Análisis sociocultural de la noción de variabilidad

Sociocultural analysis of the variability notion

Alberto Camacho, Bertha Ivonne Sánchez

RESUMEN

Presentamos un análisis sociocultural de la noción de variabilidad desarrollado en el marco de la socioepistemología. Histórica y socialmente, la variabilidad surge en sistemas de prácticas vinculadas con actividades de ingeniería que, a su vez, se asocian con modelos de aproximación incorporados en el dominio de las funciones analíticas. Los resultados muestran la noción como una caracterización del concepto de función que sirvió para el diseño de una situación de aprendizaje. El escrito es dividido por diferentes etapas de trabajo que consignan: 1. La búsqueda de la variabilidad en ambientes socioculturales, no escolares, 2. Las modificaciones sufridas por la noción para su difusión al ambiente escolar mexicano del último tercio del siglo XIX, 3. Las caracterizaciones del conocimiento que se tomaron de la investigación para el diseño de la situación de aprendizaje del concepto de función y 4. El diseño de la situación.

PALABRAS CLAVE:

- *Práctica social*
- *Variabilidad*
- *Salón de clase*
- *Analiticidad*

ABSTRACT

We present an investigation on the notion of variability developed within the framework of the socioepistemology. Historically and socially, the notion arises in systems of tie practices with engineering activities that, as well, are associated with incorporated models of approach in the dominion of the analytical functions. The results show the notion like a characterization of the function concept that was used for the design of a learning situation. The writing is divided by different stages from work that, generally, brief: 1. The search of the sociocultural atmosphere variability, nonstudents, 2. The modifications undergone by the notion for its diffusion to the Mexican scholastic atmosphere of the last third of century XIX, 3. The characterizations of the knowledge that were taken from the investigation for the design of a learning situation of the function concept and 4. The design of the situation.

KEY WORDS:

- *Social practice*
- *Variability*
- *Classroom*
- *Analyticity*

Relime (2010) 13 (4-I): 29-52. Recepción: Abril 14, 2009 / Aceptación: Noviembre 13, 2009.

RESUMO

Nós apresentamos uma investigação na noção da variabilidade desenvolvida no âmbito do socioepistemologia. Historicamente e social a noção levanta-se nos sistemas de práticas do laço com atividades da engenharia que, são associadas também com incorporado modelam da aproximação na autoridade das funções analíticas. Os resultados mostram a noção como uma caracterização do conceito da função que foi usado para o projeto de uma situação de aprendizagem A escrita é dividida pelos estágios diferentes do trabalho que, geralmente, instruem: 1. A busca da variabilidade sócio-cultural da atmosfera, nonstudents, 2. As modificações submetidas pela noção para sua difusão à atmosfera scholastic mexicana do último terço do século XIX, 3. As caracterizações do conhecimento que foram tomadas da investigação para o projeto de uma situação de aprendizagem do conceito da função e 4. A concepção da situação.

PALAVRAS CHAVE:

- *Prática social*
- *Variabilidade*
- *Feira de classe*
- *Analiticidade*

RÉSUMÉ

Nous présentons une recherche sur la notion de variabilité développée dans le cadre de la socioepistemologié. Historiquement et socialement, la notion apparaît dans des systèmes de pratiques liées des activités d'ingénierie qui, à son tour, sont associées avec des modèles de rapprochement incorporés dans le dominion des fonctions analytiques. Les résultats montrent la notion comme une caractérisation du concept de fonction qui a servi pour la conception d'une situation d'apprentissage. Le document est divisé par différentes étapes de travail que, en général, ils consignent: 1. La recherche de la variabilité dans des atmosphères socio-culturelles, non scolaires, 2. Les modifications subies par la notion pour sa diffusion à l'atmosphère scolaire mexicaine du dernier tiers du XIXieme siècle, 3. Les caractérisations de la connaissance qui ont été prises de la recherche pour la conception d'le situation d'apprentissage du concept de fonction et 4. La conception de la situation.

MOTS CLÉS:

- *Pratique sociale*
- *Variabilité*
- *Salle de classe*
- *Analyticité*

1 Introducción

El estudio se centra en examinar los mecanismos de construcción de conceptos del cálculo diferencial orientados por aspectos del pensamiento estocástico actual. Se inscribe en un proyecto de investigación relacionado con la noción de «variabilidad», la cual adoptamos como significado cercano del concepto de función. Con la variabilidad, el objetivo fue diseñar una situación de aprendizaje, con la que intentamos mejorar la enseñanza del concepto en el nivel de ingeniería, involucrando, además, argumentos de naturaleza variacional. Para ese efecto realizamos un análisis de la variabilidad, que incluyó el estudio de la dimensión sociocultural, la cual forma parte de la socioepistemología. El escrito pone de manifiesto el reconocimiento del concepto de función a partir de esa última dimensión, así como el diseño de una situación de aprendizaje, en tanto la totalidad del análisis: dimensiones cognitiva y didáctica y resultados de su aplicación, se reportan en Sánchez y Camacho (2009).

2 Analiticidad y variabilidad

Hacia los años cincuenta del siglo XX, el matemático francés René Thom (1923-2002) hacía notar que, « (…) el paso de una figura local a una figura global, sólo puede ser obtenida por analiticidad» (Thom, 2000, pp. 31-32). Con esa postura, partía de suponer que con el germen contenido en las funciones analíticas es posible determinar la totalidad de su propio dominio de existencia. En este sentido, el reconocimiento de la extensión del contradominio de una función, es decir su parte *global*, se produce solamente a partir de desarrollos binomiales, en la forma de la serie de MacLaurin:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{f''(a)}{2}(\Delta x)^2+\frac{f'''(a)}{2\cdot 3}(\Delta x)^3+etc.,$$

sin los cuales argumentos importantes se pierden en el estudio de sólo la *singularidad* $f(x)$[1].

Como es sabido, la exigencia de la analiticidad de una función es muy fuerte, por la estimación de la continuidad de la función y sus derivadas cercanas de un punto $x=a$. De modo que su reconstrucción a partir de los valores de x ocurre solamente en un tramo de arco pequeño de su gráfica, puesto que el conocimiento de $f(a)$ de valores de $f(x)$, para x lo suficientemente cercana a $x=a$, es justamente lo necesario para el cálculo de las derivadas de la

[1] Usamos la palabra *singularidad* en el sentido en el que la función analítica $f(x)$, *esconde* o aísla su propia variación. Más no en la forma en que R. Thom le asume, es decir, «como el lugar en el cual una función cambia bruscamente de forma o configuración.»

función alrededor de ese valor. Es por esto que las funciones analíticas están muy alejadas de la definición general de función como una correspondencia de valores entre x y $f(x)$, de aquí que su contradominio adopta valores y asuma caracterizaciones diferentes a los que se toman en las funciones a través de la dependencia de variables.

Desde el punto de vista de la analiticidad, parte del dominio de existencia de las funciones analíticas son las argumentaciones asociadas a la variación, como son la *inferencia, error, predicción, variabilidad, devenir* y *generalización*, entre otras, que, como consta en diferentes investigaciones, no aparecen en los discursos escolares del cálculo diferencial contemporáneo. Un ejemplo será suficiente, Lacroix (1797) usó la nominación de *devenir* en los desarrollos binomiales de las funciones analíticas involucradas en su Traité du Calcul. Sugería esto último como:

> Si una cantidad x recibe una variación k, para determinar en que *devienen* las funciones de esta cantidad, habrá que escribir $x+k$ en lugar de x. Tomando por ejemplo (…), quedará: $(x+k)^2 = x^2+2xk+k^2$ (p. 117).

De modo que el desarrollo: $x^2+2xk+k^2$, es aquello que *deviene* al incremento $x+k$ en la función x^2. En el sentido de la variación, el devenir adopta proposiciones como: *cambio, transformación* y *acontecer*.

A partir del estudio de las funciones analíticas, la noción de variabilidad fue constituyéndose a lo largo de los siglos XVIII y XIX, por diversas prácticas de ingeniería desarrolladas en disciplinas como la astronomía, topografía y la óptica, tanto en Europa como en México. Por ejemplo, en los anteojos de enfoque de los llamados equialtímetros[2], instrumentos telescópicos que sirven en la topografía para configurar los desniveles de los terrenos, la posición de la cruz filar (cruz de hilos) en el eje de colimación, también llamada retícula, concebida plana por los diseñadores de dichos instrumentos, era colocada sobre la lente curva del enfoque. Dicho proceso, «cruz filar plana sobre lente curva», alteraba las observaciones para el cálculo de los desniveles del terreno. Esas alteraciones eran conocidas como la *variabilidad* que resultaba de las primeras.

El tratar de evitar los errores producidos por los distintos instrumentos de medición, como fueron: equialtímetros, aneroides, barómetros, etc., estableció prácticas de ingeniería que produjeron conocimientos matemáticos, asociados al estudio de la variabilidad, que culminarían a finales del siglo XVIII con la escritura del método de los *mínimos cuadrados* por parte de Gauss.

2 Actualmente conocidos como *niveles.*

Por su lado, la difusión de la variabilidad a los sistemas educativos a través de diferentes obras de ciencias, como aquéllas de topografía y astronomía, que le contenían, llevó al ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias a usar esa noción para escribir un texto de Cálculo Diferencial, para estudiantes del nivel de preparatoria, en el cual los argumentos principales de función y derivada, fueron determinados tomando como eje central a la propia variabilidad (Díaz Covarrubias, 1873). Este último asumió la variabilidad desde dos puntos de vista, del todo geométricos, que precisaron de ciertas modificaciones del argumento original gaussiano de *error*.

3 Marco teórico y metodológico

En el sentido de la variación, un aspecto medular de la investigación en Matemática Educativa lo es el lenguaje variacional, puesto que, se supone, impregna la totalidad de los cursos de matemáticas en las carreras de ingeniería. Es precisamente la forma del discurso en que se encuentran estructuradas esas asignaturas, sobre todo en su semejanza con el contenido en los textos de cálculo diferencial, que, las más de las veces, dejan de lado la variación y sus significados asociados. Pero entonces ¿Cómo incorporar estos argumentos del lenguaje variacional en los cursos de matemáticas?

En Cantoral (1991), se ha sugerido la noción de *predicción* como parte de la variación y analiticidad, que ordena los argumentos variacionales del discurso escolar, ayudando a ese objetivo. Cantoral propuso la predicción a partir de la *diferencia* que se determina con la serie de MacLaurin, como:

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\underbrace{f'(a)\Delta x+\frac{f''(a)}{2}(\Delta x)^2+\frac{f'''(a)}{2\cdot 3}(\Delta x)^3+etc.}_{\textbf{Predicción}}$$ (Cantoral, 1991, pp. 228-229).

Mas, como la predicción, y como vimos anteriormente, existen otros argumentos que surgen de la variación. Esas manifestaciones se les puede encontrar en las practicas sociales que se han desarrollado a los largo del tiempo, y cuya búsqueda forma parte del estudio de la socioepistemología.

Socioepistemólogos como Cantoral y Farfán, han revaluado las dimensiones de estudio, epistemológica, cognitiva y didáctica, incorporando una componente *sociocultural*, asumiendo que ésta última reúne las condiciones del conocimiento que prevalecen en el ambiente social. Como condición fundamental, la socioepistemología se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y, sobre todo, de su difusión a los sistemas de enseñanza (Cantoral & Farfán, 2004).

De esta forma, se concibe al conocimiento como constituido en ambientes socioculturales, no escolares, de los que se desprenden modificaciones para su difusión al salón de clase, que «afectan su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre los estudiantes y sus profesores» (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez, 2006, pp.85-86).

Del análisis de las prácticas sociales se desprenden, como resultados principales, *representaciones sociales* de los conceptos, que se presumen como imágenes, ideas, o nociones del objeto representado. En particular, entendemos las representaciones sociales, por su naturaleza y surgimiento, como *concepciones espontáneas*, de corte epistemológico, que pueden tener en la cognición de los sujetos un carácter de erróneas o verdaderas, toda vez que para el presente estudio no mantienen importancia.

En sí misma, la variabilidad es una representación social resultado de actividades de ingeniería, que llevaron a cabo grupos de profesores, geómetras (Camacho, 2008; Shubring, 2008, pp. 397-398), astrónomos, etc., que se refleja, como tal, en los textos y documentos de diferentes épocas que analizamos.

Esta perspectiva de la representación deja de lado su posición en la cognición de los estudiantes, permitiendo colocarla para su análisis en la propia dimensión sociocultural. Por la peculiaridad de este tipo de representaciones, las distinguimos como *caracterizaciones*, o significados asociados, del conocimiento analizado, siendo resultados fundamentales de este proyecto.

De esta manera, el escrito es dividido por diferentes etapas de trabajo que, en general, consignan:

1. La búsqueda de la variabilidad en ambientes socioculturales, no escolares. Particularmente centramos la atención en la tradición de ingeniería alemana de finales del siglo XVIII y a lo largo del siglo XIX.
2. Las modificaciones sufridas por la noción para su difusión al ambiente escolar mexicano del último tercio del siglo XIX.
3. Las caracterizaciones del conocimiento que se tomaron de la investigación para el diseño de la situación de aprendizaje del concepto de función, y
4. La situación de aprendizaje, tomando como base el trinomio variable-variación-variabilidad.

4 Dimensión sociocultural. Prácticas de ingeniería

4.1. *Los métodos de combinación*

En 1760, Euler (1707-1783) describía pequeñas irregularidades que había observado en el movimiento de la Luna respecto de los planetas conocidos en su época, que eran causadas por atracción mutua, contrario a la idea que tenían los astrónomos a partir de concebir las irregularidades como causadas sólo por la atracción del Sol hacia los propios planetas (Euler, 1843, pp. 162-164). En el mismo sentido, se preocupaba por dar una explicación de esas *pequeñas fuerzas*, que a su vez llamó *perturbaciones*. Antes, había planteado el problema de las *perturbaciones lunares* a Johann T Mayer (1723–1762)[3], astrónomo y geómetra alemán de la universidad de Gotinga y director del observatorio astronómico de esa universidad.[4]

Mayer estableció un método con el cual era posible combinar diversas *ecuaciones de condición* (citado en Díaz Covarrubias, 1873, p.174)[5] a las que se llegaba partiendo de las observaciones astronómicas, y con el cual pudo resolver el problema de las perturbaciones comunicado por Euler. El método partía del principio de hacer un buen número de repeticiones de las observaciones, de manera que con ello fuera posible *pesar* los errores cometidos con los instrumentos de observación[6], determinando en cada etapa una *ecuación de condición* para cada uno de éstos. El objetivo era determinar y *compensar* los errores instrumentales en las variables del sistema de ecuaciones de condición resultante, para *diluirlos* en éstas, más que tratar de eliminarlos. Las ecuaciones de condición las presentaba de la siguiente manera (ver la Figura 1 en la próxima página):

[3] Euler (1843) cita como Meyer a Johann Tobías Mayer, en tanto, y como se comenta más adelante, en (Díaz Covarrubias, 1873) se asume sólo como Tobías Mayer. En lo que sigue usaremos esta última acepción, la cual incluso adoptan los biógrafos de este último.

[4] La referencia aparece en la obra citada de (Euler, 1843), en la Carta LXI fechada el 23 de septiembre de 1760, titulada: *Sur les petites irrégulaités qu´on observe dans le mouvements des planètes, et qui sont causées par leer attraction mutuelle.* «Pequeñas irregularidades que se observan en el movimiento de los planetas y que están causadas por su atracción mutua».

[5] El método de combinación fue inscrito, y usado, en la solución de diversos problemas de astronomía reportados por Mayer entre 1746 y 1751. Sus biógrafos incluyen el siguiente documento, en el cual es posible encontrar el método de combinación: Veröffentlichung von ca. 30 Landkarten und diversen Aufsätzen über astronomische Probleme, Schwerpunkt Mondforschung: «Publicación de aproximadamente 30 mapas y de varios ensayos sobre los problemas astronómicos, investigación en la que se hace énfasis en la Luna». Véase: http://www.s-line.de/homepages/reprint/index.html, obtenido el 4 de mayo de 2010.

[6] Así por ejemplo, en el caso de las observaciones astronómicas con teodolito, los errores instrumentales se rescataban a partir de la aproximación angular que otorgan los vernieres en los círculos vertical y horizontal.

$$
\begin{array}{cc}
\text{Ecuaciones de condición} & \text{Errores instrumentales} \\
\left.\begin{array}{c}
a_1x+b_1y+c_1z+...+m_1=v_1 \\
a_2x+b_2y+c_2z+...+m_2=v_2 \\
a_3x+b_3y+c_3z+...+m_3=v_3 \\
.... \\
.... \\
a_nx+b_ny+c_nz+...+m_n=v_n
\end{array}\right\}
&
\left.\begin{array}{c}
a_1x+b_1y+c_1z+...+m_1-v_1=e_1 \\
a_2x+b_2y+c_2z+...+m_2-v_2=e_2 \\
a_3x+b_3y+c_3z+...+m_3-v_3=e_3 \\
.... \\
.... \\
a_nx+b_ny+c_nz+...+m_n-v_n=e_n
\end{array}\right\}
\end{array}
$$

Figura 1. En la figura aparecen dos sistemas de ecuaciones, el primer sistema se refiere a las ecuaciones de condición que resultan de la práctica y el segundo muestra los errores instrumentales *e*.

El segundo sistema (véase la Figura 1) muestra los errores instrumentales, que son la diferencia entre las observaciones de cada experimentación expuestas a partir de las variables $x, y, z, ...m,$ con respecto a la variable dependiente v, de modo es que, si no existieran ese tipo de errores, debieran concebirse nulos, lo cual en la práctica resultaba imposible.

Como se puede observar en ambos sistemas, el número n de observaciones es mayor que el de incógnitas. El planteamiento para resolver el primero de estos, consistía en cambiar los signos de las ecuaciones, de manera que resultaran positivos todos los términos que contienen a x, y hacer enseguida una suma de todas ellas. La misma operación de sumar se debía repetir respecto de cada una de las otras incógnitas, obteniéndose de esa manera tantas ecuaciones finales como incógnitas hubiera. El sistema de valores que resultaba de *combinar* y sumar todas las ecuaciones era considerado como el más independiente del efecto de los *pequeños errores instrumentales*. Los errores $e_1, e_2, ...e_n$, fueron pensados por Mayer como *variaciones* o *pequeñas correcciones* (Díaz Covarrubias, 1873, p. 179) que ocurren para cada experimentación; así: e_1: es la primera variación, e_2: la segunda variación, etc. De modo que el total de las variaciones: $e_1, e_2, ...e_n$ se reconocieron como la variabilidad del total de las observaciones experimentales.

Gauss (1777-1855) por su lado, en 1795, siendo estudiante en la Universidad de Gotinga, formuló el método de los mínimos cuadrados haciendo modificaciones a la propuesta del modelo de combinaciones de Mayer, sobre todo en la forma del sistema de ecuaciones de condición, en tanto resolver un problema astronómico[7].

[7] En realidad, en 1770, el padre jesuita, el croata, R. Boscovich (1711-1787) había demostrado que cuando se tienen más observaciones de las que se necesitan para establecer un número de ecuaciones igual al de las incógnitas, el valor más probable es aquél que hace mínima la suma absoluta de las desviaciones de cada observación respecto a la media.

Al presentar su Theoria Motus Corporum ante la Real Sociedad de Gotinga, publicada en 1809, Gauss mostró el método de los mínimos cuadrados en la aplicación de la corrección de seis *elementos*, o errores, en la órbita del planeta Pallas, partiendo de doce ecuaciones (véase la Figura 2)[8].

Las correcciones a los errores fueron designadas por los diferenciales: dL, $d\iota$, $d\pi$, $d\varphi$, $d\Omega$, di. Ante la imposibilidad de satisfacer todas las ecuaciones, Gauss buscaba una forma de reducirlas, lo más posible, de acuerdo al mismo principio expresado por Mayer (Gauss, 1855, p. 139).

$$
\begin{aligned}
0 &= -183'',93 + 0{,}79363\,dL + 143{,}66\,d\iota + 0{,}39493\,d\pi \\
&\quad + 0{,}95920\,d\varphi - 0{,}18856\,d\Omega + 0{,}17387\,di; \\
0 &= -\ 6'',81 - 0{,}02658\,dL + 46{,}71\,d\iota + 0{,}02658\,d\pi \\
&\quad - 0{,}20858\,d\varphi + 0{,}15946\,d\Omega + 1{,}25782\,di; \\
0 &= -\ 0'',06 + 0{,}58880\,dL + 358{,}12\,d\iota + 0{,}26208\,d\pi \\
&\quad - 0{,}85234\,d\varphi + 0{,}14912\,d\Omega + 0{,}17775\,di; \\
0 &= -\ 3'',09 + 0{,}01318\,dL + 28{,}39\,d\iota - 0{,}01318\,d\pi \\
&\quad - 0{,}07861\,d\varphi + 0{,}91704\,d\Omega + 0{,}54365\,di; \\
0 &= -\ 0'',02 + 1{,}73436\,dL + 1846{,}17\,d\iota - 0{,}54603\,d\pi \\
&\quad - 2{,}05662\,d\varphi - 0{,}18833\,d\Omega - 0{,}17445\,di; \\
0 &= -\ 8'',98 - 0{,}12606\,dL - 227{,}42\,d\iota + 0{,}12606\,d\pi \\
&\quad - 0{,}38939\,d\varphi + 0{,}17176\,d\Omega - 1{,}35441\,di; \\
0 &= -\ 2'',31 + 0{,}99584\,dL + 1579{,}03\,d\iota + 0{,}06456\,d\pi \\
&\quad + 1{,}99545\,d\varphi - 0{,}06040\,d\Omega - 0{,}33750\,di; \\
0 &= +\ 2'',47 - 0{,}08089\,dL - 67{,}22\,d\iota + 0{,}08089\,d\pi \\
&\quad - 0{,}09970\,d\varphi - 0{,}46359\,d\Omega + 1{,}22803\,di; \\
0 &= +\ 0'',01 + 0{,}65311\,dL + 1329{,}09\,d\iota + 0{,}38994\,d\pi \\
&\quad - 0{,}08439\,d\varphi - 0{,}04305\,d\Omega + 0{,}34268\,di; \\
0 &= +\ 38'',12 - 0{,}00218\,dL + 38{,}47\,d\iota + 0{,}00218\,d\pi \\
&\quad - 0{,}18710\,d\varphi + 0{,}47301\,d\Omega - 1{,}14371\,di; \\
0 &= -317'',73 + 0{,}69957\,dL + 1719{,}32\,d\iota + 0{,}12913\,d\pi \\
&\quad - 1{,}38787\,d\varphi + 0{,}17130\,d\Omega - 0{,}08360\,di; \\
0 &= +117'',97 - 0{,}01315\,dL - 43{,}84\,d\iota + 0{,}01315\,d\pi \\
&\quad + 0{,}02929\,d\varphi + 1{,}02138\,d\Omega - 0{,}27187\,di.
\end{aligned}
$$

Figura 2. Aplicación de Gauss del método de los mínimos cuadrados a la corrección de seis elementos en la órbita del planeta Pallas.

[8] La utilidad del método de compensación de los mínimos cuadrados, tenía que ver, para Gauss, con la determinación de la órbita más probable de un astro, en este caso el planeta Pallas, es decir, aquella que mejor se adapta al conjunto de observaciones realizadas. A pesar de la diferencia de tiempo entre la definición del método de los mínimos cuadrados y la publicación tardía de la Teoría Motus, no se arrepintió de ello puesto que: « (Como describe en el prefacio) los métodos usados en un principio sufrieron tantos y tan grandes cambios que entre el modo como fue calculada la órbita de Ceres y el método expuesto en esta obra apenas quedan rastros de una lejana semejanza». Gauss se refiere aquí a los cambios hechos al método de compensación de Mayer, y a la premisa de Boscovich, sobre todo por la inclusión que en el método de compensación hizo del concepto de diferencial.

Si consideramos las ecuaciones de condición en la forma vista anteriormente, en la Figura 1. De acuerdo al principio fundamental de los mínimos cuadrados, debe determinarse cada incógnita de modo que resulte mínima la suma de los cuadrados de los errores residuales $e_1{}^2 + e_2{}^2 + \ldots + e_n{}^2 = [ee]$[9].

Para determinar cada incógnita, la auxiliar $[ee]$ debe ser nula respecto a cada una de estas. Por ejemplo, respecto a x:

$$e_1 \frac{de_1}{dx} + e_2 \frac{de_2}{dx} + \ldots e_n \frac{de_n}{dx} = 0 \ldots (1),$$

donde las correcciones de los errores cometidos, son dadas por los diferenciales:

$$\frac{de_1}{dx} = a_1, \ \frac{de_2}{dx} = a_2, \ldots, \frac{de_n}{dx} = a_n$$

Sustituyendo estas últimas en (1), tenemos:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = 0$$

La cual era llamada *ecuación normal*[10] de x.

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots b_n e_n = 0$$
$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots c_n e_n = 0$$

Si usamos el mismo procedimiento para cada incógnita, obtendremos:

Con ello resta un sistema de ecuaciones normales por cuya eliminación resultan los valores numéricos de *x,y,z, etc:*

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots + [aq] = 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots + [bq] = 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots + [cq] = 0 \end{array}\right\}$$

Al sustituir los valores de *x, y, z, etc.*, en las ecuaciones de condición reducidas o independientes, quedan los residuos:

$$\frac{de_1}{dx} = a_1, \ \frac{de_2}{dx} = a_2, \ldots, \frac{de_n}{dx} = a_n,$$

9 Adoptamos la notación de la época, en este caso $e^2 = [ee]$.

10 *Ecuación normal*, es sinónimo de ecuación lineal.

que deben ser sumados a las propias incógnitas *x, y, z, etc.*, de modo que resulte *compensado* el sistema de ecuaciones de condición[11].

4.2. *La variabilidad en las prácticas de ingeniería*

A lo largo del siglo XIX, las actividades de ingeniería se distinguieron por el uso de instrumentos de observación, como fueron, teodolitos, equialtímetros, aneroides, etc., los cuales, por la falta de una tecnología adecuada, toleraban imprecisiones en la toma de datos. Así, en los equialtímetros, la posición del eje de colimación en el enfoque (en este caso la cruz filar grabada sobre la lente), era considerada invariable.

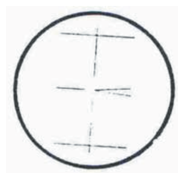

Figura 3. La figura muestra la disposición de la cruz filar sobre la lente del enfoque de un equiatímetro.

Sin embargo, puesto que la cruz filar, concebida plana, era grabada sobre una lente curva, las deformaciones provocadas en la lente de enfoque, producían un sinnúmero de desviaciones en la forma rectilínea del eje de colimación (véase la Figura 3). Tales irregularidades fueron definidas en (Jordan, Reinhertz, & Eggert, 1981, p. 37) como la *variabilidad del eje de colimación*.

Por la misma época, los aneroides, barómetros mecánicos de bolsillo, conocidos actualmente como altímetros, tenían el inconveniente de la variación de las lecturas, ello se comprobaba al ser comparados con un barómetro patrón de mercurio, lo cual, y como era de esperarse, falseaban la altura sobre el nivel del mar correspondiente. Las sacudidas inevitables en los trabajos de campo, en los viajes y transportes, producían diferentes tipos de variaciones en la presión señalada por el aneroide. En la tabla I se da un ejemplo de la variabilidad en las correcciones de presión que resultaron de las diversas comparaciones sucesivas de aneroides mecánicos, que fueron empleados en una expedición a Libia, con respecto al barómetro de mercurio (Jordan, & cols., 1981, pp. 37-40).

[11] En la práctica algorítmica, el método de compensación de Gauss es un modelo numérico por demás sencillo y útil. Gauss utilizaría asiduamente el método de los mínimos cuadrados en sus actividades de ingeniería. Hay evidencia de ello en la *compensación* angular que hizo de los errores instrumentales de la red de triángulos con las que realizó el levantamiento geodésico de la ciudad de Hanover en 1837 (Shubring, 2008, p. 402), así como en la aplicación que hizo del propio método en la corrección de los errores de observación cometidos en la determinación de la órbita de los planetas Ceres y Pallas.

TABLA I
La tabla muestra la variabilidad determinada de diferentes aneroides al compararlos con un barómetro legal de mercurio.

Lugar y fecha	*Naudet 39305*	*Goldschmid 600*	*Casella 1640*	*Casella 1641*	*Chevallier*
Cairo 5 de Dic 1873	+2.8 mm	+14.0 mm	+5.0 mm	+1.3 mm	…
Siut 12 de Dic 1873	+2.5	+13.3	…	…	…
Marac 20 de Dic	+2.8	+13.1	…	…	…
Fárfara 1 de Ene 1874	+4.5	+13.8	+5.0	+0.7	+8.5
Dachel 10 de Ene1874	+5.0	+13.2	+7.2	+1.6	+9.6
Dachel 16 de Marzo 1874	+1.4	+11.0	+9.2	+0.9	+10.7
Charge 25 de Marzo 1874	-0.3	+9.4	+9.6	+1.0	+10.2
Esneh 1 de Abril 1874	+0.8	+8.1	+9.4	+0.4	…
Cairo 16 de Abril 1874	+0.6	…	+8.7	…	…
Variación mínima	-5.3 mm	-5.9 mm	+4.6 mm	-1.2 mm	+1.7 mm

El aneroide Cassella No. 1641, que presentó las variaciones mínimas, era un instrumento pequeño, del tamaño de un reloj de bolsillo, y durante todo el tiempo lo llevó en el bolsillo del pantalón uno de los ingenieros. Este último dedujo que ese modo de transportar los aneroides pequeños los resguardaba de las variaciones anormales. Los aneroides grandes y pesados, que había que transportar, sobre todo en camellos, sufrieron grandes e inevitables sacudidas al estar sujetos al propio movimiento (Jordan, & cols., 1981, p. 191).

El fenómeno de la variabilidad en los aneriodes fue estudiado en (Reinhertz, 1887). La propia variabilidad era referida a cuando un cuerpo elástico, por ejemplo, una hoja de muelle sujeta por un extremo, al doblarse por el otro, no vuelve instantáneamente a su posición primitiva al cesar la fuerza que produjo la deformación, sino que la alcanza después de varios movimientos cada vez menores. Esta propiedad de los cuerpos elásticos fue llamada, *elasticidad remanente*. En (Reinhertz, 1887) se comprobó, también, que la mayor o menor variabilidad está en relación con la magnitud y la velocidad del cambio de presión.

5 Modificaciones a la variabilidad para su difusión al sistema escolar mexicano

El ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias, cita en diversos apartados de su libro de Cálculo Infinitesimal, escrito en el año de 1873, al método de combinación de Mayer, del cual hizo uso indistinto en el texto, así como en sus obras elementales de Topografía y Astronomía, lo cual habla del amplio conocimiento que tenía del método, y del cual, seguramente, tomó la definición de variabilidad que incluyó en su corpus académico (Díaz Covarrubias, 1873, p. 174).

Camacho (2008) cita la utilidad de la noción de variabilidad en la forma en que Díaz Covarrubias la incorporó a las definiciones elementales de *curva* y *curvatura*, las cuales le servirían para definir el concepto de derivada. La descripción de las definiciones planteadas por este autor se hace de la siguiente manera:

> Toda curva puede verse originada por el movimiento de un punto (…) Al punto que describe la curva dio el nombre de generador. Esto último le permitió inferir que los diferentes cambios de dirección del punto generador son diversos entre las curvas, teniendo todas ellas por propiedad común la variabilidad. En esa reflexión, el autor estableció la curvatura de las curvas en un modelo del todo geométrico, tomándole como la « (…) representación de la variabilidad de las direcciones» (Díaz Covarrubias, 1873, p. 21), o bien los diferentes *cambios* del punto generador sobre la curva. Destacando que esos cambios se producen al imaginar la curvatura como un proceso que sucede al pasar de un estado rectilíneo a otro curvilíneo, o bien de la constante a la variable.
>
> En tal sentido la variabilidad asume dos posibilidades: la primera es que puede concebirse en un estado de *constancia* del todo rectilíneo y, la segunda, cual es la continuidad de la curva (Camacho, 2008, pp. 525-526).

El planteamiento de la variabilidad en (Díaz Covarrubias, 1873) es semejante al que se destaca en el problema que se atendió en (Jordan, & cols., 1981) para la lente del equialtímetro a partir de los objetos en juego; es decir, la línea y su transición hacia la configuración de la curva. De hecho, en ambos casos, la variabilidad es contemplada partiendo del mismo principio: «cruz filar, concebida plana, grabada sobre una lente curva», en el segundo, mientras que para el primero, la variabilidad es sujeta a los *quiebres* o diferentes cambios que sufren las líneas rectas que, a su vez, conforman la curva.

El error lineal que se produce por la distorsión del enfoque, es una variación en el contexto del primero; mientras que en el segundo, el error o variación se encuentra en la aproximación que se hace de la poligonal de líneas rectas que tienden hacia la curva, de aquí la variabilidad.

En resumen, la noción de variabilidad tuvo un surgimiento sociocultural fuera del salón de clase, en un ambiente donde las prácticas de ingeniería precisaron su emergencia. El posicionamiento y difusión de la noción en libros científicos de topografía y astronomía, obligó a diferentes autores y geómetras a transformar su estructura inicial concebido como un *error*, haciéndole pasar por diferentes reformulaciones que culminarían en el texto de cálculo de Díaz Covarrubias, con las nociones alternativas de *constancia*, así como la propia variabilidad, en su relación con la analiticidad, en el ambiente escolar.

6 Argumentaciones del concepto para el diseño de la situación

Para la enseñanza de los argumentos fundamentales del cálculo diferencial, desde el punto de vista de la variación, como son aquellos de función y derivada, se hace necesario transitar el discurso escolar por diferentes dimensiones de enseñanza, como son la geométrica, algebraica, variacional y numérica, entre otras. Con la dimensión geométrica es posible simular imágenes elementales que involucren cantidades constantes en las que se dé movimiento a algunas de éstas convirtiéndolas en variables y cuyo cambio deje *ver* su variación, así como la variabilidad que se provoca con la simulación (observe la Figura 4).

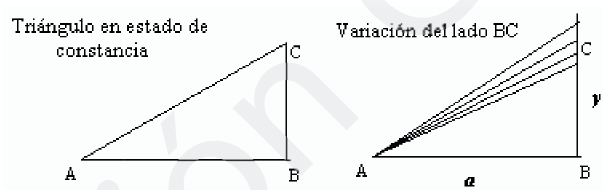

Figura 4. La figura muestra el estado de constancia del triángulo ABC, de la izquierda, y el movimiento que se dio al lado BC convirtiéndole en la variable y, a la derecha, mientras que el lado a=AB permanece constante. El triángulo de la derecha muestra, además, las diferentes variaciones del lado y=BC, que en su conjunto se definen como la *variabilidad* del propio lado.

Con estos pocos argumentos es posible construir el concepto de función, caracterizándola siguiendo la secuencia de significados: variable $\rightarrow$ variación $\rightarrow$ variabilidad $\rightarrow$ función, tal como se describe enseguida.

En el caso de la figura 5, establecimos como *ecuación* el *estado de constancia* del área del triángulo ABC, es decir $A=\frac{a}{2}y$ para el triángulo de la izquierda, mientras que la *función* resulta ser aquélla que agrupa la totalidad de la variabilidad de las áreas de los triángulos que se desprenden del movimiento de la variable y, es decir, $A(y)=\frac{a}{2}y$, parte derecha de la figura 5 (Sánchez, 2009, p. 97; Camacho, 2009a, pp. 44-46). Como se puede apreciar, con esta breve argumentación se hace innecesario, en principio, hablar del concepto de función como una dependencia entre variables, de hecho este es el siguiente paso, dando así importancia a la variación.

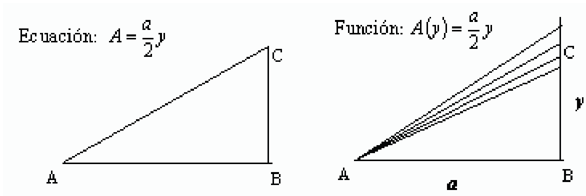

Figura 5. La figura muestra la diferencia entre el estado de constancia previsto como una ecuación para el área A del triángulo de la izquierda y la variabilidad concebida como agrupada por la función $A(y)$ para la totalidad de las áreas de los triángulos que resultan del movimiento de la variable *y*.

Bajo este punto de vista, se sigue, en los cursos de cálculo diferencial del nivel de ingeniería, caracterizar la variabilidad de forma algebraica de modo que esa acción lleve a la determinación de la derivada. Teniéndose la función $f(x)$, es posible incrementar x en $x+\Delta x$ de manera que se logren desarrollos binomiales como:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+A\Delta x+B(\Delta x)^2+C(\Delta x)^3+etc.$$

Ese esquema hereda las nociones vistas en la dimensión geométrica, es decir:

$$\underbrace{x}_{\textbf{Variable}} \rightarrow \underbrace{x+\Delta x}_{\textbf{Variación}} \rightarrow f(x+\Delta x)=\underbrace{f(x)+A\Delta x+B(\Delta x)^2+C(\Delta x)^3+etc.}_{\textbf{Variabilidad}}$$

La determinación de la derivada $f'(x)$ a partir de la *primera variación* A, contenida en el desarrollo binomial, muestra un significado distinto al del discurso escolar actual y permite, así mismo, establecer las definiciones de:

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Diferencia}\ \ f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+B(\Delta x)^2+C(\Delta x)^3+etc.,, \\ \textit{Diferencial}\ \ f(x+\Delta x)-f(x)=dy=A\Delta x\text{ , y} \\ \textit{Derivada}\ \ \dfrac{dy}{dx}=A\text{ ,} \end{array}}$$

de manera conjunta, asumiendo cada caso su propio significado (Camacho, 2009a, 232-237), por ejemplo el de *predicción* para la diferencia, al surgir en problemas prácticos concretos y sin dejar de lado otros significados, como el de la pendiente de la recta tangente para la derivada.

7 El concepto de función a través de las nociones de variable variación-variabilidad

Los conceptos de variable, variación y variabilidad están involucrados en el concepto de función, mas, en la actualidad, se dejan de lado para la adquisición del concepto por parte de los estudiantes, creándose así un *hueco* en su entendimiento, (Camacho, 2006).

El siguiente diseño de situación presenta estas tres nociones permitiendo el estudio del movimiento de los fenómenos desde diversos modos de representación, como son: el geométrico, algebraico y variacional.

Objetivo: Permitir a los estudiantes la adquisición del concepto de función mediante los significados asociados como son: variable, variación y variabilidad, así como la creación de un vínculo entre los distintos modos de representar una función, con el fin de que puedan coordinarlos durante la resolución de problemas.

La situación consta de cinco fases, divididas en actividades: la primera llamada *Fase de Sensibilización*, cuyo objetivo es hacer emerger las concepciones de los estudiantes y ponerlos en discusión sobre ellas para formular cierto número de hipótesis relativas a los criterios necesarios para la definición de variable y variación; incluye la Actividad 1 donde el profesor inicia con la descripción del movimiento de algunos objetos matemáticos como son el punto, la recta y el plano. De ahí sigue la Actividad 2, donde se presenta el comportamiento de las variables al mover uno de los lados de un triángulo.

En la *Fase* 2 (aquella en la que el concepto es estudiado o aplicado en otra situación diferente a la anterior), se realiza un debate y desestabilización de las representaciones, el profesor pide mediante una lluvia de ideas grupales que se discuta la relación entre las variables a través del aumento o de la disminución de la altura en un trapecio.

En la *Fase* 3 (cuando el alumno es confrontado con un conflicto sociocognitivo y reconstruye la idea inicial), se pide una expresión analítica que muestre el fenómeno, además es aquí donde se enuncia el concepto de función como una dependencia de cantidades variables, incluye además una segunda actividad por equipos de 3 o 4 alumnos para coordinar los distintos modos de representar una función.

La cuarta *Fase* presenta dos actividades de vinculación entre los diversos modos de representar una función, siendo ésta la etapa donde el alumno debe construir una representación alternativa, que involucre los elementos mostrados.

Para terminar, la quinta *Fase* (el profesor pone a prueba la *nueva* noción, por ejemplo en una evaluación), se compone de las actividades de exploración y verificación, en las que los estudiantes deberán aplicar las nociones vistas y responder preguntas encaminadas a lograr una conexión entre los modos de representación en los casos presentados, para, finalmente, proporcionar una definición del concepto de función que involucre los significados asociados incorporados en la situación.

Las fases dos y tres, en este diseño, son presentadas sobre la base del debate en equipo y luego grupal. Durante las actividades de trabajo en equipos, el profesor debe circular entre los mismos y pedir a los alumnos precisión en sus respuestas y justificación de éstas.

Las prácticas sucesivas, como son la selección de los contenidos de enseñanza, o el diseño de secuencias por el profesor, incluyen reconstrucciones de un objeto nuevo, y en éstas, debe tomarse en cuenta que los estudiantes no llegan a las aulas como un libro en blanco, sino que poseen todo un conjunto de representaciones sobre los objetos a tratar (Giordan & De Vecchi, 1995, pp. 65-72).

7.1. *Descripción de la situación de aprendizaje*

FASE 1

Objetivo: Emergencia de las concepciones de los alumnos.

Actividad 1. Introducción

- El profesor pide a los alumnos que *imaginen* el movimiento de ciertos objetos como el punto, la recta, la superficie. Tal como se ejemplifica enseguida:
- En el pizarrón se muestra cómo una línea recta es descrita por el movimiento de un punto (véase la Figura 6).

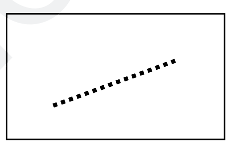

Figura 6. Se muestra la descripción de una línea recta a través de *mover* un punto en el pizarrón.

- La línea recta, al moverse describe una superficie (véase la Figura 7).

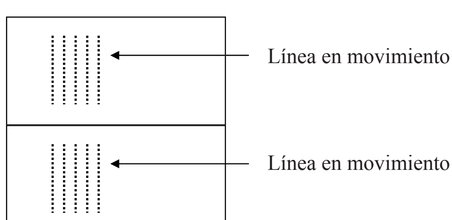

Figura 7. El movimiento de la recta genera una superficie.

– La superficie al moverse describe un sólido (Figura 8).

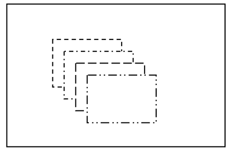

Figura 8. Al *mover* la superficie se describe un sólido.

La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudian a través del cálculo diferencial.

Actividad 2. Variación de la variable.

– El triángulo ABC se encuentra en estado de constancia o reposo (véase la Figura 9):

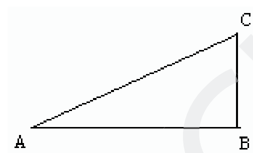

Figura 9. Triángulo en estado de *constancia,* sin movimiento

En el siguiente ejercicio se muestra la variación de uno de los lados del triángulo ABC. Si *damos la oportunidad* de moverse hacia arriba al lado BC, el mismo se convierte en una variable (véase la Figura 10)

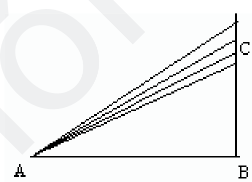

Figura 10. Al *mover* uno de los lados del triángulo, él mismo se convierte en variable.

Cada uno de estos movimientos son llamados *instantáneas* y producen *variación*. Algunos de ellos se muestran en la Figura 11.

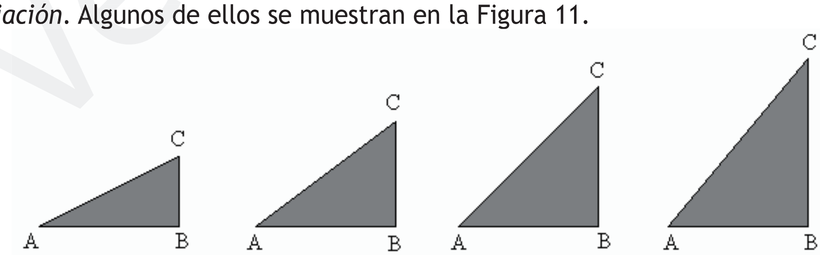

Figura 11. Diferentes variaciones producidas por el movimiento del lado *BC* del triángulo.

El lado AB se dice que está fijo o en *estado de constancia*. Al dejar de moverse posee de nuevo un valor de constante o reposo. *Todo lo constante se dice que está fijo*.

En el siguiente ejemplo, (véase la Figura 12) la imagen representa el movimiento de un cohete lanzado al espacio, el cual es observado por una persona colocada a una distancia *a* del lanzamiento. El primer cambio que sufre la figura con el movimiento del cohete, es una *variación* o *instantánea* del propio movimiento. Una instantánea es como una fotografía tomada en determinado momento de una de las *variaciones* del suceso.

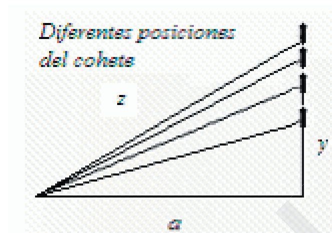

Figura 12. Diferentes *instantáneas* del movimiento del cohete.

Preguntas: Para cada una de las instantáneas ¿Cómo es el área?, ¿Es la misma?, ¿Es diferente?

FASE 2

Objetivo: Reafirmar la relación entre variables.

Actividad 1

En esta fase se presentan otros ejemplos que apoyan la fase anterior.

Consideremos que tenemos un trapecio ABCD, (Figuras 13 y 14) donde AB es la base menor y CD es la base mayor, ambas constantes, si hacemos que la altura aumente o disminuya:

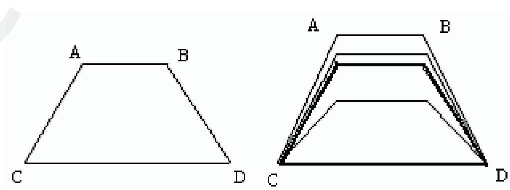

Figura 13. Instantáneas en el movimiento de la altura de un trapecio.

Cada uno de los movimientos es una instantánea:

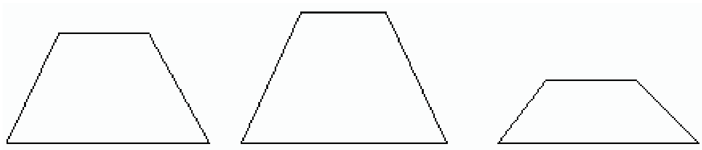

Figura 14. Las diferentes instantáneas son disociadas del movimiento

De manera grupal y mediante una lluvia de ideas, los alumnos responden las siguientes preguntas: Para cada una de las instantáneas ¿Cómo es el área?, ¿Es la misma?, ¿Es diferente?, ¿De qué depende que cambie el área?

Lo cierto es que en el primer ejemplo cambiaron las longitudes BC y AC, el área $A=\frac{a}{2}y$ del triángulo (donde a representa la base e y la altura).

Así mismo, en el segundo caso los lados AC y BD, el área del $A=\frac{h}{2}(b_1+b_2)$ del trapecio (donde h es la altura, b_1 y b_2 las bases menor y mayor), etc.

FASE 3

Objetivo: Confrontar a los alumnos con un conflicto sociocognitivo y reconstruir la noción inicial.

Actividad 1:

Dado que se han presentado los elementos para identificar las variables, se pide a los estudiantes que proporcionen una *expresión analítica* que muestre ese cambio tanto para el caso del triángulo como para el del trapecio. El profesor debe guiar la discusión en torno a las dos ecuaciones de área y concluir al respecto.

La realización de este tipo de reconocimiento geométrico de las variaciones, es la que más adelante permitirá el *estudio analítico* del propio movimiento; es decir, no consentiremos solamente en *ver* su expresión variacional. A la cantidad de variaciones que se pueden establecer a partir de las expresiones $A(y)=\frac{a}{2}y$ y $A(h)=\frac{h}{2}(b_1+b_2)$ se le llama *variabilidad,* la cual representa el total de las variaciones producidas por el fenómeno. En el caso de las ecuaciones, $A=\frac{a}{2}y$, $A=\frac{h}{2}(b_1+b_2)$ éstas significan el caso particular de una de las variaciones originadas por el fenómeno, y dejan ver al movimiento en un estado estacionario o de *constancia,* en el cual es factible su análisis.

Actividad 2

Coordinación de los distintos modos de representar funciones.

Se divide el grupo en equipos de 3 o 4 personas. El profesor comenta la siguiente situación:

Se tiene un vaso con agua fría y se coloca dentro de él unos cubos de hielo luego lo deja sobre la mesa, en un día caluroso del mes de julio.

Pide a los estudiantes que respondan a lo siguiente:

a) Describan con palabras cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo.
b) A continuación tracen una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

Después de esto, un representante de cada grupo pasa a exponer la solución del problema. El profesor apoya al grupo para la conclusión del problema.

FASE 4

Objetivo: Construir una representación alternativa.

Actividad 1

A los mismos equipos se les proporciona el siguiente ejercicio:

La Tabla II muestra el registro de temperatura medido cada dos horas, desde la media noche hasta las 12 del mediodía, un día de otoño. El tiempo t se midió en horas a partir de la media noche. La temperatura T viene dada en grados centígrados.

TABLA II

Tabla planteada a los estudiantes para anotar los diferentes registros de temperatura

t (horas)	0	2	4	6	8	10	12
T (°C)	15	14	12	10	11	14	16

a) Trace una gráfica de T en función de t.
b) Describa con palabras lo que ocurre en la gráfica.
c) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 5 a.m. y a las 11 a.m.

Actividad 2.

Los estudiantes continúan en el mismo equipo y se les presenta el siguiente ejercicio para que llenen la tabla (véase la Tabla III) y respondan las preguntas:

Se tiene un globo de volumen $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ cuyo radio varía al ser llenado con aire.

TABLA III

En la tabla se enfatiza la relación del radio contra el volumen

r (cm)	V (cm^3)
0.5	
0.9	
1.0	
2.5	
3.0	
3.8	

Después de llenar la tabla, respondan las siguientes preguntas: ¿Cómo se comporta el volumen del globo conforme se llena de aire?, ¿De qué depende ese cambio? Muestra gráficamente el cambio del volumen respecto al radio.

Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios en función del radio. Al final de la fase, un representante de cada grupo pasa a exponer los resultados de las dos actividades. El profesor apoya al grupo para la conclusión del problema.

FASE 5.

Objetivo: Poner a prueba la *nueva* noción mediante su aplicación en un problema específico.

Actividad 1: Exploración

Es de suma importancia verificar que las diversas representaciones estén presentes en la resolución de problemas, e identificar si el estudiante las vincula adecuadamente. El problema se plantea enseguida:

> Un avión vuela horizontalmente tomando contacto en tierra con una torre de control en diversos momentos de tiempo antes de pasar por encima de ella, la cual se encuentra verticalmente a 10000 metros del avión.

a) Describe con palabras lo que ocurre con la distancia entre el avión y la torre conforme pasa el tiempo.
b) Desarrolla una gráfica que muestre la simulación del movimiento del avión con respecto a la torre para diferentes momentos de contacto.
c) Toma una de las instantáneas de la simulación y dibújala al lado. Puesto que es un triángulo rectángulo, nombra los lados variables con las letras z y x, el lado constante es 10000 m.
d) Dado que el avión está en movimiento horizontal hacia la torre, la distancia entre éstos también cambia. Establece una relación que involucre ambas variables, incluyendo la constante (Sugerimos utilizar el Teorema de Pitágoras).
e) Con la expresión obtenida llenar la siguiente tabla (véase la Tabla IV):

TABLA IV

Relación entre variables mediante un ejemplo que involucra movimiento

Distancia horizontal entre el avión y el punto por encima de la torre de control (metros).	Distancia del avión respecto a la torre de control en tierra (metros) Expresión:
20, 000	
18, 000	
12, 000	
7, 000	
5, 000	
1, 000	

f) Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios.

Actividad 2.

A partir de los ejemplos anteriores, expresa con tus propias palabras el concepto de función

8 Conclusiones

En la búsqueda de los cambios morfológicos, o catástrofes, de las funciones, Thom llamó *perturbaciones* a los elementos de los *despliegues universales* que hizo de las funciones analíticas o *funciones germen* a través de la serie de Taylor. Por ejemplo, si $\eta(x)=x^4$; un despliegue universal *estable* del sistema resultante es: $F(x,u,v)=\eta(x)+ux^2+vx$, donde las perturbaciones que cambian morfológicamente a la función devienen: ux^2 y vx (Thom, 2000, p. 76). No obstante la sencillez del ejemplo anterior, el estudio de la analiticidad de las funciones ofrece caracterizaciones de la variación devenidos en nuevos argumentos para la enseñanza de la matemática que, como afirma Cantoral (1991), abren un campo fértil para la indagación.

Por su lado, el diseño de la situación de aprendizaje propuesta tiene como eje central la noción de variabilidad, la cual, como se vio, surgió de prácticas sociales desarrolladas en la ingeniería. De esta manera, incorporamos un registro ausente en la enseñanza actual del propio concepto de función, con el objetivo de hacer patente la noción de variación en el discurso matemático escolar desde esta etapa.

Referencias bibliográficas

Camacho, A (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. México, *Revista de Educación Matemática, 18* (1), 133-160.

Camacho, A. (2008). Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, (pp. 471-492). Madrid: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Camacho, A (2009a). *Cálculo Diferencial*. Madrid: Díaz de Santos Editores.

Camacho, A (2009b). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite 1847-1900.* México: Díaz de Santos Editores.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: Formación de la noción de función analítica. México: *MATHESIS. Filosofía e historia de las matemáticas 7* (2).

Cantoral, R., y Farfán R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes des nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24* (2.3), 137-168.

Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama J., y Martínez G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *9* (Número especial), 83-102.

Euler, L (1843). *Lettres a une princesse d´Alemagne sur divers sujets de phisique et philosophie*. Charpentier, (Trad.). París, Francia.

Gauss, Ch. F (1855). *Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations*. (Bertrand, M. J., Trad.). Paris: Mallet Bachelier.

Giordan, A. y De Vecchi, G. (1995). Los nuevos modelos de aprendizaje ¿más allá del constructivismo? [Versión Electrónica] *Perspectivas. 25* (1), 65-72.

Jordan, W., Reinhertz, C. y Eggert, O. (1981). *Topographie*. (Mantero, J. M., Trad.). Barcelona, España: Gustavo Gili.

Lacroix, S. F (1797). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Tome premier.Paris, Francia: Chez J. B. M Duprat.

Reinhertz, C (1887). *Elasticidad remanente en los aneroides.* Hannover, Zeitschr. Editorial.

Sánchez, B. I. (2009). *El concepto de función matemática entre los docentes a través de las representaciones sociales.* (Tesis inédita de doctorado). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - IPN.

Sánchez, B. I, y Camacho, A (2009), Las representaciones sociales como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el concepto de función. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 5*.

Shubring, G (2008). Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11* (3), 383-412.

Thom, R (2000). *Parábolas y catástrofes. Entrevista sobre matemática, ciencia y filosofía.* España: Tusquets Editores.

Autores:

Alberto Camacho.
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México.
camachoalberto@hotmail.com

Bertha Ivonne Sánchez.
Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez, México.
ivonne_mx_2000@yahoo.com