Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico

Articulating the mathematical knowledge through a social practices framework. The periodic aspect study case

Gabriela Buendía Abalos

RESUMEN

Presentamos una serie de resultados que apoyan la tesis socioepistemológica acerca de un saber matemático articulado y funcional si la explicación sobre la construcción de dicho saber cambia su centración de los objetos hacia las prácticas. Mientras que la primera se apoya en una idea de preexistencia al margen de la experiencia del individuo y las explicaciones surgen de la matemática misma, a través de la socioepistemología de lo periódico que ahora se presenta, se abre la posibilidad de tomar otros marcos de referencia que permitan dar cuenta, a través de las prácticas sociales, de aquello que constituye el saber matemático. La metodología en la que nos apoyamos propone el ingreso de dichas prácticas al aula bajo diseños en los que se desarrollan de manera intencional. De esta manera, se puede dar evidencia sobre la resignificación del saber en la organización de los grupos humanos, favoreciendo entonces articulaciones significativas.

PALABRAS CLAVE:

- *Prácticas sociales*
- *Saber matemático articulado*
- *Periodicidad*

ABSTRACT

We present a series of research results that suppor the socio-epistemological thesis about an articulated and functional mathematical knowledge if the explanations about this knowledge construction changes from being centered on objects towards the practices. Whereas the first one leans in the idea of preexistance to the margin of the individuals' experience and the explinations arise from the mathematics itself, the periodic property socio-epistemologie that is now presented, the possibility is opened to enlarged the frameworks so they can take into account that which constitues mathematical knowledge. Our methodological aspect proposes the entrance of these practices into the didactic system by means of didactical designs in which they are developed of intentional way. In this way, evidence can be given on the knowledge resignification within human groups organization, favoring the signficant joints.

KEY WORDS:

- *Social practices*
- *Articulated mathematical knowledge*
- *Periodicity*

Relime (2010) 13 (4-I): 11-28. Recepción: Abril 30, 2009 / Aceptación: Enero 13, 2010.

RESUMO

Nós apresentamos uma série de resultados para apoiar a tese socioepistemologica sobre a coordenação eo conhecimento matemático funcional se a explicação sobre a construção desse conhecimento muda a sua concentração de objetos para a prática. O primeiro é baseado em uma idéia pré-existente, sem experiência do indivíduo e explicações emergem da própria matemática. Una socioepistemologia a respeito da periodicidade abre a possibilidade de tomar outras estruturas que permitem, através de práticas sociais do que constitui o conhecimento matemático. A metodologia que propomos o apoio ao rendimento de tais práticas em sala de aula em projetos que são desenvolvidos intencionalmente. Pode prestar depoimento sobre o novo significado do conhecimento na organização dos grupos humanos, favorecendo então articulações significantes.

PALAVRAS CHAVE:

- *Prática social*
- *Conhecimento matemático articulada*
- *Periodicidade*

RÉSUMÉ

Nous présentons les résultats qui support la thèse socioepistemologique au sujet d'un savoir mathématique articulé et fonctionnel si l'explication sur la construction de ce savoir change de la concentration d'objets vers les pratiques. Pendant la première s'appuie sur une idée de préexistence à la marge de l'expérience de l'individu et les explications émergentes des meme mathématiques, à travers de la socioépistémologie de le périodique qui se présent maintenant, ca c'est ouvre la possibilité d'avoir des autres cadres de référence qu'ils nous permettent de se rendre compte, a travers des pratiques sociaux, de ca qui constitue le savoir mathématique. La méthodologie sur laquelle nous nous appuyons elle propose l'admission de ces pratiques sous des dessins dans ceux qui se développent d'une manière intentionnelle. De cette manière, c'est possible offrir évidence sur la resignification du savoir dans l'organisation des groupes humains, en favorisant des articulations significatives.

MOTS CLÉS:

- *Pratiques sociales*
- *Savoir mathématique articulé*
- *Périodicité*

1 Introducción

La propuesta socioepistemológica tiene como fin la reorganización de la matemática escolar y para ello, le apuesta a reconocer la naturaleza del conocimiento matemático. Cordero (2006) menciona que una centración en la construcción de los conceptos matemáticos no deja que surja la pregunta sobre lo que constituye a dichos conceptos y difícilmente se podría lograr, por ejemplo, una explicación acerca de que la suma y la resta responden a situaciones de variación y cambio que evolucionan a lo largo de un currículo escolar. Esa evolución natural es lo que hace que la suma y resta se hagan más complejas hasta resignificarse y llegar a elaborar la analiticidad de las funciones.

En ese sentido, este artículo presenta un conjunto de resultados que apoyan un enfoque no centrado en objetos matemáticos, sino en reconocer que la matemática es una actividad humana, cultural e históricamente situada. Esto pretende reconocer el carácter social de la matemática a través de entender aquellas prácticas que hoy hacen que hagamos lo que hacemos. Abordaremos resultados acerca de la periodicidad de los objetos matemáticos, propiedad que transita desde lo intuitivo hacia todo el sistema educativo y que no siempre encuentra en su proceso de institucionalización los marcos de referencia necesarios para convertirse en una propiedad significativa y útil.

El cambio del objeto hacia las prácticas sociales impone también un cambio de lenguaje por lo que hablaremos de *lo periódico*, una propiedad de diferentes objetos matemáticos que toma significado en el ejercicio intencional de ciertas prácticas situacionales.

❷ Una propiedad poco significativa en la escuela

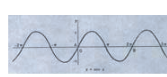
La periodicidad es una propiedad que resulta familiar para cualquier individuo pues forma parte de su cotidiano. Cuando ingresa al sistema didáctico, los marcos de referencia suelen ser exclusivamente analíticos provocando así que su naturaleza quede restringida. Hemos dado evidencia (Buendía, 2004; Buendía, 2006b; Buendía & Cordero, 2005) acerca de que la periodicidad suele vivir como una expresión analítica comprobable sobre una objeto matemático. Esto es especialmente evidente cuando se trabaja con las funciones trigonométricas ya que la periodicidad pareciera ser exclusiva de esas funciones, presentación favorecida por los libros de texto (Figura 1).

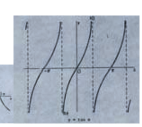
Mientras que hay innumerables ejemplos de funciones periódicas, dos en particular son consideradas básicas: el seno y el coseno…

Así, cos (t + 2π) = cos (t) ; sen (t + 2π) = sent (t)

(Callahan et al. 1992)

Funciones periódicas…¿Puede el estudiante notar cualquier propiedad que las dos primeras tienen en común pero no la tercera? (Bajpai, Calus and Fairley, 1977)





Si tantas cosas son periódicas, ¿por qué limitar nuestro estudio a las funciones trigonométricas? La respuesta está en un sorprendente y bello teorema del cálculo avanzado que dice que cualquier función periódica que se use en un modelo matemático puede escribirse como una combinación algebraica de senos y coseno. (Thomas y Finney, 1998)

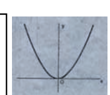
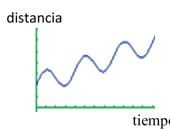
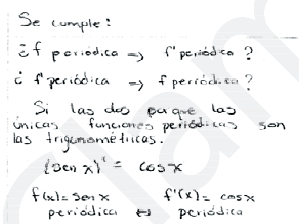


Figura 1. La periodicidad en libros de texto

Retomando el último ejemplo del texto de Thomas y Finney, el potencial que bajo la estructura matemática tiene el que cualquier función puede ser expresada a través de una combinación algebraica de senos y cosenos, puede justificar la importancia que el discurso matemático le da al que un estudiante sea capaz de identificar la propiedad periódica en el seno y el coseno. Sin embargo, este tratamiento ocasiona fenómenos didácticos como que la propiedad periódica quede restringida a *ser una propiedad de una cierta función* y cualquier fenómeno modelable a través de la función seno o gráfica con forma senoidal adquiere por herencia la propiedad periódica. A manera de ilustración, las siguientes referencias de profesores de matemáticas reflejan algunos de sus significados personales respecto a la periodicidad.



… es periódica porque es senoidal y porque va subiendo de dos en dos. (Buendía, 2006a)



El profesor contesta en términos del referente obligado para lo periódico: las funciones trigonométricas (Buendía y Ordoñez, 2009)

Figura 2. Respuestas de profesores relacionadas con la periodicidad

Lo poco significativa que es la propiedad periódica también puede percibirse cuando se manejan otros objetos matemáticos. Vázquez (2008) realizó una investigación que da cuenta del manejo de objetos periódicos desde el nivel preescolar. Las tareas que se desarrollan tienen que ver con el reconocimiento de patrones para completar una secuencia (Figura 3).

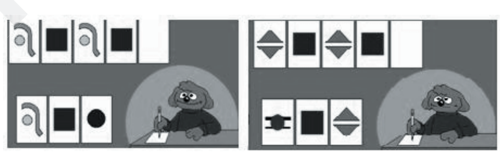
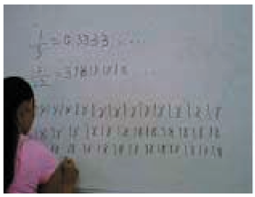


Figura 3. Insertar la figura que completa la secuencia

Sin embargo, este tipo de tareas no suelen ser suficientes para reconocer el carácter periódico del objeto pues se requiere ver *un poco más allá* de la inmediatez de la figura que sigue: es necesario dejarles mostrar su repetición. Al respecto, North (1997) presenta una analogía que resulta ilustrativa: “en un instante, una nota musical no es nada, sino que requiere todo el periodo para manifestarse” (p. 337).

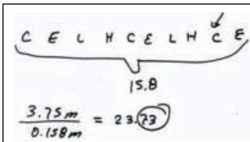
Si las tareas que promueve la matemática escolar no favorecen reconocer el comportamiento presente en el objeto a tratar, la propiedad periódica resulta ser una propiedad no aprovechable o no reconocida. Veamos las siguientes ilustraciones (Figuras 4, 5 y 6):



Estudiante de Licenciatura

Se le pidió hallar la cifra que ocupa el lugar 120 en la fracción periódica $\frac{7}{22}$. Ella comenzó a escribir explícitamente todas las cifras tratando de llegar al lugar 120 (Buendía, 2006a).

Figura 4. Trabajando con un decimal periódico



C = Cebra; E = Elefante; L= León; H = Hipopótamo

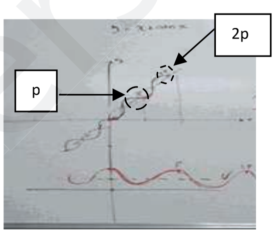
Profesor de Matemáticas

Se le proporcionó una tira-muestra de 15.8 cm de una cenefa con figuras de animales aclarando que las cenefas se venden por rollos de unos 30 mts. Se le preguntó qué animal quedaría en la esquina de una pared de 3.75 mts.

El profesor divide la longitud de la pared entre longitud de la muestra, como trasponiendo la muestra una tras otra –y perdiendo la periodicidad- sobre la pared hasta llegar a la esquina. Obtiene que esa muestra se repite 23 veces.

(Buendía, 2006a)

Figura 5. Trabajando con una sucesión periódica



A un estudiante de posgrado, se le mostró la gráfica de la función $f(x) = x + senx$,

Se le pidió verificar en ellas el cumplimiento de la propiedad periódica dada por la igualdad $f(x) = f(x + p)$.

Él identificó una p sobre la gráfica de tal manera que la función fuera *igual*.

(Buendía y Ordoñez, 2009).

Figura 6. Trabajando con una gráfica senoidal

Entonces, si bien a lo largo del currículo escolar podemos encontrar diversos objetos periódicos, el tratamiento que reciben no favorece más que referencias a “se repiten” sin que el potencial de la propiedad sea valioso.

❸ De los objetos a las prácticas

Para explicar la construcción del conocimiento matemático, la socioepistemología propone un marco teórico en el que actúan de manera sistémica las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y social del saber. Si bien es cierto que dichos aspectos han sido abordados por diferentes esquemas explicativos, el paradigma predominante ha sido el objeto matemático como la metáfora para explicar cómo se construye el conocimiento matemático (Confrey & Costa, 1996). El enfoque que se suele asumir es que los objetos matemáticos existen previamente y que las dificultades didácticas yacen en la distancia entre las imágenes formadas por el individuo y los objetos matemáticos (Cantoral, 2000). Mientras sean los objetos la metáfora principal para explicar cómo se construye el conocimiento matemático, éste sólo podrá ser explicado desde la matemática misma. Las epistemologías formuladas en este marco, en el mejor de los casos, ayudan a tener cierto entendimiento de los conceptos y sus desarrollos, pero difícilmente logran establecer relaciones funcionales entre conceptos y estructuras a lo largo del sistema educativo (Cordero, 2003).

La propiedad periódica de los objetos matemáticos es un buen ejemplo de esa situación. En los niveles de educación básica, ésta vive limitadamente a través del tratamiento de series periódicas (figuras, números decimales) cuando se proponen tareas de reconocimiento de patrones. En los niveles superiores vuelve a aparecer, otra vez limitada, con el estudio de las funciones trigonométricas.

¿Por qué este tratamiento de la periodicidad en el sistema didáctico empobrece al saber matemático? Pannekoek (1961) menciona que fue la periodicidad de los fenómenos celestes el puente entre la práctica empírica y la teoría predictiva. La trascendencia del análisis de Fourier radicó en hacer periódicas aquellas funciones que no lo eran. La diferencia entre ese tratamiento que favorece el avance científico y el tratamiento escolar radica en que el primero está enfocado al *comportamiento* del fenómeno u objeto en cuestión, y el segundo sólo es referido al objeto relegando cuestiones como el reconocimiento y tratamiento de ese comportamiento y las herramientas que se podrían entonces favorecer.

La periodicidad debería, pues, calificar no al objeto, sino a su comportamiento; más precisamente, debería referirse no a la repetición de un objeto matemático sino a la manera como esta repetición se presenta. Este cambio de enfoque no puede lograrse si dicho objeto -su adquisición, su construcción- es el centro de las explicaciones; en cambio, la propuesta socioepistemológica se fundamenta en el papel de las prácticas sociales y entonces, cuestiones como el comportamiento de los objetos pueden ser parte de las herramientas que las prácticas favorecen.

Este cambio motiva también un cambio de lenguaje, razón por la que se habla de *lo periódico* para denotar no sólo los aspectos analíticos de la propiedad periódica y su operatividad, sino también todos aquellos elementos de corte sociocultural y su uso al seno de la matemática escolar los cuales influyen en su significado y construcción.

Esta propuesta fortalece otras similares en el seno de la aproximación socioepistemológica. Ferrari (Ferrari & Farfán, 2009) habla por ejemplo, de *lo logarítmico* para resaltar el carácter propio de la función logaritmo y hacer notar cómo es que la mezcla de ciertas prácticas sociales es lo que genera una red de significados y modelos necesaria para que profesores y alumnos trabajen con el logaritmo. El objetivo es cuestionarnos acerca de aquello que constituye los objetos matemáticos que enseñamos, reconocer explicaciones que no parten de la matemática misma, sino que reconocen al hombre -situado y contextualizado- haciendo matemáticas.

4 Aspectos teóricos y metodológicos

El objetivo de este artículo es presentar el potencial de las prácticas sociales como un articulador del saber matemático a lo largo del currículo escolar. La investigación ha tomado como base metodológica el siguiente esquema (Figura 7) que se ha ido estructurando a partir de los trabajos desarrollados por Buendía (2004) y Montiel (2005) y los aspectos metodológicos desarrollados en otras investigaciones del área (Buendía & Cordero, 2005; Cordero, 2006).

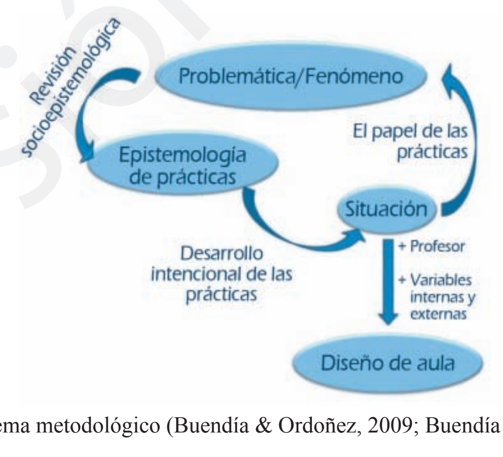


Figura 7. Esquema metodológico (Buendía & Ordoñez, 2009; Buendía & Montiel, 2009)

En el tránsito de la obra matemática hacia la matemática escolar, surgen fenómenos didácticos que problematizan el saber matemático. Hemos comentado cómo la periodicidad al ser una propiedad que vive en la matemática escolar atada a objetos sin lograr hacer referencia al comportamiento repetitivo que dicho objeto presenta, provoca ciertos fenómenos. Ante tal problematización, la socioepistemología propone considerar los cuatro aspectos mencionados del saber.

Una revisión socioepistemológica puede tomar varios caminos: de corte histórico a partir de los libros de textos como un monitoreo del contenido a estudiar (Castañeda, 2006) o una revisión de las obras científicas de autores relacionados con el tópico en cuestión (Cantoral, 2001; Farfán, 1997). La revisión también se puede basar en analizar el uso del conocimiento en las diferentes actividades humanas o las prácticas que le dieron sentido (Arrieta 2003; Montiel, 2005) o el uso del saber en la matemática escolar (Cordero & Flores, 2007). En cualquier caso, el objetivo es formular epistemologías de prácticas –o socioepistemologías- que den cuenta del papel de *las prácticas* en la construcción del saber matemático.

En dichas socioepistemologías, se hablará de *prácticas sociales* como aquéllas normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005) y que son generadoras de herramientas y representaciones sociales (Ferrari & Farfán, 2009). Se dará cuenta también de *prácticas de referencia* como reflejo de usos y contextos (Montiel, 2005; Ferrari & Farfán, 2009). Bajo los modelos propuestos para las prácticas, Ferrari y Farfán también hablan de *prácticas discursivas* como generadoras de argumentos y significados y Montiel, de *actividades* como acciones más pragmáticas pero siempre reguladas por una necesidad de orden mayor referidas a las prácticas sociales y de referencia.

La importancia de estas epistemologías de prácticas es que son la base para el diseño de situaciones con la finalidad última de reorganizar la matemática escolar. Así, entre más robusta sea la formulación de una socioepistemología, considerando diferentes tipos de revisiones alrededor de las cuatro dimensiones ya formuladas, las situaciones tendrán mayores y mejores fundamentos para llegar al aula.

Las situaciones diseñada son entendidas como el conjunto de condiciones de un fenómeno o preguntas que propician una problematización y son el instrumento metodológico que permite el desarrollo de acciones en el sistema didáctico (Suárez, 2008). Son el medio para el desarrollo intencional de las prácticas en el sistema didáctico y tienen como objetivo primordial impactar en el sistema escolar, pero para que esto sea una realidad se impone la necesidad de estudios de reproducibilidad. Se requiere de una investigación socioepistemológica amplia, labor de equipo, para lograrlo.

5 Una epistemología de prácticas para lo periódico: la predicción

La revisión para proponer esta socioepistemología sobre lo periódico abarca dos aspectos: una revisión de corte histórico y otra de libros de texto y materiales educativos.

En el primer aspecto, fue revelador el estudio realizado por Katz (1987) acerca de que dado que el seno y coseno son los ejemplos más familiares de funciones periódicas, uno podría esperar que a lo largo de la historia dichas funciones estuvieran siempre presentes en discusiones de fenómenos físicos periódicos y, sin embargo, no fue así. En cuanto al contexto escolar, fue relevante que mientras los libros asociados con clases de matemáticas establecen que una función es o no periódica, en otros textos se admiten calificativos como el cuasi-periodo (Boyce & DiPrima, 1987) para referirse a movimientos que no son "verdaderamente periódicos" como el de las vibraciones amortiguadas. Así, la búsqueda epistemológica fue orientada hacia las circunstancias y prácticas de referencia en las que la periodicidad fuera signficativa, encontrándose una estrecha relación entre dicha significación y prácticas asociadas con la predicción.

La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de un fenómeno dada una cierta información del estado actual. Aunque es una práctica que parece pertenecer más al campo de la Física, *predecir* es una manera de hablar científicamente de una necesidad humana (Ferrari & Farfán, 2009). Así, en campos como la astronomía, llena de fenómenos periódicos por excelencia, el poder sistematizar experiencias para poder predecir, la hace evolucionar hacia una actividad científica (Pannekoek, 1961). Sin un referente obligado hacia los aspectos analíticos, Hooke, por ejemplo, utiliza la gráfica del arco coseno para representar en qué tiempos, el peso colgado de un resorte está en una posición dada. Taylor, al abordar el problema de la cuerda vibrante, maneja también el arco seno, lo cual le permite estudiar los tiempos periódicos del movimiento. El interés de Euler, quien estableció formalmente la periodicidad como una propiedad de la función seno, estuvo en la descripción de un movimiento que ocurre a través del tiempo para poder realizar diversos cálculos relacionados con la descripción del movimiento de osciladores armónicos; entre ellos, predecir la posición dado un tiempo determinado.

El uso significativo de la periodicidad se extiende hacia una enorme diversidad de situaciones. Ordoñez (Buendía & Ordoñez, 2009) menciona por ejemplo la *sección de Poincaré* en la que lo periódico y sus variaciones resultan ser una herramienta de predicción: en lugar de seguir con un telescopio toda la trayectoria de un cuerpo alrededor de la Tierra, se enfoca un plano que vaya de norte a sur, desde un horizonte a otro, y que esté alineado con el centro de nuestro planeta. Se toma nota del lugar donde pasa por primera vez, su rapidez y su dirección y se permanece a la espera sólo enfocando el plano. La periodicidad exige que vuelva a pasar por el mismo punto, a la misma rapidez y en la misma dirección.

Lo periódico entonces puede constituir un lenguaje sin definiciones antes -y con independencia- de que aparezca la institucionalización de la periodicidad a través de la definición, y en su reconocimiento significativo, la predicción es una práctica asociada. ¿Qué efecto tiene la predicción en un objeto periódico para que dicha propiedad sea relevante? Logra que se vuelva relevante no sólo que el objeto se repite, sino la manera como esa repetición se presenta. De ello dependen totalmente las herramientas predictivas que se desarrollarán logrando una dualidad entre la práctica y la herramienta: la importancia no recae en sí en la herramienta, sino en el programa que orienta su uso (Arrieta, 2003).

Así, la búsqueda de significaciones para lo periódico no descansa en un virtual encadenamiento lógico matemático de objetos, sino en el buscar la predicción de posiciones lejanas sobre objetos periódicos dada una cierta información. Lo anterior fortalece la propuesta socioepistemológica y en particular en la línea del pensamiento variacional que reconoce programas en el campo de la ciencia con los que se busca modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático (Cantoral & Farfán, 1998).

En la siguiente sección detallaremos de manera más puntual dos herramientas que la práctica social de predicción permite desarrollar para un reconocimiento significativo de lo periódico. Si bien ambas hacen referencia al objeto matemático con el cual se está trabajando, no están atadas a él y por ello pueden vivir a lo largo de un currículo escolar, resignificándose[1] y haciéndose más complejas según sea el aspecto situacional en el que presenten.

5.1. *El comportamiento del objeto*

La predicción favorece que el comportamiento del objeto sea advertido más allá de si se trata de una función, de su gráfica, de una sucesión de objetos. A continuación mostraremos aspectos de dicho comportamiento e ilustraremos con actividades[2] que han dado evidencia de ello.

En primera instancia, para que el comportamiento periódico de un objeto se revele no bastan análisis puntuales, hay que permitirnos una cierta visión global (Figura 8).

Entonces, tareas como continuar una sucesión de objetos no favorecen del todo el reconocimiento de carácter periódico del objeto en cuestión. Habría que proponer tareas que involucren una predicción a largo plazo, pero como son totalmente situacionales, "el largo plazo" y otras variables que se ponen en juego, dependen de los individuos con los que se esté trabajando.

1 La resignificación será la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional (Cordero, 2006). Es la significación que se logra en el ejercicio intencional de las prácticas.

2 Estas actividades forman parte de situaciones en las, de acuerdo a la metodología presentada, la práctica de predicción se propone de manera intencional.

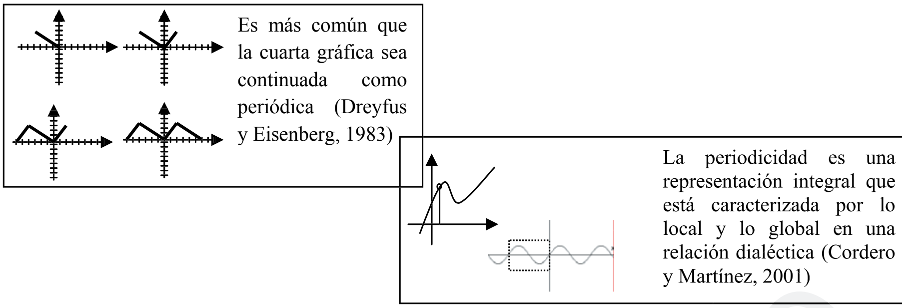


Figura 8. Una visión local-global

Vázquez (2008) retoma este planteamiento en la siguiente actividad (Figura 9) para trabajar con niños.

> Para terminar la semana quiero regalarle chicles de sabores de menta (a), tutifruti (b), hierbabuena (c) y canela (d) a mis amigos del colegio, siguiendo ese orden. Ellos son 25. Quiero saber ¿de qué sabor le tocará al último de la fila? ¿De qué sabor le tocará a mi amigo número 25?

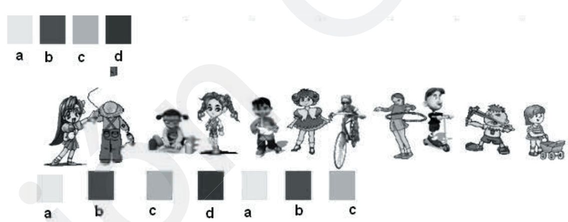
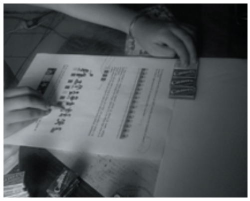


Figura 9. Actividad de predicción para niños

Para trabajar con Emilio, un niño de cuarto grado de primaria que declara saber sumar, multiplicar y dividir, se cambia la pregunta hacia el amigo número 25, 42 y 68. Se le proporciona la hoja con las instrucciones impresas y muchas cajitas de chicles de diferentes colores representativos de los cuatro sabores.

Emilio comenta que se trata de una serie y que la unidad básica se encuentra formada por cuatro elementos. Acomoda por filas los sabores siguiendo un orden y los va relacionando uno a uno con la imagen de la fila de amigos (Figura 10a). Una vez que tuvo los 4 sabores, al pedirle que determinara sobre el sabor que le tocaría al niño 25, comenta que puede tomar esa parte como si fuera una muestra de mayor tamaño y hacer más rápido el ejercicio; entonces, suma de 8 en 8 (Figura 10b).



a. Cuatro elementos

b. Ocho elementos

Figura 10. Emilio prediciendo

Finalmente, recurre a la división y analiza el residuo: para saber qué sabor le tocaría al niño 23, multiplica 3 por 8 y le resta un chicle diciendo que le tocaría de sabor hierbabuena. De la misma manera, para el niño número 25, le suma uno para decir que le toca el de menta. Para los niños número 42 y 68 hace las divisiones entre cuatro y hace la correspondiente equivalencia con el residuo (véase Figura 11).

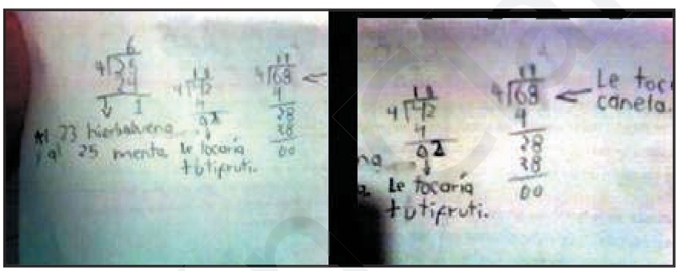
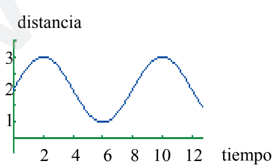


Figura 11. Emilio trabaja con predicción para el lugar 25, 42 y 68

La idea de una visión local-global es entonces que primero se identifique aquella parte del objeto que tiene información suficiente sobre cómo se seguirá comportando pero se mantenga presente un análisis interno en esa pequeña pieza de información a fin de poderla reproducir. En el ejemplo de la siguiente página (Figura 12) se puede ver el manejo más usual de esa dualidad.

En la siguiente gráfica tiempo-distancia prediga dónde estará el móvil en el tiempo 231



Isaías, Manuel, Leticia y Judith, estudiantes de Maestría

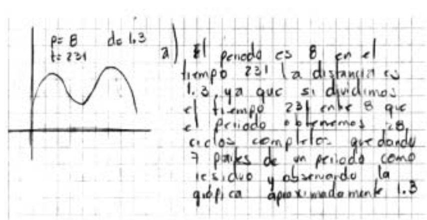


Figura 12. Dualidad local-global

Otra manera en la que la predicción centra la atención en el comportamiento del objeto lo podemos ver en la siguiente actividad (Buendía, 2004). De entre 8 gráficas continuas y discontinuas (incisos *a*-*h*), las tres primeras se muestran aquí (Figura 13):

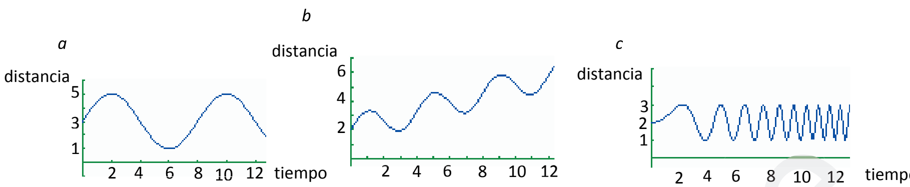


Figura 13. Gráficas senoidales

Se pide realizar la predicción del móvil en el tiempo 231 y agrupar por semejanzas y diferencias. Una profesora de matemáticas y estudiante de maestría comenta que la nueva clasificación sería la siguiente:

a) las que permiten predecir su valor para cualquier t: a, b, d, e, g, h. Las que no: c.
b) Dentro de las que se pueden predecir, hacer una nueva clasificación respecto a aquellas que repiten sus comportamientos de a trozos (periódicas): a b, e, g. y las que no: b, h.

Su primer criterio es si la gráfica es fácil o no de predecir sobre ella. Sin embargo, se percata de que “dentro de las fáciles” hay unas cuyo comportamiento (a trozos) es característico; eso hace que su modo de predicción sea especial para ellas. La predicción, entonces, favoreció una distinción significativa entre la forma de repetición que presentan gráficas senoidales.

5.2. *Identificación y uso de una unidad de análisis*

El comportamiento del objeto también se evidencia a través de la identificación y uso de una unidad de análisis, elemento potenciado por la predicción. Se le llamó genéricamente “unidad de análisis” (Vázquez, 2008) ya que puede ser desde un *patrón* hasta un *periodo*. En cualquier caso es aquello que contiene suficiente información para poder predecir qué va a pasar después.

Identificar la unidad de análisis es una tarea nada trivial (ver Figura 5) imprescindible para que lo periódico sea significativo y que depende totalmente de la persona en cuestión. En el ejemplo de Emilio vemos que primero identifica la unidad de análisis compuesta por 4 chicles y, cuando la tarea de predicción se lo requiere, la aumenta a ocho. Veamos el caso de Dulce, estudiante de primero de primaria que menciona saber sumar, contar de 10 en 10 y de 100 en 100. Ella trabajó la misma actividad de los chicles tanto con el material impreso como con las cajitas de chicles.

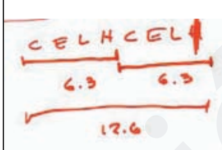
Primero (Figura 14a) fue empatando con sus dedos las imágenes impresas de los chicles con los niños formados en la fila. Posteriormente (Figura 14b), utilizó físicamente las cajitas sobre la imagen de la fila de los niños.

a. Empata con sus dedos b. Empata con las cajitas c. Formando montoncitos

Figura 14. Dulce prediciendo

En un momento dado (Figura 14c), se dio cuenta de que para poder predecir lo más fácil sería primero hacer sus “unidades de análisis” en forma de montoncitos de colores lo cual le facilitaría ir tomando chicles de cada grupo.

El papel de la identificación correcta de una unidad de análisis también lo vemos en el caso (Figura 15) de una profesora de matemáticas con quien se trabajó la actividad de la cenefa de animales (ver Figura 5). Fue la predicción a largo plazo lo que la obligó a pensar en la necesaria continuidad de las figuras.



La profesora corta la cenefa en una unidad de análisis que incluye sólo cuatro animales para que sí refleje la continuidad periódica de la tira; pero en realidad maneja como unidad aquélla compuesta por dos unidades mínimas. (Buendía, 2006)

Figura 15. Ajustando la unidad de análisis

Podemos ver que una identificación significativa de una unidad de análisis en realidad no depende de que ésta sea *la mínima*. El tomar exclusivamente la unidad mínima de repetición para tratar con los fenómenos periódicos (por ejemplo, 2π para el caso de las funciones trigonométricas) es propio de la estructura matemática. En ese contexto, el usar la unidad mínima no sólo es sinónimo de economía en los cálculos, sino es necesario para demostraciones del tipo “Sea p el periodo mínimo…”. Sin embargo, en el uso situacional la identificación de p responde a una necesidad individual y por lo tanto puede ser la mínima o no.

Una vez que se ha identificado la unidad de análisis, las herramientas que se desarrollan para predecir son, de nueva cuenta, totalmente situacionales. Si bien el procedimiento matemático más aceptado por su precisión y economía podría ser la división, como en la figura 11 y 12 (tomar el total pedido, dividir entre la unidad de análisis y ajustar el residuo), no todos los individuos la usan. Esto no depende de que sepan o no dividir, sino de que le resulte a cada quien realmente significativa y útil. El interés no está en ver si logran o no predecir, sino la herramienta que bajo esa intención se desarrolla.

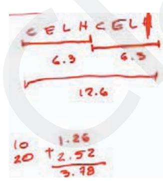
En los siguientes ejemplos (Figuras 16, 17 y 18), podemos ver una mezcla de herramientas para predecir.

<table>
<tr>
<td>De la siguiente fila de niños, indica si es un niño o una niña, quien está formado en la marca número 102
</td>
<td>Emilio. Niño de cuarto grado de primaria que sabe dividir

Si sabemos que cada vez que se cuentan da 16 niños, multiplicamos por ejemplo 16 por 4 y tenemos 64, nos faltan muchos. Si multiplicamos 16 por 8 nos da 128 se pasa de lo que nos pide. Si multiplicamos 16 por 6 nos da 96, éste está mas cerca de 102, por lo que a 102 le restamos 96 y nos queda como resultado 6.
Como sólo tenemos que contar 6 niños de la fila, el lugar 102 lo ocupa una niña.
(Vázquez, 2008)</td>
</tr>
</table>

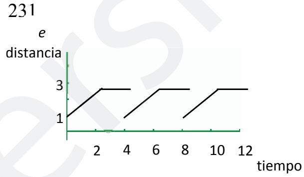
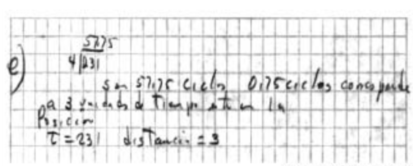
Figura 16. Emilio predice mediante la multiplicación

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Profesora de Matemáticas

Para predecir, señala que en diez trozos de “los nuevos” (con la correcta unidad de análisis) se llega a 1.26 metros; en veinte trozos, a 2.52 metros. Suma para obtener 3.78 y de ahí, se regresa para llegar a la longitud pedida (3.75)
(Buendía, 2006a)</td>
</tr>
</table>

Figura 17. Profesora predice multiplicando

<table>
<tr>
<td>En la siguiente gráfica tiempo-distancia prediga dónde estará el móvil en el tiempo 231

</td>
<td>Profesores de Matemáticas, estudiantes de Maestría


(Buendía, 2004)</td>
</tr>
</table>

Figura 18. Profesores que predicen dividiendo

6 Comentarios finales

La aproximación socioepistemológica propone crear un modelo del conocimiento matemático que dé cuenta de lo que constituye su contenido y que ponga al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento (Cordero, 2006). Ello rompe con la centración en los objetos del discurso matemático escolar; no los niega, sino que crea otro discurso que ofrece marcos de referencia más amplios donde se considere la relación entre prácticas y saber matemático.

Lo periódico es un ejemplo de conocimiento que transita desde lo intuitivo hacia el sistema educativo trayendo consigo caracterizaciones un tanto cotidianas (*lo periódico es algo que se repite*). Esto suele entrar en conflicto con la formalidad exigida en una estructura matemática, la cual al seno de la escuela limita los significados para esta propiedad.

Lo periódico puede constituir un lenguaje significativo a lo largo del currículo escolar si sus marcos de referencia analíticos se ensanchan para favorecer que su referente principal sea el comportamiento del objeto al que está calificando. De esta manera, no importa si se trata de objetos propios de un currículo de nivel básico o de nivel superior, lo periódico no lo califica a él, sino a su forma de repetición. Comentamos acerca cómo la identificación y uso de una unidad de análisis es una herramienta presente a lo largo de todo el sistema educativo. Son las diferentes situaciones que se hacen cada vez más complejas, propias de cada nivel educativo, las que desarrollan el potencial de esta herramienta.

Lo anterior es factible sólo cuando las explicaciones acerca de la construcción del conocimiento matemático dejan de centrarse en la adquisición del objeto, para centrarse ahora en el desarrollo intencional de prácticas, cuyo papel como constituyentes del saber matemático es una tarea propia de la socioepistemología.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.

Bajpai, A. C., Calus, I.M., & Fairley, J.A (1977). *Matemáticas para estudiantes de Ingeniería y Ciencias* (1). México: Limusa.

Boyce, W. y DiPrima,R. (1987). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics. Kluwer publishers, 58* (3), 299-333.

Buendía, G. (2006a). La periodicidad en el sistema didáctico: una articulación a la luz de la socioepistemología. En G. Martínez (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19 (pp. 812-81). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Buendía, G. (2006b). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9* (2), 227-252.

Buendía, G. y Ordoñez, A. (2009) El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 12* (1), 7-28.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P.Lestón (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Callahan, J., Cox, D., Hoffman, K., O'Shea, D., Pollatsek, H. & Senecnal, L. (1992). Periodicidad. En *Calculus in context*. (pp. 413-158). USA: Mc Millan.

Castañeda, A. (2006) Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hopital y Maria G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9* (2), 253-266.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon, 42* (3), 854-856.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En R. Farfán, C. Matías, D. Sánchez, A. Tavarez (eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 13 (pp. 54-62*)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Confrey, J. y Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of "Mathematical objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1* (2), 139-168.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. En J. Delgado (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16* (pp. 73-78) Chile: Lorena Impresores, Ltda.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R. Covián, O., Farfán, R. Lezama, J, Romo, A. (eds) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265-286) México: Díaz de Santos y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10* (1), 7-38.

Cordero, F y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14 (pp. 422-431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya*. (Tesis Inédita de Maestría). Cinvestav, México.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T (1983). The Function Concept in College Students: Linearity, Smoothness an Periodicity. En *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5* (3 & 4), 119-132.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2009). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 11* (3), 309-354.

Katz, V. (1987). *The Calculus of the Trigonometric Functions*. Historia Mathematica, (14), 311-324.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

North, A. (1997). La matemática como elemento en la historia del pensamiento. En *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Tomo 1. (pp. 325-338) España: Editorial Grijalbo.

Pannekoek, A. (1961). *A history of astronomy*. NY, USA: Dover.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.

Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo de una variable*. México: Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.

Vázquez, R. (2008). *Estudio de lo periódico en diferentes contextos: Identificación y uso de la unidad de análisis*. (Tesis Inédita de maestría). Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Autora:

Gabriela Buendía Abalos.
CICATA-IPN, Unidad Legaria, México, D.F. *gbuendia@ipn.mx*