# DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS EN EL TRABAJO CON LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

**Neel Lobatchewski Báez Ureña, Ramón Blanco Sánchez, Olga Lidia Pérez González**
Universidad Autónoma de Santo Domingo. (República Dominicana)
Universidad de Camagüey. (Cuba)
neelbaez@gmail.com, ramón.blanco@reduc.edu.cu, olguitapg@gmail.com

**Palabras clave**: Cálculo diferencial, transferencias, semiótica, conceptos
**Keywords**: Differential calculus, transferences, semiotic, concepts

## RESUMEN

El objetivo del trabajo es hacer un reporte de los resultados parciales de un proyecto de investigación que parte de la problemática existente en relación al trabajo de los estudiantes con los conceptos del Cálculo Diferencial.

En el transcurso de la investigación se ha podido fundamentar que dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos y la insuficiente cantidad de tareas, realizadas en clases, sobre la transferencia de registros semióticos, se limita el trabajo conceptual, de los estudiantes, con este contenido. El objetivo del trabajo es consolidar el nexo símbolo objeto, a través de la transferencia de registros semióticos, mediante el uso las TIC, para lograr que el alumno independice el objeto de sus representaciones y, por lo tanto, propiciar la formación conceptual de los estudiantes en el cálculo diferencial.

## ABSTRACT

The present paper objective is to report the partial result from a research project about a problem in relation with the students work when they need to use the differential calculus concept.

Along the research had been possible to base that as effect of the no ostensive character of the mathematical objects and the insufficient activities executed in classes about the semiotic register transferences, the student's conceptual work with this subject is limited. The objective of this work is to consolidate the symbol - object nexus throughout the semiotic register transferences using the TIC, in order that, the student break up the object from its representation, and so propitiate the student's conceptual formation in the differential calculus.

## Desarrollo

El fundamento teórico de la investigación se encuentra en los principios de la escuela Histórico Cultural de S. L. Vigotsky (Vygotsky, 1962), en los fundamentos teóricos de la Matemática Educativa, en particular el carácter mediatizado de la psiquis humana y el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos (Blanco, 2011), la teoría de la transferencia de registros semióticos (Duval, 2006) y la teoría del enfoque ontosemiótico. (Godino, 2002).

De la teoría existente sobre el tema y de la práctica docente de nuestro grupo de trabajo se ha podido apreciar que: Dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos y la insuficiente cantidad de tareas, realizadas en clases, sobre la transferencia de registros semióticos, el trabajo conceptual, de los estudiantes, con este contenido resulta limitado.

El uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos, no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos de estudio. En este sentido, las representaciones semióticas permiten el acceso al objeto matemático.

Aunque no se debe dejar de hacer referencia aquí a la paradoja que se manifiesta en relación con lo planteado en el párrafo anterior, en la que se plantea que, como es posible llegar a comprender los objetos matemáticos si solo tenemos acceso a los mismos a través de representaciones que nosotros mismos creamos. (Duval, 2006), (Radford, L. 2002).

Desde los mismos inicios del conocimiento, el hombre tuvo que crear símbolos para representar los entes matemáticos dado el carácter conceptual de los mismos, pero la utilidad de estos símbolos resultó del carácter social inherente a los mismos, dada la doble función de estos, pues resultaron el medio tanto para materializar el pensamiento como para poder compartir ese pensamiento con otros.

Resulta interesante como la semiótica par la representación de los objetos matemáticos tiene un carácter social mucho más allá de los símbolos del lenguaje, pues mientras que en el lenguaje los símbolos se usan de diferentes formas, e incluso se usan diferentes símbolos para expresar las mismas ideas en dependencia del idioma en que se hable, los símbolos matemáticos tienen un carácter internacional.

Pero dado el carácter conceptual de los objetos matemáticos estos tienen diferentes representaciones semióticas, cada una de las cuales pone de relieve diferentes aspectos del objeto matemático, por lo tanto para que el alumno lo llegue a comprender en todas sus dimensiones tiene que identificarlo y poder representarlo en sus diferentes registros de representación semiótica.

Por otra parte, múltiples investigaciones realizadas desde la década de 1980 revelan que la enseñanza aprendizaje de la Matemática constituye uno de los problemas más significativos dentro de cualquier modelo educativo. Los niveles de promoción y repetición en los cursos de matemática, tanto en la educación media como en los cursos universitarios, son dos indicadores de esta problemática, cuya dimensión humana se encuentra ligada a la frustración, tanto de los educandos como de los educadores, de ahí la importancia de ser analizados. (García, 2013).

Dado que nadie discute sobre la importancia del aprendizaje de la Matemática (ya que se asume su utilidad y necesidad de manera clara y distinta), esta se ubica en una posición privilegiada frente a otras disciplinas del conocimiento humano. Aun así, es usual que mucha gente se pregunte sobre qué aspectos de las matemáticas son los que deben ser aprendidos por todos los miembros de la sociedad y, en el caso particular, por los estudiantes universitarios que estudian carreras ligadas a la Ingeniería (Camarena, 2010).

También existe consenso respecto a que en el proceso enseñanza aprendizaje de la Ingeniería intervienen muchos factores, dentro de los que destacan los referidos a las ciencias básicas. Estos constituyen las bases para las carreras de dicha disciplina y el aprendizaje de la Matemática es el elemento crítico, lo cual advierte sobre una situación de debilidad en la formación de los futuros ingenieros, ya que un aprendizaje del cálculo de manera indebida o incorrecta, puede dificultar el desarrollo profesional del futuro ingeniero.

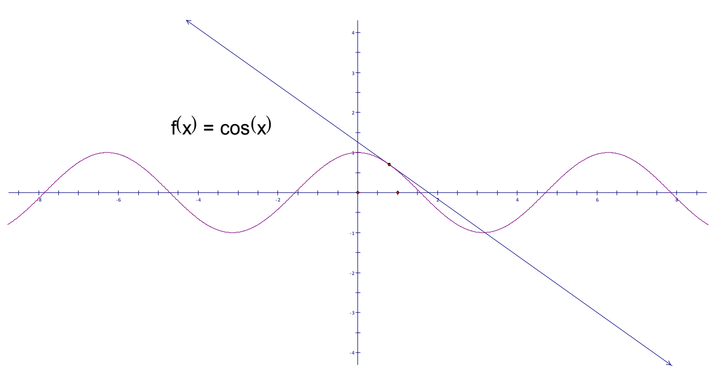
En el caso del cálculo para las carreras de Ingeniería, su aprendizaje se da en marco contradictorio, se aduce que este constituye la base del desarrollo profesional del futuro ingeniero; sin embargo, su enseñanza se ha formalizado a través de uso y abuso del álgebra e incluso se ha aritmetizado en el marco expuesto.

En efecto resulta frecuente que en los cursos de cálculo se priorice el registro algebraico, haciendo énfasis en tareas que consisten en calcular límites, derivadas e integrales a través de operatorias algebraicas, donde el vínculo conceptual de la tarea pasa inadvertido para el estudiante.

Un ejemplo notorio al respecto resulta cuando se pide al estudiante determinar los intervalos de monotonía de una función, determinando el signo de la primera derivada, lo cual el estudiante hace calculando algebraicamente los intervalos donde dicha expresión es positiva o negativa y no se asocia con el ángulo de inclinación de la tangente a la curva.

Aquí se pierde un momento adecuado para que el estudiante pueda apreciar el concepto derivada en diferentes registros de representación, cada uno de los cuales pone de manifiesto diferentes aspectos de dicho concepto.

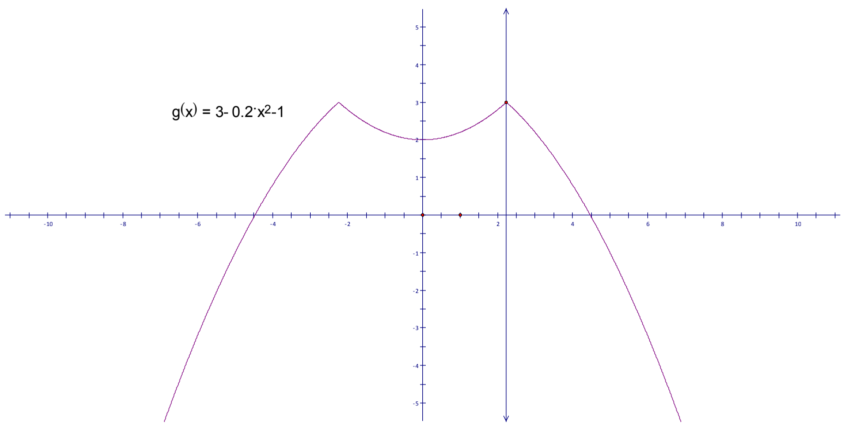
**Gráfico 1**



Tal como se muestra en el gráfico 1, en particular si se usa un software de geometría dinámica, en el cual el alumno pueda apreciar que los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función se corresponden con el signo de la tangente trigonométrica del ángulo de la tangente geométrica a la curva en el punto, que forma con el eje x.

Otro caso en el que resulta un apoyo fundamental el registro gráfico, es el caso de no existencia de la derivada, lo cual se puede ilustrar con el hecho de que esos puntos de no existencia de la derivada se corresponden con puntos de cúspide del gráfico de la función, donde de nuevo se puede ver la derivada como la tangente trigonométrica de la tangente geométrica a la curva en un punto.

**Gráfico 2**




El uso de representaciones gráficas, como el que se ilustra en el gráfico 2, permite al estudiante apreciar que efectivamente si la tangente geométrica es perpendicular al eje x, la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente forma con el eje de las x no existe dado que este ángulo es de 90 grados.

Si la representación de gráficos donde no exista la derivada se hace usando software de geometría dinámica el estudiante podrá ver literalmente hablando, como la tangente geométrica a la curva se hace perpendicular en estos puntos de cúspide.

Como se puede apreciar el uso de estas semióticas gráficas, tanto para ilustrar los intervalos de monotonía, como los puntos de no existencia de la derivada, conduce de manera directa a la relación de los extremos relativos de la función con los puntos donde la derivada se anula o no existe, asociado como hemos visto a la tangente trigonométrica del ángulos de inclinación de la tangente geométrica a la curva en el punto.

Se puede asegurar que la enseñanza del cálculo para ingeniería basado fundamentalmente en registros algebraicos, es una razón importante que conduce al pobre trabajo conceptual de estos estudiantes, cuando tienen que usar el cálculo como herramienta; dado que el registro algebraico es el que en menor medida refleja los aspectos conceptuales de la derivada.

Calcular la derivada de una función a partir de las reglas de derivación, aunque dicha función tenga una fórmula relativamente compleja, no pasa de ser un trabajo puramente algebraico, donde el concepto de derivada como la herramienta matemática para modelar los fenómenos de variación instantánea resulta inadvertido para el estudiante.

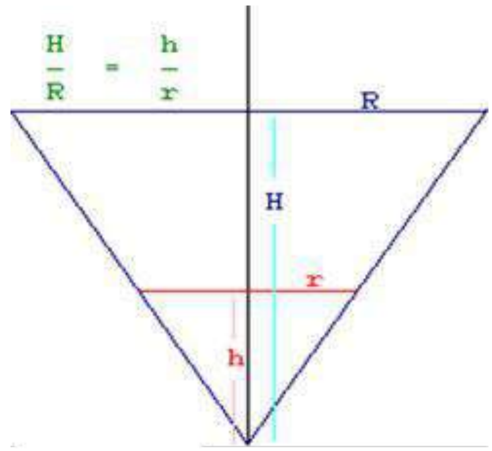
No solo el registro gráfico es importante, para una comprensión más completa del concepto de función se requiere de una combinación del registro numérico con el registro gráfico, en particular cuando se introduce el trabajo con la definición: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, aquí es práctico usar los medios que brindan las TIC para que los estudiantes puedan apreciar como la disminución del incremento, hace que el cociente: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se aproxime cada vez más a la función derivada, tanto numérica como gráficamente, siendo esta la razón por lo cual la derivada es la herramienta matemática para modelar los fenómenos de variación instantánea, tales como velocidad, fuerza cortante, intensidad de la corriente, etc.

Los autores del presente trabajo consideran que en un curso de cálculo para ingeniería no puede faltar el trabajo con problemas de variación instantánea, dado que en este tipo de problemas se manifiesta una de las características fundamentales de la derivada en la modelación de problemas técnicos, esto es ejemplos como el siguiente:

Una solución sale de un embudo con filtro a razón de 10 cc/minuto. Desde el centro de la base hasta la boca de salida el embudo mide 10 cm. En su parte superior el embudo tiene un diámetro de 12 cm. ¿Cuán rápido el nivel de la solución decrece en el embudo en el momento que quedan 200 cc. dentro del embudo? (se asume que el embudo es un cono circular recto).

Como es conocido el volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, como se puede apreciar hay tres variables, pero usando el esquema de la figura 3, el cual representa el corte transversal del embudo, que como se planteó tiene forma de cono circular recto, permite expresar el radio al nivel del líquido en función de la altura que es la variación que se pide determinar.

**Figura 3**




De la figura 3, usando la semejanza de triángulos se obtiene: 10/6 = h/r, r = 3 h/5, sustituyendo r en la expresión del volumen: $V = \frac{3}{25}\pi h^3$ , luego la variación del volumen respecto al tiempo es $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{25}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$, por otra parte cuando quedan 200 cc. En el embudo la altura está determinada por: $200 = \frac{3}{25}\pi h^3$ de donde se obtiene h = 8.095*cm*.

Como lo que se quiere saber es la variación instantánea de la altura cuando el volumen de líquido es de 200 cc. y fue calculada la altura para ese volumen, se sustituye en: $\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{25}{9\pi h^2}$ , esto es: $\frac{dh}{dt} = -10\frac{25}{9\pi(65.53)} = -0.13492 cm/\text{minuto}$.

Lo cual ilustra el uso de la derivada como la herramienta matemática para el cálculo de problemas de variación instantánea, independientemente del origen del problema de que se trate.

Dado que el ejemplo planteado es de variaciones relacionadas (ritmos de cambios), fue necesario el uso de la regla de la cadena, lo cual a su vez muestra al estudiante la necesidad de la derivación de funciones compuestas, dado los modelos físicos que las mismas pueden representar.

## ■ Conclusiones

Aunque el presente trabajo no reporta una investigación concluida, los avances investigativos desarrollados hasta el momento permiten respaldar los avances aquí reportados, independientemente de que lo reportado cuenta con aval en la literatura especializada.

Es un hecho de acuerdo a trabajos de diferentes especialistas en la materia y a las pruebas iniciales realizadas por los autores, que los cursos de cálculo para ingeniero donde se prioriza el trabajo algebraico, limita considerablemente el trabajo conceptual de los estudiantes.

Se puede afirmar que es un resultado natural de la priorización de los registros algebraicos en el trabajo con el cálculo diferencial, el pobre desarrollo conceptual de los estudiantes, ya que en este tipo de registro el aspecto conceptual no se evidencia, lo cual conduce a los estudiantes a una falta de entrenamiento conceptual que impide su desarrollo en este sentido.

A través del trabajo se puso de manifiesto cómo el desarrollo de las TIC facilita en gran medida la transferencia de registros semióticos, de modo que el estudiante pueda apreciar en todo su trabajo el aspecto conceptual de la derivada y sus aplicaciones.

## Referencias bibliográficas

Blanco, R. (2011). Las investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática *RELME XXV. Camagüey. Cuba.* Conferencia Plenaria XXV. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Universidad de Camaguey, Camaguey, Cuba.

Camarena, P. (2010). *Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería.* Recuperado el 10 de mayo 2014 de: www.ai.org.mx/eventos/coloquios/ingreso/10/camarena.htmlGarcía

Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 103-131.

García, J. A. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación* 37(1), 29-42.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontólogico y semiótico de la Cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2), 237-284.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language.* Cambridge: MIT Press.