

## Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte

Vivian Carolina Herrera E., [caher08@gmail.com](mailto:caher08@gmail.com)

Yeimy Esperanza Montes V., [yesmonva@hotmail.com](mailto:yesmonva@hotmail.com)

Angie Carolina Cruz C., [angie240@hotmail.com](mailto:angie240@hotmail.com)

Ángel Ricardo Vargas P., [anrivarpe2005@hotmail.com](mailto:anrivarpe2005@hotmail.com)

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

### 1. Introducción

En el presente trabajo se busca dar cuenta de cómo se potenciaron expresiones artísticas y creativas de diferentes individuos, a partir de la representación de nociones geométricas presentes en los recubrimientos del plano, permitiendo observar las diferentes propiedades de los polígonos regulares e irregulares que se pueden transformar; creando una interrelación matemática necesaria para el desarrollo tanto cognitivo como sociocultural y validando su importancia en la didáctica de la geometría puesta en juego en la práctica docente a partir de una experiencia de aula. Para ello, en el presente escrito se tendrán en cuenta cuatro apartados a saber: presentación de la propuesta, reflexiones teóricas, reflexiones metodológicas con un análisis de la propuesta y conclusiones.

### 2. Presentación de la propuesta

Dentro del campo del Pensamiento geométrico, es necesario crear espacios potencializadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan una conexión con los aspectos socioculturales, poniendo en juego una educación interdisciplinaria, donde se posibilite la expresión artística del individuo a partir del reconocimiento y utilización de nociones geométricas de rotación, traslación, semejanza de figuras geométricas entre otras, que promueven el desarrollo del pensamiento matemático en términos generales.

Teniendo en cuenta que autores como Casas (2000), Godino (2002) y Escher (Ed. Taschen, 2008) señalan que una teselación puede ser definida como el arte del recubrimiento del plano a través de figuras geométricas, por medio de diferentes técnicas de tipo artístico<sup>69</sup>; se logra evidenciar la interdisciplinariedad matemática lograda a través

<sup>69</sup> Diferentes estudios muestran las técnicas y estilos de las teselaciones planteadas por autores como Escher, María Collarte, entre otros.

de diferentes obras de arte, así como diversas perspectivas culturales que determinan el contexto del individuo.

Por esta razón surge la necesidad de presentar una propuesta, que se podría llevar a cabo tanto en las escuelas rurales como las urbanas, teniendo en cuenta el sentido sociocultural que sería introducido en el desarrollo de nociones propias del Pensamiento geométrico.

### **3. Reflexiones Teóricas**

Según Collarte (s.f.) este tipo de arte permite que el estudiante reconozca las propiedades de las figuras y las transformaciones geométricas o isométricas que conllevan a desarrollar destrezas como la orientación espacial, el razonamiento lógico y la resolución de problemas, entre otros.

Con relación al primer aspecto, se tiene que la orientación espacial ha sido desplazada por aspectos meramente numéricos desconociendo la importancia de ésta para el desarrollo integral del Pensamiento geométrico, como lo afirma Plunkett (citado por Dickson, 1988). Por tal motivo, a través de esta propuesta se busca, no solo resaltar la importancia del trabajo geométrico de forma innovadora dentro del aula si no propiciar espacios de aprendizaje donde el arte permita una sensibilización de tipo espacial en los estudiantes por medio de nociones trabajadas en las teselaciones como lo son los giros, las traslaciones de figuras bidimensionales y otras transformaciones geométricas de congruencia, donde las propiedades de las figuras no cambian.

Ahora bien, lo que converge al segundo aspecto es la capacidad de argumentación, validación y proposición que se evidencia al momento de la construcción del patrón de teselación y la posibilidad de creación de diferentes patrones que conducen al recubrimiento del plano de forma geométrica. Para este asunto, es necesario que se recurran a las diferentes técnicas dadas por Escher para tal construcción.

En cuanto a la resolución de problemas, como metodología de clase, es evidente que en el proceso de construcción por ensayo y error del patrón de teselación por parte de los estudiantes, como fase inicial, sea preciso direccionar de forma clara los procesos que surgen al momento de la argumentación y validación, mencionadas por los estándares curriculares de matemáticas (2007) en donde los estudiantes toman nociones previas sobre objetos geométricos como polígonos, ángulos, perpendicularidad y paralelismo, ligadas a las técnicas propuestas por Escher (2008) que recrearán aspectos artísticos en los

estudiantes al momento de responder preguntas como ¿De dónde se parte para la construcción del patrón? ¿Con todas las figuras regulares se puede recubrir totalmente una superficie? ; Y en el transcurso del proceso, se irá dando respuesta a tales interrogantes a partir de la socialización en el aula propuesta por el docente como mediador.

Respecto a la fase inicial mencionada anteriormente, se deben tener en cuenta aspectos rigurosos frente a los conceptos matemáticos trabajados en la teoría de Escher que valen la pena mencionar y fundamentarán la propuesta de enseñanza y desarrollo del pensamiento geométrico.

El artista más exitoso que ha utilizado el arte para mostrar su interdisciplinaridad con la geometría es Maurits Cornelis Escher, que utilizando varias técnicas introduce las particiones regulares de la superficie, definidas según los autores, anteriormente mencionados, como teselaciones, que a través de la técnica de xilografía (Impresión en altorrelieve realizada con tipos, motivos o dibujos grabados en madera) hace la introducción a la temática propuesta que permite entender el sentido sociocultural que tienen las matemáticas.

Una de las primeras apariciones de este tipo de recubrimientos fue la de los árabes en la Alhambra de Granada, quienes adornaban paredes y suelos con mayólicas de diferentes colores que se delimitan sin dejar lagunas “*¡Qué lástima que el Islam les prohibiera a estos artistas “reproducir” estas figuras!*” dice M.C. Escher (Ed. Taschen, 2008). Allí se evidencia la trascendencia histórica que desde las antiguas civilizaciones se observó del uso de la geometría y sus movimientos en el plano, así mismo las utilidades que éstos le dan pero sin reconocer las figuras, nociones, conceptos que se encuentran dentro de éstas y que se podrían formar de manera abstracta desde diferentes perspectivas. Esto permite que los estudiantes puedan explorar, visualizar, construir diversas figuras geométricas y formas concretas fácilmente identificables existentes en la naturaleza dentro de un plano circular, cuadrado, triangular, rectangular, entre otros. Y como lo decía Escher “*identificar las figuras de mis propios dibujos es la razón de mi vivo y permanente interés por la partición regular*”. M.C. Escher (Ed. Taschen, 2008).

Dentro de estas particiones Escher describe ciertos parámetros que permiten entender sus técnicas, entre estas:

a) *Todo aquel que desee representar una figura simétrica sobre una superficie plana, deberá tomar en consideración tres principios cristalográficos fundamentales, que serán definidos por Collarte (s.f) como :*

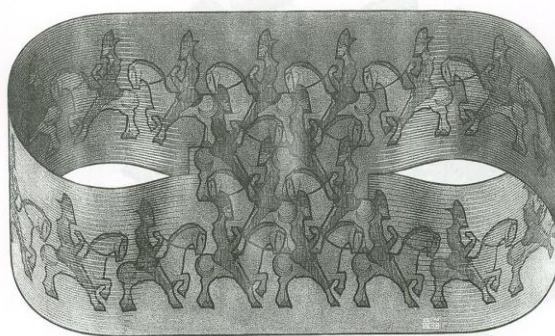
- *Traslación:* Es una transformación isométrica que realiza un desplazamiento

paralelo de una figura. Se realiza de acuerdo a un vector, es decir, en un sentido y longitud de desplazamiento determinado.

- *Rotación:* Es una transformación isométrica que mueve una figura en torno a un punto fijo llamado punto de rotación y de acuerdo a un determinado ángulo.
- *Reflexión:* Es una transformación isométrica en la que todos los puntos del plano son enviados a sus imágenes reflejadas con respecto a una recta de reflexión que actúa como espejo.

Estos tres principios cristalográficos ligados de manera directa a la geometría plana, son elementos que se construyen mediante la aplicación y desarrollo de la propuesta sobre recubrimientos en el plano.

Se desea potenciar nociones de reflexión, mediante la visualización de imágenes invertidas puesto que se logran formar espejos y se pueden apreciar las figuras desde diferentes perspectivas, como se muestra en la siguiente imagen:



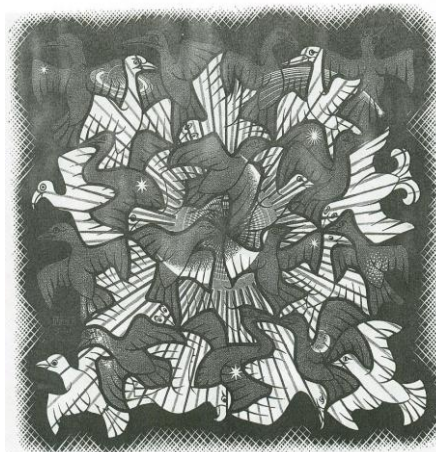
- b) *Empleo de las figuras como trasfondo:* Los ojos están hechos para fijarse en un determinado objeto, el resto del campo visual se convierte en fondo.

Se pretende fortalecer la visualización mediante el reconocimiento de los componentes de una figura plana, complejizando tales recubrimientos al utilizar dos o más patrones contruidos a partir de una misma figura, determinando las diferentes formas y tonos que

“*Jinetes., (1946)*

*Se trata de un nuevo ejemplo de reflexión. Para expresar el hecho de que los jinetes claros son la imagen invertida de los oscuros, se añadió una banda en forma de anillo sobre la que avanza la columna de jinetes. Los jinetes oscuros sobre fondo claro cambiarán de color en el reverso de la tela. En el centro se entremezclan anverso y reverso.” (Ed. Taschen, 2008)*

puede adquirir una teselación, para así obtener diversos significados vistos desde puntos específicos que determinan un campo visual abstracto; como se muestra en la siguiente imagen:



*“Sol y Luna (1948)*  
 El tema de esta xilografía es nuevamente el contraste entre el día y la noche. Aquí sin embargo estas no se encuentran meramente yuxtapuestas, si no que ocupan el mismo lugar bien no al mismo tiempo, ya que están separados por una modificación repentina en su percepción). No obstante si se consideran los pájaros no como objetos, si no como el telón de fondo, se verá volar enseguida catorce pájaros, allí se verán catorce pájaros blancos volando en un cielo nocturno, con estrellas, planetas, un cometa y la luna creciente en el centro.” (Editorial Taschen, 2008)

*c) Desarrollo de formas y contrastes.*

A partir de la construcción de uno o varios patrones para un recubrimiento, no solo de un plano, sino de las figuras que se pueden inscribir en el mismo, se hacen evidentes las diversas formas de ubicación del patrón, generando diferentes contrastes dentro del plano.



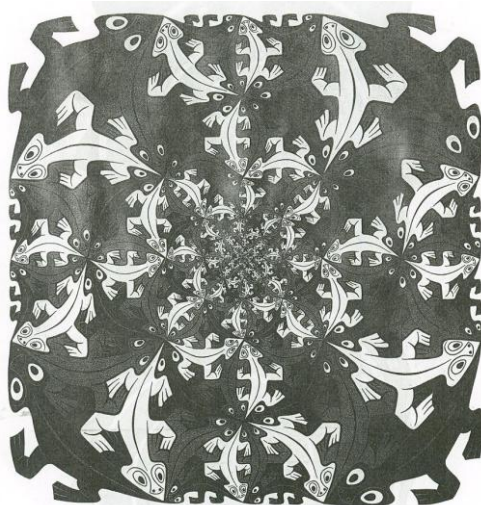
*“Limite circular IV (cielo e infierno)*  
 Aquí se reduce los elementos de adentro hacia fuera. Los seis más grandes, tres ángeles blancos y tres diablos negros, están dispuestos radialmente en torno al centro. El círculo esta dividido en seis sectores en los cuales los ángeles dominan frente a un fondo negro y los estadios terrenales que quedan entre ambos son equivalentes.” (Editorial Taschen, 2008)

*d) El número infinito: Si se quiere representar un número infinitamente grande, se debe reducir gradualmente el tamaño de las figuras y sugerir así que han alcanzado el límite del tamaño infinitamente pequeño.*

Se propone la introducción a una noción de infinito generada a partir de las representaciones de polígonos regulares como el triángulo equilátero, que se puede



dividir desde su punto medio infinitas veces, así según su organización las figuras pueden crear un recubrimiento total sin depender de su tamaño.

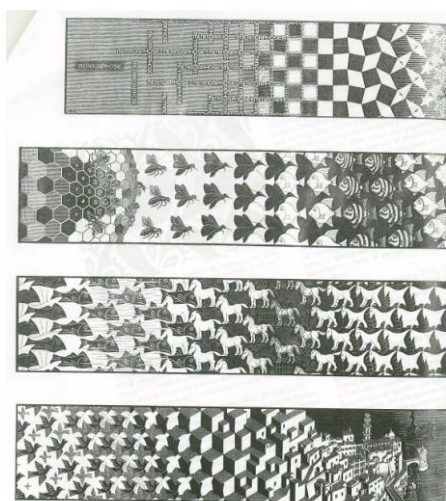


“Cada vez más pequeño, (1956)

La superficie de cada uno de los elementos en forma de reptil se divide hacia el centro, de modo sistemático y continuo, por la mitad. Al llegar al centro, se alcanza por lo menos en teoría- tanto el tamaño infinitamente pequeño como el número infinitamente grande. En el caso, presente se continuó la partición de las figuras hasta caer en lo absurdo. El animal más pequeño, que posee todavía cabeza, patas y cola, mide alrededor de 2mm de largo. A pesar de que el límite está situado en el centro, sigue siendo un fragmento, puesto que los límites exteriores del dibujo son arbitrarios.” (Editorial Taschen, 2008)

e) Estampas que narran una historia: La característica principal es la transición de la superficie plana al espacio tridimensional.

En cuanto a la representación de un patrón que se transforma en un mismo plano, que simboliza objetos tridimensionales, se muestra un nivel de complejidad y abstracción, que va aumentando cuando se inicia un trabajo en torno al perfeccionamiento de la técnica empleada para teselar. El trabajo en superficies bidimensionales permite personificar figuras de tipo tridimensional, sin salir de la esencia de teselar en el plano.



“Metamorfosis, (1939-1940-1967-1968)

Solo se tomará un fragmento: “Entra en juego la siguiente asociación: los hexaedros recuerdan a los panales de abejas, y así aparece en cada celda una larva de abeja. Las larvas ya plenamente desarrolladas, se convierten en abejas que vuelan por el aire. Su vida no es muy larga que digamos, puesto que pronto sus contornos se fusionan para formar el fondo contra el cual vemos aparecer unos peces. Tan pronto como éstos confluyen en un punto, descubrimos que los intersticios que los separan tienen forma de pájaros. (Editorial Taschen, 2008)

En última instancia se pretende que a partir de las construcciones de patrones, se puedan crear diversas transformaciones que conformen un todo, donde al organizar espacialmente las representaciones, se dote de sentido artístico a la teselación.

Estas técnicas permitirán que los estudiantes desarrollen y utilicen esa expresión artística, argumentando desde el pensamiento espacial los movimientos y organizaciones que pueden configurarse dentro de ciertos límites espaciales.

#### 4. Reflexiones Metodológicas y Análisis de la Propuesta

Considerando que la implementación de la propuesta debe crear espacios de aprendizaje significativo en los diferentes contextos socioculturales; se proponen tres etapas de interacción entre los objetos geométricos, el desarrollo artístico del individuo y la institucionalización de conceptos que promuevan además del desarrollo del pensamiento geométrico un proceso de creación artística tanto en los estudiantes como en los docentes; así mismo se muestra un breve análisis cualitativo con relación a dichas etapas.

En la etapa inicial o de reconocimiento, los estudiantes intentarán dar respuesta a cómo recubrirían una superficie plana, sin dejar espacio alguno. Para éste caso se debe recurrir a la visualización de diferentes teselados que se encontrarán a través de la investigación de las definiciones y técnicas de la misma.

Luego de esto, se empezaría a trabajar bajo los parámetros de argumentación y validación de un patrón que puesto sobre una superficie plana repetidas veces generará un teselado. Allí se evidenciará el uso que los estudiantes le darán a los movimientos isométricos que permitirán tal recubrimiento mediante el ensayo y error. En esta segunda etapa, conocida como orientación, el mediador del proceso de construcción debe ser el profesor, quien lo orientará a través del desarrollo de las dos primeras fases propuestas por Jackson, citado por Llinares (s.f) que estipulan lo siguiente:

- Fase Preactiva: *“...Se trabaja sobre el diseño, elección o modificación de los problemas que se proponen a los alumnos, es decir, una manifestación entre el profesor y el currículo establecido...”*

El profesor debe organizar los contenidos de tal modo que los estudiantes no solo observen la necesidad de recurrir a las definiciones sino también aplicarlos al proyecto en torno a la construcción de la teselación.

- Fase Interactiva: “...ejemplos de tareas a desarrollar por el profesor en esta fase serían: la gestión de los distintos segmentos de enseñanza que constituyen la lección de matemáticas, la presentación de la información, la gestión del trabajo en grupo, interpretar y responder ideas a los estudiantes, la construcción y uso de representaciones instruccionales, entre otras...”

Esta etapa de orientación, el profesor desempeña el papel mediador entre el estudiante y la temática que se ha de trabajar, y a su vez intenta complejizar las tareas de los estudiantes en el proceso de construcción del patrón; para gestionar los aspectos de la fase Interactiva mencionados anteriormente.

A medida que los estudiantes logran establecer diferentes patrones validados de manera conjunta, el profesor interviene buscando complejizar las construcciones elaboradas anteriormente, de tal forma que se establezcan dos o más patrones en los que se haga uso de las nociones de semejanza entre polígonos; trabajando bajo los parámetros propuestos por Escher y mencionados en las reflexiones teóricas; constituyendo la tercera y última etapa, conocida como profundización.

A partir de la experiencia de aula con un grupo de estudiantes de quinto semestre de la licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemáticas, se evidenció un proceso de enseñanza-aprendizaje enriquecedor y significativo, que dio como resultado gran cantidad de construcciones, tomando como patrones de referencia polígonos regulares y argumentando las técnicas, los movimientos del plano y la teselación terminada.

## 5. Conclusiones

Se puede evidenciar la importancia que tiene la geometría en el desarrollo artístico e intelectual de una persona dada por la aplicación que tiene ésta en los diversos campos socioculturales, al momento de la aplicación de esta propuesta; enfatizando como competencias geométricas básicas específicas la construcción de patrones de teselación, a partir de la elaboración abstracta de imágenes mentales que logran una comprensión significativa, referente a la aplicación de la geometría plana en diversos contextos.

Es importante reconocer que el trabajo realizado para potenciar el pensamiento geométrico puede ser abordado desde diferentes actividades, que establecen una relación entre las nociones geométricas y los aspectos socioculturales, mediante creaciones propias elaboradas por los estudiantes en este caso referidos a la expresión artística.



El maestro debe propender por generar un ambiente de interacción constante entre las construcciones realizadas por los estudiantes y las nociones geométricas que se pretenden abordar mediante el desarrollo de la actividad. Así mismo, complejizar las tareas propuestas para trabajar en el aula y reconocer la importancia de la interdisciplinariedad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

La metodología descrita permite crear espacios de reflexión y creatividad, que motivan a los estudiantes a culminar la tarea propuesta de forma natural, puesto que los avances que se dan durante el trabajo son muestra de las construcciones propias y dependen de los procesos autónomos de los estudiantes.

### **Bibliografía**

- Casas, E. (2000). *Inteligencia visual y espacial, el arte de las matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Dickson, L., Brown M. y Olwen G. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Ed. Labor, S.A, Madrid.
- Escher M.C, (2008). *Estampas y dibujos. Introducción y comentarios de M.C. Escher*. Ed. Taschen.
- Erik (2000). *La magia de M.C Escher*. Ed. Taschen.
- Guerrero, A., B. (2006). *Geometría desarrollo Axiomático*. Ecoe Ediciones.
- Lievano, A. (1999). *Comprensión espacial y su expresión gráfica*. Universidad Nacional de Colombia. Publicación Departamento de Expresión. 2da. Edición.
- Llinares, S. (s.f.) *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas*
- Mariño, S. Rafael (1938). *Geometría en el arte y el diseño*.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Montero, Francisca (2002). *Geometría analítica, descriptiva y proyectiva para arquitectos y diseñadores*. Ed. Pearson Educación.
- Rich, Barnett (1991), *Geometría*. Ed. Mc Graw Hill.