LOS NÚMEROS REALES POR BOURBAKI Y POR CHOQUET:
UN ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CONSTRUCCIONES CON FINES EDUCATIVOS

DANNY JAVIER SÁNCHEZ VALENCIA

Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA (3487)
SANTIAGO DE CALI, FEBRERO DE 2012

LOS NÚMEROS REALES POR BOURBAKI Y POR CHOQUET: UN ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CONSTRUCCIONES CON FINES EDUCATIVOS

DANNY JAVIER SÁNCHEZ VALENCIA

Trabajo de Grado presentado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas y Física

Directora

MARIBEL PATRICIA ANACONA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA (3487)
SANTIAGO DE CALI, FEBRERO DE 2012

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DE LOS EVALUADORES

FIRMA DE LA DIRECTORA DE TRABAJO DE GRADO

FIRMA DE LA DIRECTORA DE PROGRAMA ACADÉMICO

Santiago de Cali, Febrero de 2012

DEDICATORIA

Este trabajo de grado es el fruto de varios años de perseverancia, sacrificio y compromiso. En este documento no solo están los esbozos de ***R*** *por Bourbaki y Choquet, sino que además reposan los anhelos de mis abuelos, los sueños de mis padres, la incertidumbre de una familia e incluso los deseos de mi tutora y mis profesores quienes contribuyeron en mi formación profesional. Por lo anterior dedico este trabajo a mis padres Francia Lucrecia Valencia y Diego Herminzul Sánchez quienes me apoyaron en todo momento, situándome con sus consejos y voces de aliento en la senda del triunfo. También está dedicado a mi madrina Nancy Rodas quien fue la luz espiritual en el momento que más lo necesite. Obviamente, este trabajo de grado, está dedicado a la profesora Maribel Anacona y al profesor Guillermo Ortiz porque se convirtieron en el modelo a seguir; por su entrega, compromiso, amabilidad y sobre todo porque compartieron conmigo su conocimiento.*

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad del Valle por su aceptación y por haberme formado como profesional.

A la profesora Ligia Amparo Torres, coordinadora del programa por su dedicación, enseñanza, respeto y ayuda durante el transcurso de la carrera.

A la profesora Maribel Anacona, mi tutora quien me oriento constantemente de manera muy amable y comprensiva, siendo la guía en todo momento sin distinción de día u horario, y porque me permitió avanzar en el conocimiento.

Al profesor Guillermo Ortiz, porque con sus observaciones no solo contribuyó al profesional sino a la persona.

Al profesor Sergio Valencia, puesto que fue el primero en apoyarme y creer que era posible este trabajo de grado.

Al profesor Evelio Bedoya, que con su método de enseñanza me mostró que el camino al triunfo está, pero que éste no se logra sin esfuerzo y dedicación.

A todos mis compañeros y compañeras por su amistad, que también fue un incentivo grande y baluarte para luchar y desear ser licenciado en Matemática y Física.

A los profesores y profesoras a lo largo de la carrera que contribuyeron en cada una de sus clases.

A Dios, porque puso en mi camino cada una de estas bendiciones.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	LOS NÚMEROS REALES POR BOURBAKI Y POR CHOQUET: UN ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CONSTRUCCIONES CON FINES EDUCATIVOS.
Se trata de:	*Proyecto* [ ] *Informe Final* [X]
Director:	Profesora MARIBEL PATRICIA ANACONA
1er Evaluador:	Profesor GUILLERMO ORTIZ RICO
2do Evaluador:	Profesora LUZ VICTORIA DE LA PAVA
Fecha y Hora	*Año:* 2012 *Mes:* Marzo *Día:* 08 *Hora:* 1:15 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
DANNY JAVIER SÁNCHEZ VALENCIA	*0327196*	*Lic. en Matemáticas y Física (3487)*

EVALUACIÓN

Aprobado	X	*Meritorio*		*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No Aprobado*		*Incompleto*	

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _______________ (máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo [ ] *1er Evaluador* [ ] *2do Evaluador* [ ]

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de _______________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año: ____ *Mes:* ____ *Día:* ____ *Hora:* ____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

FIRMAS:

Maribel P Anacona	Guill Ortiz	[firma]
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

OBSERVACIONES:		RECOMENDACIONES:		RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

En este trabajo se estudian las construcciones de los números reales realizadas por Bourbaki en los *Éléments de Mathématique* y por Gustave Choquet en su *Cours de Calcul différentiel et integral* ofrecido en la Sorbonne en 1955.

Como es sabido en las construcciones más conocidas de R, se parte de Q como cuerpo ordenado y se completa con el axioma de continuidad para llenar las "lagunas" algebraicas y topológicas. Bourbaki y Choquet escogen otro camino: ambos parten del Q como grupo aditivo totalmente ordenado, luego introducen una topología compatible con la estructura de grupo, posteriormente completan el grupo topológico y finalmente hacen la extensión algebraica de grupo a cuerpo. En estas dos construcciones se realza precisamente aquello que se esconde en las exposiciones axiomáticas más frecuentes: el ingreso de la Topología.

Una de las conclusiones más interesantes del trabajo es la recomendación de considerar el estudio de estas dos construcciones en los cursos de Matemáticas y Análisis de las carreras en las que se forman docentes de matemáticas. La construcción de Choquet se sugiere estudiar en los primeros semestres de escolaridad por considerarse más intuitiva y por usar conceptos de la teoría de conjuntos y del álgebra, los cuales resultan más familiares a los estudiantes en esta etapa de su formación. La construcción de Bourbaki, o al menos un esbozo de su construcción, se recomienda en los cursos más avanzados de la carrera, por su alto grado de abstracción y generalidad, y por los requisitos conceptuales que requiere en relación con las estructuras topológicas y uniformes, tales como filtros y filtros de Cauchy.

El jurado reconoce la dedicación y el esfuerzo del estudiante por comprender estas construcciones; en particular la de Bourbaki, que como se ha mencionado, tiene alto grado de exigencia conceptual. Además, valora el ejercicio de identificar semejanzas y diferencias de orden epistemológico en aras de aportar algunas reflexiones de índole educativo.

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Gdo

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones: [ ]	**Recomendaciones:** [ ]	**Razón del Desacuerdo – Alternativas:** [ ]

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Se debe mejorar la edición debido a que hay algunas palabras "pegadas", en la versión de pdf. Se sugiere, luego, tener en cuenta esto.

Tomado por Sergio Valencia

SM

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

LOS NÚMEROS REALES POR BOURBAKI Y POR CHOQUET: UN ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CONSTRUCCIONES CON FINES EDUCATIVOS

Paginas

RESUMEN

En este trabajo se estudian las construcciones de los números reales realizadas por Bourbaki en los *Élément de Mathématique* y por Gustave Choquet en su *Cours de Calcul Differentiel et Integral* ofrecido en la Sobornne en 1955.

Como es sabido en las construcciones más conocidas de **R**, se parte de **Q** como *cuerpo* ordenado y se completa con el axioma de continuidad, para llenar las “lagunas” algebraicas y topológicas. Bourbaki y Choquet escogen otro camino. Ambos parten de **Q** como grupo aditivo totalmente ordenado, de manera inmediata introducen una topología sobre **Q** compatible con la estructura de grupo, posteriormente completan el grupo topológico y finalmente hacen la extensión algebraica de grupo a cuerpo. En estas construcciones se realza precisamente aquello que se esconde en las exposiciones axiomáticas más frecuentes: el ingreso de la topología.

Una de las conclusiones más interesantes del trabajo es la recomendación de considerar el estudio de estas dos construcciones en los cursos de matemática y Análisis de las carreras en las que se forman docentes de matemáticas. La construcción de Choquet sugiere estudiar en los primeros semestres de escolaridad por considerarse más intuitiva y por usar conceptos de la teoría de conjuntos y del álgebra, los cuales resultan más familiares a los estudiantes en esta etapa de su formación. La construcción de Bourbaki, o almenos un esbozo de su construcción, se recomienda en los cursos más avanzados de la carrera, por su alto grado de abstracción y generalidad, y por los requisitos conceptuales que requiere en la relación con las estructuras topológicas y uniformes, tales como filtros y filtros de Cauchy.

INTRODUCCIÓN

La problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de los números reales es de completa actualidad. Numerosos estudios en educación indican que los futuros docentes de Matemática no están recibiendo una formación que posibilite una comprensión más amplia y significativa de los números reales. En los cursos de Matemáticas de los primeros años, los reales son presentados generalmente de manera axiomática, lo cual no permite ver y comprender la diversidad y complejidad de conceptos que la subyacen.

Es evidente, que en las presentaciones axiomáticas tradicionales se ocultan conceptos y procedimientos fundamentales en la caracterización de los reales como sistema numérico completo. El axioma de completez, punto esencial que permite diferenciar los racionales de los reales, expresado en términos de sucesiones de Cauchy o en términos del supremo de un conjunto acotado superiormente, se presenta tan acabado que no deja ver fácilmente que en su interior subyacen conceptos como vecindad, continuidad y convergencia, conceptos topológicos que son fundamentales en los distintos procesos de construcción de los reales. Es decir, pocos aspectos de su proceso histórico de constitución se pueden dilucidar en las propuestas de la educación media y los primeros años de enseñanza universitaria.

En este sentido, consideramos de suma importancia que el docente reconozca el grado de complejidad que se sintetiza y se oculta detrás de las presentaciones axiomáticas, y pueda identificar en el marco de una reflexión histórico-epistemológica algunas de las dificultades inherentes a su enseñanza. El propósito de este trabajo de grado es contribuir a esta reflexión a partir de un estudio comparativo de la construcción de los números reales realizada por Bourbaki en sus *Éléments de Mathématique* (Bourbaki, 1965) y la construcción que hace Choquet, en su *Cours de Calcul Différentiel et Integral* de la Sobornne (Choquet, 1955), el cual tiene en su tercer capítulo una construcción más intuitiva de los números reales. Nos interesa sobremanera estudiar esta construcción pues

Choquet es el primero en llevar la propuesta bourbakista a la enseñanza universitaria en Francia.

Revisaremos la construcción realizada por Bourbaki, y aunque sin detenernos en los detalles técnicos, haremos un análisis que nos permita identificar algunos elementos conceptuales que entran en juego, en los distintos momentos lógicos de la construcción. De manera particular, revisaremos la noción de vecindad, de entorno y miraremos el lugar que ocupa la estructura topológica en esta construcción.

En ese sentido, nos interesa ver la manera en que ingresan en el ámbito educativo las nociones y conceptos característicos de la matemática estructuralista de los Bourbaki. Ya que estas construcciones conceden un lugar de privilegio a los aspectos topológicos, asunto que queremos analizar y reivindicar desde el punto de vista educativo, pues los conceptos antes mencionados de límite, continuidad y completez son de naturaleza topológica y no algebraica. Además, queremos observar el rol que juega la estructura topológica en Choquet y la estructura uniforme en Bourbaki con miras al proceso de formación de los futuros docentes y estudiantes de matemática y cómo estas dos construcciones pueden ser una herramienta vital en dicho proceso.

En las construcciones más conocidas de **R**, se parte de **Q** como *cuerpo* ordenado y se completa con el axioma de continuidad, para llenar las "lagunas" algebraicas y topológicas. Bourbaki y Choquet escogen otro camino. Ambos parten de **Q** como *grupo* aditivo totalmente ordenado, de manera inmediata introducen una topología sobre **Q** compatible con la estructura de grupo. Bourbaki a través de intervalos abiertos y acotados alrededor del origen y Choquet a través de la definición de cortaduras de la forma $(-\infty, a)$. Posteriormente, ambos completan el grupo topológico pero por mecanismos diferentes: el primero, por filtros de Cauchy previa introducción de las estructuras uniformes; y el segundo, a través de la propiedad del supremo sobre el conjunto formado por la unión de las cortaduras. Finalmente, ambos hacen la extensión algebraica de *grupo* a *cuerpo*.

En estas dos construcciones se realza precisamente aquello que se esconde en las exposiciones axiomáticas más frecuentes: en primer lugar, el ingreso de los aspectos topológicos; y en segundo lugar, el paso de grupo topológico a grupo topológico completo. Este camino en el que se deja para el final el tratamiento de lo algebraico, es el que consideramos merece ser analizado para efectos educativos.

Por tanto, el presente trabajo de grado parte de la siguiente pregunta: en las construcciones de los números reales realizadas por Bourbaki y por Choquet, ¿Cuáles son los aspectos de orden conceptual y metodológico más característicos y relevantes, y cuáles de ellos pueden constituirse en elementos claves para una mejor comprensión de **R** a nivel de la educación universitaria? Para resolverla, se revisó fundamentalmente las construcciones de los reales propuestas por Bourbaki y Choquet en los libros antes mencionados, teniendo en cuenta toda una discusión y una bibliografía relacionada con el estructuralismo matemático. De manera particular, se tuvo como antecedente, los proyectos que ha desarrollado el Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle, alrededor de los números reales. Es así como, en el presente trabajo se aborda los conceptos y métodos más relevantes en la construcción de los reales realizada por Bourbaki y por Choquet, y sus diferencias más sustanciales. Se plantea las ventajas de orden conceptual que se obtiene, al introducir la topología y la completez al principio de la construcción y al dejar para el final la extensiones algebraicas, y se analiza cómo se conjuga lo abstracto de la noción de estructura con lo intuitivo de la noción de vecindad para construir **R** y qué ventajas de orden educativo ofrece esta relación.

El presente trabajo consta de tres capítulos y una sección para conclusiones. En el capítulo 1*"Esbozo de los números reales por Bourbaki",* se realiza una descripción de algunos conceptos fundamentales para entender la construcción de los números reales propuesta por Bourbaki, paso seguido se presenta un esbozo de dicha construcción. En el capítulo siguiente *"Bosquejo de los números reales por Gustave Choquet",* se muestran los aspectos más relevantes de la construcción de los reales por Choquet, se hace énfasis en el proceso de completez de **R** a partir de **Q,** en el cual se especifica el ingreso de la estructura topológica y los conceptos que intervienen en ese momento, luego se muestra la compatibilidad de esta nueva estructura con la algebraica y por último se procede a la extensión algebraica de grupo a cuerpo. Finalmente, el capítulo 3 *"Estudio comparativo de las construcciones"*, inicia con una descripción de la noción de estructura de Dedekind y la concepción epistemológica de las matemáticas de Bourbaki, paso seguido se describirá la concepción educativa de Choquet, para entablar similitudes y diferencias a nivel general con la propuesta planteada por Bourbaki, y como tercer paso se hace una comparación entre la construcción de **R** por Bourbaki y por Choquet y se caracterizan semejanzas y diferencias en el marco de la propuesta estructuralista.

Capítulo 1.

ESBOZO DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS REALES POR BOURBAKI

Nicolas Bourbaki es el pseudónimo adoptado por una eminente sociedad de jóvenes matemáticos franceses de la *École Normale Supérieure*, formado en 1934. Sus miembros fundadores fueron: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt, André Weil. El grupo Bourbaki publicó desde 1939 una gigantesca obra de referencia: *Éléments de Mathématique*, construida sobre bases axiomáticas rigurosas siguiendo el pensamiento de Hilbert, a partir de la lógica formal y de la teoría de conjuntos. Con ella unificarón las matemáticas mediante el establecimiento de estructuras-madres comunes a sus diversas ramas.

El origen de Bourbaki se empezó a consolidar en una reunión de André Weil con su colegas y amigos Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt, Jean Dieudonné, para tratar temas concernientes al libro *Traité d´Analyse* de *Goursat*. Ambos matemáticos compartían que este libro era inadecuado debido a que ameritaba muchas consultas repetitivas para desarrollar tal o cual tema, por lo que en 1934 se dieron a la tarea de plantear un mejor documento en compañía de sus amigos de la *École Normale Supérieure*. Así comenzaron a reunirse con regularidad en Le Capoulade, un café parisino en el Boulevard Saint- Michel del Barrio Latino para tratar esos temas, (Bombal, 1988, p. 2).

La primera reunión plenaria fue en julio de 1935 en *Besse* en *Chandesse*: reunión en la que se escogió el nombre del grupo: Bourbaki. Más tarde fueron miembros, entre otros, L. Schwartz, A. Grothendieck y P. Cartier.

Eligieron como base la teoría de conjuntos, dividieron el material en seis libros: teoría de conjuntos, álgebra, topología, funciones de una variable real, espacios vectoriales topológicos e integración. Bourbaki construye modernamente los números reales en su libro de topología general, y para su construcción requiere de diversos conceptos del álgebra y la topología. Por ende, en este documento es de importancia mostrar algunas nociones que se destacan en esta construcción.

1.1Conceptos preliminares a la construcción.

A fin de acercar al lector a la presentación de Bourbaki de los números reales, es necesario hacer una descripción de algunos conceptos importantes para su entendimiento. Para Bourbaki estos conceptos se pueden ver en cuatro grandes estructuras: algebraica, de orden, topológica y uniforme. Dentro de las *algebraicas* serán relevantes la de grupo, anillo, cuerpos, debido a que éstas son objeto de estudio en muchas ciencias como la física, mecánica cuántica, informática entre otras. Otro tipo importante viene dado por las estructuras definidas por una relación de *orden*. Esta vez se trata de una relación entre dos elementos x, y, que, a menudo se enuncia "x es menor o igual a y" es decir, esta estructura permite la comparación entre objetos de un conjunto. Diremos aún algunas palabras sobre la estructura topológica. Esta estructura nos permite capturar la noción de cercania a través de un concepto mucho más abstracto, sin llegar a utilizar la noción de distancia y para este fin están las vecindades. Y por último, daremos participación a una estructura muy poco conocida en las carreras de pregrado de Matemática y Licenciatura en Matemáticas que es la *estructura uniforme*, esta estructura permite capturar la noción de cercania desde una perpectiva más fina que la estructura topológica, pues no se tiene como norma restrictiva un punto de referencia, sino que se compara dos a dos.

1.1.1 Conceptos algebraicos.

El propósito de este apartado es recordar algunas nociones algebraicas de los conjuntos numéricos. Ciertamente, antes de enunciar o definir algún tipo de estructura algebraica es importante expresar que las relaciones que forman el punto de partida de la definición de estructura algebraica normalmente se le conoce como una ley de composición binaria u operación, una operación es una función que va de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ en E sin importar la naturaleza de los objetos.

Formalmente;

> Se llama ley de composición interna entre elementos de un conjunto E a una aplicación f de una parte de A de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ en E. Al valor $f(x, y)$ de f para un $(x, y) \in \mathrm{A}$ se llama ley de composición de x y de y para toda ley. [Bourbaki 1964, Lib I, cap. I, §1, Def. 1].

Un ejemplo de esto es la suma en el conjunto de los números naturales y se puede ver como la función f: $N \times N \to N,\ f(x,y) = x + y$. Otro ejemplo es la multiplicación en los enteros, racionales o reales.

Observación. La sustracción no es una operación binaria en el conjunto de los números naturales ya que si $x < y$, entonces $x - y$ no está definida para todos los elementos de este conjunto. No obstante, la sustracción es una operación que está perfectamente definida en el conjunto de los números enteros.

Conforme a la discusión planteada en la introducción del libro de *Álgèbre* de Bourbaki (1964), la dación de un conjunto, de una o más operaciones internas define una estructura sobre el conjunto y a esta estructura definida de esta manera formalmente se le conoce como estructura algebraica.

Formalmente;

> Se llama **estructura algebraica** en un conjunto E, a toda estructura determinada en E por una o varias leyes de composición interna entre elementos de E, en una o varias leyes de composición externas entre los dominios operados, Ѳ, Ķ… en E, en las cuales se deben satisfacer ciertas condiciones (por ejemplo la propiedad asociativa, conmutativa, etc.) y cumplir ciertas relaciones [Bourbaki 1964, Lib.II, cap. I,§4,Def. 1]

Las estructuras algebraicas particulares, tales como grupos, anillos, cuerpos, etc., se definen de acuerdo a ciertas leyes de composición y a ciertos axiomas a los cuales están sujetas tales leyes. Por ejemplo, si se tiene un conjunto A no vacío dotado de una operación $\circ$, a ésta estructura se le conoce con el nombre de monoide, si la estructura de monoide es además asociativa le llamamos semigrupo, si el semigrupo verifica la existencia de elemento neutro y la existencia de inversos para cada uno de sus elementos se le conoce como grupo, si el grupo verifica la propiedad conmutativa diremos que es un grupo abeliano, si sobre el grupo existe una segunda operación * que es asociativa y distributiva por izquierda y por derecha sobre la primera operación, diremos que el conjunto A con estas dos operaciones es un anillo, y si el anillo verifica neutro para la segunda operación y la propiedad del inverso para los diferentes del módulo aditivo, se dirá que el conjunto dotado de estas operaciones es un cuerpo. Existen muchas más estructuras algebraicas aparte de las que se han mencionado, pero para efectos de entender y dar continuidad al documento es de resaltar solo cuatro de estas estructuras algebraicas: la de grupo, la de grupo abeliano, la de anillo y la de cuerpo.

Se recuerdan a continuación cada una de ellas:

La estructura de grupo.

Sea G un conjunto y $\circ$ una ley de composición interna binaria de E. Se dice que el par (G, $\circ$) tiene estructura de *grupo* si verifica las siguientes propiedades (Herstein, 1986):

1. Asociativa: $\forall a, b, c \in G,\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. Existencia del elemento neutro: $(\exists e \in G)(\forall a \in G)(a \circ e = e \circ a = a)$
3. Todo elemento de G posee un inverso:
   $(\forall a \in G)(\exists a' \in G)(a \circ a' = a' \circ a = e)$

La estructura de grupo abeliano.

Se dice que la estructura $(G, \circ)$ es un grupo abeliano con respecto a la operación $\circ$ si:

1. $(G, \circ)$ tiene estructura algebraica de grupo
2. $a \circ b = b \circ a \ \forall a, b \in G.$

Consideremos como ejemplos, los siguientes:

1. Tanto (**N**,+) como (**N**, ·) y (**Z**, ·) son monoides conmutativos, pero no son grupos, ya que no verifican la propiedad tres de grupo.
2. (**Z** , +) ; (**Q** , +) ; (**Q** , \ {0}, ·) (**R** , +) ; (**R** , \ {0}, ·) y (**C** , +) son grupos.
3. Las matrices cuadradas en **R** de tamaño *n x n* invertibles (con determinante no nulo) son un grupo no conmutativo para el producto.
4. Las matrices cuadradas de tamaño *n x n* en **R** son un grupo abeliano con la suma habitual.
5. El grupo S_n de "permutaciones" de *n* elementos (S_n , ∘).
   Donde S_n es el conjunto de todas las funciones biyectivas $S \rightarrow S$. Bajo la operación de composición de funciones.
6. El conjunto de funciones $\left\{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}\right\}$es un grupo con la composición.
7. (**Z** , +) ; (**Q** , +) ; (**R** , +) y (**C** , +) son grupos abelianos.

Consideremos, ahora los conjuntos en los que hay definidas dos operaciones internas binarias por ejemplo (suma y producto).

La estructura de Anillo.

Un anillo es un conjunto A en el que hay definidas dos operaciones binarias $+$ y ● tales que (Herstein, 1986)

1. $(A, +)$ es grupo abeliano
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para $a, b, c \in A$
3. $a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$ para $a, b, c \in A$

Nota: Las operaciones $+\ y\ \bullet$ se llaman adición y multiplicación en el anillo (aunque pueden ser diferentes de la adición y multiplicación usuales).
Para especificar los axiomas anteriores esbozaremos algunos ejemplos.

1. (**Z** , +, ·) ; (**Q** , +, ·) ; (**R** , +, ·) con la suma y producto habitual son anillos.
2. Las matrices cuadradas en **R** con la suma y el producto de matrices forman un anillo no conmutativo.

La estructura de Cuerpo.

La terna (K, +, $\bullet$) es un *cuerpo* sí y solo si (K, +, $\bullet$) es un anillo conmutativo, con unidad cuyos elementos no nulos admiten inverso multiplicativo.

O que es similar a caracterizarlo con las siguientes propiedades:

1. (K, +) es un grupo abeliano.
2. (K – {0}, $\bullet$) es un grupo abeliano.
3. $\bullet$ distribuye respecto de +

Ejemplos

1. (**Z**, +, $\bullet$) con las operaciones conocidas, no es cuerpo, pues **Z** carece de inversos multiplicativos.

2. (**Q** , + , $\bullet$) ; (**R** , + , $\bullet$) **y** (**C** , + , $\bullet$) con las operaciones usuales son cuerpos.

3. Z_5 = {**0, 1, 2, 3, 4**} es un cuerpo, pero Z_6 = {**0, 1, 2, 3, 4**, **5**} no lo es. Estos conjuntos provistos de la operaciones de suma y producto, las cuales están definidas así:

Suma: si h y k pertenecen a Z_n, entonces $h + k$ es igual al resto de la división de $h + k$ por n. Por ejemplo, en Z_5, 3 + 4 = 2

Producto: si h y k pertenece a Z_n, entonces $h \bullet k$ es igual al resto de la división de $h \bullet k$ por n. Por ejemplo, en Z_6, $3 \bullet 4 = 0$

Después de recordar las nociones algebraicas de grupo, anillo y cuerpos. Es necesario comparar los elementos de un conjunto a través de las relaciones de orden.

1.1.2 Conceptos relacionados con el orden.

A diferencia de la estructura algebraica, ésta estructura que a continuación se presentará, no tiene como propósito permitir la operación entre los elementos de un conjunto sino que posibilita comparar los elementos del conjunto, determinar si un elemento es menor que el otro. De igual manera esta estructura me permite hablar de conjuntos mayorados, minorados así como también, si el conjunto dado es denso o no. Y se conoce formalmente como estructura de orden.

La relación de orden.

Una relación binaria (que se denota por $\leq$) en un conjunto A se llama una relación de orden A si (Quevedo, 2002):

O_1: reflexiva: $x \leq x$ *para todo* x
O_2: antisimetrica: $x \leq y$ y $y \leq x$ *entonces* $x = y$
O_3: transitiva: $x \leq y$ y $y \leq z$ *entonces* $x \leq z$.

Se acostumbra decir que A es un conjunto ordenado por $\leq$. Una relación de orden sobre $\mathbf{A}$ define un orden total si para toda pareja x, y de puntos de A, al menos una de las relaciones $x \leq y,\ y \leq x$ se satisface. La pareja $(A, \leq)$ se llama entonces un conjunto totalmente ordenado.

El conjunto **N** de los números naturales con el orden habitual es un ejemplo de ello $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq \ldots \leq n \leq n+1 \leq \cdots$.

En la mayoría de los textos de cálculo y análisis, se construye el conjunto de los números reales a partir de la estructura de cuerpo. Sin embargo, nuestra intención consiste en mostrar un tipo diferente de construcción en la cual no se necesita todas las propiedades de cuerpo, ya que es suficiente completar a partir de una estructura de grupo totalmente ordenado. Esto implica que la estructura algebraica escogida, debe ser compatible con una estructura de orden total. De esta manera, es necesario definir qué es un grupo aditivo totalmente ordenado y brindar algunos ejemplos.

Estructura de grupo totalmente ordenado.

Dada una estructura algebraica y una de orden sobre un conjunto G y con una operación binaria $\circ$ más una relación de orden $\leq$: Se dice que la estructura $(G, \circ, \leq)$ es un grupo totalmente ordenado respecto a la operación $\circ$ y la relación de orden $\leq$ si:

1. $(G, \circ)$ tiene estructura algebraica de Grupo
2. $(G, \leq)$ tiene estructura de orden total
3. $x \leq y \rightarrow x \circ a \leq y \circ a$, (compatibilidad con la operación de grupo)

Son ejemplos de grupo ordenado (**Z**, +, $\leq$); (**Q**, +, $\leq$) y (**R**, +, $\leq$)**.**

Estas dos estructuras son “insuficientes” para establecer proximidades, cercanía, continuidad, pues estos conceptos pertenecen a otro tipo de estructura: la topológica. La estructura topológica es la herramienta conceptual que permite capturar la noción de cercanía, de puntos “próximos” a un punto dado, en términos más generales, a través de la noción de vecindad.

1.1.3 Conceptos relacionados con la estructura topológica.

En este apartado aunque no pretendemos realizar un tratado de topología, si será necesario abordar algunos conceptos con el propósito de acercar al lector a algunas nociones topológicas. Nosotros comenzaremos por definir la estructura topológica, debido a que esta estructura permite hablar de abiertos y posteriormente de vecindades.

Estructuras topológicas

> Se llama estructura topológica (o brevemente topología) sobre un conjunto **X** una estructura constituida por la dación de un conjunto $\mathfrak{D}$ de partes de **X** que poseen las propiedades siguientes [Bourbaki 1965, Lib III, cap. I, §1, Def. 1]:
>
> (O_I)*:* Toda reunión de conjuntos de $\mathfrak{D}$ es un conjunto de $\mathfrak{D}$
> (O_{II}): Toda intersección finita de conjuntos de $\mathfrak{D}$ es un conjunto de $\mathfrak{D}$

Observación: $\emptyset$*,* $X \in \mathfrak{D}$, lo que sucede es que en teoría de conjuntos $\cup \emptyset = \emptyset$ y $\cap \emptyset = X$, esto a veces no es fácil de ver.

Los conjuntos de $\mathfrak{D}$ son llamados *abiertos* de la estructura topológica definida por $\mathfrak{D}$ sobre **X**. Un par ordenado (**X**, $\mathfrak{D}$) en el que la primera componente, **X**, es un conjunto no vacío, y la segunda componente, $\mathfrak{D}$, es una topología sobre **X**, se llama espacio topológico. El conjunto **X** se llama conjunto fundamental, y los elementos de **X** se llaman a menudo puntos. Cuando se define una topología sobre un conjunto **X**, decimos que este conjunto es subyacente al espacio topológico **X**.

Ejemplo1: ¿es posible construirle al conjunto A = {a, b} una topología para que fuese espacio topológico? Si, aplicando como topología $\mathfrak{D}$ = {Ø, A} la trivial.

La unión de cualquier elemento de A está en $\mathfrak{D}$, la intersección de los elementos de A también está en $\mathfrak{D}$, entonces como cumple las propiedades de espacio topológico entonces, hemos dotado al conjunto A de una estructura topológica. En últimas, sea A un conjunto cualquiera. El conjunto {ϕ, A} define una topología sobre A

Ejemplo 2: sea X= {a, b, c}; el conjunto T de todas las topologías sobre X es:

$\{\{\emptyset, X\}, \{\emptyset, \{a\}, X\}, \{\emptyset, \{b\}, X\}, \{\emptyset, \{c\}, X\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\},$

$\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}, \{\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{c, b\}, X\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

Ejemplo 3: ¿Cómo puedo dotar un conjunto X totalmente ordenado de una topología compatible?

La topología de orden sobre $(X, <)$ se define tomando como abiertos todos los U subconjuntos de X que se pueden expresar como unión de intervalos de la forma:

1. $(x, y) := \{t \text{ tal que } x < t < y\}$, intervalos abiertos y acotados,
2. $(x, \rightarrow) := \{t \text{ tal que } x < t\}$, colas a derecha,
3. $(\leftarrow, y) := \{t \text{ tal que } t < y\}$ colas a izquierda.

En particular los racionales tienen una topología del orden, punto de partida de Bourbaki y Choquet para completar.

Una vez definidos la estructura topológica, podemos definir formalmente uno de los conceptos más importantes de la topología: el de vecindad. A través de la noción de vecindad, podemos llegar al estudio de los límites, la convergencia y la continuidad, puesto que todos estos conceptos involucran la proximidad a un punto dado.

La noción de vecindad.

En un espacio topológico **X**, se llama *vecindad* de un subconjunto A de **X** a todo conjunto que contiene un conjunto *abierto* que contiene a **A**. Las vecindades de una parte $\{x\}$ reducidas a un solo punto se llaman entonces vecindades de un punto x.

Ejemplos 1:

En un espacio topológico discreto (esto es, aquel cuya topología es la discreta) X es vecindad de x si y solo si x pertenece a X; en un espacio topológico trivial, la única vecindad que es una vecindad del punto, es el conjunto fundamental.

Ejemplo 2:

Este segundo ejemplo o más bien esta idea que se describirá a continuación es intuitiva, aunque no se descarta que se pueda formalizar más adelante sin embargo, no es el objeto de este documento formalizarlo.

La intuición nos dice que el parentesco por consanguinidad o consanguineidad es una topología en el conjunto de los seres humanos, puesto que es la relación que existe entre las personas unidas por un vínculo de sangre, es decir, que tiene al menos un ascendiente en común. La proximidad en el parentesco por consanguinidad se determina por el número de generaciones que separan a los dos parientes, y se mide en grados, correspondiendo cada grado a la separación entre una persona y sus padres o hijos. Es decir, la noción de distancia reposa ahí. Sin embargo, este mismo ejemplo se puede independizar de la noción de distancia y enunciarse en términos más generales. Por ejemplo, entorno familiar. Al momento de describir la familiaridad como entorno, me “olvido” de la noción de distancia, existente entre el nieto y el abuelo, o el nieto y su primo.

Incluso extiendo el concepto de familia. Pues en el entorno familiar mi cuñado guarda una relación de familiaridad, sin embargo, esta relación es distinta a la planteada inicialmente.

Por otro lado, nos surgen la siguiente inquietud ¿Qué aportes brinda esta noción de vecindad? La noción de vecindad permite relacionar dos puntos cualesquiera sin recurrir a la distancia, además esta noción de vecindad establece un conjunto de elementos entre los cuales puedo garantizar o establecer cercanías entre los puntos del conjunto.

No se utiliza la intuición geométrica ni se recurre a la noción de distancia. Estas nociones están expresadas en términos abstractos y generales. De aquí diré, que la noción de vecindad no constituye una operación entre dos elementos ni posibilita la comparación de orden entre ellos. La noción de vecindad le interesa los alrededores del punto y no el punto en sí mismo[1].

Además, a través de la noción de vecindad, podemos llegar al estudio de la continuidad, pues este concepto involucra la proximidad a un punto dado.

La noción de continuidad puntual en términos de vecindad.

La definición de continuidad puntual:

Se dice que una aplicación f de un espacio topológico X en un espacio topológico X' es continua es un punto $x_o \in$ X si, cualquiera que sea la vecindad V' de $f(x_o)$ en X´, existe una vecindad V de x_o en X tal que la relación $x \in$V implica que $f(x) \in$V'

Ejemplo 1:

Las funciones constantes, la función identidad y la función cuadrado $(x \to x^2)$ son continuas en todo punto $a \in \mathbf{R}$.

Ejemplo 2:

La función raíz cuadrada $(x \to \sqrt{x})$ es continua en todos los puntos de su dominio $[0, \infty)$.

La noción de filtro.

El concepto de convergencia es de importancia fundamental en Análisis. Muchas de las nociones de continuidad, derivabilidad, se definen en términos de límites.

[1] Para ahondar más sobre la noción de vecindad, su evolución histórica y epistemológica. En relación con los reales Ver (Anacona, M; y Ortiz, G, 2011).

En los libros de análisis se pueden encontrar varias nociones de convergencia y entre las más frecuentes encontramos la noción de sucesión, que juega un papel importante para introducir límites. Sin embargo, en los espacios topológicos esta noción no es adecuada debido a que en los espacios topológicos no todos los conjuntos son numerables, y es claro que uno de los propósitos de este documento es garantizar la noción de límite en espacios topológicos arbitrarios, entonces, se necesita soluciones a esta problemática y la respuesta viene dada por la noción de filtro.

Un *filtro* sobre un conjunto X es un conjunto $\mathfrak{F}$ de partes de X que posee las siguientes propiedades [Bourbaki 1965, Lib. III, cap. I, §6, Def. 1]:

($\mathfrak{F}_{I}$) Toda parte de X que contiene un conjunto de $\mathfrak{F}$ pertenece a $\mathfrak{F}$.

($\mathfrak{F}_{II}$) Toda intersección finita de conjuntos de $\mathfrak{F}$ pertenece a $\mathfrak{F}$.

($\mathfrak{F}_{III}$) La parte vacía de X no pertenece a $\mathfrak{F}$.

Como ejemplo de filtro tenemos el siguiente:

1. Sea A = (-*a*, +*a*) un subconjunto vacío de **Q**; entonces $\mathfrak{I} = \{F \subset \mathbf{Q};\ A \subset F\}$ es un filtro en **Q**, puesto que verifica las propiedades antes mencionadas.

2. Si $X = \{1,2,3\}$, se tiene que:
   $\wp(x) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Entonces:

$F = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ es un filtro en X, mientras que

$F' = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ no es un filtro en X.

3. Dado un espacio topológico (X, τ) y $x \in X$. El conjunto de todas las vecindades de B(*x*) es un filtro. Este se denomina filtro de vecindades.

La noción de filtro se introduce inicialmente como una herramienta ventajosa para introducir convergencia en un espacio topológico y en un espacio uniforme. La noción de filtro es el sustituto ideal de la noción de sucesión ya que su forma técnica nos remite a un lenguaje ya conocido en sucesiones, además de ofrecer ventajas prácticas, entre ellas el hecho de que no depende del sistema numérico natural.

La noción de filtro permite introducir el orden por contenencia. Como los filtros son comparables uno a uno, se puede establecer una relación de orden total. La comparación entre filtros no solo permite dotar el conjunto de una relación de orden total, sino que también permite introducir la noción de límite en los espacios uniformes y topológicos entre otras cosas. Sin embargo, para que el límite cuando exista sea único, el espacio debe ser separado o de Hausdorff.

Límite de un filtro.

Sea X un espacio topológico, $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X. Se dice que un punto $x \in X$ es punto límite (o simplemente límite) de $\mathfrak{F}$, si $\mathfrak{F}$ es más fino que el filtro $B(x)$ de vecindades de *x;* se dirá también entonces que $\mathfrak{F}$ converge (o es convergente) a *x*. Se dirá que *x* es límite de una base filtro *B* sobre X (o que *B* converge a *x*) si el filtro de base *B* converge a *x*. [Bourbaki 1965, Lib. III, cap. I, §7, Def. 1].

Espacios separados Hausdorff.

La separación de puntos o conjuntos cerrados mediante vecindades, dentro de un espacio topológico (X, τ) se puede enunciar de diferentes maneras, habiendo espacios topológicos que verifican unas condiciones y otras no. Veamos una afirmación sobre separación de puntos y conjuntos cerrados, usando el concepto de vecindad:

Proposición 1: Sea X un espacio topológico. Las proposiciones siguientes son equivalentes [Bourbaki 1965, Lib III, cap. I, §8, Prop. 1]:

(H) Sean dos puntos distintos $x, \ y$ de X, existe una vecindad de x y una vecindad de *y* sin puntos comunes.

(H^{ii}) La intersección de vecindades cerradas de un punto cualquiera de X es el conjunto reducido a un punto.

(H^{iv}) Un filtro sobre X no puede tener más de un punto límite.

Entre otras[2].

Definición 1. Se dirá que un espacio topológico X que verifica la propiedad 1. Es un espacio separado (o un espacio de Hausdorff) la topología de tal espacio se dirá separada (o de Hausdorff).

Observación: en un espacio Hausdorff los límites son únicos.

Ejemplo 1:

Todo espacio discreto es separado. La recta racional **Q** es separada, si x, y son dos números racionales tales que $x < y$, y z un número racional tal que $x < z < y$, las vecindades respectivas $(\leftarrow, z)$ y $(z, \rightarrow)$ de *x* y y no se encuentran. Es decir, una cortadura en el punto *z*.

Ejemplo 2:

El conjunto de los números racionales **Q,** dotado de la topología usual, es un espacio separado.

De igual manera como existen sucesiones de racionales que no convergen en **Q**, existen filtros sobre los racionales que no convergen en **Q** como espacio topológico.

[2] (H^{iii}) Para todo conjunto I, la diagonal Δ de él espacio producto Y= X^I es cerrada en Y.
(H^{v}) Si un filtro $\mathfrak{I}$ sobre X admite un punto límite *x*, *x* es el único punto adherente de $\mathfrak{I}$.
Otras condiciones que no serán utilizadas en el presente trabajo.

En **Q,** hay filtros que poseen los atributos de filtros convergentes, sin embargo no convergen en **Q** como espacio topológico. Esto quiere decir, que a pesar de que el filtro se acerca a un punto, este punto no se puede identificar, pues este punto no pertenece a este espacio topológico. Esto significa que **Q** es un espacio topológico pero no es completo.

A pesar, de que el punto al cual se acerca no se conoce, los filtros definen ciertos puntos que están suficientemente cercanos, la dificultad es precisamente el hecho de que en los espacios topológicos no hay ninguna forma de referirse a la cercanía de pares de puntos en forma "comparativa", esto quiere decir que la estructura topológica carece de esta riqueza para garantizar este tipo de aproximación (cercanía).

Esto sugiere inmediatamente dotar el espacio topológico de una estructura que permita garantizar de forma fructífera este tipo de aproximación, y la estructura que dota de significado los filtros con este comportamiento y le asocia un punto, es la estructura *uniforme*.

Los *espacios uniformes* son algo que está entre los espacios topológicos y los espacios métricos.

Esto quiere decir que la *estructura uniforme* generaliza a los espacios métricos, pero a los espacios topológicos los enriquece. De tal forma que podemos hablar de cercanía dos a dos.

En los espacios métricos podemos decir exactamente a qué distancia están dos puntos x e y. En los espacios topológicos podemos capturar la noción de cercanía, de puntos "próximos" a un punto dado, en términos generales, a través de la noción de vecindad. Y la estructura uniforme es aquella noción que permite ver esa cercanía como pares de puntos, es decir, nos permite por ejemplo decir que un punto x está más cerca de a qué y lo está de b.

Observación: nuestra estructura tendrá como protagonista a los pares de puntos.

1.1.4 Conceptos relacionados con estructuras uniformes.

Una *estructura uniforme* sobre un conjunto X es una estructura constituida por la dación de un conjunto U de partes de $X \times X$ que satisfacen los axiomas siguientes [Bourbaki 1965, Lib III, cap. II, §1, Def. 1]:

(F_I) Toda parte de $X \times X$ que contiene un conjunto de U pertenece a U
(F_{II}) Toda intersección finita de conjuntos de U pertenece a U
(U_I) Todo conjunto de U contiene la diagonal Δ[3].
(U_{II}) La relación $V \in U$ implica $V^{-1} \in U$[4].
(U_{III}) Cualquiera que sea $V \in U$, existe $W \in U$ tal que $WoW \subset V$[5].

Los conjuntos de U son los *entornos* de la estructura uniforme definida sobre X por U. Un *espacio uniforme* es un conjunto dotado de una *estructura uniforme*, es decir, un para (X, U).

Si V es un entorno de una estructura uniforme sobre X, se expresa la relación $(x, y) \in V$ diciendo que "*x* y *y* son vecinos o cercanos de orden V". Efectivamente estas propiedades nos permiten decidir matemáticamente cuándo dos puntos *x*, *y* de X son vecinos o cercanos, dos a dos.

Podemos interpretar la definición de la siguiente manera:

(F_I) si V contiene un entorno, entonces es un entorno. (Es análogo a lo que pasa con las vecindades. Si V contiene una vecindad de *x*, entonces es una vecindad de *x*).

(F_{II}) si podemos hablar de U-cercanía y de V-cercanía entonces podemos hablar de $(U \cap V)$-cercanía.

---

[3] La diagonal Δ está definida como el conjunto $\Delta(x) = \{(x, x) : x \in X\} \subset XxX$.
[4] Donde $V^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in V\}$
[5] Aquí se tiene que $WoW = \{(x, z) \in XxX : \exists y \in X \, tal \, que \, (x, y) \in W \wedge (y, z) \in W\}$)

(U_I) para cualquier entorno U todo punto es cercano consigo mismo. En otras palabras, que está cerca de sí mismo. Es reflexivo (esto generaliza la propiedad $d(x, x) = 0$ para cualquier x siendo de una métrica).

(U_{II}) nos dice que si $(x, y) \in U$ entonces $(y, x) \in U$. es decir que si x está cerca de y, y está cerca de x. En otras palabras, es una relación simétrica (esto generaliza directamente la propiedad $d(x, y) = d(y, x)$ para cualquier x, y siendo d una métrica).

(U_{III}) nos dice que si $(x, z) \in U$, existe un $(x, y) \in V$ con la mitad de tamaño. Es decir, que en la relación de cercanía se verifica la "desigualdad triangular".

Ejemplo 1: sobre el conjunto de los números racionales **Q**, se define de la manera siguiente una estructura uniforme, diré estructura uniforme aditiva: para cada $a > 0$, consideremos, en $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, el conjunto $U_a = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} : |x - y| < a\}$. Donde a pertenece al conjunto de los números racionales mayores que cero.

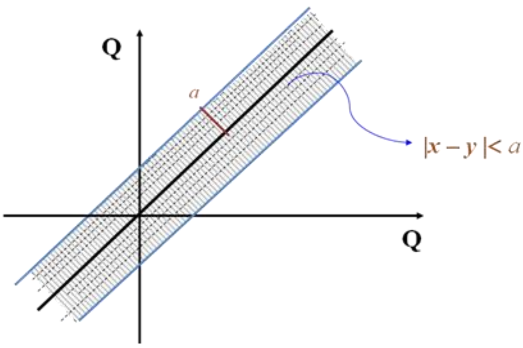

Figura 1

Nota. Cuando $\mathbf{X} = \mathbf{Q}$, $U_a = \{(x, y) : d(x, y) = |x - y| < a\}$. Es la banda determinada por las rectas $x - y = a$ y $y - x = a$. Luego un entorno es, en este caso, una parte V de $\mathbf{R}^2$ que contiene una de estas bandas.

Ejemplo 2:

La uniformidad usual para **R** está dada por

$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \exists r > 0 \text{ tal que } |x - y| < r \rightarrow (x, y) \in U\}$.

Sistema fundamental de vecindades.

Así como en espacios topológicos hablamos del sistema fundamental de vecindades, de manera análoga se define un sistema fundamental de entornos: Se llama *sistema fundamental de entornos* de una estructura uniforme a todo conjunto B de entornos tal que todo entorno contiene un conjunto que pertenece a B. [Bourbaki, Lib III, Cap 2, §1, Def2].

Para que un conjunto **B** de subconjuntos de X×X sea un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme sobre X es suficiente y necesario que satisfaga los axiomas siguientes:

(B_I) La intersección de dos conjuntos de **B** contiene un conjunto de **B**.
(U_I') Todo conjunto de **B** contiene la diagonal Δ.
(U_{II}') Para cada $V \in$ **B** existe $V' \in$ **B** tal que $V' \subseteq V^{-1}$
(U_{III}') Para cada $V \in$ **B** existe $W \in$ **B** tal que $W o W \subseteq V$

Ejemplo 1:

El conjunto U= $\{U_a : a \in Q^+\}$, donde $U_a = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}: |x - y| < a\}$, constituye un sistema fundamental de entornos de la estructura uniforme aditiva sobre **Q**.

Ejemplo 2:

Para $\varepsilon > 0$ sea $U\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : |x - y| < \varepsilon\}$. La colección ε de todos los conjuntos $U\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre **R**, conocida como la uniformidad usual sobre **R**.

Mientras que con las estructuras topológicas, y en particular con la noción de vecindad, podemos determinar la cercanía de puntos a un punto dado *a*; con las estructuras uniformes, y en particular con la noción de entorno, podemos establecer la cercanía entre dos puntos cualesquiera *x* e *y*. No necesito tener un punto de referencia, puedo compararlos dos a dos.

En el material presentado, tenemos algunos conceptos que se necesitan para la construcción hecha por Bourbaki, en aras de una mayor comprensión por parte del lector. Además, esperamos que el lector reconozca la importancia de cada uno de estos conceptos y el papel que juegan en cada uno de los momentos de la construcción que vendrá.

1.2 Los réales en los *Éléments de Mathématique*

De todos es conocido que las construcciones de los reales realizadas por Cantor y Dedekind a finales del siglo XIX ofrecen elementos de orden epistemológico que han contribuido en gran manera a aclarar el clásico concepto del continuo o sistema de los números reales. Sin embargo, en este apartado queremos apostarle a esbozar una construcción más moderna en aras de identificar nuevos conceptos, métodos o teorías que puedan aportar a la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático.

A continuación se presenta un bosquejo de la construcción de los números reales por Bourbaki, que es el objeto de ésta parte, aunque sin detenernos en los detalles técnicos.

El grupo Bourbaki, toma como punto de partida para la construcción de los números reales a los números racionales con la estructura de grupo aditivo totalmente ordenado. Es decir, en **Q** se han definido y son compatibles entre ellas, una estructura aditiva de grupo y una estructura de orden total. Esto significa que, para todo $x, y \in \mathbf{Q}$,

$$x \leq y \quad \text{o} \quad y \leq x$$

$$x \leq y \;\rightarrow\; x + z \leq y + z \quad \text{o} \quad y \leq x \rightarrow\; y + z \leq x + z,\ \forall\, z \text{ en } \mathbf{Q}.$$

Como segundo paso introduce una topología sobre **Q** con ayuda de la relación de orden, que coincide con la denominada topología usual, que se obtiene tomando como base los intervalos abiertos racionales y acotados alrededor del origen. El conjunto elegido por Bourbaki es el siguiente: $\Im = \{(b - a,\ b + a): b \in \mathbf{Q}$ y $a \in \mathbf{Q}^{+}\}$.

Bourbaki desea garantizar la compatibilidad perfecta de la estructura de grupo **Q** con la estructura topológica. De esta manera, es necesario definir que es un grupo topológico.

Entiéndase por Grupo topológico de manera informal, como: un conjunto no vacío G y una operación +: G×G → G que satisface las tres condiciones de grupo y que está dotado de la topología aditiva en G, donde la operación grupo y la topología están ligados por los requisitos de continuidad.

Formalmente;

> Def 1(Bourbaki, Cap. III, §1, No. 1): Se llama Grupo topológico un conjunto G dotado de una estructura de grupo y de una topología que satisface los dos axiomas siguientes:
>
> (GT_I) La aplicación $(x, y) \to x.\ y$ de G × G en G es continua.
>
> (GT_{II}) La aplicación $x \to x^{-1}$ de G en G es continua.
>
> Una estructura de grupo y una estructura topológica dadas sobre un conjunto G, son *compatibles* si ellas satisfacen (GT_I) y (GT_{II}).

Con el fin de ejemplificar la definición anterior y dar continuidad en el esbozo de construcción, tenemos que (Q, +, -, τ) es un grupo topológico y lo denotamos como (Q, +, τ). Esto equivale a mostrar que la operaciones + y - son continuas. Como se verá.

Sea $f\_(x) = -x$

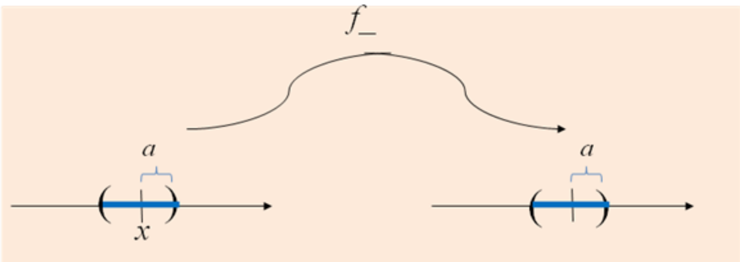

Figura 2

Sea $V' = (-x - a, -x + a)$ una vecindad de $f\_(x)$. Entonces existe una vecindad

$V = (x - a, x + a)$ de x, tal que:

$$x - a < x < x + a$$
$$-(x - a) > -x > -(x + a)$$
$$-x + a > -x > -x - a$$

Entonces: $-x - a < f\_(x) < x + a$

Por tanto, $f\_(V) \subseteq V'$

Sea $f+$: Q x Q $\rightarrow$ Q, tal que $f+(x, y) = x + y$

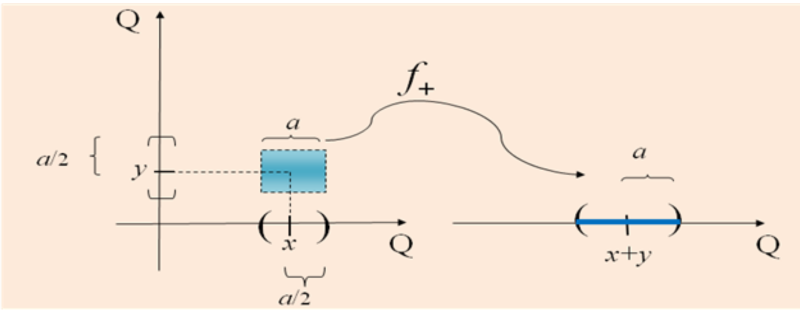

Figura 3

Sea $V' = (x + y - a,\ x + y + a)$ una vecindad de **Q**. Entonces existe $V = (x - a/2, x + a/2) \times (y - a/2, y + a/2)$ $de\ Q \times Q\ tal\ que$:

$x - a/2 < x < x + a/2$

$y - a/2 < y < y + a/2$

Entonces: $x + y - a < x + y < x + y + a$

Por tanto, $f(V) \subseteq V'$.

Con esto se muestra que las operaciones son continuas. En consecuencia, **Q** tiene estructura de grupo topológico.

Es importante tener presente que partimos de los números racionales con su estructura de grupo totalmente ordenado, luego creamos un marco en cual se pudiera garantizar la compatibilidad de la estructura de grupo con la topológica, y paso seguido se mostró que la operaciones eran continuas, que era último paso para garantizar la afinidad de estas estructuras.

A pesar de haber obtenido un grupo topológico de números racionales, el conjunto de los números racionales es un espacio topológico no completo, porque no todos sus filtros convergen. Esto significa que un espacio completo es aquel en el cual el fenómeno de la falta de límite no tiene lugar. Entonces ¿Cuáles son los criterios que permiten saber que filtros convergen en **Q**? El primer criterio lo podríamos llamar comparación por inclusión de filtros, que dice: dados dos filtros F y F' sobre un mismo conjunto X, se dirá que F' es más fino que F, o que F es menos fino que F', si $F \subseteq F'$. Si además $F \neq F'$, se dirá que F' es estrictamente más fino que F, o que F es estrictamente menos fino que F' [Bourbaki, Lib III, cap. I, §6, Def. 2]. Y el segundo criterio es el de límite de un filtro (pág. 19). ¿Qué ganamos con conocer los criterios de convergencia en **Q**? mucho, ya que por medio de estos criterios sabemos que el tipo de convergencia que se puede capturar en este espacio topológico es estrictamente el que sucede en puntos cercanos a un punto dado. Es decir, no es posible hablar de una cercanía dos a dos.

Tenemos que $(G, +, \tau)$ es un grupo topológico.

Necesitamos definir una noción de cercanía entre puntos de puntos cualesquiera de G, es decir, necesitamos introducir la estructura que nos permita comparar que tan "cercano" están dos puntos de G. Es decir, dotar a G de una estructura uniforme compatible con $(G, +, \tau)$.

Para definir esta cercanía es suficiente definir un sistema fundamental de entornos $G \times G$ a partir del filtro de vecindades de *e*.

A toda vecindad V de *e*, se le hace corresponder el conjunto

$V_d = \{(x, y) \in G\times G : y \cdot x^{-1} \in V\}$ donde $G_d = \{V_d : V \in F_e\}$ es un sistema fundamental de vecindades. Ver demostración [Bourbaki, Lib III, cap. III, §3, pág.37].

Esta uniformidad G_d es compatible con la topología de G. Así se obtiene que $\langle G, \mathbf{G}_d \rangle$ es un espacio uniforme.

Nuevamente usando un método general a cada grupo topológico se le puede asociar de manera natural una estructura uniforme. Hay que enfatizar que los espacios uniformes constituyen generalizaciones de espacios métricos y grupos topológicos (Isbell, 1964).

En nuestro caso particular tenemos que $(Q, \{V_d\})$ es un espacio uniforme.

Como se mencionó, la estructura uniforme es aquella que enriquece la estructura topológica y permite hablar de cercanía dos a dos. Sin embargo, los filtros antes nombrados no son adecuados en esta estructura uniforme a pesar de tener un panorama de convergencia más amplio que las sucesiones, entonces, ¿Cuál es el sustituto? El sucesor preferible para el tipo de convergencia al cual se desea llegar y que además generaliza las sucesiones de Cauchy, son los *filtros de Cauchy*.

Formalmente;

> [Bourbaki, Lib III, cap. II, §3, Def. 1] Dado un espacio uniforme X, y un entorno V de X, se dirá que un subconjunto A de X es un conjunto pequeño de orden V si para cualesquiera dos puntos de A son vecindades de orden V (que es lo mismo que decir $A\times A \subset V$).

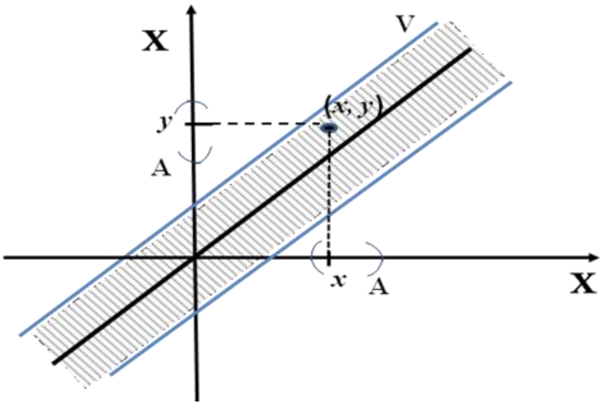

Figura 4

Un subconjunto A de X es “pequeño” si todos los puntos son “muy cercanos” dos a dos.

> [Bourbaki, Lib III, cap. II, §3, Def. 2]: Se dice que un filtro **F** sobre un espacio uniforme X es un *filtro de Cauchy*, si para todo entorno V de X, existe un conjunto pequeño de orden V que pertenece a **F**.

Es decir, un filtro es Cauchy si contiene conjuntos “arbitrariamente pequeños”. Sigue de las definiciones que cada filtro que converge (con respecto a la topología definida por la estructura uniforme) es un filtro de Cauchy. Todo filtro de Cauchy menos fino que un filtro convergente a un punto *x* converge también a *x*.

El concepto clave para esta completación es la noción de *filtro minimal de Cauchy*. Se llama un filtro de Cauchy *mínimo* si contiene un filtro no más pequeño de Cauchy (con excepción de sí mismo). Puede ser demostrado que cada filtro de Cauchy contiene un único filtro mínimo de Cauchy. El filtro de la vecindad de cada punto (el filtro que consiste en todas las vecindades del punto) es un filtro mínimo de Cauchy.

Una sucesión infinita (u_n) de puntos de un espacio uniforme **X** es una sucesión de Cauchy si el filtro elemental asociado a esta sucesión es un filtro de Cauchy. Es decir, que para todo entorno V de X, existe n_o tal que para todo $m, n \geq n_o$, se tiene que $(u_m, u_n) \in$ V.

Hemos entrado en la parte final del esbozo, y es aquí cuando el concepto de filtro de Cauchy y la teoría de espacios uniforme se unen para brindar una completación moderna de los números reales.

La completación puede empezar, (X, U) es un espacio uniforme de acuerdo con la definición de estructura uniforme sección 1.1.4 (recordemos ejemplo 1), donde $U = \{U\varepsilon : \varepsilon \in \mathbf{Q}^{+}\}$ y $U\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X : |x - y| < \varepsilon\}$.

Sea $X^* = \{ \mathcal{F} : \mathcal{F}$ es filtro minimal de Cauchy sobre X$\}$. De manera semejante como se definió una estructura uniforme sobre X, se puede definir sobre X*.

Observación: la uniformidad de X* es usual.

Dado $V \in U$ definimos:

$V^\wedge = \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtros mínimos de Cauchy : $\exists B$ V-pequeño : $B \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}\}$.

Afirmamos que $U^* = \{V^\wedge : V \in U\}$ es un sistema fundamental de entornos de X*, usando caracterización de sistema fundamental de entornos [Bourbaki, Lib III, cap. II, §1, Pág. 183], se puede efectivamente verificar que U* forma un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme sobre X* y por tanto, se tiene es un espacio uniforme completo. Ver prueba [Bourbaki, Lib III, cap. II, §3, Pág. 208-211].

Sin embargo, X estrictamente no está contenido en X*, pero si identificamos y asociamos a cada elemento de *x* con el nuevo elemento de X*, entonces la estructura de X vivirá, gracias a una copia, de X en X*.

Para formalizar lo anterior sin entrar en detalle, necesitamos una función $i: X \to X^*$ donde $i(x) = \mathcal{F}(x)$, en el cual $\mathcal{F}(x)$ representa el filtro de vecindades; que sea inyectiva y respete las estructuras que viven en X. A tal función le llamaremos la inmersión de X a X*. Ver [Bourbaki, Lib III, cap. II, §3, Pág. 212-213].

Observación: X* es completo en la uniformidad usual.

Con esto hemos concluido el esbozo de los números reales por Bourbaki.

Observación:

A pesar de haber realizado sólo un esbozo de la construcción los números reales por Bourbaki, es pertinente que tanto estudiantes como docentes tengamos plena conciencia del paso por cada nivel y el grado de exigencia en términos de abstracción y generalidad. Por ejemplo, en este esbozo se puede ver como los racionales gozan de propiedades y naturaleza diferente en cada momento del proceso. En el primer momento se ve la interacción entre lo algebraico y el orden, mientras que en el segundo momento la interacción ya no es solo asunto de lo algebraico y del orden, sino que también es un asunto de lo topológico, ¿pero qué es lo interesante de todo esto? Lo atractivo, es que estas estructuras no están forzadas una encima de la otra, sin ninguna relación, sino que sucede todo lo contrario, la afinidad es perfecta y se da por requisitos diferentes, por ejemplo, el caso de la estructura de grupo y la topológica se dan por los requisitos de continuidad.

Pero este andamiaje de los números reales por Bourbaki no se detiene y antes de extender a **R**, dota a los números racionales de una naturaleza más fina, más rica, la estructura uniforme.

En resumen:

Los reales por Bourbaki hacen su aparición en el capítulo IV del libro III de topología general de los *Éléments de Mathématique* de Bourbaki. Los libros I y II de esta obra están dedicados al estudio de la teoría de conjuntos y de álgebra, respectivamente.

Como se mostró en este capítulo, Bourbaki parte de la consideración de un grupo totalmente ordenado de racionales, es decir **Q** es un conjunto en el cual se han definido y son compatibles entre ellas, una estructura de grupo y una estructura de orden total. Luego muestra que **Q** es un grupo topológico y antes de completar garantiza sobre esta estructura, la estructura uniforme.

El grupo Bourbaki toma, como punto de partida para la construcción de los números reales, a los números racionales con la estructura de grupo aditivo topológico. La topología considerada es la dada por el orden, que coincide con la denominada topología usual, que se obtiene tomando como base los intervalos abiertos racionales.

Después forma la estructura uniforme generada por dicho grupo topológico, la cual es equivalente a considerar las uniformidades dadas por los entornos racionales simétricos sobre la diagonal. Es decir, parten del espacio uniforme

$\langle \mathbf{Q}, \{V_a\} \rangle$, donde $V_a = \{(x, y): |x - y| < a\}$ con a un racional positivo.

Después Bourbaki formula la completez del espacio uniforme de partida a través de la extensión de dicha estructura a una estructura **R**, formada por todos los filtros de Cauchy mínimales sobre **Q**. Sobre **R** definen una colección de entornos que dependen muy particularmente de los entornos de la estructura uniforme de partida. Con lo cual muestran que efectivamente **R** goza de una estructura uniforme, y que este nuevo espacio uniforme es Hausdorff, y es completo, es decir, que todo filtro de Cauchy converge, y sus límites son únicos.

Además que existe una inmersión natural del espacio inicial en el nuevo espacio, que además tal inmersión es densa sobre el nuevo espacio. La densidad les permite por extensiones uniformemente continuas garantizar la estructura de grupo topológico para el nuevo espacio (una prueba formal se encuentra en Bourbaki [Bourbaki, Lib III, cap. II, §3, Pág. 210-211].), que con técnicas similares terminan asignándole la estructura de cuerpo numérico ordenado con las operaciones continuas con respecto a la topología heredada de la estructura uniforme. Esta última estructura no es otra que la de los números reales.

Capítulo 2.

BOSQUEJO DE LOS NÚMEROS REALES POR GUSTAVE CHOQUET

El conjunto de los números reales se puede presentar a través de construcciones o por exhibición axiomática de sus propiedades. Esta última es tal vez la forma más usual de presentar los reales en los textos de enseñanza: como un conjunto en el que se verifican una serie de axiomas, que dan cuenta de las propiedades algebraicas de cuerpo y de orden se incluye el axioma de completez. En este capítulo trataremos de esbozar los aspectos centrales de la construcción de **R** a la manera de Choquet.

La construcción de los distintos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, reales y complejos) responde formalmente al deseo de ser capaz de realizar operaciones sin restricciones que antes solo eran posibles en casos particulares. Es decir, una búsqueda de la simplicidad en la operatividad. Esta simplicidad surge como el producto de dotar de significado las limitaciones algebraicas y topológicas de algunos conjuntos numéricos. Por ejemplo, en los naturales, no toda ecuación tiene solución en ese conjunto, es decir, para ciertas ecuaciones el conjunto dejaba de ser cerrado como es el caso de esta ecuación $x+5 = 0$. Y es ahí cuando el matemático tiene la necesidad de dotar de significado este resultado.

Para alcanzar esta finalidad la noción de número es enriquecida a lo largo de siglos y un caso particular de estos enriquecimientos es el surgimiento de los números enteros para que ecuaciones como $x + 5 = 0$ tengan un sustento teórico. De similar manera se puede evidenciar el surgimiento de los racionales al no poder encontrar solución de esta ecuación $3x = 7$ en **Z**.

Veamos en primer lugar la manera en que Choquet hace las extensiones de **N** a **Z** y de **Z** a **Q**.

2.1 La extensión como método de construcción.

Las extensiones para Choquet constituyen el método utilizado para ampliar un conjunto formal como **N** dotado de unas operaciones, unas propiedades y un orden, para obtener un nuevo conjunto más simple (menos restricciones), en el que se preserva las propiedades iníciales y se ganan otras.

Las extensiones no son objetos vacíos sin finalidad. Las extensiones son el mecanismo que permite dotar o construir nuevas operaciones con base en unas previas. Las extensiones garantizan la permanencia de las propiedades conocidas y posibilitan la existencia de las operaciones inversas.

> Por último cada una de las extensiones son realizadas con el propósito de encontrar soluciones a ciertas ecuaciones y a cada una de las extensiones se le impone una condición especifica que sea la justificación. Por ejemplo, se obtiene a **R** como una extensión totalmente ordenada verificando la condición no algebraica siguiente: "toda parte acotada de esta extensión posee límite superior" (...) (Choquet, 1955, Cap. III, p. 5).

Para hacer una extensión se parte de un conjunto que verifica la misma estructura de **N**, es decir, isomorfo a **N**, que se puede identificar con E_1 en el cual se verifican las propiedades asociativa, conmutativa, clausurativa y se tiene una relación de orden ligada a A_1, B_1 que son operaciones internas (Choquet, 1955, Cap. III, p. 4).

Por ejemplo; para $a, b, c \in E_1$ y si A_1 es la operación de adición se tiene que
$a < b \quad \rightarrow \quad a + c < b + c$.

A partir de la estructura anterior se puede construir o extender a un nuevo conjunto que se puede identificar con E_2, al cual se le puede definir unas operaciones binarias que satisfacen un conjunto de propiedades.

Por otro lado, nosotros veremos que la prolongación existe y es única. Aunque los elementos de E_2 puedan definirse de varias formas distintas:

1. Como el conjunto de las parejas de elementos de E_1.
2. Como el conjunto de ciertas partes de E_1.
3. Como el conjunto cociente de parejas o de partes de elementos E_1 partida por una relación de equivalencia.

Y luego, se define sobre E_2 dos operaciones internas A_2 y B_2 que verifican el mismo conjunto de propiedades de las operaciones A_1, B_1 y por tanto, una relación de orden atada a las operaciones A_2 y B_2 por un conjunto de relaciones (Choquet, 1955, p. 6).

Indudablemente, los elementos de E_2 poseen una naturaleza diferente a la de E_1 a pesar de ser deducido de E_1, podría pensarse que la naturaleza de los elementos de E_2 depende de la escogencia y de la necesidad del matemático. Sin embargo, creemos saber que la naturaleza de los objetos de E_2 se basa sustancialmente en lo que representa cada elemento dentro del conjunto. Por ejemplo, los elementos de E_1 son objetos discretos que representan singularidades dentro del conjunto, pero si analizamos los elementos de E_2 ellos responden a pluralidades de objetos dentro del conjunto. Son clases de equivalencia. Por tanto, la naturaleza de los elementos de E_1 es distinta a la de los elementos de E_2. En realidad, se produce un cambio ontológico.

Para mayor claridad, consideremos el caso de los enteros y los naturales. El 2 como número natural es el sucesor del 1 pero como número entero es la clase formada por todas las parejas (x, y), con $x, y \in \mathbf{N}$, tales que $x - y = 2$. A esta clase pertenecen también las parejas $(2,0), (7,5), (5,3)$, entre muchas otras. Se puede identificar con $[(2,0)]$.

De otro lado, es importante observar que estrictamente hablando, él $2 \neq [(2,0)]$ y por tanto, **N** no está estrictamente contenido en **Z**, entonces ¿Cómo puedo garantizar que **Z** es una extensión **N**? o más bien ¿Cómo puedo garantizar que E_2 es una extensión de E_1? E_2 es una extensión de E_1 cuando encontramos una copia exacta de E_1 en E_2 que verifica sus mismas operaciones y propiedades (Choquet, 1955, Cap. III, p. 6). Es decir, en una extensión es necesario mostrar que existe una parte $E_1^* \ de \ E_2$ que tiene la misma potencia de E_1 (cantidad de elementos) y que existe una aplicación biunívoca que preserva las operaciones. Es decir, un conjunto isomorfo a E_1. Esto es lo que se conoce como una *inmersión* de E_1 en E_2.

Ahora, nuestro interés consiste en mostrar que las extensiones de **N** a **Z** y de **Z** a **Q** que se encuentran en algunos libros de cálculo y teoría de conjuntos, hacen parte de un esquema de construcción, y que este esquema no difiere conceptualmente del procedimiento de extensión utilizado por Choquet. Por esta razón como ejemplos particulares esbozaremos la construcción de **N** a **Z** a la manera moderna, y la de **Z** a **Q** de las dos formas.

2.2 Z como extensión de N.

Partimos del conjunto de los números naturales, al que hemos identificado con **N**. Definimos en $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ la relación $\sim$ dada por $(a, b) \sim (c, d)$ sí y solo si $a + d = b + c$. Esta relación es de equivalencia y más aún es una congruencia.

Llamaremos $[a, b]$ a la clase de equivalencia del par (a, b), es decir, $[a, b]$ es el conjunto formado por todos las parejas relacionadas con (a, b);
$C_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \sim (a, b)\}$

El conjunto de los números enteros se define como el cociente $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}/\sim$. La suma y el producto de números enteros se definen como sigue:

1. $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
2. $[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc]$

Para verificar que la suma y el producto están bien definidos mostremos que no dependen del representante que se escoja en cada clase de equivalencia. Veamos esta prueba con detalle:

2.2.1 Operaciones en Z.

Sean $a_i, b_i, c_i, d_i \epsilon N$, $[a_1, b1] = [a_2, b_2]$ y $[c_1, d_1] = [c_2, d_2]$

En **Z**, entonces

i. $[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$
ii. $[a_1, b_1][c_1, d_1] = [a_2, b_2][c_2, d_2]$

Mostremos (i):

Antes de probar i) y ii), tengamos presente que:

(1) $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] \leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1$

(2) $[c_1, d_1] = [c_2, d_2] \leftrightarrow c_1 + d_2 = c_2 + d_1$

De donde se tiene que:

(3) $a_1+c_1+b_2+d_2 = a_2+c_2+b_1+d_1$ ahora probemos

i) $[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$

$[a_1 + c_1, b_1 + d_1] = [a_2 + c_2, b_2 + d_2]$ Entonces por (3) tengo que las dos clases de equivalencia son iguales

$[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$

Mostremos (ii):

Para (ii) se quiere probar que

$[a_1, b_1][c_1, d_1] = [a_2, b_2][c_2, d_2]$

$[a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1] = [a_2c_2 + b_2d_2, a_2d_2 + b_2c_2]$

Para ello mostraremos que

$[a_1, b_1][c_1, d_1] = [a_2, b_2][c_1, d_1]$ y que $[a_2; b_2]\ [c_1; d_1] = [a_2; b_2]\ [c_2; d_2]$

Naturalmente que con esto se completa la afirmación de (ii):

Para demostrar la primera igualdad es suficiente probar que

$[a_1c_1 + b_1d_1; a_1d_1 + b_1c_1] = [a_2c_1 + b_2d_1; a_2d_1 + b_2c_1]$

Lo cual es equivalente con

$a_1c_1 + b_1d_1 + a_2d_1 + b_2c_1 = a_1d_1 + b_1c_1 + a_2c_1 + b_2d_1$ y esta se reduce a

$(a_1 + b_2)c_1 + (b_1 + a_2)d_1 = (a_1 + b_2)d_1 + (b_1 + a_2)c_1$

Luego por (1) tenemos que $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ entonces:

$(a_1 + b_2)(c_1 + d_1) = (a_1 + b_2)(d_1 + c_1)$ y entonces

$(b_1 + a_2)\ (d_1 + c_1) = (b_1 + a_2)\ (c_1 + d_1)$.

Para la segunda ecuación se tiene que

$[a_2c_1 + b_2d_1, a_2d_1 + b_2c_1] = [a_2c_2 + b_2d_2, a_2d_2 + b_2c_2]$ Lo cual es equivalente

$a_2c_1 + b_2d_1 + a_2d_2 + b_2c_2 = a_2d_1 + b_2c_1 + a_2c_2 + b_2d_2$

$a_2(c_1 + d_2) + b_2(d_1 + c_2) = a_2(d_1 + c_2) + b_2(c_1 + d_2)$

Luego por 2) tenemos que $c_1 + d_2 = c_2 + d_1$ entonces

$(a_2 + b_2)(c_1 + d_2) = (a_2 + b_2)(d_1 + c_2)$ que es lo mismo

$(a_2 + b_2)\ (c_1 + d_2) = (a_2 + b_2)(c_1 + d_2)$

Y con esto se concluye la demostración.

Se mostró que las operaciones están bien definidas. Ahora veremos alguna de sus propiedades.

2.2.2 Propiedades de las operaciones de Z.

Ahora es fácil demostrar las propiedades básicas de la suma de enteros. Veamos cómo se muestra algunas:

Asociativa.

Para la suma

$([a, b] + [c, d]) + [e, f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f])$.

$[a + c, b + d] + [e, f] = [a, b] + [c + e, d + f]$

$[(a+c)+e,(b+d)+f]=[a+(c+e),b+(d+f)]$ y esto se cumple por que la suma en **N** es asociativa

Neutro aditivo.

Nótese que $a+b=b+a \to [a,a]=[b,b]$ para todo *a* y *b* naturales
Luego la clase $[1,1]$ es el neutro aditivo, ya que
$[a,b]\ +\ [1,1]=\ [a+1,b+1]=[a,b]$.

Opuesto aditivo.

El opuesto de $[a,b]$ en **Z** es el entero $[b,a]$ ya que, $[a,b]+\ [b,a]=[1,1]$.

Conmutatividad aditiva.

Esto se cumple por la conmutatividad de **N**
$[a,b]+[c+d]=[a+c,b+d]=[c+a,d+b]=[c,d]+[a,b]$

Neutro multiplicativo.

Para la multiplicación nótese que para todo *a* y *b* se cumple que
$[a+1,a]=[b+1,b]$
y que la clase [2,1] es la unidad de **Z**, ya que
$[a,b][2,1]=[2a+1b,2b+1a]=[a,b]$

Inmersión de los naturales en los enteros.

Retomando, el ejemplo de **N** a **Z** de la (pág. 34) tenemos que estrictamente **N** no está contenido en **Z**, pero si identificamos y asociamos a cada natural *n* con el entero $[(n,0)]$, entonces la estructura de los naturales vivirá, gracias a una copia, de **N** en **Z**. Para formalizar lo anterior, necesitamos una función α: **N** → **Z** que sea inyectiva y que respete la estructura de la suma en **N**. A tal función le llamaremos la inmersión de **N** a **Z**.

Sea α: **N** $\rightarrow$ **Z** la función $\alpha(n) = [(n, 0)]$ entonces:

1. α es inyectiva, y
2. Para *n, m* ϵ N, $\alpha(n + m) = \alpha(n) + \alpha(m)$.

Para demostrar la inyectividad de α, suponemos que $\alpha(n) = \alpha(m)$, esto es

$[(n, 0)] = [(m, 0)]$. Así que $(n, 0) \sim (m, 0)$ o lo que es lo mismo $n + 0 = m + 0$ luego $n = m$.

Para demostrar que la "imagen de la suma bajo α es la suma de las imágenes bajo α", basta observar que

$$\alpha(n + m) = [(n + m, 0)] = [(n, 0)] + [(m, 0)] = \alpha(n) + \alpha(m)$$

La segunda igualdad vale gracias a la definición de suma de enteros. Por conveniencia, de ahora en adelante utilizaremos el símbolo **N*** para denotar al conjunto

$$\{[(0, 0)], [(1, 0)], [(2, 0)], \ldots\}$$

Gracias a esto, ahora podemos afirmar que **N*** esta contenido en Z, como se dice cotidianamente. Además, abusando un poco del lenguaje, no haremos distinción entre $[(n, 0)]$ y n; esto nos permitirá, por ejemplo, hablar del natural 15 fácilmente, sin tener que escribir $[(15, 0)]$.

Orden sobre Z.

El conjunto **Z** tiene un orden total, compatible con la adición.

N es conjunto de positivos en **Z** cerrado para + y ×, y se cumple tricotomía: $a \in Z$, entonces $a \in$ **N**; $a = 0$ ó $-a \in$ **N**. Esto es lo que permite a Choquet definir el orden en **Z** por la relación $x \leq y$ si $y - x \in$ **N**. (Choquet, 1955, Cap. I, p. 58)

Esta relación es una relación de orden, porque ella es reflexiva (pues $x - x = 0 \in \mathbf{N}$), es decir, $x \leq x$. Es antisimétrica porque $(x - y) \in \mathbf{N}$ y $(y - x) \in \mathbf{N}$ entonces
$x - y = 0$ o $x = y$, es decir, $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$. Y es transitiva porque
$y - x \in \mathbf{N}$ y $z - y \in \mathbf{N}$ entonces $(z - y) + (y - x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} = (z - x) \in \mathbf{N}$, es decir,
$x \leq y \wedge y \leq z \longrightarrow x \leq z$.

Por otra parte tenemos siempre $(x - y) \in \mathbf{N}$, o $(y - x) \in \mathbf{N}$. Así $\leq$ es una relación de orden total.

Este orden es compatible con la adición $x \leq y$ entonces $y - x) \in \mathbf{N}$ y así

$$(y + a) - (x + a) \in \mathbf{N}$$

Lo que implica que $x + a \leq y + a$.

Con lo mencionado se dirá que **Z** tiene estructura algebraica (de grupo) y estructura de orden que a su vez, son compatibles. En últimas, **Z** es un grupo conmutativo totalmente ordenado.

Entonces ¿Para qué se extiende? ¿Qué se gana al pasar de E_1 *a* E_2? ¿De **N** a **Z**?

Las extensiones tienen un objetivo, y ese objetivo es aportar algo nuevo, ofrecer un resultado y una riqueza estructural que antes no se tenía. Por ejemplo, respuestas a ecuaciones planteadas en cierto dominio que no tenían solución pueden en el nuevo conjunto encontrar solución. En este orden de ideas, las extensiones tienen como propósito, según Choquet, cualquiera de las opciones siguientes:

1. Resolver ecuaciones
2. Ganar simplicidad[6]
3. Ganar en características estructurales

Por ejemplo, $< \mathbf{N}, +, \leq >$ es un semigrupo ordenado mientras que $< \mathbf{Z}, +, \leq >$ es un grupo ordenado. Lo que significa que hemos ganado un inverso aditivo para cada uno de los elementos, aspecto que antes no era posible. Esto significa no solo que la ecuación $x + n = 0$ para cualquier $n \in$ **N**, tiene solución, sino que hemos enriquecido la estructura algebraica de semigrupo a grupo. Es decir, en esta extensión hemos cumplido al menos con los propósitos 1y 3 antes mencionados.

Cuando se extiende, las propiedades del conjunto **N** se conservan en **Z** como se mostró, y se ganan otras, por ejemplo, los números enteros aparte de tener unas leyes de composición asociativa, conmutativa, clausurativa, es distributiva, posee elemento neutro y cada uno de sus elementos posee inversos aditivos. Esto nos dice que además de ganar una estructura de grupo, posee una estructura algebraica determinada por dos leyes de composición internas bien definidas, donde la primera es una ley de grupo abeliano en **Z**, y la segunda es asociativa y doblemente distributivas, lo que implica que tiene una estructura de anillo.

A pesar de todo lo que hemos ganado, hay situaciones que no se pueden resolver en **Z** y por tanto es necesario extender este dominio a uno más grande. Por ejemplo, la ecuación $3x + 2 = 0$ no tiene solución en **Z**, y en general la ecuación $ax + b = 0$, donde a y b son primos relativos no se puede resolver en el dominio de los números enteros. Veamos entonces, el procedimiento para extender **Z** a **Q**.

[6] Como se dijo antes, las extensiones permiten resolver ecuaciones las cuales no se podían resolver en el conjunto inicial, y es, a estas características ganadas en la extensión a las que se llama simplicidad, no obstante esta simplicidad está estrictamente amarrada a la resolución de ecuaciones. (Choquet 1955, Cap. III, p5)

2.3 Extensión de Z a Q.

El propósito del documento es proporcionar al lector herramientas que permitan "conocer la construcción Choquet", y una de las formas que tenemos de brindar ese conocimiento, aparte de retomar las construcciones, es utilizar algunos métodos de extensión algebraica propios de él. Aunque después de manera muy resumida esbocemos una construcción moderna con el fin de contextualizar al lector.

Se utilizará un procedimiento de *simetrización*. Un procedimiento de simetrización es aquel que se utiliza cuando se intuye que un conjunto más una operación binaria posee simétricos (es decir, inversos). Sin embargo, este procedimiento no se puede aplicar sobre cualquier estructura algebraica por que al menos esta estructura debe ser asociativa y clausurativa. Además, el método de simetrización garantiza que si x' es el simétrico de x la operación $x * x'$ es clausurativa.

En otras palabras, si $< E, \top >$ es una estructura algebraica con elemento neutro *e*. Un elemento $a \in E$ se dice que es simetrizable o invertible por la

1. izquierda respecto a la ley $\top$ si y solo si existe un *b* que pertenece a *E* talque $b \top a = e$.

2. Derecha respecto a la ley $\top$ si y solo si existe un *b* que pertenece a *E* talque $a \top b = e$.

Si $a \in E$ es simetrizable por la derecha y por la izquierda respecto a $\top$, se dice simplemente que *a* es simetrizable o invertible respecto a la operación $\top$.

Es importante resaltar que el inverso de un elemento $a \in E$ debe ser elemento de *E*. Por ejemplo, en la estructura algebraica $< \mathbf{Z}, \cdot >$ el uno es el elemento neutro de esta estructura. Para el 3 $\in \mathbf{Z}$, por ejemplo, existe $1/3$ tal que $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1,$

sin embargo, no podemos afirmar que 3 sea simetrizable en $< Z, \cdot >$ puesto que $\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$.

¿Existe alguna diferencia entre una extensión y un proceso por simetrización**?**

Inicialmente pareciera que no tienen ninguna diferencia, porque ambas generalizan los conjuntos numéricos, pero la diferencia existe y es ésta: la razón de cada una de las extensiones era el deseo de ser capaz de realizar operaciones sin restricciones que antes eran imposibles en casos particulares. Es decir, surgen como una solución a esta problemática. Sin embargo, el esquema de simetrización no desea saciar esa necesidad, sino que desea garantizar que cualquier conjunto que verifique la propiedad asociativa y clausurativa es extendible.

Ahora si veamos la extensión de **Z** a **Q** con el método propuesto por Choquet**.**

Sea el conjunto **Z*** = **Z** – *{0}*, la multiplicación es asociativa, conmutativa y clasurativa. Se puede aplicar un procedimiento de simetrización: Se designará por $\mathbf{Q}_+^*$ el grupo abeliano deducido de **Z*** por simetrización de la multiplicación: se llama fracción a toda pareja (p, q) de elementos de **Z***, todo elemento de **Q*** es una clase de fracción de equivalencia definida por $pq' = p'q$.

Z* puede ser considerado por abuso del lenguaje, como subconjunto de **Q***; nosotros sabemos que todo $x \in \mathbf{Q}^*$ es, de una infinidad de modos de la forma pq^{-1} donde *p y q* ∈ **Z*** y se denota *p/q* el elemento pq^{-1} y seguidamente $p/q \cdot p'/q' = pp'/qq'$.

Designamos por **Q** el conjunto deducido de **Q*** añadiéndole un elemento cero denotado por 0.

Se prolonga la multiplicación de **Q*** a **Q** apoyándose $0x = x0 = 0$ para todo *x*.

Se define por otra parte una adición en **Q** apoyándose que:

1. $x + 0 = 0 + x$
2. si $x \neq 0$ y $x' \neq 0$y si $x = p/q,\ x' = p'/q'$, se verifica que$(pq' + p'q)/qq'$ no depende particularmente de la elección de las fracciones$(p, q)y\ (p', q')$que representan *x* y *x'*. también el elemento de $x + x' = (pq' + p'q)/qq'$está bien definido.

Se verifica **Q** con la adición como grupo conmutativo. Tiene como elemento neutro el cero, posee inversos de cada uno de sus elementos y es asociativo. Se verifica igualmente que la multiplicación sobre **Q** es distributiva respeto a la adición. Donde **Q** constituye un cuerpo.

Es inmediato que si identificamos el cero de **Z** al de **Q**, las restricciones de las operaciones de **Q** a **Z** devuelven las operaciones del anillo Z.

¿Cómo es el orden sobre **Q**?

Podemos extender el orden de **Z** sobre **Q** apoyándose en que, si *x = p/q y x' = p'/q'* con *q* y *q'* en los enteros *(**Z**)*:

$x \leq x' si\ pq' \leq p'q$. Se verifica que esta definición no depende de las fracciones, pues sí $(p.q)$ y (p', q') cada par representa x y x' ; enseguida esta relación define sobre **Q** un orden total, donde la restricción de **Z** es idéntica al orden natural de **Z**, y que el orden es compatible con la adición y la multiplicación en que

$$x \leq y \rightarrow x + a \leq y + a\ \forall a \quad \text{Y} \quad x \leq y \rightarrow bx \leq by. \forall a > 0$$

La siguiente construcción es equivalente a la antes expuesta.

2.3.1 Una construcción moderna de Q.

El punto de partida ahora es el conjunto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ donde **Z* = Z** – *{0}* es decir, **Z*** es el conjunto de los enteros no nulos. En el conjunto, $Z \times Z^*$ se define la siguiente relación $(a;\ b) \sim (a_1;\ b_1)$, $ab_1 = a_1b$ (Quevedo, 2002):

Teorema 1.1 *La relación* $\sim$ *en* $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$*es relación de equivalencia.*

Demostración:
Se ve fácilmente que la relación es reflexiva y simétrica. También es transitiva, ya que $(a; b) \sim (a_1; b_1)$ y $(a_1; b_1) \sim (a_2; b_2) \rightarrow ab_1 = a_1b$ y $a_1b_2 = a_2b_1$:
Luego $ab_1b_2 = a_1bb_2 = a_1b_2b = a_2bb_1$: O sea, $ab_2b_1 = a_2bb_1$: Esto implica que $ab_2 = a_2b$; es decir, $(a; b) \sim (a_2; b_2)$

Definición 1.2 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*/\sim$; *conjunto de las clases de equivalencia, se llama Conjunto de los números racionales y cada clase de equivalencia se llama (número) racional.*

Por notación:
$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*}{\sim}$ y $\frac{x}{y}$ para la clase de equivalencia de $(x; y)$; es decir, para el conjunto
$[a, b] = \{(a;\ b)\epsilon\, \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* :\ (a;\ b)\sim (x;\ y)\}:$
Concluimos parcialmente que la diferencia entre la extensión de Choquet y la presentada en este texto es casi nula, en otras palabras Choquet utiliza un lenguaje actual de extensión.

2.3.2 Operaciones en Q.

Mostremos ahora que la suma y la multiplicación están bien definidas.
Sea:
$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \quad y \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{u_1}{v_1}$
Implica que $\quad \frac{x}{y} + \frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{v} + \frac{u_1}{v_1} \quad y \quad \frac{x}{y}\frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{v}\frac{u_1}{v_1}$

Probemos **la multiplicación**, por hipótesis tenemos que
$xv = yu \;\; y\, x_1v_1 = y_1u_1$
Por tanto $xx_1vv_1 = (xv)(x_1v_1) = (yu)(y_1u_1) = yy_1uu_1$
Con lo cual tenemos $\quad \frac{x}{y}\frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{v}\frac{u_1}{v_1}$

Probemos la suma

Se quiere probar que

$$\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}=\frac{u}{v}+\frac{u_1}{v_1}$$

Que es lo mismo que

$[x,y]+[x_1,y_1]=[u,v]+[u_1,v_1]$

Para ello mostraremos que $\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}=\frac{u}{v}+\frac{x_1}{y_1}$ y que $\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}=\frac{x}{y}+\frac{u_1}{v_1}$

Para demostrar la primera es suficiente probar

$[xy_1+yx_1,yy_1]=[uy_1+vx_1,vy_1]$

Por definición $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\leftrightarrow xv=yu$

$[xy_1+yx_1]vy_1=[uy_1+vx_1]yy_1$

Es equivalente

$xy_1vy_1+yx_1vy_1= uy_1yy_1+vx_1yy_1$

Entonces

$xvy_1^2+yvx_1y_1= uyy_1^2+vyx_1y_1$

Por hipótesis tenemos que $xv=uy$

$xvy_1^2= uyy_1^2$

Para la segunda ecuación se tiene

$[xy_1+yx_1,yy_1]=[xv_1+yu_1,yv_1]$

$xy_1yv_1+yx_1yv_1= xv_1yy_1+yu_1yy_1$

$xyy_1v_1+y^2x_1v_1=xyv_1y_1+y^2u_1y_1$

Como x,y,y_1,v_1 son enteros y la conmutatividad en **Z** es posible, el término del lado derecho e izquierdo son los mismos. Además se sabe por hipótesis

$x_1v_1=y_1u_1$

Por lo tanto

$y^2x_1v_1=y^2u_1y_1$

2.3.3 Propiedades de las operaciones en Q.

A continuación veremos algunas propiedades de los números racionales.

Neutro de la suma.

El módulo de la suma es $\frac{0}{m}$ $con\ m \neq 0$

Mostremos que $[0, m]$ es el módulo de la suma.

Sea $[a, b]$ un número cualquiera en **Q**, se cumple que $[a, b] + [0, m] = [a, b]$

$[a, b] + [0, m] = [am + b0, bm] = [am, bm] = [a, b] = \dfrac{a}{b}$

Asociativa.

Mostremos que la propiedad asociativa se verifica, es decir, que

$([a, b] + [c, d]) + [e, f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f])$

Veamos la primera parte de la igualdad

$([ad + bc, bd]) + [e, f] = [(ad + bc)f + bde, bdf] =$

$[(adf + bcf) + bde, bdf]$

Por la segunda parte tenemos:

$[a, b] + ([cf + de, df]) = [(adf + b(cf + de), bdf] =$

$[(adf + (bcf + bde), bdf]$

Pero a, b, c, d, e, f son enteros, Por la asociatividad en **Z** podemos decir que **Q** es asociativo.

Neutro multiplicativo.

El módulo de la multiplicación es $\frac{m}{m}$ $con\ m \neq 0$

Sea $[a, b]$ un número cualquiera en **Q**, se cumple que $[a, b][m, m] = [a, b]$

$[a, b][m, m] = [am, bm] = [a, b] = \dfrac{a}{b}$

Inverso multiplicativo.

Mostremos que el inverso de $[a, b]$ es $[b, a]$

$[a, b][b, a] = [ab, ba] = [m, m] = [1,1] = 1$

Es decir que se ganó en operatividad y no perdió nada.

Inmersión de Z a Q.

Igual que en la construcción anterior, necesitamos mostrar que los racionales son una buena extensión de los números enteros, es decir que **Q** posee un subconjunto isomorfo con **Z**. Basta llamar a $\boldsymbol{Z}$ al conjunto de los racionales de la forma $\frac{a}{1}$; $\boldsymbol{Z} = \left\{\frac{a}{1} : \boldsymbol{a} \in \mathbf{Z}\right\}$.

Este subconjunto es cerrado para la adición y la multiplicación en **Q:**

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a.1 + 1.b}{1.1} = \frac{a+b}{1}$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a.b}{1.1} = \frac{a.b}{1}$$

Se observa que sumar o multiplicar en $\boldsymbol{Z}$ es lo mismo que hacerlo en **Q.**

Ahora solo basta mostrar que la aplicación *i* es una inyección respetuosa de la estructura algebraica de los enteros, es decir,

$$(x+y)' = x' + y'$$
$$(x.y)' = x'.y'$$

i es inyección porque si $x' = y'$ entonces $\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$. Luego $x.1 = 1.y$; es decir $x = y$:

i respeta la suma ya que $i(x+y) = \frac{x+y}{1} = \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = i(x) + i(y)$.

i respeta el producto $i(x.y) = \frac{x.y}{1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = i(x).i(y)$.

Igual que antes, esto permite identificar $x \in \mathbf{Z}$ con $x' \in \boldsymbol{Q}$ y considerar entonces los enteros como un subconjunto de los racionales. Se tiene que la suma y producto de dos enteros (en **Q**) es un entero. Además el cero se identifica con el cero y la unidad como el uno.

El orden sobre Q.

Se define $\mathbf{Q}^+ = \{x/y : xy \in \mathbf{N}\}$, y $\mathbf{Q}^+$ resulta ser un conjunto de positivos en **Q**. Es decir, $\mathbf{Q}^+$ es cerrado para + y × y satisface tricotomía: para $x \in Q$ entonces $x \in \mathbf{Q}^+$ ó $x = 0$ ó $-x \in \mathbf{Q}^+$. Así se puede introducir en **Q** una estructura de orden que, junto con ser respetuosa de la estructura algebraica de **Q**, prolongue el orden de **Z** ($\subseteq$ **Q**).

Se puede expandir el orden de **Z** a **Q**, por analogía de **Z.** Formalmente

$$x < y \leftrightarrow y - x \in \mathrm{Q}^{+}$$

$x \leq y \leftrightarrow x < y \ \ o \ x = y$.

Como el caso de **Z** es análogo a **Q**, es inmediato que **Q** tiene un orden total compatible con la adición.

$x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$

$x \leq y, \qquad 0 \leq z \rightarrow xz \leq yz$

Que al igual que los enteros, rige para *x, y* y *z* en los racionales lo siguiente:

1. $x < y \leftrightarrow x + z < y + z$
2. $x = y \leftrightarrow x + z = y + z$
3. $x > y \leftrightarrow x + z > y + z$

Si además $x > z$, tenemos

1. $x < y \leftrightarrow xz < yz$
2. $x = y \leftrightarrow xz = yz$
3. $x > y \leftrightarrow xz > yz$

Cuando se extiende, las propiedades del conjunto **Z** se conservan en **Q** como se mostró, y se ganan otras, por ejemplo, los números racionales aparte de ser un anillo ordenado también tiene una estructura de cuerpo ordenado, pues verifica los axiomas de grupo para la segunda operación.

A pesar de todo lo que hemos ganado, hay ecuaciones como $x^2 = 2$ que no tienen solución en **Q** y por tanto es necesario completar este dominio.

De lo anterior nos surge la siguiente inquietud, si en los enteros se mostró que habían ecuaciones que no tenían solución, ¿por qué no se extiende a **R** directamente de los enteros? Una respuesta apresurada sería decir, porque los enteros no tienen estructura de Cuerpo. Pero es claro que Bourbaki y Choquet con su esquema de construcción desvirtúan esta respuesta, poco fundamentada y rigurosa, debido a que ellos garantizan que se puede completar desde una estructura de grupo totalmente ordenado. Entonces, ¿Por qué todos quieren extender a partir de **Q,** ya sea como grupo o como cuerpo? A mi modo de interpretar estos dos autores, la respuesta nace en las siguientes propiedades o particularidades de **Q**, que lo diferencia de **Z** o de **N**, y es que **Q** tiene unas propiedades más o menos extraordinarias que no pertenecen a la estructura algebraica. Una de ellas pertenece a la de orden y otra a la topológica. La primera propiedad que hacemos mención dice: que entre dos números racionales cualesquiera existe un tercer racional entre ellos y por tanto infinitos, y esta propiedad de **Q** y de **R** se conoce como la densidad del orden. Y la segunda propiedad radica en el tipo de topología que se puede definir sobre estos conjuntos numéricos. Recordemos que: en un espacio discreto un punto no tiene más punto a su alrededor que el mismo. Esta topología es la más adecuada para conjuntos como **N** o **Z**, pues, efectivamente, un número entero no tiene alrededor a ningún otro. Sin embargo, con los racionales no sucede lo mismo, ya que cualquier entorno de un punto contiene al punto y a infinitos más. Es decir, podemos hablar de cercanía entre puntos, y esto está garantizado por la propiedad antes mencionada. Observación**:** la topología de **Q** es la usual. Estas dos características que están estrechamente relacionadas son fundamentales para establecer completez en Choquet como se verá. Aclarada esta situación podemos extender a **R**.

2.4 La completación de Q para obtener R.

Como se mencionó, para completar **R**, Choquet no se necesita tener en cuenta todas las propiedades algebraicas de los cuerpos, porque es posible y suficiente completar **Q** a través de la noción de grupo conmutativo totalmente ordenado al cual se le asocia un concepto de vital importancia que diferencia a **Q** de **R**, la continuidad. Los axiomas de continuidad en Choquet no se dan estrictamente para un conjunto con una estructura de grupo conmutativo sino, que se dan para cualquier conjunto totalmente ordenado, esto quiere decir, que independientemente de la estructura algebraica, lo importante para la completación es la compatibilidad perfecta con la relación de orden.

Todo conjunto totalmente ordenado arbitrario es continuo si verifica estas dos condiciones que se expresarán como sigue (Choquet, 1955, Cap. III, p. 23):

> Se dirá que un conjunto totalmente ordenado es continuo si:
> 1. Toda parte acotada superiormente (inferiormente) de E admite una cota superior (inferior).
> 2. Cualquier intervalo abierto] x, y [es no vacío ($x < y$).

La condición 2 equivale a decir que cualquier elemento de E no tiene sucesor. O que entre dos puntos de E al menos hay un tercero.

Dentro de su visión Choquet reconoce que para construir un grupo conmutativo totalmente ordenado continuo, fácilmente podría apelar al criterio de cortaduras de Dedekind (teoría de conjuntos) que consiste en formar intervalos acotados inferiormente y superiormente en un punto cualquiera. O el de Cantor que alude a sucesiones de Cauchy, donde el concepto de convergencia introducido por las sucesiones, juega un papel importante en esta construcción. Al entrar en contacto con la construcción de Choquet, se nota una cierta inclinación de Choquet por utilizar el método de cortaduras de Dedekind con su propio estilo y no el de Cantor. La escogencia de esta herramienta llamada cortadura parece que está amarrada a esta situación: a la posición de Choquet y a las estrategias "metodológicas" que garantizan un aprendizaje de las matemáticas[7]. Lo que queremos decir con lo anterior es que escoger cortaduras y no sucesiones se da como una estrategia metodológica (intuición geométrica) para conducir al estudiante al conocimiento matemático.

[7] Dieudonné (1974) dice: el fin último de la enseñanza de las matemáticas, en cualquier nivel, es sin duda conseguir dar al estudiante una "intuición" sólida de los objetos matemáticos que maneja. Pero la experiencia nos dice que la única manera de conseguirlo es una larga familiaridad con el tema, intentando considerarlo desde todos los ángulos posibles. (….) creo que todo avance en el camino hacia la "intuición" debe pasar necesariamente por un periodo de comprensión formal y superficial, que solo poco a poco irá siendo sustituida por una comprensión más profunda. (….) . (p. 72)

Dicho de otra manera, los jóvenes del momento tienen grandes debilidades en sus bases elementales (álgebra, álgebra de conjuntos, simbolismos, entre otros) y por tanto, resulta difícil comenzar el estudio de unas matemáticas formales y estructuralizada al estilo Bourbaki. Entonces, ¿Cómo construir un aprendizaje significativo sin atropellar a los estudiantes con las tendencias abstractas actuales? Choquet (1962) dice:

> "Es necesario acostumbrar lo antes posible, a pensar en términos de conjuntos y de operaciones, es conveniente que ya desde muy joven sepan utilizar el álgebra y el lenguaje de los conjuntos, puesto que su simbolismo es a la vez sencillo y preciso, y numerosas experiencias han mostrado que a los niños les agrada emplearlas (….) Se les irá dando a conocer poco a poco las grandes estructuras de equivalencia, de orden, topológicas y algebraicas. Estas estructuras pueden ser estudiadas, en niveles muy variados, desde el principio de la enseñanza en la escuela"[8]. (p. 112).

De todo lo anterior inferimos que la completez por cortaduras debe ser una forma para conocer las estructuras madres. Además, recordemos que las cortaduras se caracterizan por su alto contenido conjuntista y al mismo tiempo no requiere de grandes conceptos de álgebra abstracta, como los requiere la completez en Cantor. En últimas, la completez por cortaduras sería mucho más intuitiva que la completez de Cantor para el estudiante.

El axioma de continuidad de Choquet está formulado para cualquier conjunto completamente ordenado. Sin embargo, Choquet lo hace sobre el conjunto de los números racionales. Choquet (1955) dice:

> "todos los números racionales guardan una importancia teórica y práctica tal, que para construir el grupo ordenado G buscado, nosotros partiremos de un grupo conmutativo ordenado de números racionales". (p. 30).

En primera instancia Choquet define unas secciones iníciales o de abiertos sobre **Q**. Se llama *sección inicial* o *abierta* de **Q** a toda parte S de **Q** tal que

1. $S \neq \emptyset$ y $S \neq Q$

[8] Traducción libre realizada por el autor de este trabajo de grado.

2. $(x \in S \text{ y } y \leq x) \rightarrow y \in S$
3. S no tiene elemento superior

Se designa por S el conjunto de secciones íniciales abiertas de **Q**

Es claro, que Choquet con sus secciones íniciales y Dedekind con sus cortaduras, recurren a un enfoque conjuntista donde su idea principal está basada en una relación de orden. A pesar de esto, los dos métodos poseen diferencias sustanciales que evidencian una "sencillez" del uno respecto al otro, y una diferencia muy palpable es que las secciones iniciales definen una clase de números en un solo sentido mientras que la cortadura forma dos clases de números. Por ejemplo, la figura 5 una representación gráfica de sección inicial o cortadura a la manera de Choquet donde $y < x$.

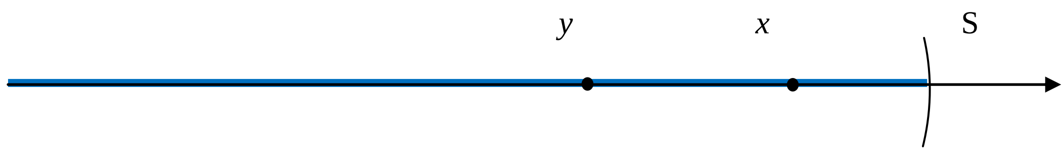

Figura 5

Una sección inicial S es una sección inicial racional si

$S = \{r \in \mathbf{Q} : r < x \text{ para algun } r \text{ racional}\}$.

Bajo el criterio anterior es claro que todos los números racionales pueden ser vistos como una sección inicial (racional). A continuación exhibiremos dos ejemplos de sección inicial con el fin de ilustrar.

1. El conjunto de los números racionales menores que cero. El cual denotaremos $x < 0$ es una sección inicial.

2. El conjunto formado por todos los racionales menores o iguales que cero unido con el conjunto de los racionales cuyo cuadrado es estrictamente menor que 2 es una sección inicial.

Lo particular de este método es que no solo permite comparar el orden de los elementos de las secciones de abiertos, sino que permite comparar el orden de las secciones iníciales por la inclusión. Es decir, se puede definir un orden sobre la sección inicial denotada por S.

Orden sobre las secciones iníciales.

Si se tuviera que $y \in S$ y $x \notin S$, entonces $y < x$. Se pone presente que todos los racionales que no están en S son cotas superiores de S, lo cual concuerda con la idea intuitiva de que S está formado por todos los números racionales menores que "algo".

De modo que *x* es una cota superior de S. Utilizando el resultado anterior podemos comparar secciones iníciales unas con otras, es decir la comparación ya no se hace sobre dos elementos sino sobre colecciones de elementos. Por ejemplo:

Si $x_1 \in S_1$ y se cumple que $y \leq x_1$ entones $y \in S_1$, pero puede darse el caso que exista un *x* distinto de x_1 tal que *x* no pertenece a S_1, al no pertenecer *x* a S_1, necesariamente *x* debe pertenecer a una sección inicial $S_2 \neq S_1$. Dado el caso, se puede afirmar que S_1 es menor que S_2 de inmediato se concluye que S_1 está completamente contenido en S_2, de igual manera, se podría afirmar que cualesquiera dos secciones iníciales se pueden comparar una a una. De ello, resulta que las secciones iníciales tienen una relación de orden total. Si $0 < S$, diremos que S es una sección inicial positiva, análogamente S es negativa si $S < 0$.

Por el mismo razonamiento se puede definir una sección inicial estrictamente sobre *x* a la cual se llamara $S(x)$. Esto nos dice que entre dos secciones cualesquiera siempre se puede encontrar una tercera distinta a las anteriores tal que $S_1 < S(x) < S_2$, pero como $S(x)$ puede tomar cualquier valor significa que no se puede establecer un sucesor entre secciones, lo que induce la propiedad de *densidad* del orden sobre el conjunto S de secciones iníciales.

Por definición sabemos, que se llama sección inicial de **Q** a todo subconjunto S de **Q** tal que $S_1 \epsilon S \;\; y \; si \;\; S_2 < S_1$ se tiene también $S_2 \epsilon S$. Es inmediato que toda reunión o toda intersección de secciones iníciales es una sección inicial.

Definamos el conjunto S como

$$S = \bigcup S_i$$

S es una sección inicial y, además $(S_i)_i \in I$ implica que $S_i \subset S,$ es decir, $S > S_i,$ luego S es cota superior de I.

Por lo anterior, S es una cota superior de I. además, si S_0 es una cota superior de I, entonces $S_0 \geqq S$ esto implicaría que S es la mínima cota superior de I. es decir, que la sección inicial S_0 verifica $S_0 \geqq S_i$ para cualquier S_i del conjunto I. en otras palabras, que para cada $S_i \in I, \;\; S_i \subset S_0$.

Por hipótesis, se definió a S como la unión de todas las secciones iniciales del conjunto I. es decir, que $x \in S$ si y solo si $x \in S_i$ para algún S_i del conjunto I. Por construcción $S \subset S_0$; luego S es una sección inicial de **Q**, y como $S_i \in I$ implica $S_i \subset S$, es decir, $S_i \leq S$. Luego, la sección inicial S es cota superior de I.

Observación: notemos que $S_0 \geqq S$ y que esta relación se mantiene valida si en lugar de S_0 se pone cualquier cota superior de I. lo que nos permite concluir que S es la mínima cota superior de I.

Como S_i es acotado entonces S también lo es, y por tanto, S es diferente de **Q**.

Hemos evidenciado que el conjunto de secciones iníciales no solo es un conjunto denso, sino que además es acotado superiormente y el supremo existe. En conclusión, hemos caracterizado los dos axiomas de continuidad que se expuso en la (pág. 50), esto quiere decir que la propiedad del supremo permite hablar de convergencia sin recurrir a la noción de límite.

En últimas, esto nos garantiza que existe un conjunto continuo totalmente ordenado, es decir, que hemos completado el conjunto de los números racionales a través de la herramienta denotada como sección inicial, y a este conjunto continuo ordenado le llamaremos **R,** ahora solo basta definir la operación suma para luego establecer que el sistema al cual hemos llamado **R** satisface las propiedades de grupo**.**

Suma de secciones iníciales

Sea $S_1, S_2 \in \mathbf{R}$, Definimos $S_1 + S_2 = sup\{x + y: x, y \in \mathbf{Q},\ x < S_1,\ y < S_2\}$.

Observamos que el supremo existe, porque el conjunto no vacío en cuestión está delimitado por encima (por $p + q$, para cualquier p, $q \in \mathbf{Q}$, $p > S_1, q > S_2$). También está claro que si S_1 e S_2 son números racionales, entonces $S_1 + S_2$, bajo la nueva definición es igual a $S_1 + S_2$ donde + es la adición previa definida de los racionales.

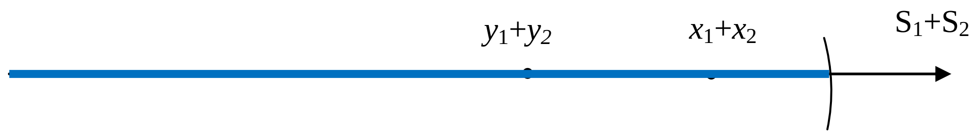

Figura 6

y es una sección de S formada por la adición de S_1 y S_2.

En otras palabras en la idea de suma; la idea central se halla en que si S_1 y S_2 son conjuntos de racionales menores que p y q respectivamente, la suma $S_1 + S_2$ con

$x \epsilon S_1$ y $y \epsilon S_2$ serán menores que $p+q$, de manera que la colección de tales sumas debe ser a su vez una sección inicial.

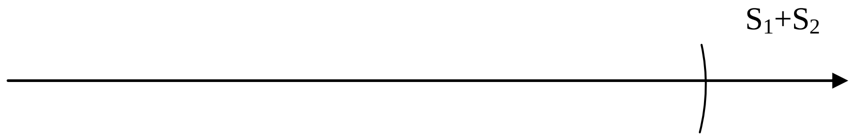

Figura 7

La adición entre secciones iníciales es:

1. $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$
2. $S_1 + (S_2 + S_3) = (S_1 + S_2) + S_3$
3. $S_1 + 0 = S_1$
4. Existe un único $w \epsilon \mathbf{R}$ tal que $S_1 + w = 0$ al cual nosotros denotamos como $w = -S_1$
5. Si $S_1 < S_2 \rightarrow S_1 + S_3 < S_2 + S_3$

Aquí solo se mostrará algunos de estos axiomas. Para este fin partiremos del siguiente Colorario que dice:

Corolario (Choquet, 1955, Cap. III, p. 26)

Para todo x de G se tiene:

$\sup\{r: r\epsilon D(u), \quad r < x\} = \inf\{r: r\epsilon D(u), x < r\} = x$

De lo anterior podemos afirmar que

$S_1 = \sup\{x \epsilon \mathbf{Q} : x < S_1\} = inf\{y \epsilon \mathbf{Q} : S_1 < y\}$

Mostremos que la proposición cuatro se cumple, esto significa que

$w = \sup\{-x: x \epsilon \mathbf{Q}, x < S_1\}$

Nosotros tenemos que

$$S_1 + w = sup\{y - x : x, y \epsilon \mathbf{Q}, x < S_1, S_1 < y\}$$

$$x < S_1, \ S_1 < y$$

por transitividad

$$x < y$$

De ahí que

$$0 < y - x$$

Asumimos que

$$0 < S_1 + w$$

Por la densidad de **Q** en **R** y si $x \in$ **Q**, $0 < x$ entonces ahí existe $n \in N - \{0\}$ tal que $\frac{1}{n} < S_1 + w$.

Luego por el lema 2.1 garantiza que allí existe $x, y \in$ **Q** tal que $x < S_1 < y$ y $y - x \leq \frac{1}{n}$ (Jech, 1999, p. 175). Por lo tanto, $S_1 + w \leq 1/n$ una contradicción esto muestra la existencia de un *w* que verifica la propiedad $S_1 + w = 0$.

Si también $S_1 + v = 0$, utilizando los axiomas (1,2 y 3)

$w = w + 0 = 0 + w = (v + S_1) + w = v + (S_1 + w) = v + 0 = v,$

Donde se concluye que la sección inicial *w* es la inversa aditiva de S_1 y es única.

Estructura de grupo sobre S.

Si $S_1 \in S$, $S_2 \in S$, el conjunto de números racionales $x_1 + x_2$, donde $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$, constituye una sección inicial de **Q**; que nosotros designaremos por $S_1 + S_2$; las igualdades $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ y $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$ hacen que la adición así definida sobre S sea conmutativa y asociativa. El elemento S(0) es el neutro para la adición y está dado por el conjunto S(0) = $\{x \in Q : x < 0\}$. Definimos ahora el simétrico (-s) de un elemento s de S: es inmediato que el conjunto de elementos simétricos de (-*x*) de los racionales de *x* tales que s < s(*x*) constituyen un elemento de S; y se denota (-s); se verifica que s + (-s) = s(0). En fin $S_1 \leq S_2$ se verifica que para todo S, se tiene $S_1 + S \leq S_2 + S$.

En resumen S con el orden y la adición que acabamos de definir constituye un grupo conmutativo totalmente ordenado; y las propiedades de cota superior y de densidad muestran que es continuo. Por otro lado, como los elementos de S están formados por todas las secciones iniciales, S mismo es el conjunto de los números reales.

Este conjunto numérico que hemos llamado **R**, no garantiza todas la propiedades clásicas de los números reales conocidas, entonces es necesario introducir la estructura de cuerpo y a este proceso Choquet le llama extensión algebraica de Grupo totalmente ordenado continuo a cuerpo.

Particularmente supongo que este tipo de construcción no se hace solo con el objeto de brindar un esquema diferente de extensión, sino que desea resaltar esos objetos y procesos que se omiten al completar directamente como cuerpo. Por ejemplo, las construcciones clásicas de completez de **Q**, son muy "inmediatas", ya que no se ve ni el ingreso de la topología, ni el ingreso de la segunda operación y como estas estructuras conviven y contribuyen en el aprendizaje en el joven. O quizás pueda darse el caso que esta extensión no propicie nuevos conceptos y lo único, que le interesa es llevar al joven al conocimiento de grandes conceptos a través del álgebra, es decir, que esta extensión en últimas sea una estrategia metodológica.

2.5 Los reales como cuerpo.

En el ítem anterior se mostró que independientemente de la estructura algebraica de cuerpo, se puede introducir adecuadamente nociones de conjuntos abiertos que permiten luego introducir una topología sobre el conjunto. Es claro que la noción de abierto no se hace totalmente explicita en esta construcción pero se puede inferir en el desarrollo de la construcción con las secciones iníciales.

Ahora nos interesa mostrar como Choquet extiende algebraicamente de grupo conmutativo ordenado continuo a cuerpo.
Choquet inicia su extensión algebraica a partir del siguiente teorema.

Teorema 1 (existencia y unicidad): sea G un grupo conmutativo totalmente ordenado continuo (aditivo).

Para todo elemento $e > o$ de G existe sobre G una estructura de cuerpo y una sola tal que su adición sea la de G, su unidad sea *e*, y tal que

$$1) \quad 0 \leq x.y \quad si\ 0 \leq x \quad y \quad 0 \leq y$$

El cuerpo con la estructura de orden de G es un cuerpo conmutativo ordenado. (Choquet, 1955, Cap. III, p. 33).

El interés de esta parte, es evidenciar que existe sobre G una estructura de cuerpo, y que esta estructura de cuerpo es conmutativa. Para este fin, comenzaremos mostrando que la aplicación de G sobre sí mismo establece un isomorfismo para la operación y el orden.

Suponemos que G posee una estructura de cuerpo que satisface la condición 1 y notamos xy a la multiplicación. Sea a un elemento mayor que cero de G. la aplicación definida por $x \to ax$ es un isomorfismo de grupo G sobre el mismo.

Si G y G' son dos grupos ordenados, un isomorfismo de G sobre G' es una aplicación biunívoca *f* de G sobre G' que sea un isomorfismo a la vez para la estructura de grupo y la estructura de orden. Es decir.

$f(x \top y) = f(x) \perp f(y);$ y $0 \leq f(x)$ entonces $0 \leq x$

Mostremos que se establece un isomorfismo para la operación, sea: $f : x \to ax$.
Debemos mostrar que se cumple por izquierda y por derecha la aplicación[9]

$f: G \to G$

$f(x) = ax$

$f(x + y) = a(x + y)$

$= ax + ay$

$= f(x) + f(y)$

Ahora probémosla en la otra dirección

[9] Recordemos que una aplicación es una regla que asigna a cada elemento del dominio, exactamente un elemento de otro conjunto (no necesariamente diferente del primero), el conjunto imagen. Ahora sobre Este conjunto se han definido operaciones (leyes de composición interna) puede existir o no una conexión entre la aplicación y sus elementos.

$g(x) = f^{-1}(x) = a^{-1}x$

$f \circ g(x) = a(a^{-1}x) = x\,;\;\; g \circ f(x) = a^{-1}(ax) = x$

Ahora mostremos que también se establece un isomorfismo en el orden

$$x \leq y \;\; \text{(I)}$$

$$f(x) \leq f(y) \leftrightarrow ax \leq ay$$

$$0 \leq ay - ax$$

$$0 \leq a(y - x)$$

$$a > 0 \; entonces \; a^{-1} > 0$$

$$\text{Porque } aa^{-1} = 1 > 0$$

$$0 \leq y - x$$

$$x \leq y$$

$$f(x) \leq f(y) \rightarrow x \leq y \;\; \text{(II)}$$

$$\text{(I) Y (II)}$$

$$x \leq y \; \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$< G, \leq > \overset{f\ iso}{\longleftrightarrow} < G, \leq >$$

Por el teorema de unicidad (Choquet, 1955, Cap. III, p. 23)

> Sea G y G' dos grupos conmutativos totalmente ordenados continuos (aditivo).
> Para cualquier $a \in$ G, $a \in$ G' con $a > 0$ y $a' > 0$ existe una representación creciente y solo una $f\colon G \rightarrow G'$ tal que $a' = f(a)$.
> Cuando $a' = 0, f \equiv 0; cuando\ a' > 0$ esta representación es un isomorfismo de grupo ordenado G sobre el grupo ordenado G'.

f es enteramente determinada por la dación de G y de a.

Efectivamente la aplicación de G sobre sí mismo establece un isomorfismo para la operación y para el orden, ahora solo falta mostrar que existe sobre G una tal estructura de cuerpo conmutativo.

Sea e un elemento arbitrario mayor que cero de G que notaremos con 1 la unidad buscada debe ser positiva debido $1 = 1^2$ y que es una consecuencia de la relación (1) y que todo cuadrado es positivo.

Para todo $a > 0$ existe por el teorema 1 de Choquet un isomorfismo f_a y uno solo de grupo ordenado G sobre G talque $f(1) = a$ para todo $b \epsilon G$ nosotros tendremos $ab = f_a(b)$. Para todo $a < 0$ nosotros tendremos $f_a = -f_{-a}$.
Para $a = 0$ nosotros tendremos $f_0 = 0$.

1. Recordemos $f_a \circ f_b = f_{ab}\, porque\ f_a(f_b(1)) = f_a(b)$ y por la formula se concluye que $f_a(b) = ab$ de lo anterior resulta.

$$a(bc) = f_a(bc) = f_a \circ f_b(c) = f_{ab}(c) = abc = (ab)c$$

Entonces decimos que verifica la propiedad asociativa.

2. Como f_1 es la aplicación idéntica, tenemos $1, b = b$ y esto se debe a que si: $1\epsilon\ G, 1 > 0$ existe $f_1 : G \to G$ tal que $f_1(1) = 1$.

Como $i_d : G \to G$

$i_d(1) = 1$

Entonces $i_d = f_1$

Observación

$1. b = f_1(b)$

$i_d(b)$

b

$1b = b$

$b. 1 = f_b(1) = b$ por la existencia de f_b. Entonces diremos que verifica la propiedad del elemento neutro o el idéntico del producto.

3. Para todo $a \neq 0$ f_a es un automorfismo algebraico de G; así que existe un elemento a' tal que $f_a a' = 1$.

$$1 = f_e = f_{aa'} = f_a(a') = aa'; \text{ Si solo si } aa' = 1$$

Entonces $aa' = 1$; esto conduce $a'a = 1$ porque si $a'a = u$

tenemos $aa'a = au$ o $a = au$, de otra manera $u = 1 = e$,

Se concluye que $u = 1 = e$ porque si

$f_a : G \to G$

$f_a(1) = a$

$f_a(u) = a$

Entonces $1 = u$.

$\text{por ende } f_a \text{ es biunivoca. de otra manera diremos que } a \text{ posee un inverso } a'$.

4. La relación $f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y)$, se escribe $a(x+y) = ax + ay$ $(a + a')x = ax + a'x$.

Del teorema de unicidad resulta que si $\gamma < \mu$ tenemos $\gamma x < \mu x$ entonces $0 < \mu x + (-\gamma x)$ para todo $x > 0$; en otras palabras se dirá que si $a + a' > 0 \ tenemos \ ax + a'x > 0x = ax + a'x > 0$ para todo $x > 0$.

La aplicación $x \to ax + a'x$ es entonces creciente, como es una representación de G en G ella es de la forma f_b y por el teorema de unicidad de isomorfismo y la definición del producto bx; como para $x = 1$ tenemos $ax + a'x = (a + a') = b$ o también que $(a + a')x = ax + a'x$.

Las propiedades de la multiplicación demostradas justamente muestran que ella determina sobre G una estructura de cuerpo. Veamos que el cuerpo es conmutativo.

5. Para todo $a > 0$ la aplicación $x \to xa$ es una representación creciente φ_a de G en *b* porque

$\varphi_a : G \to G$

$\varphi_a(x) = xa$

$\varphi_a(b) = ba$

$\varphi_a(x+y) = (x+y)a = xa + ya = \varphi_a(x) + \varphi_a(y)$

$porque \ \varphi_a(1) = a$

Ahora probémosla en la otra dirección

$h(x) = \varphi^{-1}(x) = xa^{-1}$

$\varphi \circ h(x) = (xa^{-1})a = x\ ; \ \ h \circ \varphi(x) = (xa)a^{-1} = x$

Ahora mostremos que también se establece un isomorfismo en el orden

$$x \leq y \text{ (I)}$$

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) \leftrightarrow xa \leq ya$$

$$0 \leq ya - xa$$

$$0 \leq (y - x)a$$

$$a > 0 \text{ entonces } a^{-1} > 0$$

$$\text{Porque } aa^{-1} = 1 > 0$$

$$0 \leq y - x$$

$$x \leq y$$

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) \to x \leq y \text{ (II)}$$

(I) Y (II)

$$x \leq y \leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

Por el teorema de unicidad φ_a es idéntica f_a.

$\varphi_a(1) = 1a = a$

$\varphi_a = f_a$

$\varphi_a(b) = f_a(b) \leftrightarrow ba = ab$

De otra manera se dirá $ax = xa$. Este resultado es inmediato y aplica para $a < 0 \;\; y \;\; a = 0$.

Con esto concluimos, que G es un cuerpo conmutativo ordenado continuo que satisface las relaciones $0 \leq a \; y \; 0 \leq x,$ entonces $0 \leq ax$ está enteramente demostrado.

En resumen:

Es bien sabido que Choquet en 1955 escribió un tratado de cálculo diferencial, que consistía en brindar una propuesta más "didáctica" de la construcción de los reales, pensada para la comunidad educativa a diferencia de la realizada por

Bourbaki que es un programa epistemológico[10] creado para una comunidad de matemáticos.

Como estrategia, Choquet completa el conjunto de los números racionales apoyado en las cortaduras como herramienta, pero antes de completar, Choquet hace varias construcciones, utilizando como proceso, el método genético.[11]

Primero extiende desde el conjunto de los números naturales con una operación (adición) a lo que le llamara enteros. La estrategia utilizada es partir de un conjunto ordenado **N** que verifica ciertos axiomas de orden y algebraicos, con base en él, se construye un grupo conmutativo ordenado (que en este caso son parejas ordenadas formadas de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, sobre ese objeto define una relación de equivalencia, la cual permite definir una nueva operación la cual se le llama resta), de similar forma extiende de **Z** a **Q**.

Para completar **Q**, lo primero que hace Choquet es definir una cortadura en un solo sentido, a la que nombra sección inicial, esta sección inicial desempeña un papel muy relevante en el proceso completez, ya que plantea una teoría de convergencia que no recurre ni a lo noción de limite ni a la noción de sucesiones.

Introduce la estructura topológica a través de la relación de orden, en base a esta misma relación de orden verifica que la secciones iníciales son densas y que además verifican la propiedad del supremo. Es decir, garantiza que el conjunto de secciones iníciales es continuo y como paso seguido muestra que estas secciones iníciales verifican los axiomas de grupo y por último apoyado en la noción de función extiende a cuerpo. Es decir captura a **R** como objeto final. A pesar de utilizar conceptos de algebra y orden, ésta es una propuesta es más educativa, porque trata de conducir al estudiante a las grandes coyunturas del pensamiento matemático, sin saturar al estudiantado con grandes conceptos de álgebra

[10] Ver capítulo 1
[11] El método genético es aquel que obtiene sus resultados por inducción, por varias etapas. Por ejemplo en el caso de los conjuntos numéricos, consiste en engendrar el concepto mucho más general del número por medio de extensiones sucesivas del concepto simple de número natural.

abstracta. Además, propiciando este conocimiento a partir de un lenguaje como la teoría de conjuntos.

CAPITULO 3.

ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CONSTRUCCIONES

En primer lugar, queremos mostrar de manera esquemática al lector, cómo algunos modos de concebir las matemáticas aportaron en la germinación y caracterización de la noción de estructura. En segundo lugar, en este análisis comparativo se tratará de considerar algunos aspectos de la propuesta planteada por Bourbaki y la visión educativa de Choquet de las matemáticas. Este esquema permitirá entablar similitudes y diferencias a nivel general. Por último, se comparan las construcciones realizadas por Bourbaki y por Choquet, en ella se verá como ingresan algunos aspectos conceptuales en el proceso de completez y como estos aspectos pueden contribuir en los procesos de enseñanza de los futuros docentes. Quizás sirva como estrategia de aula, en la que el docente tenga en cuenta las dificultades que se pueden suscitar al tratar de enseñar los números reales; esta estrategia de aula no debe consistir en mostrar al estudiante cada una de las dificultades inherentes del tema, debido a que se puede confundir al estudiante, lo que si creemos que se debe hacer, es utilizar este cúmulo de experiencias y utilizarla como herramienta concientizadora, de tal forma, que le recuerde que el concepto de número real no es tarea fácil y mucho menos, un concepto que se pueda aprender y apropiarse completamente de la noche a la mañana.

3.1 Inicios y caracterización de la noción de estructura.

El aspecto de las matemáticas antes del siglo XIX y después de él, es muy diferente, aunque es cierto que la herencia de los siglos XVIII y XIX constituye la sólida base sobre las que se empieza a gestar está diferencia: matemática como herramienta para resolver ecuaciones versus matemática fundamentada analíticamente.

Entre el siglo XVIII al siglo XIX, el cálculo habría adquirido un desarrollo extraordinario, pero, ese desarrollo puramente formal y algorítmico no estaba completamente fundamentado por un sistema conceptual analítico, es decir, el cálculo estaba rodeado de justificaciones geométricas que no brindaban el rigor que se esperaría de las matemáticas. Pero este panorama o estado cambió a finales del siglo XIX, con los trabajos de Cantor y Dedekind, quienes encontraron en la aritmética y la teoría de conjuntos una base rigurosa para la continuidad de los números reales.

Por otro lado, los aportes de Riemann en los fundamentos de la geometría en 1854 y la notable síntesis que establece Hilbert en este campo inspiran grandemente a la escuela axiomática del siglo XX.

> También durante el siglo XIX la renovación de los métodos de estudio de las curvas y superficies algebraicas suscita el desarrollo de una disciplina nueva: la geometría algebraica, que tomará su forma definitiva en el siglo XX y conocerá entonces un desarrollo rápido. La geometría diferencial moderna será obra de los trabajos fundamentales de Monge, Gauss y Riemann. (Collette, 1998, p. 277)

De manera semejante el álgebra atravesó un periodo de transición. Para el álgebra de principios del siglo XIX, el problema central seguía siendo la resolución de ecuaciones, sin embargo, muchas de esas ecuaciones y sus soluciones debieron esperar hasta que teorías como la de grupos y anillos estuvieran suficientemente elaboradas; y estos avances llegaron en manos de matemáticos como Gauss, Abel, Kronecker, Caley, Klein entre otros.

Gauss[12] hizo varios aportes a la matemática, y a la física. Sus aportes le permitieron ser considerado como el príncipe de las matemáticas y destacarse como uno de los más grandes científicos de la época (Collette, 1998, p. 300).

[12] En el libro Historia de las Matemáticas de Jean –Paul Collette; se hace una descripción muy detallada de la vida de Gauss y sus aportes más significativos a la ciencia matemática, la matemática aplicada y la física. Y como sus métodos frecuentemente incursionaban en otras disciplinas que se creían en ese momento independiente.

Además contribuyo en la formación de estudiosos de la talla de Riemann y Dedekind, pero su más grande aporte a las matemáticas fue permitir la conexión de las diferentes disciplinas de las matemáticas con sus técnicas de la teoría de números. A Gauss se debe la noción de grupo, contenida en sus memorias en las que reduce el estudio de las ecuaciones algebraicas al de grupos de permutaciones asociados, mostrando así la imposibilidad de la resolución general por radicales de las ecuaciones de grado igual o superior a cinco, y abriendo de este modo una nueva época del álgebra. Es decir, Gauss hizo evidente cambiar la presentación tradicional de las matemáticas pues con mayor frecuencia había técnicas de la teoría de números que se aplicaban a otras disciplinas de las matemáticas y se mostraban útiles en ella. De esta manera, fue poniéndose en evidencia a lo largo del siglo XIX que lo más relevante de una teoría no era la naturaleza del objeto, sino las conexiones entre ellos. En otras palabras, la capacidad mental de relacionar un objeto con otro. Es así como va surgiendo las primeras estructuras algebraicas. En palabras de Bombal (1988):

> (…) el punto de vista clásico distinguía las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los objetos que estudiaban: la aritmética es la ciencia de los números, la geometría estudiaba los objetos en el espacio, el análisis, las funciones, etc. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una de estas "parcelas" de las matemáticas se mostraban útiles en otra "parcela". De esta forma, a lo largo del siglo XIX fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la naturaleza de los objetos estudiados, sino las relaciones entre ellos, así van surgiendo, no sin dificultad las primeras estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos, etc); que permiten agrupar bajo una misma denominación conjuntos formados por elementos de naturaleza muy distinta, pero que gozan de una serie de relaciones y propiedades comunes. (p. 206)

Por así decirlo, en manos de estos señores, se abre el camino hacia nuevas cimas o más bien, a lo que se conocerá como matemática moderna. Cabe resaltar que Évariste Galois, fue el primero en utilizar el término "grupo" en un contexto matemático y la noción abstracta de grupo aparece con Weber en 1895, pero el grupo como objeto aparece con Emily Noether; quien es considerada la Madre del álgebra abstracta, pues ella no reposó sus estudios en las soluciones particulares de una ecuación sino que trabajo sobre la estructura algebraica del objeto.

Todos estos aportes tienen una base común, la gestación de la noción de estructura que no se da estrictamente en el siglo XIX si no que se empieza a gestar mucho antes, aproximadamente en 1800. Pero, lo que sí es cierto es que sin los aportes de Emily Noether en el estudio de los grupos conmutativos como objeto matemático; la axiomatización de la geometría por Hilbert, el tratado de Gauss y Galois sobre la resolubilidad de las ecuaciones y su manera general de resolverlas, más los aportes de Dedekind sobre los números naturales; entre otros aspectos que no se nombran, debido a que no es el objeto de este trabajo de grado; las matemáticas no hubieran tenido tal transición a finales del siglo XIX y concretización en siglo XX en manos de Bourbaki.

Por ejemplo, en Dedekind se pueden concebir definiciones las cuales se desprenden notoriamente de la naturaleza del objeto como esta:

Una estructura matemática tiene su punto de partida en la aceptación de términos no definidos (primitivos o primarios), desde los cuales se definen los axiomas que son proposiciones que se admiten como verdades y de los que se deducen teoremas, como consecuencia de la aplicación de razonamientos lógicos (Dedekind, 1998, p. 118).

Sin embargo, la idea anterior no se caracterizó en Dedekind, ni en ninguno de sus predecesores pero lo que sí es cierto es que labraron, abonaron el camino, que cultivó y cosechó efectivamente Nicolás Bourbaki.

En los años sesenta Bourbaki caracterizó el estructuralismo matemático, el cual se dio a conocer por diferentes autores a través de tratados, estudios, conferencias, revistas, etc. y como consecuencia de ello se publicaron muchos libros que apostaron y contribuyeron a la disciplina e incidieron en la enseñanza de la matemática. Por esta razón los libros de texto de Nicolás Bourbaki son más que simples objetos inanimados utilizados para la enseñanza de cursos en las universidades, sino una evidencia rigurosa de una teoría muy buena que utilizó como base la teoría de conjuntos que se formalizó con años de desarrollo. Los libros de Bourbaki no son un recuento del pasado, sino un trabajo vivo en perpetuo movimiento que mira siempre hacia el futuro desde la teoría de conjuntos. Además, incorporó grandes progresos de la época para formar la poderosa máquina llamada estructura, que permite estudiar familias de objetos relacionados entre sí.

Observación: Aunque haya dejado de lado teorías más fuertes, como la de categoría.

3.2 La propuesta planteada por Bourbaki.

La propuesta de Nicolás Bourbaki se puede estudiar inicialmente en el artículo "La arquitectura de las matemáticas"[13]. Este se publicó en 1948 y fue escrito por Dieudonné y se constituye en uno de los artículos de divulgación de mayor influencia a nivel internacional.

Se puede decir que la propuesta epistemológica de Bourbaki consiste en la existencia de una sola matemática y que la herramienta fundamental utilizada para llegar a esta unidad ha sido el método axiomático. Esta unidad matemática no se encuentra en el mundo de la experiencia o en otras áreas del conocimiento. La unidad de la matemática es buscada desde la propia actividad matemática, es decir, en la forma como un matemático hace matemática.

Bourbaki (1976) dice

> (…) Hoy, por el contrario, creemos que la evolución interna de la ciencia matemática, a pesar de las apariencias, ha estrechado la unidad de sus partes diversas y ha creado una especie de núcleo común central más coherente de lo que ha sido nunca. Lo esencial de esta evolución consistió en una sistematización de las relaciones existentes entre las diversas teorías matemáticas y se resume en una tendencia que se conoce generalmente bajo el nombre de "método axiomático" (p. 38).

[13] Bourbaki, Nicolas. *La Arquitectura de las Matemáticas.* Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático. Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1976. p.36-49.

El método axiomático es para Bourbaki una forma de razonar, un estilo de trabajo propio que permite la identificación de las relaciones existentes entre los diversos objetos matemáticos, es como una especie de “herramienta” interna que ayuda a la sistematización de propiedades comunes a diversas teorías. Es aquello que permite poner en una relación más universal propiedades que solo pertenecían a una clase especificada de objetos o teorías.

Por otro lado, es importante señalar que el método axiomático no constituye una novedad de la propuesta de Bourbaki. Ya que hay varios trabajos preliminares en este sentido, como los trabajos de Hilbert en la axiomatización de la geometría (1898), los trabajos de Frechet que dieron lugar a la axiomatización de la topología por Hausdorff (1927) entre otros. Sin embargo, es con Bourbaki donde se considera el método axiomático como un puente entre las distintas teorías. Es decir, la diferencia sustancial entre el método axiomático de Bourbaki y sus antecesores es que el método axiomático de Bourbaki no busca solo las relaciones entre los objetos del álgebra por un lado y la geometría por otro, sino indagar sobre todas aquellas relaciones comunes a las distintas teorías.

En últimas, el método axiomático no es la propuesta de Bourbaki concretamente, la propuesta de Bourbaki es lo que se conoce hoy como la unidad de las matemáticas. Sin embargo, esta unidad no se puede concebir sin las características estructurales, es decir, sin la estructura. La estructura es el objeto que además de darle forma a la teoría como lo hace el formalismo lógico, también permite ver a través de las paredes propias de la teoría y permite dilucidar cómo se comporta una teoría respecto a otra.

Los Bourbaki han identificado tres estructuras madres, así denominadas porque son las estructuras matemáticas más generales; son las algebraicas, las orden, las topológicas. Hay, por otra parte las estructuras múltiples, en las que intervienen, a la vez, dos o más estructuras simples, no simplemente yuxtapuestas, sino combinadas orgánicamente, mediante axiomas que garantizan la compatibilidad de las operaciones. Ninguna estructura madre puede reducirse a las otras (son irreductibles entre sí), ellas pueden combinarse entre sí o bien, considerarse individualmente, pueden relacionarse generando otras estructuras. Precisamente la combinación y la diferenciación son los procesos a partir de los cuales es posible construir, desde las estructuras madres, todas las otras estructuras clásicas de la matemática. Por ejemplo: la combinación de estructuras topológicas y algebraicas obtenemos los grupos topológicos o simplemente condicionando una estructura tenemos otra estructura como los grupos finitos no conmutativos.

En últimas, el trabajo de los Bourbaki consistió en unificar las diversas teorías matemáticas a través de la noción de *estructura*[14]. La estructura se consideró como ese ente orgánico de naturaleza abstracta, que permitió articular la enorme eclosión de distintas teorías matemáticas, que tuvieron lugar sobre todo a lo largo del siglo XIX y principios del siglo XX.

Desde este punto de vista, el matemático sólo debe tratar de ubicar en los objetos de estudio, relaciones que satisfagan los axiomas de un tipo de estructura conocida y de inmediato posee todo un arsenal de teoremas generales que se satisfacen en esa estructura, mientras que antes, según Bourbaki, él debía enfrentarse a estas demostraciones por sus propios medios y a lo mejor involucrando hipótesis inútiles y restrictivas, debidas a las particularidades.

Como lo mencionamos anteriormente, con ésta propuesta de unificación se borran notoriamente las fronteras entre una y otra disciplina.

Diremos aún algunas palabras sobre su incidencia en la enseñanza: la propuesta epistemológica de Bourbaki va dirigida al matemático, el que realiza investigación, para servir como obra de referencia y consulta. Como señala Dieudonne, nunca se pronunció Bourbaki a favor de que los conceptos descritos en su tratado pudieran introducirse a un nivel inferior al de graduado universitario, y mucho menos en la escuela primaria o secundaria. Sin embargo, esta propuesta

[14]Bourbaki (1976), la *estructura* está conformada básicamente por un conjunto de axiomas, los cuáles son propiedades que se verifican en distintos conjuntos, en los cuales se tienen definidas ciertas operaciones o relaciones entre los elementos del conjunto.

fue de manera más o menos cuidadosa introducida a estas estancias de la educación, arrojando más resultados negativos que positivos, sin embargo un eminente matemático de la Sorbonne defiende a Bourbaki con su visión de la matemática y lo “redime” de toda culpa, este eminente matemático es el que expondrá a continuación.

3.3 La concepción educativa de Choquet.

La perspectiva educativa de Gustave Choquet se puede rastrear en el artículo *L’analyse et Bourbaki* (Choquet 1962). Choquet fue el primero en llevar la propuesta de Bourbaki a la enseñanza universitaria en Francia, a través de su libro de *Cours de Calcul Différentiel et Intégral* de la Sorbonne, permeado por una fuerte postura bourbakista.

De similar forma que Bourbaki, Choquet establece una propuesta matemática, pero su diferencia radica en que esta propuesta tiene un gran interés por la educación y desde allí hace aportes a la enseñanza, pero no hace ninguna propuesta educativa formal. En otras palabras, que no está directamente encaminada a la ciencia matemática, sino para un grupo menos especializado (estudiantes de secundaria, universitario e incluso la primaria).

Choquet (1962) consideraba necesario buscar una especie de “adaptación” al programa de Bourbaki, en lenguaje moderno una transposición didáctica. Ya que este programa no solo se encargaba de dotar a la matemática de un lenguaje común, sino que ofrece ante todo sencillez, solidez. En otras palabras, la propuesta Bourbaki era perfecta para el matemático y para los estudiantes de todos los niveles (Choquet, 1962, p. 131), aunque para estos últimos, había que brindar una etapa de reconocimiento y familiarización. Esta idea, antes expuesta difería mucho de los programas más o menos construidos para implementar la propuesta hecha por Bourbaki. Pues las propuestas construidas hasta ese momento no tenían en cuenta la diferencia entre el estudiante investigador y el simple estudiante. Al no hacer esta distinción, éstas propuestas tenían saltos que perjudicaban a la enseñanza de las matemáticas e incluso a la disciplina matemática.

Choquet consideraba, que un programa educativo no debía estar ceñido a copiar tal cual el programa de Bourbaki (Choquet 1962, p. 132), sino que debía seguirle y plantear estrategias para la enseñanza.

¿Cómo se podían construir modelos educativos para todos los niveles, que siguieran la propuesta de Bourbaki sin arrollar al estudiante?

Para Choquet es una necesidad y una problemática del momento que el estudiante reconozca y adquiera esta herramienta y da algunas razones para una renovación urgente de las matemáticas a todos los niveles, universitario, secundario, y primario (Choquet, 1962, p. 131).

La primera a grandes rasgos, consiste en mostrar al estudiante las grandes ideas que ayudan a simplificar el trabajo y como estas construyen puentes entre una teoría y otra.

La segunda, es construir libros de texto que ayuden a disminuir la grieta existente entre la disciplina matemática y la enseñanza de la matemática, es decir, libros de texto que utilicen los lenguajes, términos del momento, obviamente un nivel más bajo que la propia teoría. La tercera, hace referencia, en que hace mucho tiempo se viene aceptando que la matemática debe ser parte del acervo personal del profesional indistintamente de ser matemático o no. A su vez, ésta permite y establece conexiones lógicas con otras disciplinas. Obviamente la matemática moderna puede hacer muchas más contribuciones con el menor desgaste.

Para conservar una justa perspectiva de Choquet nos hace falta decir, que Choquet no enuncia un programa de revolución educativa; sin embargo, tiene unas luces respecto a ella y entre estas ideas afirma que es necesario acostumbrar al estudiante a un lenguaje de los conjuntos, debido a que es muy práctico, y muchos estudios del momento afirmaban que son de agrado para el niño. Como segundo aspecto los niños debían reconocer lo antes posible y correctamente la noción de función en sus diferentes variaciones, porque ésta tiene la particularidad de aplicarse en diferentes dominios matemáticos. Como tercer paso, presentar gradualmente al estudiante los diferentes tipos de estructuras, en niveles muy variados, y esto debe realizarse desde el principio de la enseñanza. Como cuarto caso, no se debía desconocer la complejidad y generalidad de estos aspectos. Por ello, al estudiante no se le debe saturar de generalidades inmediatamente, sino que hay que llevarlos por el camino más corto hacia los teoremas fundamentales. Los cuales engloban una gran cantidad de casos particulares de aplicación inmediata (Choquet, 1962, p. 133). En últimas, el docente debe establecer procesos de enseñanza.

Con la siguiente cita se resume la visión de Choquet sobre las matemáticas.

> Toda actividad matemática se descompone en ciclos, grandes o pequeños, en cada uno de los cuales podemos reconocer, *grosso modo*, las siguientes etapas: observación, matematización, deducción y aplicaciones. Cada una de estas cuatro etapas es fundamental; en particular, una enseñanza puramente deductiva sería algo traumatizante y estéril. (Choquet, 1962, p. 134)

Es notable que Choquet a pesar de tener como punto esencial el programa planteado por Bourbaki, él tiene una perspectiva educativa en la que parece esencial concebir, una enseñanza- aprendizaje cuyas grandes líneas estén penetradas por los cuatro estadios (observación, matematización, deducción y aplicación) necesarios para la adquisición de habilidades cerebrales, que permiten pasar de un nivel de pensamiento a otro.

3.4 Análisis comparativo con fines educativos.

La comparación de algunos elementos conceptuales de las construcciones nos permitirá considerarlas como estrategia educativa.

Ambas construcciones comparten tres ideas centrales: la primera es que se puede completar **Q** sin tener en cuenta todas las propiedades algebraicas de los cuerpos.

Es decir, desde una estructura de grupo aditivo totalmente ordenado se puede alcanzar la completez. La segunda es que estas construcciones conceden un lugar de privilegio a la topología, la cual se introduce a partir de una relación de orden; asunto que es de importancia a nivel educativo, ya que ésta permite ver a los números reales como un objeto no solo algebraico. Y la tercera, y una de las más importantes, es que dejan para lo último la completación algebraica de grupo a cuerpo.

Choquet sigue un camino de "construcción" relativamente sencillo respecto al dado por Bourbaki, debido a que Choquet utiliza solamente dos estructuras sobre el conjunto de los números racionales: la algebraica y la de orden. Mientras que Bourbaki aparte de estas dos, considera las estructuras topológicas y uniformes.

Estas dos construcciones son muy prácticas[15], y esta practicidad se gana al garantizar una relación de orden total sobre **Q**; pues al establecer en **Q** una relación de orden total, esta relación no sólo permite introducir la estructura topológica, sino que además, garantiza la validez del supremo en la construcción de Choquet, y la existencia de los filtros mínimales en Bourbaki, que son aspectos relevantes para la convergencia.

Así, ambas construcciones recurren a definir los números reales como el método o la herramienta que puede detectarlos, o mejor dicho como el objeto que revela su existencia. Es decir, el número real es un filtro de Cauchy o sección inicial, pero realmente lo que está implícito es que el número real es a lo que convergen los filtros o el extremo superior de una sección inicial. En últimas la idea central de número real la juega la convergencia. La clase de todos los filtros de Cauchy convergentes constituyen un punto de **R**.

Por otro lado, Choquet, se vale de la densidad de **Q** en el orden de **R**, así entre el "desconocido" número real y un racional menor que él, siempre hay otro racional, por lo que considera todos los racionales menores que el real para definirlo.

[15] Entiéndase aquí por práctico como: una herramienta que permiten definir nociones importantes en el proceso de construcción.

Es claro, que Bourbaki y Choquet tienen formas diferentes de definir un espacio completo, Bourbaki hace de los números racionales un espacio uniforme de forma natural (para cada número racional positivo α, se define un entorno U_a por $U_a = \{(x, y): |x - y| < a\}$ y toma la uniformidad como la colección de dicho entornos), y luego se introducen los reales.

Mientras que Choquet, toma las uniones de todas las secciones iníciales y prueba que el supremo existe.

Choquet con sus secciones iníciales y Bourbaki con sus filtros, recurren a un enfoque conjuntista donde su idea principal está basada en una relación de orden, a pesar de que en Bourbaki la exigencia sea mayor.

Por otro lado, la completación de Bourbaki y Choquet responde fielmente a un esquema de extensión, recordemos que en el capítulo 2 se dijo, que las extensiones no son objetos vacíos sin finalidad. Las extensiones son el mecanismo que permite dotar o construir nuevas operaciones en base a unas previas, y que cada una de estas extensiones tiene un argumento que es la justificación, por ejemplo, la validez del supremo depende de la evidencia, y este argumento dice que el conjunto debe tener una relación de orden total. En otras palabras, No existe extensión sin punto de llegada, el que extiende o completa tiene en mente el resultado al que desea llegar.

Ahora, pasemos a otro esquema de comparación, que consiste en destacar y reivindicar los objetos utilizados en las construcciones antes mostradas.

Vecindad vs secciones iníciales.

En el libro de análisis de Choquet se exhiben la siguiente definición de sección inicial.

Se llama sección inicial o abierta de **Q** a toda parte S de **Q** tal que:

1. $S \neq \emptyset$ y $S \neq Q$
2. $(x \in S$ y $y \leq x) \rightarrow y \in S$
3. S no tiene elemento superior

Veamos a través de ella, la estrecha relación entre sección inicial y vecindad.

La definición anterior se puede expresar a través de vecindades puesto que los axiomas anteriores se pueden precisar de esta manera, tomemos un punto 0 en la recta, y consideremos el conjunto S formado por todos los números reales ``ubicados" a la izquierda de este punto. S = { $x < 0$ } es una sección inicial, pero al mismo tiempo este conjunto es un abierto con la topología del orden, porque si $x \in S$ entonces, por ejemplo, $x \in (x-1, x) \subset$ S. Luego S mismo puede utilizarse como el abierto contenido en sí mismo ($S \subset S$) entonces, $x \in S \subset S$ por la definición de vecindad.

> Sea (X, G) un espacio topológico. Decimos que V$\subseteq X$ es vecindad de $x \in X$ la notaremos V_x si y solo si existe $U \in G$ tal que $x \in U \subseteq V_x$.

S es una vecindad de *x* con la topología del orden. Es decir, son intervalos abiertos y acotados por derecha, que conforman *vecindades* alrededor de un punto arbitrario. Porque son conjuntos que contienen un conjunto abierto que contiene a ese punto. Esto muestra que la cortadura llamada sección inicial definidas por Choquet, guardan de manera intuitiva un vínculo con la noción de vecindad.

Otra similitud, es que las secciones iníciales por Choquet y las vecindades por Bourbaki responden a la necesidad subyacente de todas las construcciones de **R**, y es desprender los reales de lo geométrico.

Filtros vs sección inicial.

¿Cuál es la diferencia o similitud entre filtro y sección inicial? La similitud que guardan estas dos herramientas, es que ambas son el objeto intermedio que hay entre un número real y un racional. Las secciones iníciales son el mecanismo el cual pone de manifiesto los "huecos" de **Q**. Una sección inicial es una escisión de **Q** en una clase. Es decir, una ruptura.

Los filtros resultan ser otra herramienta para denunciar "huecos" en **Q**, ya que existen filtros que tienen todos los elementos para ser convergentes y, sin embargo, puede resultar que el límite al que debería tender no está, porque no existe como numero racional. Por ello, ésta aproximación permite definir **R** como la clase de filtros de Cauchy convergentes.

La ventaja del conjunto de secciones iníciales respecto a los filtros, es que la secciones iníciales no necesitan de una estructura uniforme para permitir la convergencia en un espacio topológico. Pero se pierde una característica propia de los espacios uniformes, que es la posibilidad de conocer la organización de cada número real.

Si hilamos un poco más fino, nos damos cuenta que una sección inicial puede tomarse como un filtro de vecindades. En el apartado anterior de manera muy breve se mostró que la sección inicial S era vecindad de x en la topología del orden, y de manera semejante es posible mostrar que esta sección inicial también es vecindad de todo punto que le pertenece.

Luego se podría mostrar que las secciones iníciales cumplen con los axiomas uno, dos y tres de Hausdorff de vecindades. La sección inicial sería un filtro de vecindades.

De lo anterior, concluimos lo siguiente: Choquet utiliza una construcción que en principio parece aportar muy pocas herramientas conceptuales, sin embargo, entre más indagamos nos damos cuenta que muchos conceptos que utiliza Bourbaki en su construcción aquí también reposan de una forma implícita, y la razón de exponerse de esta manera y no al carácter de Bourbaki, es que Choquet la piensa desde una perspectiva más educativa, es decir, desde una representación más accesible al estudiantado de los primeros semestres. Mientras que Bourbaki plantea dentro de los grandes nociones del pensamiento matemático.

Ambos plantean potentes construcciones, puesto que estas presentaciones no ocultan la intervención de conceptos de naturaleza topológicas.

¿Cuál es la motivación que tiene Bourbaki y Choquet para completar con una estructura de grupo y luego extender algebraicamente a cuerpo?

Recordemos que cada estructura aporta su propio lenguaje, completamente cargado de intuiciones particulares de la propia teoría. Esto indica que completar el conjunto de los números reales como grupo topológico es inmediatamente diferente a completarlo como cuerpo topológico, ya que cambia la perpectiva como el investigador se aproxima al objeto. Es decir, plantear un tipo diferente de completez es ponerle un lente distinto al investigador.

Descubrir un tipo diferente de presentación de los reales en la forma como se de, es descubrir una nueva forma de mirar el mismo fenómeno, es dar una dirección inesperada a los pensamiento establecidos sobre el mismo objeto, la innovación y las nuevas formas de aproximación al objeto, dan cabida a nueva luz en el paisaje matemático en el que nos movemos. Es decir, una forma de enriquecer el objeto.

En últimas, completar a partir de la estructura de grupo como lo hace Bourbaki y Choquet es romper el esquema habitual, lo cual permite dar pasos y descubrimientos que antes no se podían percatar. Esto constata fielmente que la completez a través del grupo y no a través del cuerpo no es un simple capricho, si no una innovación en la intuición del matematico.

Dentro de la innovaciones que proponen estas dos construciones, es permitir a la topología invadir lo que hasta entonces era el reino de lo *discreto*, de lo *discontinuo* por excelencia. Es decir, ampliar la concepción de **R**. Tambien permite cambiar la concepción de muchos estudiantes, que creen que la completez solo es posible a partir de un cuerpo ordenado.

Ahora, guiados por la concepción matemática de Bourbaki, intentemos pues pensar otra extrategia por la cual Bourbaki y Choquet completan con la estructura de grupo y no la de cuerpo. Sin llegar a contradecir lo antes dicho.

Recordemos que un objeto matematico se puede concebir de lo simple a lo complejo, y de lo general a lo particular. Pero lo particular y lo general dependen de la cantidad de axiomas que se utilice, lo que quiero decir es, que cuando Bourbaki completa a **Q** con una sola operación, lo que está garantizando es un menor número de axiomas, lo que implicaría que este conjunto numérico es estrictamente más general que el conjunto de números reales estudiado tradicionalmente. Luego, cuando extiende de grupo a cuerpo es permitir al conjunto de los números reales ganar una cosecha de nuevas consecuencias que antes no se tenían, que obviamente enriquecen la disciplina y al mismo investigador.

Para conservar una justa perspectiva, nos hace falta, después de este rápido esquema, añadir enseguida que sólo debemos considerarlo una aproximación que tiene como único fundamento las interpretaciones hechas a la construcciones conocidas y la concepción de Bourbaki.

A modo de conclusión, Bourbaki buscaba la unidad de las matemáticas y esta unidad no radicaba en las particularidades, lo cual implica, que en la forma como se concevían los reales tradicionalmente daban a mostrar a **R** como una particularidad, que no era propia de la concepcion epistemologica de los Bourbaki, pero dejarlo de lado, era abandonar un momento crucial en los fundamentos de las matemática. Era claro que se debía incorporar, y la manera más sencilla de incorporarlo sin llegar a romper su concepción, creo que fué generalizar, y esta generalidad se gana al completar con una operación que permite introducir el orden de manera natural.

Aportes de estas dos construcciones a la formación de educadores.

En las carreras de matemática, es muy difícil ver en sus cursos de los primeros años, que se establezcan las relaciones de **R** con su propiedad de continuidad de manera diferente a la presentación axiomática. Esta manera de exposición, que diluye la necesidad de dar cuenta de la objetivación de **R**, se ha convertido en una manera "natural" de despojar a **R** de muchas riquezas conceptuales. Este tipo de presentación que se ha validado y utilizado a lo largo de los años no permite ver la diversidad y complejidad de conceptos que la subyacen.

¿Qué hacer? La respuesta no es fácil, pero una primera aproximación a ella es utilizar las construcciones hechas por Bourbaki y por Choquet como herramientas educativas, recordemos que estas dos construcciones resaltan el papel de las diferentes estructuras, en particular la topológica. A primera vista, esta propuesta pareciera causar más problemas que soluciones porque rompen el esquema habitual de presentación, dando participación a la estructura topológica que en las presentaciones axiomáticas no se destacan y sin duda muchos no aceptarían, ya que se escapa al esquema conocido. Pero si vemos la realidad, ambas construcciones son importantes e innovadoras por que muestran ese ambiente que muchos excluíamos, que queda oculto bajo el formalismo axiomático. Además de potenciar un acercamiento de **R** a la escolaridad no solo axiomático.

Vimos a **R** no solo como un conjunto netamente algebraico, sino como un conjunto en el cual no se puede priorizar en una estructura más que en otra, pues todas ellas juegan un papel relevante en lo que es **R**. En otras palabras, hay que respetar las estructuras ya que cada una de estas estructuras contribuye a enriquecer la estructura mental de los estudiantes y a prepararles para su futuro.

Lo que debe entender el futuro docente, es que las estructuras de **R** no se pueden ver como procesos aislados y descontextualizados. Y que la apropiación de **R** no consiste en la repetición de procesos y mecanización del lenguaje.

Otro aspecto, es que un licenciado en matemática o un matemático, debe tener claro que las construcciones de **R** planteada por Bourbaki y por Choquet, responden a niveles y procesos diferentes dentro de la formación del profesional. Y que una buena apropiación de estos niveles y procesos es determinante para la buena formación.

Por otro lado, este esquema de construcción nos muestra que los acercamientos a la escolaridad de los números reales, no sólo se debe establecer, y potenciar a partir de lo axiomático, pues se pierden nociones tan importantes como las topológicas.

El mismo análisis nos permite sugerir un orden de implementación de estas dos construcciones en la enseñanza universitaria, ya que en el proceso de construcción se ha podido detallar, que pese a que la noción de número no se puede desprender de las propiedades, el número real definido por Bourbaki es de un orden superior al definido por Choquet, y no solo la noción de número, si no las estructuras y herramientas que constituyen la construcción.

Por ejemplo, $\sqrt{2}$ para Choquet es una sección inicial, es decir, todos los números racionales menores que "algo", en otras palabras, el conjunto formado por todos los menores o iguales que cero unido con el conjunto de los números cuyo cuadrado es menor que 2. Y Para Bourbaki $\sqrt{2}$ (o cualquier punto de **R)** es simplemente una clase de filtros de Cauchy convergentes.

4. CONCLUSIONES

La problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de los números reales es de completa actualidad. Pocos aspectos de su extenso y productivo proceso de constitución como objeto matemático se pueden dilucidar en las propuestas de enseñanza de los primeros años de universidad. En los cursos de matemáticas de los primeros años, los reales son presentados generalmente de manera axiomática, lo cual no permite ver y comprender la diversidad y complejidad de conceptos que la subyacen. Generalmente esta presentación oculta la intervención de conceptos de naturaleza topológica esenciales en la construcción de **R**.

Esto acarrea consecuencias en la formación del futuro docente, debido a que este tipo de presentación no propicia, o ha dejado de proporcionar a los estudiantes todos los elementos topológicos que debería proporcionar. Es decir, los futuros docentes no están recibiendo una comprensión más amplia y significativa de los números reales.

Hoy se presenta este trabajo de grado, que proporciona un primer acercamiento a las construcciones modernas de Bourbaki y Choquet; y como estas construcciones pueden constituirse en ese objeto matemático capaz de proporcionar algunos elementos para esa comprensión significativa que se pierde con las presentaciones tradicionales.

Naturalmente se consideran que estas construcciones de los números reales por Bourbaki y por Choquet, ofrecen elementos de aprendizaje a nivel universitario que pueden ser implementados de acuerdo a la madurez de los estudiantes y las necesidades de la carrera, ya que no tienen los mismos intereses un Matemático y un Licenciado en Matemáticas e incluso un Ingeniero. Pero lo que sí es común en estas carreras y estos profesionales, es que las presentaciones de Bourbaki o de Choquet no juegan el mismo papel al inicio de la carrera, que al final de la misma. Por ejemplo, introducir a los estudiantes de primeros semestres a conocer la construcción realizada por Bourbaki proporcionaría más dificultades que soluciones, pues los estudiantes no estarán preparados para manipular el lenguaje y conceptos que en esta construcción reposan. Y esto simplemente se debe, a prerrequisitos conceptuales que aún no se tienen en los primeros años de la universidad, relacionados fundamentalmente con herramientas topológicas. Aunque esto, no es lo que deseamos constatar con este documento; por el contrario estamos invitando a hacer un acercamiento tranquilo que permita fortalecer la formación de los estudiantes, futuros maestros y maestros en ejercicio.

Sin embargo, la enseñanza en las universidades no puede, por supuesto, permitirse el lujo de ignorar durante más tiempo la presentación de Bourbaki a nivel de pregrado, por su alto contenido teórico. Hay que aprovechar estos tipos de construcción puesto que no sólo dotan al futuro docente de un arsenal de herramientas sino, que propicia el debate y el gusto por la indagación.

Recordemos que Bourbaki y Choquet parten de **Q** como *grupo* aditivo totalmente ordenado, de manera inmediata introducen una topología sobre **Q** compatible con la estructura de grupo. Bourbaki a través de intervalos abiertos y acotados alrededor del origen y Choquet a través de la definición de secciones iniciales de la forma $(-\infty, a)$. Posteriormente, ambos completan el grupo topológico pero por mecanismos diferentes: el primero, por filtros de Cauchy previa introducción de las estructuras uniformes; y el segundo, a través de la propiedad del supremo sobre el conjunto formado por la unión de las secciones iniciales. El ingreso de esta estructura topológica enriquece el conjunto de los números reales clásicos, debido a que no solo podemos comparar u operar los elementos de **R**, sino que la estructura topológica es la herramienta conceptual que permite capturar la noción de cercanía, de puntos “próximos” a un punto dado. En términos generales a través de la noción de vecindad.

Una vez definida la noción de vecindad, podemos llegar al estudio de los límites, la convergencia y la continuidad, puesto que todos estos conceptos involucran la proximidad a un punto dado. Es decir, la continuidad no estaría dada por un axioma.

Esto implicaría, que el conjunto de los números reales por Bourbaki y por Choquet propician un panorama distinto, respecto a los procesos de enseñanza aprendizaje, debido a que en estas construcciones reposa la estructura topológica, y es aquí, donde realmente se percibe la continuidad de los reales. Además estas construcciones resaltan esos objetos y procesos que se omiten al completar directamente como cuerpo. Por ejemplo, las construcciones clásicas de completez de **Q**, son muy "inmediatas" debido a que no se ve ni el ingreso de la topología, ni el ingreso de la segunda operación; y a modo particular, estas cosas que se ocultan y que se muestran en la construcción por Bourbaki y por Choquet son las que ayudan a cultivar la objetivación del joven.

En aras de una mejor enseñanza considero pertinente tener en cuenta ambas construcciones como tópicos para buscar eficiencia. Por ejemplo, si en los primeros cursos se presenta la construcción de Choquet, puede servir como herramienta para introducir nociones topológicas, como abiertos, continuidad, incluso convergencia. A partir de aquí, es relativamente fácil desarrollar la teoría de límite sin recurrir a las sucesiones y series. Con lo cual se puede culminar con la presentación cuidadosa de los números reales por Bourbaki, que proporciona un campo más rico, de continuidad, limite, convergencia entre otras. Si queremos superar las limitaciones en el aprendizaje de los números reales axiomáticamente debemos ahondar en la enseñanza de las construcciones realizadas por Choquet y Bourbaki ya que estas despojan al conjunto numérico de los reales de sus vacíos topológicos, subyacentes de las presentaciones axiomáticas.

Por otro lado, es importante destacar que la visión educativa de Choquet es considerada más "educativa" respecto a la de Bourbaki. ¿En dónde radica la sencillez de la construcción hecha por Choquet? Quizás la simplicidad de la construcción de Choquet reposa en solo dos características, la primera que es una postura netamente algebraica al igual que Bourbaki. Desde este punto "permitiría" al lector una mayor sensibilidad a los números reales, ya que el álgebra constituye un razonamiento más habitual que el topológico y uniforme. Y la segunda característica y diferencia con Bourbaki es que no necesita llenar o saturar la construcción de grandes contenidos de álgebra moderna.

Espero que este trabajo contribuya en algún grado a estudiantes, futuros maestros y maestros activos, en el conocimiento y apropiación de un concepto tan relevante en las matemáticas modernas como son los números reales. Si al menos queda la inquietud en las prácticas de considerar por ejemplo la estructura topológica me podría quedar satisfecho.

Por último, no hay que olvidarse de que se trata antes que nada de proporcionar una herramienta a nuestros estudiantes y maestros. Esto quiere decir que no hay que desconocer la relevancia que tiene éste tipo de completez en la formación matemática del futuro docente de matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

1. Anacona, M; y Ortiz, G. (2011). La Noción de Vecindad en la Apropiación de los Reales. En *Los Números Reales como Objeto Matemático una Perspectiva Histórico – Epistemológica* (pp.163-192). Cali: Editorial Universidad del Valle.

2. Bombal, F. (1988). Nicolás Bourbaki. *Historia de la Matemática en el siglo XX, 19(1)*, pp. 313-323.

3. Bombal, F. (2000). Los Espacios Abstractos y el Análisis Funcional. *Las Matemáticas del siglo XX, 20(1),* pp. 205- 210

4. Bourbaki, N. (1964). *Algébre, Éléments de Mathématique*. Paris: Hermann.

5. Bourbaki, N. (1965). *Topologie Général, Éléments de Mathématique*. Paris: Hermann.

6. Bourbaki, N. (1976). La Arquitectura de las Matemáticas**.** En *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático* (pp. 36-49). Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

7. Campos, A. (1994). *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

8. Choquet, G. (1955). *Cours de Calcul Différentiel et Integral de la Sobornne*. Paris: Centre de documentation universitaire.

9. Choquet, G. (1962). L'Analyse et Bourbaki. *L'Enseignement Mathématique, 19(8),* pp. 109-135.

10. Collette J. (1998) *Historia de las Matemáticas II*. Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores.

11. Dedekind, R. (1998). *Continuidad y Números irracionales. ¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza/UAM

12. Dieudonne, J. (1974). ¿Devons-nous enseigner les mathèmatiques modernes? *Bulletin de l' Association de Professeurs de Mathématiques de l'enseignement Publique* 292, pp. 69-79.

13. Herstein, I. (1993). *Álgebra Abstracta*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica

14. Jech, T; y Hrbacek, K. (1999). *Introduction to Set Theory*. New York: Marcel Dekker, Inc.

15. Kline, M. (1992). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días, III*. Madrid: Alianza Editorial, p. 1292 -1325

16. Quevedo, J. (2002). *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Bogotá: Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia