

SUMAS Y PARTICIONES CON NÚMEROS POLIGONALES DE RANGO POSITIVO.

María Alejandra Osorio Angarita

*Universidad Nacional de Colombia, maaosorioan@unal.edu.co

RESUMEN

Se usan resultados recientes relacionados con sumas mixtas de números cuadrados y triangulares con el fin de probar que todos los enteros positivos n de la forma $n = 8m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, 5, 6\}$, pueden ser escritos como una suma de tres cuadrados de números de una forma dada. También se usan particiones- \mathcal{P} para obtener fórmulas para el número de algunas composiciones restringidas de un entero positivo n en el cual cualquier suma parcial de las partes es una suma mixta de números cuadrados y triangulares.

ABSTRACT

We use some recent results concerning universal mixed sums of squares and triangular numbers in order to prove that all positive integer n of the form $n = 8m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, 5, 6\}$, may be written as a sum of three squares of numbers of a given shape. We also use some \mathcal{P} -partitions in order to obtain formulas for the number of some restricted compositions of a positive integer n in which any partial sum of the parts is a given mixed sum of squares and triangular numbers.

PALABRAS CLAVE: Ecuación Diofántica, Forma cuadrática, Representación, Número cuadrado, Número triangular.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudian problemas que tienen que ver con el conocido Teorema de Fermat de los números poligonales, entre ellos se encuentran los siguientes planteamientos: ¿Qué teoremas hay, que establezcan que los números de una forma dada se puedan expresar como la suma de tres o más números poligonales de una forma también dada? y ¿Qué teoremas hay, que establezcan el número de particiones de un entero positivo con partes de tipo poligonal?, los cuales fueron presentados por R. Guy en 1994 [6]. Además se presentan resultados que contribuyen en dar respuesta a dichos interrogantes.

2. PRINCIPALES RESULTADOS DE SUMAS DE NÚMEROS POLIGONALES

Se realiza una recopilación de los avances que diferentes autores han dado al problema de Fermat de los números poligonales, específicamente en lo relacionado con suma de dos, tres y cuatro números cuadrados, suma de números triangulares, sumas mixtas de números cuadrados y triangulares y se mencionan algunos resultados de sumas de números poligonales [2, 3]. Se hace un recorrido desde los resultados clásicos hasta relacionar investigaciones recientes.

La solución de problemas diofánticos es uno de los temas de investigación más interesantes en la Teoría Aditiva de Números. En el caso de formas cuadráticas, dar aportes a los planteamientos propuestos por R. Guy permitiría dar avances a la investigación de problemas diofánticos del tipo cuadrático y en este trabajo se estudian dichos problemas y se presentan nuevos resultados.

3. PRINCIPALES RESULTADOS DE PARTICIONES

Se muestran algunos resultados de particiones de números enteros positivos, y se presentan algunos conceptos preliminares y resultados de Posets, Particiones- \mathcal{P} y composiciones restringidas.

Se estudian los aportes de R. Stanley quien ha mostrado que las particiones- \mathcal{P} constituyen una buena herramienta para abordar diferentes problemas relacionados con particiones y permutaciones, es decir que las transformaciones que preservan el orden de un conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P} a una cadena con reglas especiales, especifican donde pueden ocurrir valores iguales [1, 8, 9]. Finalmente se presentan resultados de particiones- \mathcal{P} y composiciones en sumas mixtas de números cuadrados y triangulares con sus correspondientes pruebas.

4. RESULTADOS

Los principales resultados de este trabajo son:

- I. Se probó que todos los enteros positivos n de la forma $n = 8m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, 5, 6\}$, pueden ser escritos como la suma de tres cuadrados de una forma dada, para lo cual se tomaron algunos resultados recientes relacionados con sumas mixtas universales de números cuadrados y triangulares [7].
- II. Se usaron algunas particiones- \mathcal{P} para obtener fórmulas para el número de algunas composiciones restringidas de un entero positivo n en el cual cualquier suma parcial de las partes es una suma mixta de números cuadrados y triangulares.

REFERENCIAS

- [1] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Reprint of the 1976 original, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] W. Duke. *Some old and new results about quadratic forms*, Notices. Amer. Math. Soc. 44(1997), 190-196.
- [3] J.A. Ewell, *On sums of triangular numbers and sums of squares*, Amer. Math. Monthly 99(1992), no. 8, 752-757.
- [4] J.A. Ewell, *A trio of triangular number theorems*, Amer. Math. Monthly 105(1998), no. 9, 848-849.
- [5] J.A. Ewell, *On sums of two squares and sums of two triangular numbers*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 33(2003), no. 3, 1289-1293.
- [6] R. K. Guy, *Every number is expressible as the sum of how many polygonal numbers?*, Amer. Math. Monthly 101(1994), no. 2, 169-172.
- [7] A. Moreno and M.A. Osorio, *On sums of three squares and compositions into squares and triangular numbers*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications 23(2011), no. 1, 25-59.
- [8] R.P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memories of Amer. Math. Soc., no. 119, Providence, R.I., 1972.
- [9] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.