerato en su tránsito del contexto real al contexto matemático en cuanto al uso de las expresiones algebraicas.

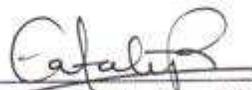
Objetivos Específicos

- Establecer las características de los procesos de modelado realizados por los estudiantes de tercer grado de bachillerato frente al uso de las expresiones algebraicas en el tránsito del dominio real al matemático.
- Identificar los factores que originan las deficiencias que presentan los estudiantes de tercer grado de bachillerato al usar las expresiones algebraicas en la modelación matemática, específicamente en el tránsito del contexto real al matemático.

Se deja claro que usted es libre de participar o no del proceso de investigación y que no se verá afectado académicamente por su participación ya que el desarrollo de la misma se dará en las instalaciones de la institución y acorde a los horarios permitidos por la administración de la institución educativa.

Agradezco su atención y oportuna colaboración.

Atentamente,


Lic. Rosa Catalina Roza Vásquez

En acuerdo firma,

MANUEL GONZÁLEZ H.
Estudiante participante

8-2
Grado

29/05/2012
Fecha



Apéndice F. Ficha de seguimiento y observación a un estudiante.

Municipalidad de Valdivia Secretaría de Educación Municipal 1. E. Colegio John F. Kennedy CITIZEN CULTURE THE FUTURE WE WISH					
PROYECTO DE MATEMÁTICAS CONTROL Y SEGUIMIENTO AL PROYECTO SUPERANDO ANDO					
ESTUDIANTE: <u>Sayi Doraci Sabagal Marhuaz</u>		CURSO: <u>8-2</u>			
ACUDIENTE: <u>Olga Martínez</u>		TELÉFONO: <u>6695612</u>			
1. Asiste a clase 2. Asiste puntualmente 3. Demuestra interés en la clase 4. Cumple con las tareas y/o trabajos 5. Realiza las actividades asignadas en clase		6. Participa en clase de manera adecuada 7. Porta correctamente el uniforme 8. Se comporta de manera adecuada 9. Prepara los contenidos con anticipación			
SEMANA	BLOQUE DE CLASES 1	BLOQUE DE CLASES 2	FIRMA ESTUDIANTE	FIRMA ACUDIENTE	FIRMA DOCENTE
23 - 27 ABRIL	04. 06. 09.	02. 03. 05. 09.	Sayi	Olga Martínez	Catalina
30 - 4 MAYO	No hay Compañero	Compañero Nilo	Sayi	Olga Martínez	Catalina
7 - 11 MAYO	01.	01.			Catalina
14 - 18 MAYO	04. 06. 05. 09.	No clase			Catalina
21 - 25 MAYO	01.	01.			Catalina
28 - 1 JUNIO	No clase	No hay compañero!	Sayi		Catalina
4 - 8 JUNIO	01	01			Catalina
11 - 15 JUNIO	Compañero Nilo.	Compañero Nilo.		Olga Martínez	Catalina
18 - 22 JUNIO	01	04. 06.	Sayi		Catalina
OBSERVACIONES: <u>Los finados fallan no le permiten cumplir con las compromisos.</u> <u>- No renovar ideas propuestas en el día de hoy</u>					

Apéndice G. Ficha de caracterización de un estudiante.

 1. E. Colegio John F. Kennedy <small>SECRETARÍA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL</small> CITIZEN CULTURE THE FUTURE WE WISH							
DIAGNÓSTICO DEL DESEMPEÑO EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS							
ENTREVISTA A PADRE DE FAMILIA Y ESTUDIANTE							
Este diagnóstico pretende determinar históricamente el nivel de desempeño de los estudiantes en matemáticas y las principales dificultades que presenta con el objeto posterior de proponer alternativas efectivas de mejoramiento, basadas en las dificultades reales, de mejoramiento académico en matemáticas.							
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:	Soyi Dorceli Sabogal Martín		CURSO: 8-2				
NOMBRE DEL PADRE DE FAMILIA:	Olga Martínez		EDAD: 13				
IDENTIFICACIÓN DEL PADRE:	399940698	CELULAR: 313416649	FONO: 669567				
INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE							
AÑO DE INGRESO AL COLEGIO JOHN F. KENNEDY:	2012	PERIODO CURSOS CUALES:	SI NO X				
EL ESTUDIANTE HA CAMBIADO REGULARMENTE DE COLEGIO (3 O MÁS VECES):			SI X NO				
DESDE QUÉ GRADO PRESENTÓ DIFICULTADES EN MATEMÁTICAS:	Sexto						
CÓMO CONSIDERA EL NIVEL DE DIFICULTAD EN EL DESEMPEÑO DE SU HIJO EN MATEMÁTICAS:	ALTA DIFICULTAD	MEDIANA DIFICULTAD	BAJA DIFICULTAD				
Marque con una x las situaciones que considera que dificultan el desempeño en matemáticas de su hijo:	DIFICULTAD						
	<input type="checkbox"/>	Situación especial de aprendizaje, problemas de retraso					
	<input type="checkbox"/>	No toma apuntes en clase					
	X	Nerviosismo al momento de evaluar					
	<input type="checkbox"/>	Problemas socio-afectivos					
	X	Actitud negativa hacia las matemáticas					
	X	No comprende los textos que lee					
	<input type="checkbox"/>	Atención dispersa					
	<input type="checkbox"/>	Malos hábitos de estudio					
	<input type="checkbox"/>	Fomenta la indisciplina en clase					
<input type="checkbox"/>	No dedica el tiempo suficiente						
CONTROLES DE LOS PADRES EN EL DESEMPEÑO DE SU HIJO							
CÓMO CONSIDERA EL DESEMPEÑO ACADÉMICO GENERAL DE SU HIJO							
NIVEL	BÁSICA PRIMARIA (1° a 5°)	SECUNDARIA (6° a 9°)	MEDIA (10° a 11°)				
Bajo							
Básico		X					
Alto	X						
RELACIONE LOS INSTRUMENTOS Y MATERIALES DE TRABAJO PARA MATEMÁTICAS QUE UTILIZA SU HIJO EN CASA Y EN EL COLEGIO							
	CASA	COLEGIO	CASA	COLEGIO			
TEXOS			X				
ENCICLOPEDIAS	X		X	X			
FOTOCOPIADOR O GRABADORA	X	X	X				
COMPUTADOR	X		X				
SEGUIMIENTO AL DESEMPEÑO ACADÉMICO							
	REVISIÓN DE CUADERNO (TEMÁTICA EN LA QUE ESTÁ)	REVISIÓN DE TAREAS	REVISIÓN DE TRABAJOS (TALLERES Y TAREAS)	REVISIÓN DE EVALUACIONES (PRUEBAS ESCRITAS)			
NUNCA				X			
CASI NUNCA							
ALGUNAS VECES	X	X	X				
CASI SIEMPRE							
SIEMPRE							
TIEMPO SEMANAL QUE SU HIJO DEDICA A DESARROLLAR SUS ACTIVIDADES EN MATEMÁTICAS							
Máximo 1h	X	1h a 2h	2h a 4h	4h a 6h	6h a 8h	NO DEDICA TIEMPO	N.S.
ACCIONES FAMILIARES RELACIONADAS CON EL DESEMPEÑO ACADÉMICO DE SU HIJO:							
Relacione las estrategias o acciones que ha desarrollado, en familia, para superar la dificultad de su hijo	Clases particulares	Grupos de estudio					
	Orientaciones personales	Motivación					
	Organización de horarios	Corrección de talleres		X			
	Controles y límites	Otra(s)??					
Considera que estas estrategias le han generado resultados favorables?	X	NO	ALGUNAS VECES				
Enumere las razones que según su acudido son la causa del bajo desempeño en Matemáticas							
por fallas.							

Apéndice H. Fotografías de aplicación de la prueba de evaluación.



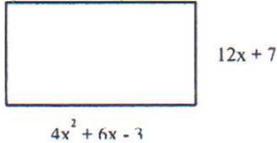
Apéndice I. Prueba de evaluación desarrollada por un estudiante.

E1

UNIVERSIDAD VIRTUAL
TECNOLOGICO DE MONTERREY
CUESTIONARIO APLICADO
A ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE BACHILLERATO

Nombre del investigador: Catalina Roza
Institución educativa: John F. Kennedy Villavicencio Fecha: 20/06/12 Grado: 8-2
Nombre del participante: Rodriguez Hurtado Diego Alejandro

Apreciado estudiante se le solicita contestar las siguientes preguntas mostrando en cada una de ellas el procedimiento empleado; representando gráficamente, simplificando y reduciendo términos cuando sea posible.

- Traduce al lenguaje matemático la siguiente expresión verbal.
 - "Un número aumentado dos veces su valor"
 - "Una bicicleta cuesta \$ 150.000 más que unos patines"
- Traduce al lenguaje verbal las siguientes expresiones algebraicas.
 - $2x - 2$
 - $x^2 + 8$
- Propón una situación problema o contexto que corresponda a cada una de las siguientes expresiones algebraicas
 - $200x$
 - $(8mn + 10) - (-5mn)$
- Observa la siguiente figura y en base a ella encuentra:
 - La expresión algebraica que corresponde a su perímetro.
 - La expresión algebraica que corresponde a su área.

$4x^2 + 6x - 3$
- A Paula se le ha asignado pintar de blanco dos paredes del colegio en las cuales se van a realizar unos murales. Si el área de la pared uno corresponde a la expresión de $3xy^2 + 7y^2$ y el área de la pared dos a la expresión $9xy^2 - 2y^2 + 3$, ¿Cuál es la expresión que determina el área total que debe pintar Paula?
- Salomé ha comprado papel de colores amarillo y verde, con el fin de forrar un cofre que tiene forma de cubo; si el área de cada una de las caras corresponde a la expresión $10m^2 - 8mn^2 + 1$, responde:
 - ¿Qué expresión determina la cantidad de papel que se requiere para forrar el cofre?
 - Si Salomé desea forrar las caras laterales con papel amarillo y las caras superior e inferior con papel verde, ¿Qué expresión algebraica corresponde a la cantidad de papel amarillo que se requiere?, ¿Qué expresión algebraica corresponde a la cantidad de papel verde?

Representa gráficamente

¡GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!

UNIVERSIDAD VIRTUAL
 TECNOLOGICO DE MONTERREY
 CUESTIONARIO APLICADO
 A ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE BACHILLERATO
 HOJA DE OPERACIONES

Nombre del investigador: Catalina Razo
 Institución educativa: San F. Kennedy Villavicencio Fecha: 20/06/11 Grado: 3-7
 Nombre del participante: Rodríguez Hurtado Diego Alejandro

f. a) $x + 2x$

b) $150.000 + P = \text{patines}$

2.

a) dos x - dos

b) x a la dos + ocho

3.

a) carolina tiene dos hijos a quienes les desea comprar una patineta a cada uno. si el costo de cada patineta es de $200x$ ¿cuanto le valdrían las dos patinetas? y x es igual a patinetas.

$$\begin{array}{r} 200x \\ + 2 \\ \hline 400x^2 \end{array}$$

el valor de las patinetas es de $400x^2$

b) Juanito no puede resolver el siguiente problema como lo resolverías

$$(8mn + 10) - (-5mn)$$

$$\begin{array}{r} 8mn + 10 \\ + 5mn \\ \hline \end{array}$$

$13mn + 10$ sería el resultado

el problema se resuelve quitando los signos de agrupación y convirtiendo los que están en la necesidad de convertir como el $-(-5mn)$ este número quedaría positivo ya que menos x menos = más

* a) $4x^4 + 6x^2 - 3z = 16x^2 + 36x^2 - 9$
 $12x^2 + 7z = \frac{12x^2 + 49}{16x^2 + 48x^2 + 40}$ es el perimetro de la figura

b) $4x^2 + 6x - 3 \cdot 12x + 7 = 48x^3 + 72x^2 - 36x$
 $\frac{72x^2 + 42x - 21}{48x^3 + 25x^2 + 6x - 21}$ es el area de la figura

*

a) $3xy^2 + 7y^2 = 9xy^4 + 49y^4$ es el area de la primera pared
 b) $9xy^2 - 2y^2 + 3 = 81xy^4 + 4y^4 + 9$

$\frac{3xy^2 + 7y^2}{9xy^2 - 2y^2 + 3}$
 $12xy^2 + 5y^2 + 3$ es el area total que debe pintar paula

* a) $60m^2 - 48mn^2 + 6$ es la cantidad de papel que se requiere

b)
$$\begin{array}{r|l} 60m^2 - 48mn^2 + 6 & 6 \\ -60m^2 & 10m^2 - 8mn^2 + 1 \\ \hline 0 - 48mn^2 & \quad \quad \quad \times \quad \quad \quad 4 \\ \quad 48mn^2 & 40m^2 - 32mn^2 + 4 \\ \hline 0 + 6 & -60m^2 + 48mn^2 + 6 \\ \quad - 6 & 20m^2 - 16mn^2 + 2 \\ \hline 0 & \end{array} = \text{papel amarillo}$$

$20m^2 - 16mn^2 + 2 = \text{papel verde}$

1. $40m^2 - 32mn^2 + 4$ es la cantidad de papel amarillo que se requiere para forrar las caras laterales

2. $20m^2 - 16mn^2 + 2$ es la cantidad que se requiere de papel verde para forrar la cara inferior y superior

Apéndice J. Cuadro de codificación de cada estudiante.

N°	Nombre	Grado
E1	Rodríguez Diego Alejandro	Octavo 2
E2	González Manuel	Octavo 2
E3	Amaya Torres Dany	Octavo 2
E4	Hernández Angie Michael	Octavo 2
E5	Herrera María Isabel	Octavo 2
E6	Medina Giraldo Yenuvi	Octavo 2
E7	Pulido Alejandra	Octavo 2
E8	Sabogal Sally	Octavo 2
E9	Moreno Lizeth	Octavo 2
E10	Rodríguez Pedro	Octavo 2
E11	Ducuara Ingrid	Octavo 1
E12	Sánchez Moreno Paula	Octavo 1
E13	Guzmán Soraya	Octavo 1
E14	Vega Karen	Octavo 1
E15	Ospina Angie	Octavo 1
E16	Tatiana Garzón	Octavo 1
E17	Carvalalino Sonia Milena	Octavo 1
E18	Medina Jenny Aracely	Octavo 1
E19	Arboleda María	Octavo 1
E20	Martínez Héctor Alejandro	Octavo 1

Apéndice K. Fotografías del ambiente de aprendizaje.



Apéndice L. Participación de los estudiantes en clase.



REFERENCIAS

- Álvarez, M de J y Castañeda, A. (2004). *La reprobación en Matemáticas. Dos experiencias [Versión electrónica].* *Tiempo de educar*, 5(9), 141-172. Recuperado de <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/311/31100906.pdf>
- Aravena D, María; Caamaño E, Carlos. (2007). *Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile.* *Estudios pedagógicos*, Volumen XXXIII (2), pp. 7 – 25. Rescatado de: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=173514134001>
- Berrio, M; Bustamante, C; Ocampo, D; Osorio, J y Villa, J. (2009). *Sentido de realidad y modelación matemática.* *Alexandria Revista de Educação em Ciencia e Tecnologia.* Volumen 2 (2), pp. 159-180. Rescatado de http://alexandria.ppget.ufsc.br/numero_2_2009/jhony.pdf
- Blomhoj, M., Carreira, S. (2008). *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematic.* Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical education. Monterrey, México. Recuperado de <http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/461.pdf>
- Blomhoj, M. (2008). *Different perspectives on mathematical modelling in educational research- categorizing the TSG21 papers.* Recuperado de <http://tsg.icme11.org/document/get/811>
- Boullosa; Lage y Hernández. (2009). *"La modelación y los modelos teóricos en la ciencia. Una concreción en la auditoria interna con enfoque de riesgo"* en *Contribuciones a la Economía.* Rescatado de <http://www.eumed.net/ce/2009b/tjm.htm>
- Cantoral, R., y Farfán, R. (2003). *Matemática Educativa: una visión de su evolución [Versión electrónica].* *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40. <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33560102.pdf>

- Cañadas, M., Lupiáñez, J., Maz A., Molina, M. y Palarea, M. (2011). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.seiem.es/gruposdetrabajo/pna/ActasPNAGranada.pdf>
- Caramena, P. (2009). *Mathematical Modeling and Knowledge Transference*. Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 18-36.
- Castañeda, A., y Álvarez, M de J. (2004). *La reprobación en Matemáticas. Dos experiencias [Versión electrónica]*. *Tiempo de educar*, 5(9), 141-172. Recuperado de <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/311/31100906.pdf>
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana [Versión electrónica]. *Revista de investigación en matemática Educativa*, 4(2) ,103-128.
- Cordero, F; Suárez, L; Mena, J; Arrieta, J; Rodríguez, R; Romo, A; Casteanu, A y Solís, M. (2009). *La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Acta Latinoamericana de Matemática educativa. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., Volumen 22.
- Del Puerto, S.; Minnaard, C.; y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas [Versión electrónica]. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-12. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>
- De Vries, R. y Kamii, C. (1991). *La teoría de Piaget y la Educación Preescolar*. Madrid, España: Visor.
- Engler, A., Gregorini, M., Hecklein, M., Müller, D. y Vrancken, S. (s, f). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de <http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf>

- Giroux, S. y Tremblay, G. (2008). *Metodología de las ciencias Humanas*. Cap. IV Métodos y técnicas de muestreo. Fondo de cultura económica.
- Hidalgo, S.; Maroto, A.; y Palacio, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. [*Versión electrónica*] *Educación Matemática*, 17(002), 89-116.
- Jara, O. (s, f). Dilemas y desafíos de la sistematización de experiencias, Costa Rica, Centro de estudios y publicaciones Alforja. Recuperado de: <http://www.grupochorlavi.org/webchorlavi/sistematizacion/oscarjara.PDF>.
- Frade, L. 2009. *Desarrollo de Competencias en Educación: desde preescolar hasta el bachillerato*. (2ª Ed). Distrito Federal, México: Inteligencia Educativa.
- Gil, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Organización de los estados Iberoamericanos. Editorial Popular
- Gómez, I. (2005). Los afectos en el aprendizaje matemático. En E.G. Larios. *Reseña de matemática emocional*. (pp. 185- 189). Distrito Federal, México. Santillana
- Greer, B & Verschaffel, L. (2007). *Modelling competencies*. Graduate School of Education, Portland State University. University of Leuven, Belgium.
- Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, p. (2008). *Metodología de la investigación*. Mexico D.F: McGraw- Hill.
- Henning, H & Keune, M. (2007). *Level of modelling competencies*. Department of mathematics, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Germany. Okumenisches Domgymnasium Magdeburg, Germany.

- Herrera, I. (1988). *Modelación matemática en ciencias e ingeniería*. (1ª Ed). México, D.F: Cuadernos del Seminario de Problemas Científicos y Filosóficos. Universidad Nacional autónoma de México. Recuperado de http://books.google.com.co/books?id=7zgYxlWXzAEC&printsec=frontcover&q=modelaci%C3%B3n+matem%C3%A1tica&hl=es&sa=X&ei=9E4IT_7YNIKJtwePmpykCw&ved=0CDMQ6AEwAA#v=onepage&q=modelaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica&f=false
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? University of Education, Freiburg. ZDM 2006 Vol. 38 (2). Recuperado de <http://mathematik.ph-weingarten.de/~ludwig/Vorlesungen/ws0708/fachdidaktikforschung/modelling/a4Maass.pdf>
- Martínez, R. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes*. Madrid, España. Fareso. Recuperado de <http://www.gse.upenn.edu/pdf/La%20investigaci%C3%B3n%20en%20la%20pr%C3%A1ctica%20educativa.pdf>
- Mayan, M. (2001). *Una introducción a los métodos cualitativos*. Recuperado de <http://www.grupochorlavi.org/webchorlavi/sistematizacion/oscarjara.PDF>
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Colombia: Imprenta nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2009). *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*. España: IFIIE Aulas de verano. Recuperado de http://books.google.com.co/books?id=4WFd43REgEYC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
- Kaiser, G., Sriraman, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*. University of Hamburg, University of Montana. ZDM 2006 Vol. 38(3)

- Lozano, A. (2005). *El éxito de la enseñanza: aspectos didácticos de las facetas del profesor*. México: Trillas
- Ormron, J.E. (2008). *Capítulo 1*. (4ta ed.). En Pearson Educación SA. *Aprendizaje Humano*. (pp. 3-11). Madrid: España.
- Ormron, J.E. (2005). *Capítulo 9*. (2ta ed.). En Pearson Educación SA. *Aprendizaje Humano*. (pp. 215-232). Madrid: España.
- Ormron, J.E. (2008). *Capítulo 16*. (4ta ed.). En Pearson Educación SA. *Aprendizaje Humano*. (pp. 479-509). Madrid: España.
- Piaget, J. (2001). *La Representación del Mundo en el Niño*. París, Francia: Morata.
- Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.
- Rodríguez, R. (2010). *Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales*. *Relime*. Vol. 13 (4-1):191- 210. Recuperado de 1012 de <http://www.clame.org.mx/relime/20100412.pdf>
- Salamanca, A. y Crespo, C. (2007). *El muestreo en la investigación cualitativa*. Recuperado de: [http://www.fuden.es/FICHEROS ADMINISTRADOR/F METODOLOGICA/F Metodologica 27.pdf](http://www.fuden.es/FICHEROS_ADMINISTRADOR/F_METODOLOGICA/F_Metodologica_27.pdf)

Currículum Vitae

Rosa Catalina Rozo Vásquez

splian@hotmail.com

Originaria de Villavicencio, Meta, Colombia, Rosa Catalina Rozo Vásquez realizó estudios profesionales en Matemáticas y Física en la Universidad de los Llanos ubicada en Villavicencio, Meta, Colombia. La investigación titulada, Limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato con bajo desempeño académico al modelar polinomios a partir de un contexto es la que presenta en este documento para aspirar al grado de Maestría en Educación con acentuación en Procesos de enseñanza y Aprendizaje.

Su experiencia de trabajo ha girado, principalmente, alrededor del campo de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de educación secundaria desde hace 8 años.

Actualmente, Rosa Catalina Rozo Vásquez funge como maestra de matemáticas directora de grado sexto en una Institución Educativa de carácter oficial en donde espera poder continuar realizando trabajos de investigación que contribuyan al mejoramiento de los procesos de aprendizaje.