

CONFIGURACIONES EPISTEMICAS PREVIAS PARA DAR SIGNIFICADO GLOBAL AL OBJETO MATEMATICO "METODO DE INTEGRACION POR PARTES"

Enrique Mateus Nieves

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jeman124@gmail.com, emateus@pedagogica.edu.co

Palabras clave: Significado global, Configuración epistémica, integración

Keywords: Global Meaning, epistemic configuration, integration

RESUMEN

Esta investigación indaga si el estudiante puede alcanzar un significado global del objeto matemático "integración por partes" a partir de la potenciación de 4 configuraciones epistémicas (CE), definidas para el objeto matemático llamado la integral. En lo avanzado de la investigación se evidencia, como un primer resultado, que si estas CE no se potencian el proceso de enseñanza de este método carecerá de significado para el estudiante y seguirá siendo solo una regla, un algoritmo más que nada le aporta a su formación integral; donde él debe reconocer el doble valor que tienen las matemáticas: como ciencia y como herramienta.

ABSTRACT

This research investigates whether the student a global meaning of the mathematical object "integration by parts" from the empowerment 4 epistemic configurations (EC), defined for mathematical object called the integral can achieve. With advanced research evidence, as a first result, if these EC doesn't the teaching of this method enhances be meaningless for the student and will remain one rule, more than anything algorithm gives your comprehensive training; where he must recognize the double value with the mathematics as a science and as a tool.

■ Contextualización

El Cálculo Integral (CI) es un conjunto de nociones básicas esenciales al que se enfrenta un alumno que en su malla curricular tenga que ver con el cálculo infinitesimal. Sin embargo la tendencia que se observa en la enseñanza de los conceptos implicados en la integración por partes, es la de seguir un desarrollo casi exclusivamente de rutinización algebraica ligado a la operación inversa de la derivación y a un cálculo de áreas puramente geométrico basándose en métodos algorítmicos y en la representación gráfica (Ordoñez, 2011). Esto supone que el estudiante llega a conocer las técnicas algorítmicas, sin una contextualización adecuada del proceso de integración. Lo que conduce a no alcanzar el verdadero significado de este objeto matemático, convirtiéndose en una clase puramente formalista y algunas veces mecanicista que no causa impacto en los estudiantes; manifestado en apatía, desinterés y reprobación de esta asignatura.

Para el marco teórico y la metodología de la investigación se eligieron los aportes teóricos propuestos por El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática [EOS] (Godino, Font y Wilhelmi, 2007); basado en la *Teoría de los Significados Sistémicos* [TSS], *La teoría de las funciones semióticas* [TFS]. *La teoría de las configuraciones didácticas* [TCD] que permiten definir una Configuración Epistémica [CE] como una herramienta que puede describir tanto la estructura de textos puntuales como de textos globales de un objeto matemático de estudio. De ahí que las entidades primarias -objetos de estudio- se organizan en entidades más complejas llamadas CE, cuando se refieren a los significados institucionales (Godino, Contreras y Font, 2006) y configuraciones cognitivas si se refieren a los significados personales. Las CE están definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las CE nos permiten llegar a la noción de significado global entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso, incluyendo el formal-estructural. Con estas consideraciones, y teniendo en cuentas los resultados de la investigación realizada por Contreras, Ordóñez, y Wilhelmi (2010), para este trabajo se han considerado inicialmente, cuatro CE denominadas: *Geométrica*; *Resultado de un proceso de cambio, relación original entre derivada e integral* y la *aproximación al límite* asociadas a la integral definida. Permitiendo observar diferencias cuando la integral que se calcula es definida o indefinida. Razón que llevó a incluir una quinta CE llamada *Algebraica* en aras de alcanzar el significado global institucionalizado. En lo metodológico, se trata de una investigación cualitativa, basada en el estudio de caso de un profesor elegido que enseña un contenido matemático, (método de integración por partes). Su ubicación teórica está dentro del PMA, específicamente en la didáctica del cálculo integral en un contexto educativo particular, pero en la presentación y discusión de los resultados se utilizaron los criterios y las categorías de análisis del EOS que permite combinar diversos métodos y técnicas de acuerdo a las fases de la investigación.

■ Marco teórico

El EOS está fundamentado en tres aspectos: Las matemáticas son una actividad humana (fundamento antropológico); Los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera “vital y necesaria” (fundamento ecológico); y, el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento pragmático). La noción central de esta perspectiva es la de situación problemática, a partir de la cual emergen las nociones de “práctica matemática”, “objeto matemático” y “significado de un objeto”.

Esta actividad matemática es analizada por el EOS a partir de seis entidades primarias (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p.7): Elementos lingüísticos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual...). Situaciones-problema (aplicaciones, tareas, cuestiones...) Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) Propositiones (enunciados sobre conceptos...) Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo...). Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.). Estas entidades primarias se interrelacionan formando configuraciones o redes de objetos, que serán cognitivas o epistémicas. De ahí que, cada situación matemática se enmarca dentro de una CE diferente. Se puede entender de manera metafórica, que la situación-problema “sitúa” el objeto en un “lugar” o en “otro” es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentaciones, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades. De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo-intensivo y otra, de tipo “ecológico”, al situar el objeto matemático en un “nicho” o bien en otro, (Ramos y Font, 2006, p. 541). Entonces nos podríamos preguntar si “¿es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados?” (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, p.80). La noción de holosignificado introducida por estos autores permite responder a esta cuestión; es decir, determinar qué expresamos al afirmar que una persona comprende una determinada noción. La adquisición del holosignificado supone la capacidad de poner en funcionamiento un pensamiento matemático flexible (Wilhelmi, 2003); El holosignificado incorpora las relaciones entre dichos significados y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen. La evolución histórica de la integral ha determinado diferentes significados parciales de dicha noción. Estos significados pueden ser descritos mediante CE, constituidas por diferentes redes de objetos matemáticos (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos). En relación con la complejidad del objeto Integral, Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010) y Ordoñez (2011) consideran 7 CE asociadas a dicho objeto. Mientras que Crisóstomo (2012), en su tesis doctoral considera 8 tipos diferentes de CE para este mismo objeto matemático situando al teorema fundamental del cálculo (TFC) como un objeto primario central de varias de las CE (al menos cinco), poniendo en evidencia su papel relevante en la articulación de las diferentes configuraciones que modelan la complejidad del objeto integral.

■ Significado global del objeto de estudio.

De Ordoñez y Contreras (2010) se destaca que se establecen las configuraciones epistémicas de la integral definida que constituyen el significado global de referencia de esta noción matemática de las cuales, considerando el nivel educativo en que nos encontramos y la normativa, se escogen cuatro que se utilizan como significado de referencia para esta investigación: CE geométrica (CEgeo), CE de resultado de un proceso de cambio (CErpc), CE como inversa de la derivada (CEinvderiv), CE como aproximación al límite (CEaproxlim). Dicho significado global estará constituido por diferentes pares “configuración epistémica/prácticas que posibilita” y que el EOS interpreta como diferentes sentidos del concepto. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto”. Para el estudio de los distintos significados –detallados en el documento final de la tesis de doctorado de este investigador y que por cuestión de espacio aquí se omiten- se han utilizado diversas fuentes bibliográficas entre las que se

destacan los señalamientos en Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005): “En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas. Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria” (p.131).

■ Configuraciones epistémicas de referencia

En esta sección describo los distintos sentidos según las entidades primarias, que nos permitirá una comparación objetiva de las configuraciones asociadas. Estas configuraciones pueden ser descritas según los siguientes elementos de significado tomados de Ordoñez (2011) para la integral definida y con una complementación propia para la integración indefinida cuando utiliza exclusivamente el método de integración por partes descritas y resumidas en las tablas 1 y 2 relacionadas a continuación:

1. **Configuración Epistémica Geométrica (CEgeo):** El tipo de situaciones que se estudian son cálculos de áreas, volúmenes y longitudes. Situaciones que hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento.
2. **Configuración Epistémica Resultado de un proceso de cambio (CErcp):** diversos autores postulan el significado de la integral como resultado de un proceso de cambio (Wenzelburger, 1993) o como un proceso de acumulación (Carlson, Persson y Smith, 2003; Cordero, Muñoz y Solis, 2005 y Thompson y Silverman, 2007) y la importancia que tiene para la aplicación de la integral definida a otras ciencias.
3. **Configuración Epistémica relación entre la derivada y la integral. (Inversa de la derivada) (CEinvder):** La relación entre derivada e integral, principalmente, se establece a partir de Newton y Leibniz consolidándose este resultado.
4. **Configuración epistémica de aproximación al límite (CEaproxlim):** Está directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dará lugar a la nueva definición de integral definida que éste realiza.
5. **Configuración epistémica algebraica:** esta CE es fruto de la trasposición didáctica. Es necesario tener en cuenta que la secuencia escogida por lo libros de texto, y que es seguida por los profesores, además, potencian esta cuestión, como apuntan Llorens y Santonja (1997)

A partir de estas configuraciones, debemos reconocer que la regla correspondiente a “la regla del producto” para derivación, conduce a la llamada “regla de integración por partes”. De donde se establece que si f y g son funciones derivables, entonces $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ en la notación

para integrales indefinidas y definidas respectivamente, se convierte en:
 $\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx = f(x)g(x)$ que reordenada se expresa por
 $\int [f(x)g'(x)] dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$ para integrales indefinidas o como
 $\int_a^b [f(x)g'(x)] = (f(x)g(x))_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$ para integrales definidas. Un aspecto previo e imprescindible para

lograr el significado global del objeto integración por partes es el proceso de identificación de las componentes de dicho significado a partir de las CE definidas anteriormente.

Tabla 1. Elementos de significado Configuraciones Epistémicas asociadas a la integral definida Tomado de Ordoñez (2011)

Elementos de significado	CE geo.	CE rcp	CE anvdveri	CEm aproxlim	CE Algebraica
Situaciones	Calculo de áreas y volúmenes	Situaciones de acumulación, Situaciones de otras ciencias, de modelización.	Ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función	Funciones integrable, reduciendo las condiciones de integralidad, según la integral de Lebesgue.	Calcular el valor de una integral
Lenguaje	Gráfico, algebraico numérico	Gráfico, algebraico numérico	Gráfico, algebraico	Principalmente analítico y gráfico.	Algebraico, numérico
Procedimientos	Calculo de puntos de corte. Representación gráfica de la función Cálculo de integrales definidas. Asignación de un valor al área o al volumen	Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del resultado	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada	Calcular la integral considerando la idea de altura media de una función en un intervalo	Dada una integral definida aplicar el método oportuno para calcular su Valor
Definiciones	Con relación al área	Concepto regla resultado de un proceso de cambio	Inversión integral-derivada	CRLebesgue	La integración y la derivación son operaciones inversas
Proposiciones	Regla de Barrow, Métodos de integración	Regla de Barrow, Métodos de integración	Teorema fundamental del cálculo integral	Elementos de la teoría de la medida	Tabla de integrales inmediatas Métodos de integración Regla de Barrow
Argumentaciones	Retórica y heurística	Retórica y heurística	Retóricas	Comparación de áreas. Analíticas basadas en cuestiones topológicas del estudio de la medida	Heurística
Conflictos semióticos asociados a esta CE	No diferenciar entre integral definida y área. La integral debe	Noción de función acumulación CS dx (conflicto semiótico de la	Confusión entre función y primitiva Comprensión de las relaciones y la	Horror al infinito: conflicto infinito potencial-actual (llenar algo finito	La integral carece de significado.

	ser un área y entonces positiva. Es imprescindible el valor absoluto para calcular la integral, Considerar que a igual área igual volumen	diferencial)	notación. $CSdx$	como un área con una suma infinita) Heterogeneidad de las dimensiones (completar un área de dos dimensiones con líneas de dimensión 1)
--	---	--------------	------------------	---

Tabla 2. Elementos de significado Configuraciones Epistémicas asociadas a integrales indefinidas (Elaboración propia)

Elementos de significado	CE geo	CE rcp	CE ant deri	CE Aprox lim	CE algebraica
Situaciones	Calculo de antiderivadas, (integrales indefinidas)	Situaciones de acumulación, Situaciones de otras ciencias, de modelización.	Ligadas a la relación que existe entre la función antiderivada y la propia función	Funciones integrable, reduciendo las condiciones de integralidad, según la integral de Lebesgue	Encontrar la antiderivada de una función.
Lenguaje	Algebraico numérico	Gráfico, algebraico numérico	Gráfico, algebraico	Principalmente analítico y gráfico.	Algebraico, numérico
Procedimientos	Calculo de integrales indefinidas Asignación de una familia de funciones como resultado de la integral	Modelizar la situación a través de la integral indefinida Interpretación del resultado Modelizar la situación a través de la integral indefinida	Extraer propiedades de la función y de su antiderivada identificándolas como función y antiderivada	Calcular la integral considerando la idea de altura media de una función en un intervalo	Dada una integral indefinida aplicar el método de integración por partes para su solución
Definiciones	Con relación a la antiderivada	Concepto regla resultado de un proceso de cambio	Inversión integral-derivada	Definición Lebesgue	Regla para integrar por partes
Proposiciones	antiderivada	Método de integración	Regla de integración	Elementos de la teoría de la medida	Tabla de integrales inmediatas Regla para IxP
Argumentaciones	Retórica y heurística	Retórica y heurística	Retóricas	Analíticas basadas en cuestiones topológicas del	Heurística

				estudio de la medida	
Conflictos semióticos asociados a esta CE	No diferenciar entre integral definida e indefinida . Considerar que la antiderivada es igual a la función primitiva olvidando la pluralidad que otorga la constate de integración	Noción de función y de familia de funciones CS dx (conflicto semiótico de la diferencial	Confusión entre función y antiderivada Comprensión de las relaciones y la notación. CSdx	Horror al infinito: conflicto infinito potencial-actual	La integral carece de significado. Considerar que la antiderivada es igual a la función primitiva olvidando la pluralidad que otorga la constate de integración

■ Observaciones finales

Es importante trabajar los métodos de integración –en particular el método de IxP- desde las diversas CE presentadas, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos como una clave, antes de la introducción de la formalización propia del concepto de integral. En lo que se refiere a la integral se concluye que el tipo de enseñanza propuesto en los libros de texto y seguido por la mayoría de los profesores es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto netamente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del saber matemático. Se destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizada. Tal como se observa en los libros de texto, la enseñanza del Cálculo Integral no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento.

■ Resultados encontrados

En la observación a la secuencia de enseñanza del método de integración por partes se observa que la CE geométrica es la que más se utilizada cuando se enseña la integral definida, seguida de la CE antiderivada, fortaleciendo la CE algebraica; mientras que la de aproximación al límite y resultado de un proceso de cambio no aparecen. Cuando se enseña la integral indefinida esta se da desde la CE antiderivada, desaparece la CEgeo y algunas veces aparece la CERpc, para terminar fortaleciendo la CE algebraica. Los alumnos estudian la CEgeo generalmente de forma directa, esto es, calculando explícitamente el área bajo la curva o el área entre dos curvas y utilizando el registro algebraico habitualmente. En segundo lugar, la CE más solicitada es la algebraica, esto es, cálculo algorítmico, generalmente de forma directa también. Es evidente la ausencia total de las configuraciones CEaproxlim y CERpc. Lo que impide que el estudiante alcance un significado global y así poder aplicar un holosignificado que le permita un desempeño significativo en su quehacer profesional.

Como conclusión general, nuevamente se obtiene que “el análisis prospectivo realizado en las secciones precedentes permite afirmar un “desequilibrio” evidente entre las configuraciones epistémicas introducidas, así como un privilegio de los procedimientos algebraicos y analíticos”. Esta disparidad entre la destreza algorítmica y la carencia de recursos en el tratamiento gráfico-geométrico, señalada por Orton, la ponen también de manifiesto Artigue y Szwed (1983, citado en Labraña, 2001. p. 73). En estos casos manifiestan muchos errores. En otros casos realizan ambas tareas y, cuando los resultados obtenidos son inconsistentes con el gráfico, intentan dar explicaciones poco razonables que muestran más confianza en los cálculos que en el dibujo” Finalmente se observa que los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas pero la mayoría no sabe por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas; También revela las dificultades para entender la noción de variación de una función cuando no depende del tiempo.

■ Referencias bibliográficas

- Carlson, M. P., Persson, J. y Smith, N., (2003). Developing and connecting calculus students the fundamental theorem of calculus. *Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (pp.165-172). PMENA:Hawaii, USA.
- Cordero, F., Muñoz, G., y Solis, M. (2005). La integral y la noción de variación. El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socio-epistemología de la integral. *Relime*, 8(3), 265-286.
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367-384.
- Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada, España.
- Crisóstomo E., Ordoñez L., Contreras A., y Godino J. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. (pp. 125–166) Jaen, ESP.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26. (1), 39-88.
- Godino, J., Font, V., y Wilhelmi, M. (2007). Análisis Didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico. *Versión revisada de la Conferencia invitada en el IV Congreso Internacional de Ensino da Matematica*. ULBRA, Brasil, 25-27
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., y Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education*. 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17.
- Labraña, P. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela, España.
- Llorens, J., Santoja, F. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 61-67

- Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Jaen, España.
- Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2o de bachillerato. *Sociedad Española de Investigación en educación Matemática*. 23- 41.
- Ramos, A. y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Paradigma*, 27 (1), 237-264.
- Thompson, P. W., y Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77-120
- Wilhelmi M. R. (2003). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, No. 23. Pamplona. Universidad Pública de Navarra.
- Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral definida. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5, 93-123.