

Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos

Figural and epistemic functions of drawings

Claudia Acuña

RESUMEN

Sobre las representaciones figurales o dibujos de la geometría, se ha dicho que deben ser interpretadas en términos de sus propiedades con el propósito de establecer ciertas relaciones dadas de antemano, después de lo cual es posible llegar a un tratamiento deductivo de la geometría. Con esta postura obvian las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. Conocer las propiedades geométricas y establecer vínculos causales entre ellas, no es suficiente para el aprendizaje de la geometría. Si el referente es importante, la referencia también lo es. En este trabajo nos referiremos a las funciones figurales y epistémicas del dibujo que es usado en la geometría.

PALABRAS CLAVE:

- *Aspectos figurales*
- *Dibujos Geométricos*
- *Cambio epistémico*

ABSTRACT

It has been said that figural representations, or geometrical drawing, ought to be interpreted in terms of their properties in order to establish certain relations given beforehand, after which is possible to arrive to deductive treatment of geometry. This viewpoint does not acknowledge the epistemic nor figural function of drawings. Recognizing geometrical properties and linking them casually isn't enough to have a wholesome understanding of geometry. The referent is just as important as the reference. This paper focuses on the figural and epistemic functions of drawings through the use of geometry.

KEY WORDS:

- *Figural Aspect*
- *Geometric Drawings*
- *Epistemic Change*

RESUMO

O foi dito, sobre as representações de figural ou desenho de geometrical, que eles devem ser interpretados em termos de suas propriedades para estabelecer certas relações dadas de antemão, depois que que é possível vir a um tratamento de deductive de geometria, eles desconhecido, com este ponto de vista, o epistemic e figural funciona nesses desenhos. Saber as propriedades de geometrical e forjar elos casuais entre eles não é suficiente para o entendimento pleno e aprende de geometria.

PALAVRAS CHAVE:

- *O Aspecto de Figural*
- *Desenhos Geométricos*
- *Mudança Epistêmica*



O referent de objeto a ser tão importante quanto a referência. Neste papel nós focalizamos no figural e funções de epistemic de um desenho usado por geometria.

RÉSUMÉ

L'a été dit, des représentations figurales ou du dessin géométrique, qu'ils doivent être interprétés dans les termes de leurs propriétés pour établir de certaines relations données d'avance, après que qui est possible venir à un traitement déductif de géométrie, ils inconnu, avec ce point de vue, les fonctions épistémiques et figurales dans ces dessins. Savoir les propriétés géométriques et forger des liens désinvoltés entre les ne sont pas assez pour la compréhension et l'érudition pleins de géométrie. Le référent d'objet à est aussi important que la référence. Dans ce papier que nous convergeons dans les fonctions figurales et épistémiques d'un dessin utilisé par la géométrie.

MOTS CLÉS:

- *L'Aspect figural*
- *Dessins Géométriques*
- *le Changement Epistémique*

1 Introducción

En una sesión de trabajo con estudiantes de 3er año de primaria donde hablábamos de comparar “a ojo” el área de dos rectángulos para decidir cual tenía mas, igual o menos área, obtuvimos una serie de respuestas correctas a las preguntas planteadas, hasta que llegamos al caso que mostramos enseguida:

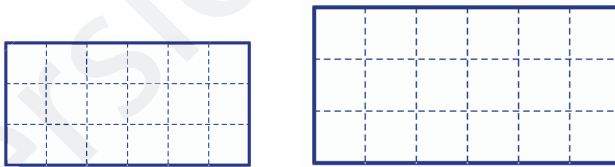


Figura 1. ¿Área distinta o igual?

Quando preguntamos sobre ¿qué rectángulo tenía más área?, la respuesta a coro de todos los estudiantes fue unánime: ¡tienen áreas iguales!

Los estudiantes explicaron que los dos rectángulos tenían el mismo número de unidades de área, al parecer, no les incomodaba que estas fuesen de diferente tamaño.

Podemos decir que faltó aclarar en clase que al comparar áreas, las unidades deben ser del mismo tamaño, este error se puede evitar haciendo explícito que

éstas *deben ser iguales*. Galperin y Georgiev (1969) ya apuntaban que cuando se hace énfasis en la individualidad de la unidad el estudiante desarrolla una justificable indiferencia frente al tamaño de la unidad.

Pero, creemos que hay otro fenómeno que debemos observar en la respuesta dada y que se refiere a aquel proceso de pensamiento en el que conviven tanto la idea de superposición de rectángulos o apreciación global y aquella donde se considera el número de los pequeños cuadrados, haciendo un lado la evidencia mostrada por el dibujo¹.

La circunstancia bajo la cual los estudiantes deciden contar las unidades de área, lo determina la cuadrícula que y puede entenderse como un cambio en las reglas del juego, es decir, si aparece la cuadrícula, se cuentan unidades.

Cuando el profesor regresa el foco de la atención a la apreciación global, los estudiantes cambian nuevamente de parecer, la confusión está en saber cuáles son las reglas del juego.

La información figural está disponible en los dibujos y ésta debe ser interpretada adecuadamente, pero decidir cuáles son los indicadores determinantes y cuáles no, es una tarea difícil, en especial si consideramos que entre estudiantes capaces de desarrollar inducción informal (nivel 2 de van Hiele) existe una notable preponderancia para usar estrategias visuales, Kospentaris & Spyrou (2007).

El conflicto de la certidumbre, no se relaciona con la dimensión didáctica, el conflicto está en la esfera de la convicción del estudiante cuando su objeto de estudio se presenta de una o de otra forma y se pregunta ¿cuáles son los indicadores que deben orientar su observación, la global (sobre-posición) o la particular (la cuadrícula) para dar un tratamiento u otro al dibujo?

Es decir, ¿Qué papel epistémico juega la representación figural en el aprendizaje de la geometría?

Responder a esta pregunta precisa una reflexión sobre el problema del uso del dibujo en términos de los aspectos figurales de las representaciones geométricas así como de sus componentes epistémicas.

② Las representaciones en geometría

Las representaciones, en el aprendizaje de la geometría, tienen un papel destacado debido a que, es a través de ellas que podemos tener acceso a los

¹ Dibujo en el sentido de Capponi y Laborde (1994).

llamados objetos geométricos, al tiempo que los proveemos un cierto tipo de corporeidad.

Pensamos en las representaciones en geometría como aquellas que tienen naturaleza externa e icónica, donde al decir de Mesquita (1998) esto se define como:

- Externa, significa que esta incorporada materialmente en papel u otro apoyo;
- Icónica o figurativa, significa que está centrada en una imagen visual (en oposición a otros posibles sistemas semióticos). (p.183)

Si bien las representaciones tienden un puente significativo entre el objeto geométrico y el usuario, éstas deben contener aquellas propiedades de los objetos que representan, pero además, debido a su carácter corpóreo adquieren propiedades adicionales que influyen en aquel que las interpreta. Este es el caso de las representaciones geométricas que tienen un carácter doble.

Desde el punto de vista de la teoría del Concepto Figural, a los objetos geométricos se los puede pensar de dos formas: como objetos y como conceptos, Fischbein (1993). Cabe mencionar que la referencia a los objetos no corresponde a la de los de la vida cotidiana, sino que con esta idea se hace referencia a la corporeidad que adquiere la traza que conforma la representación externa e icónica, que antes se menciona, toma cuerpo sobre una superficie.

La observación sobre el doble estatus del concepto figural nace de la necesidad de diferenciar propiedades, las adquiridas por la corporeidad y las abstractas conferidas por la definición.

Al respecto Capponi y Laborde (1994), proponen una mirada epistemológica sobre el asunto e identifican en la representación geométrica dos componentes: el dibujo y la figura.

En el caso del *dibujo*, este que no sólo adquiere propiedades debidas a la traza, sino que se distingue del hecho de que cada representación presente es sólo un elemento de una categoría determinada por la definición que la sustenta.

La *figura*, por otro lado, se compone de una dupla formada por la definición y por todas las posibles representaciones de ésta, la idea de figura se asemeja a lo que podíamos llamar el concepto geométrico.

Considerar a la representación figural a partir de los posibles tratamientos dados por los estudiantes, dibujo o como figura, Acuña (2006), nos permite observar hasta donde los estudiantes de bachillerato de nuestras muestras quedan capturados por una representación en especial y hasta donde pueden acatar indicaciones generales y suponemos que esto es un fenómeno todavía más amplio en otros niveles escolares.

Nuestro trabajo experimental con estudiantes de bachillerato, Acuña (2006), nos sugiere que el estudiante debe interpretar los significados figurales con apego a sus prácticas personales para transitar de un tratamiento como dibujo a uno como figura, de ahí la importancia del valor epistémico asignado al dibujo.

Si bien es cierto que, se requiere que los estudiantes se hagan de los significados abstractos de la figura, también es cierto que el dibujo proporciona un entorno heurístico y de exploración necesario para el encadenamiento de las relaciones que proporcionan la solución de los problemas.

Para abordar las relaciones de las representaciones respecto a las variaciones en la forma, contrapuesta a las del contenido, nos apoyamos en la consideración de Duval (2003) quien apunta la importancia del cambio de dimensión intraconfigural, en él, el estudiante focaliza los elementos que conforman la representación y sus relaciones a través del cambio de dimensiones.

Duval (2003) comenta que “El reconocimiento de unidades figurales de diferentes dimensiones implica un cambio completo del campo de focalización visual en el que la mirada evoluciona. Y tal cambio va al encuentro de mecanismos de organización perceptivos que imponen en aquella clase el reconocimiento de una forma en detrimento de otra”. (p. 54)

De esta manera, las representaciones figurales pueden ser usadas para la adquisición de significados así como para fines heurísticos en la solución de problemas, esto se debe a la posibilidad de reorganizar sus elementos, Mesquita (1989), por ello, dominar los cambios dimensionales no solamente nos permite enfocar la atención en los elementos figurales sino considerarlos con respecto a sus relaciones y mutuas dependencias.

Por ejemplo, en el siguiente problema tenemos que reproducir el próximo dibujo (figura 2) el que es inaccesible para los estudiantes donde ABCE es un rectángulo, EBCD un paralelogramo y ACD un triángulo isósceles.

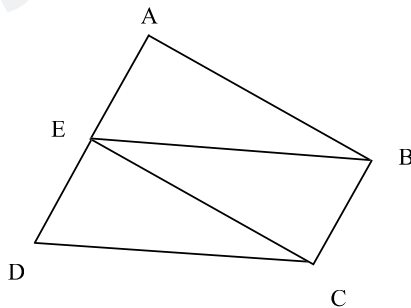


Figura 2. Ejemplo de construcción jerárquica

Un reconocimiento rápido del dibujo, nos permite observar que no se le puede reconstruir partiendo de cualquiera de los segmentos, la solución requiere de una inspección detallada de la interrelaciones entre los elementos para localizar los segmentos privilegiados que a diferencia de otros no se hayan comprometidos ni en su posición, tamaño o relación con los otros elementos.

Hay segmentos de recta que se sujetan a ciertas restricciones como la igualdad de los segmentos AE y ED ó DC y AC o la perpendicularidad de AD y CE o la posición de los lados iguales del triángulo isósceles, propiedades que no son explícitas, en virtud únicamente del dibujo.

La estructura interna del dibujo impone cierta jerarquía y este es un aspecto meramente figural de la representación. La elección de la jerarquía establece conexiones distintas y resultados también distintos.

La estructura semiótica del dibujo establece condiciones figurales que coinciden con las características determinadas por las definiciones, este tipo de jerarquía está presente en el diseño de programas de computación como lo constata el uso del arrastre en Cabri-Géomètre.

Y si bien es cierto que los niños adquieren habilidades espaciales dentro y fuera del salón de clases, también es cierto que la habilidad para decidir cuál es la línea jerárquica de un dibujo requiere cierto trabajo de asociación reflexiva, además de un conocimiento y reconocimiento de las propiedades involucradas.

En este sentido la línea jerárquica de reconstrucción del dibujo, se asemeja a una lista de proposiciones deductivas, pero esta lista no está únicamente determinada ya que el dibujo es semióticamente multidimensional, (Duval, 2003).

3 Espacios geométricos y espacios de representación

Consideramos aquí, que como decía Poincare (1902/1968), citado en Mesquita (1998), que: “el *espacio geométrico*, es muy diferente del *espacio representativo*”, y nuestros estudiantes transitan entre dos tipos de espacios, del familiar espacio geométrico al reglamentado espacio de representación.

Desde el punto de vista figural, es decir de aquel relacionado con las propiedades de la traza del dibujo, tenemos que algunas de las representaciones de los objetos geométricos, serán por fuerza metafóricas, en este caso tenemos por ejemplo el dibujo de una recta que será por fuerza representada como finita, cuando la definición establece todo lo contrario, el mismo caso se presenta con el punto el cual tiene dimensión para ser representado, contrariamente a su definición.

Esta situación es insoluble y ciertamente el carácter de las representaciones no perturba lo representado, pero desde el punto de vista de la enseñanza éste es un aspecto que debe ser adecuadamente tratado para evitar confusiones.

Respecto a las funciones que cumplen los dibujos como representaciones de los objetos geométricos, queremos destacar las siguientes:

1. Ejemplifican la clase de equivalencia de los objetos establecidos a partir de su definición, (Parszyz, 1988).
2. Muestran las características relevantes que los hacen elementos de la clase de equivalencia, hay ejemplos preferidos, (Hershkowitz, 1989).
3. Describen, sin sugerir procedimientos de solución. En algunos casos la representación externa ilustra las relaciones múltiples y las propiedades involucradas en el problema, (Mesquita, 1998).
4. El aprendizaje de la geometría requiere del tránsito entre el dominio del espacio-gráfico y el dominio de los objetos teóricos, (Laborde, 2005).
5. Proporciona relaciones figurales plausibles que puede ser consideradas por el estudiante como verdadero o falsa dependiendo del valor epistémico que este le asigne, (Duval, 2007).

A continuación detallaremos algunos aspectos de los dibujos con base en el uso que los estudiantes hacen de este recurso para obtener la información figural y resolver problemas o construir demostraciones.

4 Formación de configuraciones

Las configuraciones son dibujos o fragmentos de ellos que forman una estructura semióticamente consistente para el estudiante.

Las configuraciones se construyen en conformidad con el dibujo original, su importancia radica en su valor heurístico, de predicción y de organización de información, son recursos que se usan para resolver o dar sentido a problemas en donde se utilizan dibujos con propiedades figurales.

Las configuraciones pueden ser simples trazos al azar para explorar el terreno o pueden ser estructuras gráficas complejas que los estudiantes consideran de ayuda para entender o incluso resolver el problema propuesto, la motivación de su elaboración puede tener una base intuitiva o racional y pueda dar frutos o no.

Un tipo de configuraciones utilizadas por los estudiantes son aquellas que se apoyan en la interpretación del dibujo como un objeto con cierta gestalt, es decir, se distingue una figura que se destaca de un fondo, (Acuña, 2009).

Consideremos un ejemplo, las siguientes respuestas son elaboradas bajo la óptica de una relación gestalt en la búsqueda de la altura al lado marcado con X en los siguientes triángulos.

En las respuestas dibujadas en la figura 3 observamos que el estudiante en cuestión tiene una idea clara de la forma cómo luce la altura de un triángulo y la reproduce en todos los casos en los que esto fue posible.

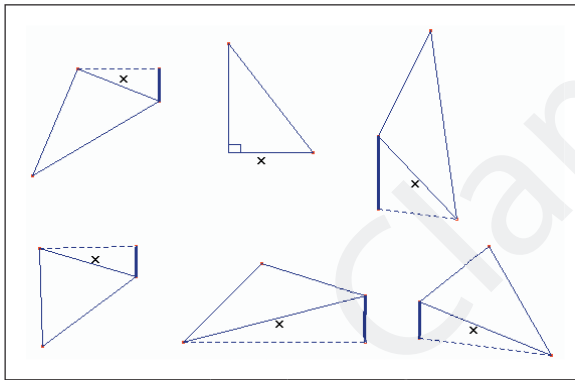


Figura 3. Configuraciones de gestalt incorrecta

No ignora el lado marcado con una x al que usa como parte de su configuración, las respuestas nos permiten ver por lo menos que:

1. La idea de altura de un triángulo está conectada con la existencia de un ángulo recto con un lado horizontal y este debe ser construido en caso de que no exista.
2. Cuenta con una configuración única para la altura en la que incluye un lado punteado que ajusta a cada triángulo si no está orientado horizontal-vertical.
3. El uso de la configuración le proporciona una “buena gestalt”, es decir, una que satisfaga al usuario.

La configuración gestalt puede ser un instrumento adecuado para la interpretación del dibujo como por ejemplo cuando algún fragmento de este parece formar un ángulo recto o un punto medio, el proceso conveniente consiste en fundamentar si eso es realmente un hecho o no.

Otra forma de usar las configuraciones, es aquella donde la tarea propuesta requiere de una recomposición del dibujo esta tarea solicita la elección de ciertos puntos de anclaje (Mesquita y Padilla, 1990).

Un punto de anclaje se relaciona con la detección de sub-figuras en el dibujo presente que nos permite resolver los problemas planteados, el punto de anclaje privilegia una configuración particular.

Veamos el siguiente ejemplo, propuesto por las autoras:

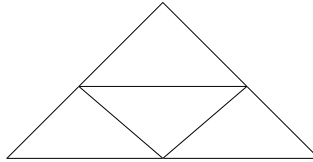


Figura 4. Figura y subfiguras

La aprehensión perceptiva de la figura 4, en el sentido de Duval (1995), nos permite identificar cuatro pequeños triángulos, o un pequeño triángulo inscrito dentro de un triángulo grande. En el primer caso se privilegia las configuraciones elementales, en el segundo se privilegia el contorno.

Otra configuración posible es la que se forma con tres paralelogramos que pueden detectarse en el dibujo y que son observados con una aprehensión operativa.

Construir una configuración adecuada para resolver cada problema depende no sólo de conocer las propiedades de los participantes y sus relaciones, sino también del desarrollo de habilidades de reconocimiento figural potencialmente relevante, en este sentido el valor epistémico del dibujo es producto, en cada caso, de las prácticas personales del estudiante.

5 El prototipo, el dibujo exacto y el inexacto

Las características relevantes y las no relevantes tienen el mismo estatus en un dibujo, lo que obliga a un proceso de identificación de la diferencia, además si sólo se maneja limitado número de ejemplos, eso hace que se esté en condiciones de continua ambigüedad ante las relaciones figurales. Distinguir cuáles rasgos gráficos son relevantes, no es un proceso automático, se requiere del desarrollo de esa habilidad.

En ese sentido también debemos considerar el fenómeno de la construcción de prototipos en el contexto geométrico, la llamada tipicalidad resulta del hecho de que los individuos asocian más fácilmente algunas representaciones externas que otras, Mesquita (1998), Hershkowitz (1989) la motivación de la tipicalidad es una economía de recursos cognitivos que proporciona rasgos fácilmente reconocibles de una imagen fija a gran velocidad.

La fascinación por los prototipos es conocida desde hace mucho y su persistencia hace considerar motivaciones psicológicas irrefrenables, esto quiere decir, que se trata de la presencia de una imagen que va más allá de la voluntad del individuo, (Aspinwall et al, 1997).

Además hemos encontrado que si bien el uso de prototipos se encuentra en el uso ordinario de dibujos, también se desencadenan, bajo ciertas circunstancias, en las que es estudiante enfrenta situaciones no previstas, estos procesos son: de Filiación, Situacional, de Familiaridad y Epistemológico, (Acuña & Larios, 2008) y se caracterizan de la siguiente manera:

1. Filiación, a una idea “adecuada”, se busca una imagen que sea socialmente y personalmente adecuada, las imágenes estándar son las más socorridas, pero pueden modificarse con el objetivo de obtener una configuración cercana a algo conocido y deseable.
2. Situacional, este tipo de proceso se presenta cuando los estudiantes ya tienen un manejo adecuado de definiciones y conceptos geométricos, sin embargo, bajo ciertas condiciones esta información es omitida, y se recurre a un prototipo que subyace como recurso de solución. Fuera de esta situación el estudiante se desempeña convenientemente.
3. Familiaridad, este tipo de proceso requiere del reconocimiento de estructuras pictóricas familiares, el uso de los prototipos se apoya en el reconocimiento de representaciones o partes de ellas, éstas son bien identificadas y sirven como base de las respuestas, el prototipo es la respuesta automática a cierto entorno conocido.
4. Epistemológico, este proceso se presenta en estudiantes muy jóvenes en los que no hay conservación de la forma y construyen prototipos por cuenta propia. No pueden identificar, por ejemplo, un rectángulo en dos orientaciones distintas, pero identifican los lados horizontales o verticales de estas figuras para hacer la comparación.

El prototipo resulta ser más poderoso que la definición e impone características no relevantes.

En el tratamiento figural del dibujo subyacen consideraciones no claramente explícitas como por ejemplo, la orientación, que es una propiedad figural relevante, pero suele ser marginada de las definiciones.

Aún cuando se pregunta sobre ella nuestros estudiantes parecen ignorarla aunque después incorporan consideraciones espaciales en el caso de construcción de dibujos, (Larios, 2005).

Respecto al problema de la exactitud, tenemos que esta no debe faltar en los primeros años de la instrucción para evitar ambigüedades sobre la relación definición dibujo.

Por ejemplo cuando introducimos al estudiante en la idea de *triángulo*, es muy importante dibujar lados rectos, en este camino se forma un prototipo que da cuerpo a la idea, pero que si no es enriquecida puede contribuir a la rigidez geométrica, (Larios, 2003).

Los prototipos están presentes sobre todo en la etapa del desarrollo de la Geometría I o natural, Houdement y Kuzniak (1999) en la que la realidad es la fuente de validación.

Sin embargo, en la llamada geometría II donde la validación se concentra en las leyes hipotético-deductivas para construir una axiomática auto-evidente, la exactitud de las representaciones pierde el carácter paradigmático de la geometría natural, aquí los sintagmas tienen más importancia que el propio dibujo, que se transforma en una referencia gráfica para el desarrollo de una lista de afirmaciones.

Gobert (2007) sugiere que: “un dibujo solo no posee ningún significado. El puede poseerlo si y sólo si un referente es especificado” el dibujo, por tanto, puede ser exacto o inexacto pero en ambos casos depende del referente que estaría representando, para alguien.

La exactitud en el trazo de la figura geométrica tiene razón de ser, para mostrar la coherencia entre el referente y la representación. Sin embargo, la carga significativa de los dibujos se desplaza cada vez más hacia las consideraciones que de ellos se hagan.

El uso de sintagmas, como los que indican perpendicularidad o la igualdad de los lados de un dibujo, modifica el carácter del dibujo, de manera que los podemos considerar como objetos gráfico-simbólicos sujetos de la inferencia figural, en el sentido de Richard (2004).

El dibujo inexacto o sugerido, puede pasar de ser una representación demostrativa a una interpretativa y de alguna manera se transforma en este momento, de herramienta de estudio en un instrumento del pensamiento, (Vigotsky, 1979).

Además de su exactitud, el dibujo juega un papel de comunicador y en este sentido, el dibujo puede tener diversas funciones, en particular Marracci (2001) comenta que los estudiantes consideran que:

- “Un dibujo debe representar “correctamente” la situación geométrica descrita en el problema, esto significa que la comprensión de los estudiantes de una situación dada y su interpretación de la situación dada debe ser consistente.”
- “Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico.”
- “Un dibujo debe poseer una Buena gestalt, debe satisfacer las leyes fundamentales las cuales controlan los procesos básicos de la percepción.” (p. 481).

Para los estudiantes, no tiene igual importancia y estima personal el dibujo en el que se explora un problema, que aquel que se presenta al profesor como producto de esa exploración, adjudicando un valor epistémico distinto en cada caso.

Nuestros estudiantes consideran que hay dibujos que son mejores que otros, ya sea por su apariencia o por los resultados que lograron obtener con ellos en otro momento y no tanto por su eficiencia como instrumento de análisis por la estrategia usada o de la calidad de la respuesta obtenida.

7 A manera de conclusión

Los dibujos que acompañan el aprendizaje y la enseñanza de la geometría son más que simples receptáculos de las definiciones o muestrarios de relaciones geométricas.

Los dibujos son, desde el punto de vista de la semiótica un registro de representación, (Duval, 2003), son signos con estructuras significativas, multidimensionales y jerarquizadas y con diferentes funciones interpretativas.

El dibujo impone una representación particular, pero es, al mismo tiempo, un representante de una categoría, es decir de una idea general, de ahí que siempre esté presente el referente sobre la referencia, si el dibujo es más que un ejemplo.

Por otro lado, la referencia sugiere aspectos irrelevantes al igual que los relevantes, ya que tienen el mismo estatus frente al usuario, hacer esta diferencia conlleva una primera transformación epistémica.

El uso de configuraciones conocidas o prototipos, sobre los que confiamos personalmente, nos da entornos que podemos manejar en principio, pero no es hasta que hacemos un examen exhaustivo sobre él que nos vemos obligados a cambiar el acercamiento, el dibujo juega el papel de evidencia, por ello, esta es una segunda transformación epistémica sobre nuestros supuestos y creencias, en adelante, resolver los problemas depende de otros factores, en especial del tratamiento del referente.

El desarrollo de habilidades para detectar las líneas jerárquicas más adecuadas, las configuraciones o los prototipos más enriquecedores, requiere del cambio del valor epistémico dado al dibujo, además este naturalmente se apoya en una buena gestalt, debido a que nos convence y es “prueba” de que lo que pensamos es correcto.

Referencias bibliográficas

- Acuña, C. (2006). Tratamientos como *dibujo* y como *figura* de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato el caso de los ejes cartesianos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, treinta años. Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 215-236). México: Fondo de Cultura Económica.
- Acuña, C. (2009). Gestalt configurations in geometry learning. [Electronic version]. *CERME 6 Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon, France.
- Acuña, C. & Larios V, (2008). Prototypes and Learning of geometry, a reflection on its pertinence and its causes, [Electronic version]. *Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics ICME Topic Study Group 20 (TSG 20)*. Monterrey, México.
- Aspinwall, L. Kenneth S. and Presmeg N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), 301-317.
- Capponi, B. & Laborde C. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (1.2), 165-210.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures of representation and specific processing?. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computes Education* (pp. 142-157). NATO ASI Series.
- Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. In E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Cinvestav y Fondo de Cultura Económica.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In Paolo Boero (Ed.), *Theorems in School from history, epistemological and cognition to Classroom practice* (pp. 137-161). Sense Publishers.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162.
- Galperin P. & Georgiev L. (1969). The formation of elementary Mathematical Notions. In J. Kilpatrick & Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of learning and teaching Mathematics: The Learning of Mathematical Concepts, 1*, 189-216. Chicago, USA: University of Chicago.
- Gobert, S. (2007). Ways of thinking about the uses of imagen in learning and teaching geometry: more thorough investigation of links between drawing and figures, [Electronic version]. *5a Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca Cyprus. Recuperado de <http://ermeweb.free.fr/>
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry- two sides of the coin, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 63-75.
- Houdement, C. & Kuzniak. A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (3), 283-312.
- Kospentaris G. & Spyrou P. (2007). Assessing the attainment of analytic – descriptive geometrical thinking with new tools. Working group 7, *5th Conference of the European Society for Research on Mathematics Education*. Larnaca, Cyprus

- Larios, V. (2003). Geometrical rigidity: An obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course. [Electronic version]. *Third Conference of the European Society for Research on Mathematics Education*. Bellaria, Italy.
- Larios, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis de doctorado). Cinvestav, México D.F.
- Laborde, C. (2005). Hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick (Ed.) *Meaning in Mathematics Education* (pp.159-179) USA: Springer.
- Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. [Electronic version]. *2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 478-488).
- Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 183-195.
- Mesquita, A., & Padilla P. (1990). Point D'ancrage en Geometrie. *L'ouvert* 58, 30-35.
- Parzysz, B. (1988). Knowing vs seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79-92.
- Richard, P. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursive-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57 (2), 229-263.
- Vygotski, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Editorial Crítica.

Autora:

Claudia Acuña.
 Cinvestav-IPN, México, D.F.
claudiamargarita_as@hotmail.com