FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

María Rosa Rodríguez de Estofán, Jesús Alberto Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán. (Argentina)
marosarodriguez@arnet.com.ar, jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Palabras clave: Sistemas, Paradojas, Consistencia, Completitud
Keywords: Systems, Paradoxes, Consistency, Completeness

RESUMEN

En este curso corto se discurre sobre el objeto, metodología, deductibilidad y validación de los conocimientos matemáticos. Se expone la interrelación de tres ámbitos: ontológico, lingüístico y lógico-formal, sistematizados en tres grandes líneas: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo. Se desarrolla la historia de la Geometría para mostrar que los fundamentos del espacio geométrico son independientes del espacio físico, tal como aparece en las Geometrías euclideanas y no euclideanas. Como cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética elemental deriva en paradojas, se comprueban los metateoremas de la consistencia y la completitud, desarrollados por Gödel.

ABSTRACT

In this short course, it discourses on the purpose, methodology, deductibilidad and validation of mathematical knowledge. The interrelationship of three areas is exposed: ontological, linguistic and subsumptive, systematized on three main lines: the logicism, formalism and the intuitionism. The history of geometry is developed to show that the fundamentals of geometric space are independent of the physical space, as it appears in the geometries euclideanas and not euclideanas. As any axiomatic system that contains basic arithmetic leads to paradoxes, the metateoremas of consistency and completeness, developed by Gödel are checked.

Introducción

El marco teórico que contiene las digresiones de este curso está constituido por las teorías de los universales denominadas tradicionalmente como realismo, idealismo y nominalismo. La metodología ya supuesta en la Filosofía de la Matemática asume dos perspectivas: la determinación del campo objetivo a través de la precisión de sus conceptos y el establecimiento de reglas rigurosas que precisen las relaciones de deductibilidad entre sus proposiciones. La primera de estas tareas se refiere a la definición de los términos y la segunda, a la construcción de pruebas lógicas de demostración. Aquí confluyen la Matemática, la Lógica y la Filosofía de la Matemática, cuya conjunción constituye parte sustancial de lo que en la actualidad se denomina “Epistemología de la Matemática”.

Existe una muy significativa intersección entre la Epistemología, la Filosofía de la Matemática y la Lógica Matemática. Las dos primeras, no son íntegramente formales y abstractas; sus enunciados y argumentaciones se construyen con ayuda del lenguaje natural. La última es una interpretación formal de los principios y demostraciones de la Matemática, que algunos autores denominan Metamatemática.

La Epistemología es una metateoría acerca de las teorías científicas. Reflexiona sobre: la determinación de su objeto, su metodología, la relación lógica de sus enunciados (sintaxis), la manera en que valida sus conocimientos (semántica) y su uso e interpretación en la comunidad científica (pragmática).

La Filosofía de la Matemática se interesa en su fundamentación y se interroga acerca de ciertas cuestiones filosóficas como: ¿En qué consiste? ¿Acerca de qué trata? ¿Cómo se puede acceder al conocimiento matemático? ¿Cómo se lo puede justificar? ¿De qué manera se lo puede ampliar?

El *hilo conductor* del curso consiste en señalar los alcances y limitaciones de las respuestas a las preguntas, que caracterizan las diversas concepciones de la Matemática:

Cuatro preguntas acerca de la Matemática	Carácter
1.- *¿De qué habla la Matemática?*	*Ontológico.*
2.- *¿Por qué creer en la Matemática?*	*Epistemológico*
3.- *¿Cómo se investiga en Matemática?*	*Metodológico*
4.- *¿Cuál es la relación entre Matemática y realidad?*	*Pragmático*

Pitágoras de Samos (c. 582 – c. 500 a.C.) matemático, filósofo, político, músico, fundó una escuela de corte mística. Puede ser considerado uno de los primeros racionalistas de la historia.

Respuestas de la concepción matemática de Pitágoras:

1. Además del mundo empírico, hay una realidad que lo trasciende y a ella pertenecen los números y otros objetos matemáticos.
2. El conocimiento de los objetos matemáticos proviene de una *intuición intelectual.*
3. La investigación se ejercita desarrollando las facultades intelectuales: intuición y razón.
4. La realidad se vincula con los entes matemáticos por medio de una suerte de isomorfismo estructural (Boyer, 1999).

La Epistemología y la Filosofía de la Matemática, junto con la Lógica Matemática persiguen el ideal matemático: la fundamentación y el esclarecimiento de la demostración.

En relación al plano lógico-formal de la deducción de los teoremas, se han señalado paradojas surgidas de la construcción de sistemas en la fundamentación de las teorías.

Paradoja significa "más allá de lo creíble" y es un concepto filosófico para nombrar a situaciones que resultan contradictorias, pero que se consideran validas o reales.

Una **paradoja** (del griego *paradoxa*) es una idea extraña opuesta a lo que se considera verdadero o a la opinión general. En otras palabras, es una proposición en apariencia verdadera que conlleva a una contradicción lógica o a una situación que infringe el sentido común. Una paradoja es un contrasentido con sentido.

Las paradojas se clasifican en lógicas, matemáticas y semánticas.

Ejemplo de *paradoja lógica*: La paradoja de la implicación material.

Cómo de una proposición falsa se puede deducir una proposición verdadera y cómo una proposición verdadera puede ser inferida tanto de una falsa como de una verdadera.

$p \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; \sim (p \,.\, \sim q)$ (Frege, 1974).

Ejemplo de *paradoja matemática*: Paradoja de Russell:
El conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros. Consta de elementos que no son miembros de sí mismos. Un ejemplo descrito es el que supone un conjunto que consta de "ideas abstractas". Dicho conjunto es miembro de sí mismo porque el propio conjunto es una idea abstracta, mientras que un conjunto que consta de "libros" no es miembro de sí mismo porque el conjunto en sí no es un libro. La paradoja consiste en que si no forma parte de sí mismo, pertenece al tipo de conjuntos que no forman parte de sí mismos y por lo tanto forma parte de sí mismo. Es decir, formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo.

Llamemos M al "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros". Es decir $M = \{x: \; x \not\subset x\}$
Según la teoría de conjuntos de Cantor, se puede decir $\forall x \quad x \in M \;\Leftrightarrow\; x \not\subset x$
es decir "Cada conjunto es elemento de M sí y sólo si no es elemento de sí mismo".
Ahora, en vista de que M es un conjunto, se puede substituir **x** por M en el enunciado, de donde se obtiene $M \in M \;\Leftrightarrow\; M \not\subset M$ (Russell, 1919).
M es un elemento de M sí y sólo si M no es un elemento de M, lo cual es absurdo.

Ejemplo de *paradoja semántica:* Se atribuye a Epiménides haber afirmado: "Todos los cretenses son mentirosos". Sabiendo que él mismo era cretense, ¿decía Epiménides la verdad?

Actividad 1: Dar ejemplos de paradojas de la vida real y de matemática.

Suelen presentarse frases que parecen paradojas que dicen mucho sobre la vida en general, pero no lo son. Estas se llaman *Pseudoparadojas*

1. El silencio es el grito más fuerte.
2. Sufrimos por lo poco que nos falta y no gozamos lo mucho que tenemos.
3. Quien sabe mucho escucha, quien sabe poco habla, quien sabe mucho pregunta y quien sabe poco sentencia.
4. El hombre busca respuestas y encuentra preguntas.
5. El corazón tiene razones que la razón no entiende.
6. La tecnología nos acerca a los más lejanos y nos distancia de los más próximos.
7. Si deseas que alguien te haga un trabajo, pídeselo al que este ocupado, ya que el que esta sin hacer nada te dirá que no tiene tiempo.
8. Mientras estamos mejor que nunca, nos encontramos profundamente insatisfechos.
9. La mejor improvisación es la adecuadamente preparada.
10. Cuanto más damos mas recibimos.

Actividad 2: Decidir si son Pseudoparadojas o Paradojas auténticas.

1. Si en una peluquería vemos el cartel:" yo afeito a quienes no se afeitan a sí mismos, y solamente a estos" ¿quién afeita al barbero?
2. Sea la frase: "Esta frase es falsa.". Si la frase es falsa, es falso que "Esta frase es falsa.", es decir, la frase es verdadera. Si en cambio la frase es verdadera, es cierto que "Esta frase es falsa.", es decir, la frase es falsa.
3. Paradoja de Zenón de Elea: Aquiles y una tortuga juegan una carrera. La distancia a recorrer es de 200 m. Como Aquiles corre 10 veces más rápido que la tortuga, arreglan que le dará 100 m de ventaja. Aquiles empieza a correr y avanza los 100 m que le dio de ventaja a la tortuga. Pero en ese tiempo, la tortuga ya avanzó 10 m, de modo que todavía lo aventaja. Cuando Aquiles recorre esos 10 m, la tortuga ya avanzo 1 m más. Aquiles sigue corriendo y avanza ese metro, pero la tortuga en el mismo tiempo ya ha avanzado 10 cm. Así siguen corriendo, sin que Aquiles pueda alcanzar nunca a la tortuga (Lakatos, 1978).

Las paradojas se resuelven, pero no las antinomias.

Antinomia (del griego *anti,* contra y *nomos*, ley) es un término empleado en la lógica y la epistemología que, en sentido laxo, significa paradoja o contradicción irresoluble.

Manuel Kant sostuvo que cuando la razón rebasa la experiencia posible, a menudo cae en varias antinomias; es decir, perspectivas igualmente racionales pero contradictorias. Sostenía que se podía llegar, a partir de la suposición de que el mundo tiene un comienzo en el tiempo, a la conclusión de que no lo tenía, y viceversa.

De hecho, las antinomias no tienen en cuenta las limitaciones de alcance del razonamiento lógico, como a menudo se cree. Esto se debe a que la conclusión de que hay una limitación se deriva (supuestamente) de una antinomia por razonamiento lógico; por lo tanto, toda limitación de la validez del razonamiento lógico impone una limitación a la conclusión de que el razonamiento lógico tiene una limitación (Kant, 1770).

El ideal de la sistematización

En toda la Historia de la Matemática, filósofos, lógicos y matemáticos se interesaron en precisar los conceptos matemáticos, con definiciones "claras y distintas", y a construir pruebas rigurosas de demostración. En los siglos XIX y XX se acentúa este interés, recurriendo a la abstracción y formalización del lenguaje matemático. Se obtienen dos efectos: el afinamiento riguroso de los razonamientos matemáticos y el desarrollo de la Lógica-Matemática, que en algunos campos se confunde con la Metamatemática.

A partir de entonces, tanto la Lógica como la Matemática se estructuraron en sistemas axiomáticos deductivos, consistentes, completos, decidibles e independientes. Lo que significa en primer término la eliminación de paradojas y/o contradicciones; en segundo lugar, la demostración completa de todos los teoremas en base a los propios axiomas del sistema; luego, que contenga algoritmos para determinar si una fórmula cualquiera dentro del sistema es válida o no; y por último, que ninguno de los axiomas o supuestos pueda derivarse como teorema a partir de los restantes.

Propiedades y Requisitos de los Sistemas Axiomáticos

Propiedades Sintácticas

Consistencia	Si no puede haber en él, a la vez, un teorema tal que su *negación* también sea teorema.
Completitud Sintáctica	Dada una cuasiproposición cualquiera del sistema, el desarrollo del mismo permite demostrarla o bien demostrar su negación.
Saturación	Si no existe la posibilidad de ampliarlo con un nuevo axioma que no sea teorema del sistema dado ni tampoco lo sea su negación.
Independencia de una Cuasiproposición	Una cuasiproposición es independiente de los axiomas si ella no es teorema del sistema ni tampoco lo es su negación.
Decidibilidad Sintáctica	Si existe un método tal que, para toda cuasiproposición, permite poner en evidencia si ella es teorema o no en el sistema.

Propiedades Semánticas

Satisfactibilidad	Si posee al menos un modelo.
Categoricidad Semántica	Si todos sus modelos son isomórficos.
Completitud Semántica	Con relación a todos sus modelos, si toda propiedad que se cumple para todos sus modelos puede ser demostrada en el sistema como teorema.
Decidibilidad Semántica	Con relación a un determinado modelo del sistema, si existe un método para poner en evidencia, para toda proposición verdadera en tal modelo, si ella es deducible en el sistema dado.

- Un sistema axiomático sintácticamente completo está saturado, y viceversa.
- Si un sistema axiomático es satisfactible, debe ser consistente. Pero no a la inversa (Klimovsky y Boido, 2005).

Formalización geométrica

Desde el siglo III aC se consideró como un modelo de sistema axiomático-deductivo a la Geometría euclidiana. Efectivamente, en base a unos pocos principios, que Euclides denomina Postulados y Nociones Comunes, se deducen todos los teoremas de la Geometría.

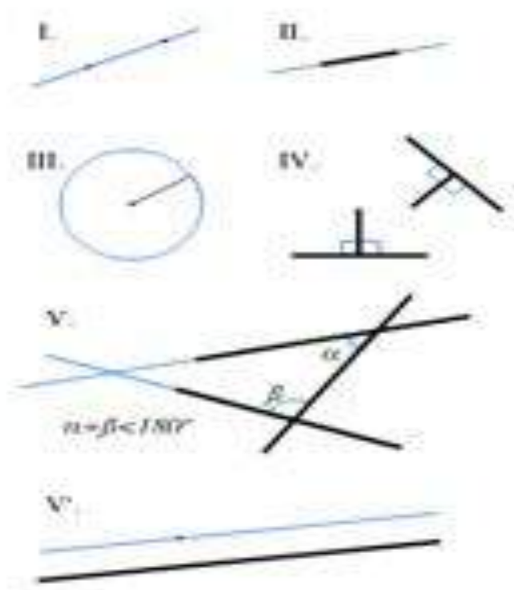
En el primer libro, Euclides desarrolla 48 proposiciones a partir de 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes.

Los **postulados** son:

I. Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.
II. Toda recta puede prolongarse indefinidamente.
III. Dado cualquier centro y cualquier radio, puede construirse un círculo.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
V. Postulado de las paralelas. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Este último postulado tiene un equivalente, que es el más usado en los libros de geometría: Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela (Geometría plana) y un solo plano paralelo a otro dado (Geometría del espacio).

Gráfico N° 1: Postulados



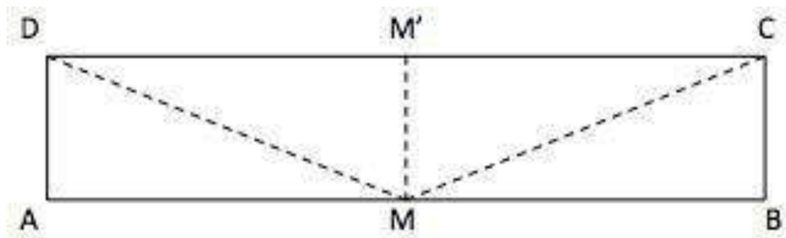
Siempre se sospechó de la independencia de sus axiomas. Concretamente el postulado 5º fue siempre cuestionado, no desde el punto de vista de su verdad sino de su evidencia y, por lo tanto, se intentó demostrarlo como teorema a partir de los cuatro axiomas restantes.

Muchos matemáticos lograron demostrarlo agregando una nueva suposición; pero todas resultaron ser equivalentes al 5to postulado de Euclides.

Cabe señalar que negando este postulado se obtienen las geometrías no-euclidianas.

Girolamo Saccheri de Milán (1667 – 1733) matemático y sacerdote jesuita, publica el libro *Euclides ab omni naevo vindicatus,* donde demostraba por reducción al absurdo que el postulado de las paralelas era un axioma. Si aceptamos como verdaderos los postulados 1, 2, 3, 4 y además la verdad de la negación del 5to, y de allí obtuviésemos una contradicción, ello significaría que el 5to postulado debe ser verdadero, lo cual bastaría para afirmar que es independiente de los anteriores.

Gráfico N° 2: Cuadrilátero ABCD de Saccheri:



Los ángulos C y D son rectos: De aquí Saccheri demuestra la verdad del 5to postulado, lo que involucra una contradicción con el supuesto original que dicho postulado era falso.

Los ángulos C y D son obtusos: Aquí Saccheri arriba a la negación del postulado 2, que afirma que todo segmento de recta se puede prolongar en ambas direcciones.

Los ángulos C y D son agudos: Aquí Saccheri no arriba a ninguna contradicción. Si hubiese continuado sus desarrollos habría sido el creador de la primera geometría *no euclideana*.

En la demostración para los ángulos agudos, Saccheri logró demostrar todos los teoremas, fueron absolutamente consistentes aunque algunos teoremas resultaron contra intuitivos. Lo que estimó como absurdo porque tenía la convicción de que la única geometría "verdadera" era la euclídea. Saccheri identificaba el espacio geométrico euclidiano con el espacio físico.

No fue hasta el siglo XIX, que un grupo de matemáticos usaron la reducción al absurdo, considerando las dos negaciones del 5º Postulado:
5*- Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela a la recta dada.
5**- Por un punto exterior a una recta pasan dos o más rectas paralelas a la recta dada.

A partir de los cuatro axiomas de Euclides y una de las negaciones surgían teoremas sin llegar a contradicción alguna. Por lo tanto *nacía un nuevo tipo de Geometría*.

En el año 1829, Lobachewsky Nicolai Ivanovitch (1793-1856) publicó en el *Kazan Messenger* un artículo titulado "Sobre los Principios de la Geometría", que marca el inicio de las Geometrías no euclideanas. En él se demuestra que el postulado 5º no podía ser derivado a partir de los otros cuatro y construye una geometría sobre una hipótesis que contradecía dicho postulado: "Por un punto C exterior a una recta AB puede trazarse más de una recta contenida en el plano ABC que no corta a la recta AB". Con este postulado dedujo una teoría geométrica consistente, sin contradicciones lógicas. Pero esta geometría parecía tan opuesta al sentido común que el mismo Lobachewsky la consideró un *Gedanke Experiment* y la denominó "Geometría Imaginaria".

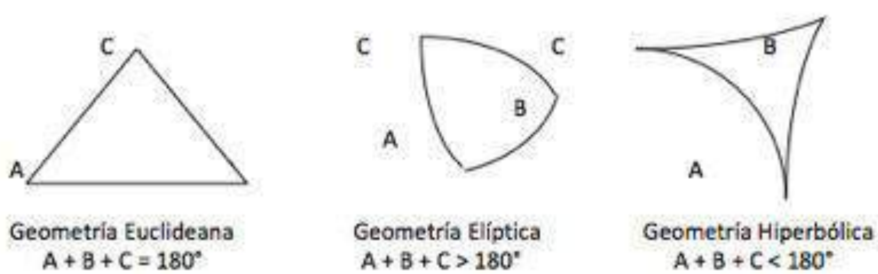
Riemann Georg Friedich Bernhard (1826-1866) no se interesó sólo en la cuestión de cuántas paralelas podían trazarse por un punto exterior a una recta. Sostenía que la Geometría no necesariamente debiera referirse a puntos, rectas y otros conceptos espaciales. Entre las reglas más importantes está la "métrica" a definir, que determinará a priori las propiedades del espacio a considerar. Un modelo de la geometría riemanniana, por ejemplo, toma al 'plano' como la superficie de una esfera y una 'línea recta' como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera y en este caso la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos rectos.

Lobachevsky y anteriormente el alemán Gauss (1777- 1855), junto con Bolyai concibieron una variedad de Geometría no Euclideana, a partir de la negación del 5to postulado, llamada *hiperbólica,* que se corresponde con la suposición de los ángulos agudos de Saccheri. Esta nueva geometría presupone que *por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela.* En contraposición, Bernhard Riemann presupone que *por un punto exterior a una recta no pasa paralela alguna.* Esta Geometría no Euclideana, fue denominada *elíptica.*

Las Geometrías no Euclideanas confirmaron que un sistema geométrico axiomático es válido por su consistencia lógica interna aunque se arriben a "teoremas contraintuitivos".

- La Geometría supuesta en la mecánica newtoniana es euclideana o parabólica.
- La Geometría supuesta en la teoría de la relatividad es riemanniana o elíptica.
- La Geometría supuesta en los modelos del alemán Felix Klein (1849 – 1925) y del francés Henri Poincaré (1854 – 1912) es de Lobachevsky o hiperbólica.

Gráfico N° 3: Triángulos en las Distintas Geometrías



¡Estos no son triángulos, sus lados no son "rectos"! Efectivamente, no son triángulos euclídeos y ¡no hay manera de representar esta Geometría! El concepto de distancia y el de recta han cambiado con el paso a una Geometría no euclídea (Camino Cañón, 1993).

■ Inconsistencias de la sistematización

En 1931, apareció en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik* un artículo con el título *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Matemática und verwandter Systeme* (Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Matemática y Sistemas afines) que es imposible demostrar la completitud y la consistencia de un sistema axiomático. Su autor fue Kurt Gödel (1906-1978) matemático austríaco radicado en USA.

Gödel toma la expresión, digamos a aritmetizada por un determinado número gödeliano, que enuncia que ella misma no es demostrable dentro del sistema. De la autoreferencia de a se infiere que no se puede demostrar a ni tampoco su negación. Con lo cual se prueba lógicamente la incompletitud de cualquier sistema que contenga la aritmética elemental y que es imposible deducir una fórmula que pruebe la consistencia del sistema.

Primer Metateorema de Gödel: *Cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, Principia Matemática, etc.) es incompleto.*

Segundo Metateorema de Gödel: *Ningún sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, Principia Matemática, etc.) puede demostrar su propia consistencia.*

Conclusión: Si el sistema es consistente no es completo y si es completo no es consistente (Gödel, 1931).
Actividad: Construir las demostraciones de los dos metateoremas.

■ Conclusiones

El desarrollo formal y abstracto de la Matemática cobra gran relevancia en el siglo XIX, enfatizando la *Fundamentación de la Matemática* para dotarla de rigor metodológico, epistemológico y filosófico; exigencia que perdura hasta nuestros días.

Las propiedades más relevantes de un sistema son la consistencia y la completitud. Desde un punto de vista axiomático no se puede demostrar simultáneamente su consistencia y completitud, pero al menos se puede suponer hipotéticamente su consistencia, acentuando la importancia de las ciencias fácticas, donde la Matemática sigue siendo imprescindible.

A la sintaxis, se debe agregar una semántica que tiene que ver con el significado de las reglas operativas y una pragmática, que esclarece lo apropiado de su interpretación.

Como sostenía Poincaré, los sistemas formales no son estériles, ya que engendran paradojas. En esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la Matemática. Permite afirmar que el quehacer matemático no sólo es descubrimiento e invención, sino también, retroalimentación.

Una alternativa de solución al problema de la consistencia y la completitud podría ser analizada por la Lógica Dialéctica, que asume la significación de las paradojas como un motor que dinamiza el progreso del saber matemático

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1999) *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza.

Camino Cañón, L. (1993) *La Matemática Creación y Descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Frege, G. (1974) *Escritos Lógico-Semánticos.* Madrid: Tecnos.

Gödel, K. (1981) *Obras Completas.* Madrid: Alianza.

Kant, M. (1770). *Kritik der reinen Vernunft*. Könisberg: Verlag.

Klimovsky, G. y Boido, G. (2005) *Las Desventuras del Conocimiento Matemático.* Buenos Aires: a-Z Editora.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y Refutaciones.* Madrid: Alianza.

Russell, B. (1967) *Los Principios de la Matemática.* Madrid: Espasa-Calpe.