REVISTA EMA
1998, VOL. 3, Nº 2, 112-132

NÚMEROS RACIONALES Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: UNA PROPUESTA CURRICULAR BASADA EN LOS ESTÁNDARES DEL NCTM

CRISTINA GÓMEZ

Las reformas en educación matemática propuestas en los últimos años requieren cambios radicales en el papel que profesores y estudiantes asumen en el salón de clase. Estos cambios sólo pueden darse si los profesores tienen un papel activo en la planeación y desarrollo del currículo. Este artículo propone ideas relacionadas con un contenido específico de matemáticas a nivel de primaria, números racionales y razonamiento proporcional, que pretenden promover este papel activo de los profesores. Las metas, actividades y recursos que podrían ser usados en el diseño de un currículo orientado hacia el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes se presentan no como una imposición para los profesores sino como una guía para que diseñen su propio currículo[1]. Una revisión de la abundante literatura en este tema sirve de base para entender la complejidad de los números racionales como tópico de enseñanza y aprendizaje y al mismo tiempo sirve para establecer relaciones entre los resultados de investigación y la práctica.

INTRODUCCIÓN

El concepto de currículo presentado en los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (*National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM) incluye metas, conocimiento, actividades para profesores y estudiantes, evaluación para esas actividades y recursos para lograr los objetivos de un contenido matemático particular. El currículo se define como “un plan operacional para la enseñanza en el cual se detalla qué matemáticas necesitan saber los estudiantes, cómo van ellos a lograr las metas curriculares establecidas, qué va a hacer el profesor para ayudar a los estudiantes a desarrollar su conocimiento matemático y cuál es el contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje.” (NCTM, 1989, p. 1)

1. A quienes quieran diseñar y poner a prueba en su salón de clase, actividades de enseñanza similares a las que se presentan en este artículo, se les invita a comunicarse, a través del correo electrónico, con la autora del mismo quien está dispuesta a colaborarles en el proceso de diseño.

Esta definición de currículo se basa en una visión en la que "saber" matemáticas significa "hacer" matemáticas en la misma forma en que lo hace un matemático. Un matemático explora los conceptos y sus relaciones para hacer conjeturas que luego demuestra y expone a la consideración pública para crear conocimiento socialmente aceptado (Ernest, 1991). La meta de la educación matemática está en lograr que los estudiantes valoren las matemáticas y se sientan seguros de sus capacidades para hacer matemáticas, que aprendan cómo comunicarse matemáticamente, que se conviertan en resolutores de problemas y que aprendan a razonar matemáticamente. Para lograr esto, los profesores tienen que ofrecer a los estudiantes diversas experiencias relacionadas con aspectos sociales, culturales, científicos e históricos donde aquéllos puedan usar su conocimiento para resolver problemas, comunicar sus resultados y participar en acciones sociales (NCTM, 1989).

Un currículo de matemáticas acorde con esta visión tiene que considerar las ideas, los intereses y las experiencias de los estudiantes según sus condiciones económicas y sociales para que ellos puedan criticar la sociedad en que viven y buscar cambios con base en un análisis reflexivo. El conocimiento matemático tiene que situarse en el contexto apropiado para que sea relevante a los estudiantes. El propósito de la educación matemática está, entonces, en preparar ciudadanos comprometidos en la acción social individual y colectiva.

Con base en esta visión de lo que significa saber matemáticas y de lo que incluye el currículo, este artículo presenta las metas, el conocimiento, el trabajo para estudiantes y profesores y la tecnología que se deberían incluir en un currículo basado en los estándares del NCTM para grados 5-8 centrado en números racionales y razonamiento proporcional. A través del artículo se muestran ejemplos concretos de actividades y soluciones de los estudiantes que ilustran los cambios propuestos en la enseñanza y el aprendizaje de este tema. En la última parte se presenta una descripción de la investigación desarrollada en los últimos años sobre números racionales y algunas ideas sobre actividades necesarias en la formación de profesores que quieran usar este currículo.

METAS

Una de las principales áreas del contenido de matemáticas en grados 5-8 corresponde a números y relaciones entre números. El paso de números naturales a enteros y de éstos a números racionales da la oportunidad de considerar nuevas operaciones, nuevas personalidades o interpretaciones de los números y nuevas relaciones entre esos números. También crea la base para conceptos matemáticos más avanzados como los números reales y para contenidos más avanzados como el álgebra.

Los estándares del NCTM (1989) consideran los números y las relaciones entre números como uno de los trece estándares del currículo de matemáticas para grados 5-8. Este currículo debería incluir el desarrollo progresivo de los números y de las relaciones entre números de modo que los estudiantes puedan comprender, representar y utilizar los números en una variedad de formas equivalentes (enteros, fracciones, decimales, porcentajes, exponentes, y notación científica) tanto en situaciones reales como en situaciones matemáticas; desarrollar el sentido numérico para números naturales, fracciones, decimales, enteros y racionales; comprender y utilizar razones, proporciones y porcentajes en una variedad amplia de situaciones; investigar relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes; y representar relaciones numéricas en diagramas de una y dos dimensiones.

La meta de un currículo enfocado en números racionales y razonamiento proporcional debería ser brindar a los estudiantes oportunidades para desarrollar sentido numérico de número racional y para construir significado matemático del razonamiento proporcional. Antes de seguir es necesario hacer explícito qué significan sentido numérico y razonamiento proporcional.

El concepto de *sentido numérico* ha sido definido por Fey (1990) como la competencia del estudiante para usar aspectos informales del razonamiento cuantitativo al planear operaciones correctas y al interpretar sus resultados inteligentemente. Esta competencia requiere una comprensión bien fundada del significado de las operaciones (p. 79). Dadas las diferentes personalidades que tienen los números racionales, esta es una verdadera oportunidad para tener significados variados, para explorar diversas relaciones numéricas y para ampliar los conceptos de magnitud de un número y de las operaciones. Los estándares del NCTM (1989) proponen un conjunto de actividades que los estudiantes deberían realizar para lograr el sentido numérico. Esas actividades incluyen desarrollar el significado de número, explorar relaciones numéricas usando materiales concretos, comprender la magnitud relativa de números, desarrollar la intuición sobre el efecto relativo de operaciones con números y crear referentes para medidas de objetos y situaciones comunes al ambiente del estudiante (p. 39).

El significado matemático de proporción ha sido definido por Piaget e Inhelder (1974) como una relación de segundo orden que involucra una equivalencia entre otras dos relaciones. Esta definición describe qué es una proporción en términos matemáticos pero no ayuda a comprender cómo se construye el concepto. Lesh, Post y Behr (1988) definen *razonamiento proporcional* como un tipo de razonamiento matemático que involucra sentido de co-variación[2] y de múltiples comparaciones, y la capacidad de almacenar mentalmente y procesar varios fragmentos de información (p. 93). Ellos aseguran que la principal característica del razonamiento proporcional es el reconocimiento de similitud estructural e invarianza[3] en un sistema matemático simple. La capacidad de comparar dos relaciones y generar exitosamente elementos desconocidos en una situación determinada, define el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional.

Esas dos definiciones —sentido numérico y razonamiento proporcional— dan alguna información sobre el tipo de conocimiento que se requiere para lograr las metas propuestas. En la siguiente sección se presenta un análisis del conocimiento necesario para desarrollar sentido numérico de números racionales y para construir significado matemático del razonamiento proporcional.

CONOCIMIENTO Y TIPOS DE ACTIVIDADES QUE LO PONEN EN JUEGO

Si bien hay una fuerte relación entre los números racionales y el razonamiento proporcional, es útil hacer una distinción entre lograr el sentido numérico para fracciones y desarrollar el razonamiento proporcional. El concepto de fracción es un puente obvio entre números naturales y números racionales y debería ser usado como punto de partida en este currículo. El concepto de razón se construye con base en cierta comprensión sobre fracciones y debería ser usado luego para desarrollar razonamiento proporcional. La separación entre fracciones y razonamiento proporcional sirve para hacer una clara presentación de las diferentes actividades que cada concepto requiere. Esta distinción no significa que se descarten las actividades relacionadas con el razonamiento proporcional hasta lograr cierto sentido de fracción. De hecho, muchas actividades relacionadas con fracciones se podrían usar para fomentar el razonamiento pre-proporcional.

Este currículo se enfoca en desarrollar significado matemático para los números racionales y para el razonamiento proporcional, en contraste con el currículo tradicional en el que predominan las reglas de cómputo y los cálculos memorísticos. Kaput y West (1994) señalaron que la causa más importante del fracaso e inutilidad de las matemáticas escolares es la insistencia en el uso de herramientas computacionales que los estudiantes

2. Co-variación se refiere al cambio simultáneo en dos variables que existe por alguna relación constante. Esta relación entre las variables puede ser expresada con un función lineal en el caso de las proporciones.

3. Invarianza se refiere a la constancia de cierta relación entre dos variables. Por ejemplo, si 2 libros cuestan $600, entonces 6 libros de los mismos cuestan $1.800. La relación constante es 1: 300.

aprenden a usar de memoria sin ninguna comprensión de sus bases cuantitativas. Esta consideración está en la base del nuevo enfoque del currículo.

Una respuesta al llamado del NCTM para un cambio en la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas se encuentra en el trabajo de Streefland (1993). El presenta para la enseñanza del concepto de fracción un enfoque basado en la utilización de situaciones reales. Actividades como repartir, organizar, comparar y compensar dan al estudiante la oportunidad de construir significado para fracciones y operaciones con fracciones y razones. Se utilizan diferentes representaciones para dar a los estudiantes la oportunidad de explorar y distinguir el significado de cada concepto. Idealmente, estas representaciones van desde objetos físicos (materiales concretos) hasta representaciones formales, pasando por representaciones gráficas y simbólicas[4]. El uso de diferentes representaciones da a los estudiantes la oportunidad de tener diversos referentes, algunos de ellos concretos, cuando están desarrollando el significado matemático de diferentes conceptos. En el Ejemplo Nº 1, el uso de representaciones gráficas ofrece a los estudiantes referentes cuando están empezando a desarrollar representaciones simbólicas o formales.

Desarrollar razonamiento proporcional es una situación más compleja. Durante los últimos diez años diferentes autores han considerado alternativas para analizar el proceso de desarrollo de este tipo de razonamiento (Kaput y West, 1994; Lamon, 1994; Vergnaud, 1994; Thompson, 1994; Harel et al., 1994; Kieren, 1993; Lo y Watanabe, 1997; Lesh, Post y Behr, 1988; Karplus, Pulos y Stage, 1983). Las actividades, los problemas con enunciados verbales y las situaciones que involucran valores desconocidos, comparaciones y transformaciones parecen ser los más apropiados para evocar y desarrollar razonamiento proporcional (ver Ejemplo Nº 2).

Estos análisis sugieren importantes características de los problemas que deben ser consideradas. Parece que la relación entre los números involucrados, las unidades utilizadas, el tamaño de los números involucrados y el contexto del problema son factores relevantes en la decisión del estudiante sobre qué estrategia usa para resolver problemas de razonamiento proporcional.

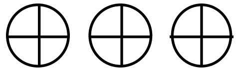
4. Las representaciones formales se refieren a las representaciones aceptadas como correctas por los matemáticos; por ejemplo, la representación de una fracción como a/b. Pero los estudiantes pueden desarrollar otro tipo de representaciones en el proceso de construcción de su propio conocimiento. En el Ejemplo Nº 1, la forma como cada estudiante o el grupo de estudiantes decide representar la repartición en cada mesa es una representación pero no es formal. Con frecuencia, estas representaciones generadas por los estudiantes son más significativas para ellos que las formales. Estas representaciones pueden ser o no simbólicas.

Situación de repartir

Repartir, de manera equitativa, 3 pizzas entre 4 niños.

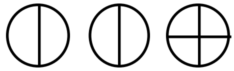
Posibles respuestas

1) Cada pizza se reparte entre los 4 niños.



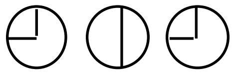
Cada niño recibe $\frac{1}{4}$ de cada pizza, o sea, 3 veces $\frac{1}{4}$, o, $\frac{3}{4}$.

2) Primero se reparten 2 pizzas y luego la otra.



Cada niño recibe $\frac{1}{2}$ de pizza y luego $\frac{1}{4}$ más, o sea, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, o, $\frac{3}{4}$.

3) Las 3 pizzas se reparten al mismo tiempo



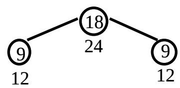
2 niños reciben, cada uno, $1-\frac{1}{4}$ y los otros reciben, cada uno, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Situación de organizar

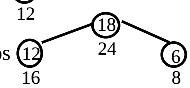
Un restaurante puede organizar las mesas de modo que cumpla los deseos de un grupo de niños que van a compartir pizzas de modo equitativo. Si hay 18 pizzas y 24 niños, ¿cómo se pueden organizar las mesas?

Posibles respuestas

1) 2 mesas, cada una, con 9 pizzas y 12 niños



2) 2 mesas, una con 12 pizzas y 16 niños y la otra con 6 pizzas y 8 niños



Situación de comparar

En la panadería “La Excelencia” se requiere de 5, 6, 10 ó 15 minutos para hornear 4 clases diferentes de panes. Después de una hora, Eduardo, el panadero, ha hecho 5 panes, no todos del mismo tiempo de cocción. ¿De cuáles panes pudo haber hecho y cuántos de cada clase?

Posibles respuestas

En este caso es importante usar la relación entre los tiempos de cocción y las fracciones de hora. Por ejemplo, 6 minutos equivalen a $\frac{1}{10}$ de hora.

1) 2 de 15 minutos y 3 de 10 minutos: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1$.

2) 3 de 15 minutos, 1 de 5 minutos y 1 de 10 minutos: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6} = 1$.

Ejemplo Nº 1. Situaciones de repartir, organizar y comparar

El acertijo de la limonada
Juan hace limonada usando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de jugo de limón. María hace limonada usando 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de jugo de limón. ¿Tienen estas dos limonadas el mismo sabor?

Ejemplo Nº 2. Situación apropiada para evocar razonamiento proporcional

La relación entre números

Una situación de razonamiento proporcional simple involucra dos razones, cada una formada por dos números naturales. Con los cuatro números involucrados, es posible tener una de cuatro situaciones: cada razón es un número natural y las dos razones son iguales; una razón es un número natural, la otra no lo es y las dos razones son diferentes; ninguna de las dos razones es un número natural pero son iguales; y ninguna de las dos razones es un número natural y son diferentes (ver Ejemplo Nº 3). Karplus, Pulos y Stage (1983) sugieren que el desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes podría considerarse progresivo a lo largo de una escala de dos dimensiones. Una dimensión está determinada por las relaciones entre números involucrados, y la otra, que se explicará más adelante, se refiere a las unidades usadas en el problema.

Variaciones del acertijo de la limonada		**Juan**		**María**		
		Azúcar	**Limón**	**Azúcar**	**Limón**	**Razones**
cada razón es un número natural	las dos razones son iguales	3	3	5	5	$\frac{3}{3} = \frac{5}{5}$
una razón es un número natural, la segunda no es número natural	las dos razones son diferentes	3	6	9	15	$\frac{6}{3} \neq \frac{15}{9}$
ninguna de las dos razones es un número natural	las dos razones son iguales	3	7	6	14	$\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$
ninguna de las dos razones es un número natural	las dos razones son diferentes	3	5	7	11	$\frac{5}{3} \neq \frac{11}{7}$

Ejemplo Nº 3. Relaciones entre números

Según estos estudios, los problemas que involucran números naturales pequeños y en los que cada razón es un número natural y además las dos razones son iguales, facilitan el uso de estrategias correspondientes a niveles básicos de razonamiento proporcional por parte de los estudiantes. En cambio, las actividades en las que los números son grandes, ninguna de las dos razones es un número natural y las razones son diferentes, generan más dificultades en el proceso de solución y requieren un mayor desarrollo de razonamiento proporcional para resolverlas exitosamente. Este currículo debería incluir situaciones apropiadas que consideren esta dimensión. Esto daría oportunidad para determinar diferentes niveles de razonamiento proporcional o lograr progreso a niveles superiores.

Las unidades

Una proporción simple involucra una comparación multiplicativa entre cantidades de dos espacios de medida diferentes. Un *espacio de medida* puede considerarse como una estructura con cuatro elementos básicos: un tipo de objetos, una cualidad de estos objetos, una unidad y un proceso para asignar un valor numérico a esa cualidad (Lesh, Post y Behr, 1988). Cuando se usan cantidades de dos espacios de medida diferentes se puede hacer una comparación dentro de cada espacio de medida o entre los dos espacios de medida (ver Ejemplo Nº 4). Esta es la segunda dimensión sugerida por Karplus, Pulos y Stage (1983). Parece que el nivel de desarrollo en el razonamiento proporcional de los estudiantes depende de igual manera de la relación entre los números y del tipo de comparación que se haga.

Para solucionar el acertijo de la limonada se pueden hacer comparaciones entre las recetas (la cantidad de azúcar y limón en la receta de Juan comparada con la cantidad de azúcar y limón en la receta de María) o se pueden hacer comparaciones dentro de cada receta (la cantidad de azúcar contra la cantidad de limón en cada receta).

En este caso hay dos espacios de medida. Uno está determinado por la cantidad de cucharadas de limón en la receta y el otro por la cantidad de cucharadas de azúcar. Usando los esquemas de Vergnaud, el acertijo puede representarse así:

	Azúcar (cucharadas)	Limón (cucharadas)
Juan	3	12
María	5	20

Ejemplo Nº 4. Espacios de medida

El tamaño de los números

Inicialmente las situaciones deberían involucrar números naturales pequeños que faciliten el uso de representaciones físicas y el desarrollo de cálculos simples. De hecho, muchos estudios usan números pequeños que combinados con la relación entre números aumentan la dificultad en el uso de razonamiento proporcional para resolver problemas. Thompson (1994) usa exitosamente números grandes y los cálculos “complicados” centrando la atención en el desarrollo de conceptos. Como el autor dice:

> *[...] no es que la notación y el cálculo numérico no tengan importancia. Más bien, es sólo que hay momentos y lugares para prestar atención a aspectos relacionados con notación y cálculo numérico, pero esos momentos y lugares no deberían interferir con el desarrollo de conceptos fundamentales. (p. 228)*

Los problemas con números “complicados” dan oportunidad para usar, con relativa confianza, calculadoras y para manipular diferentes representaciones numéricas.

El contexto

Uno de los supuestos básicos de esta propuesta es el uso de situaciones reales en las que puedan desarrollarse conceptos significativos. Esta es la oportunidad de poner en contexto procesos y conceptos matemáticos y reconocer las dificultades que los estudiantes tienen en el proceso de matematización horizontal[5]. En situaciones que involucran razonamiento proporcional, el uso explícito de expresiones como “para cada” o “por cada”, el tipo de cantidades involucradas, el uso de cantidades discretas o continuas y el uso de problemas geométricos de semejanza han sido identificados como puntos críticos (Kaput y West, 1994). Cada una de estas características semánticas hace más difícil el uso de razonamiento proporcional.

EL TRABAJO PARA ESTUDIANTES Y PROFESORES

En este currículo todas las actividades deberían estar enfocadas en el aprendizaje del estudiante. Los estudiantes son los participantes activos en el proceso enseñanza-aprendizaje y los profesores tienen que brindar oportunidades para enunciar, poner a prueba y validar conjeturas que ayuden a extender la estructura matemática de los estudiantes (Romberg, 1992). Los profesores tienen que diseñar situaciones en las que los estudiantes puedan explorar e investigar problemas, que promuevan comunicación escrita y verbal en términos matemáticos, y que consideren los intereses de los estu-

5. Streefland (1993) hace una distinción entre matematización horizontal y vertical. “La matematización horizontal se caracteriza por la transformación de problemas reales a términos matemáticos y viceversa, mientras que la matematización vertical se caracteriza por el progreso sucesivo dentro del sistema matemático a través de la estructuración y ordenamiento de conocimientos matemáticos en forma cada vez más eficiente.” (p. 299)

diantes y su conocimiento informal. Romberg (1992) afirma que el trabajo de los profesores está en apoyar, promover, fomentar y facilitar la creación de conocimiento por parte de los estudiantes; crear un ambiente de aprendizaje colaborativo; guiar, escuchar, discutir, incitar, cuestionar y aclarar el trabajo de los estudiantes; y organizar actividades interesantes y apropiadas a las necesidades de los estudiantes (p. 775). Para lograr estos objetivos, los profesores necesitan cierto conocimiento sobre las diferentes personalidades que tienen los números racionales y sobre las diferentes estrategias que usan los estudiantes para resolver problemas de razonamiento proporcional.

Constructos

Autores como Kieren (1976, 1993), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Freudenthal (1983) y Ohlsson (1988) han presentado varias categorizaciones para las diferentes interpretaciones —llamadas subconstructos o personalidades— de los números racionales. En general, cinco situaciones podrían resumir estas caracterizaciones. Estas son: parte-todo, cociente, medida, operador y razón (Marshall, 1993). El Ejemplo Nº 5 presenta situaciones correspondientes a cada constructo.

Parte-todo

Se tienen 4 bolas: 3 rojas y 1 amarilla. ¿Qué parte o fracción de las bolas son rojas?

Cociente

La señora López tiene 3 libras de pescado para el almuerzo de su esposo, el de sus 5 hijos y el suyo propio. ¿Cuánto pescado le corresponde a cada persona si todos comen igual cantidad?

Medida

En el siguiente gráfico, ¿qué tan lejos está X de 0?

0__.__.__X__.__.__.__.__1

Razón

En su receta Susana agrega 1 taza de azúcar por cada 3 tazas de agua. ¿Qué cantidad de azúcar debe agregar para 6 tazas de agua?

Operador

¿Cómo se puede transformar una figura geométrica en una nueva que tenga un tamaño $\frac{3}{4}$ de la original?

Ejemplo Nº 5. Subconstructos de números racionales

En una situación *parte-todo* se requiere partir una cantidad en subpartes o subconjuntos de igual tamaño. En este caso la cardinalidad del conjunto total está dada en términos de las cardinalidades de los subconjuntos que lo componen. Este constructo es considerado fundamental para el desarrollo de otras interpretaciones de números racionales. Buena parte del reconocimiento de estas situaciones se realiza por representaciones visuales del problema.

En una situación de *cociente* el número racional a/b representa que *a* se distribuye o reparte en *b* partes. En este caso el todo puede ser considerado como una unidad que debe ser repartida, a diferencia de las situaciones parte-todo en las que el todo es la reunión de las partes que describe el problema. Otra diferencia con la situación parte-todo es que *a* y *b* representan en este caso dos tipos diferentes de objetos.

En una situación de *medida* el número racional $1/b$ se usa repetidamente para determinar una distancia. Esta medida se utiliza luego para hacer comparaciones entre diferentes elementos del problema. En una situación de *razón* dos cantidades se relacionan entre ellas. Algunos autores consideran diferentes tipos de razones de acuerdo con las medidas utilizadas en el problema (Ohlsson, 1988; Vergnaud, 1983). Por ejemplo, si el tiempo es una de las unidades de medida, las razones pueden ser consideradas como ratas de cambio.

Finalmente, en una situación de *operador* a/b representa un valor que va a ser operado sobre otro para obtener un segundo valor. Las situaciones que corresponden a este constructo describen una función continua, uno a uno, que preserva la razón entre dos cantidades que describen una característica específica de dos elementos (por ejemplo la medida de dos longitudes) o entre dos cantidades que representan dos características de un elemento (por ejemplo el largo y el ancho). A diferencia de las otras situaciones, en este caso a/b debe ser considerado como una entidad, no como un par ordenado de números, que amplía o reduce proporcionalmente el objeto original.

Estrategias

Otro grupo de autores ha estado interesado en analizar las diferentes estrategias que usan los estudiantes para resolver problemas de razonamiento proporcional (Lamon, 1993a, 1996; Lesh, Post y Behr, 1988; Kaput y West, 1994; Lo y Watanabe, 1997; Vergnaud, 1994). Esas estrategias van desde estrategias aditivas incorrectas, a constructivas coordinadas y abreviadas, el uso de la unidad como factor y hasta el uso de ecuaciones formales (ver Ejemplo Nº 6).

Lamon (1993b) describe seis tipos de estrategias usadas por estudiantes para resolver problemas de razonamiento proporcional. En el primer nivel el estudiante no tiene una interacción seria con el problema; en el segundo nivel el estudiante o bien da respuestas sin justificación, o usa ensayo y error,

Problema 1

Un restaurante arregla las mesas poniendo 7 cubiertos y 4 platos en cada una. Si anoche se usaron 35 cubiertos para arreglar las mesas, ¿cuántos platos se usaron?
El esquema correspondiente a esta situación sería:

Cubiertos	Platos
7	4
35	?

Aditiva incorrecta

Una estrategia muy usada por niños al resolver este tipo de problemas consiste en comparar las diferencias absolutas entre las cantidades de cubiertos, por ejemplo, y compensar esa diferencia sumándola a la cantidad inicial de platos, así:

	Cubiertos	Platos	
+28	7	4	+28
	35	32	

Constructiva coordinada

En este caso el estudiante toma la relación inicial para ir construyendo nuevas relaciones que se acerquen a la cantidad deseada, así:

Cubiertos	Platos
7	4
14	8
21	12
28	16
35	20

Problema 2

Un restaurante arregla las mesas poniendo 7 cubiertos y 4 platos en cada una. Si anoche se usaron 392 cubiertos para arreglar las mesas, ¿cuántos platos se usaron?

Constructiva abreviada

La abreviación de sumas repetidas en multiplicaciones permite el uso de una estrategia constructiva abreviada. En este caso el estudiante divide 392 entre 7 para saber cuántas mesas se arreglaron, obteniendo 56 mesas. Como se usan 4 platos por cada mesa, multiplicando 56 por 4 obtiene el número total de platos. El esquema sería:

	Cubiertos	Platos	
x56	7	4	x56
	392	224	

Problema 3

Para hacer una vinagreta se necesitan 4 partes de vinagre por 9 partes de aceite. ¿Cuánto vinagre se necesita para 828 onzas de aceite?

Unidad como factor

En este caso el estudiante trata de encontrar la cantidad correspondiente a 1 unidad, por ejemplo, a 1 onza de aceite, y la usa como referente para obtener la cantidad de vinagre necesaria para 828 onzas, así:

Ejemplo Nº 6. Estrategias usadas en razonamiento proporcional

	Vinagre	Aceite
	4	9
+9		
	0.44	1
x828		
	368	828

Ecuaciones formales

En este caso el estudiante usa una ecuación que relacione las cantidades dadas, estableciendo la comparación entre las razones. En el problema anterior sería:

$$\frac{9 \text{ aceite}}{828 \text{ aceite}} = \frac{4 \text{vinagre}}{x \text{ vinagre}}$$

Ejemplo Nº 6. Estrategias usadas en razonamiento proporcional

o usa estrategias aditivas incorrectas; en el tercer nivel el estudiante describe oralmente o escribe patrones entre los números pero no muestra ninguna comprensión sobre las relación numéricas. Los tres niveles restantes representan niveles más avanzados de comprensión. El cuarto nivel corresponde a razonamiento preproporcional en el cual el estudiante hace dibujos, diagramas, o usa materiales concretos para dar sentido a la situación aunque de manera puramente intuitiva. En el quinto nivel el estudiante muestra nivel de razonamiento proporcional cualitativo, es decir, usa las razones como unidades, entiende las relaciones entre los números y demuestra cierta comprensión sobre la relatividad de la situación. En el sexto nivel, el estudiante usa símbolos algebraicos para representar proporciones y demuestra comprensión de relaciones escalares o funcionales entre los números. En este caso el estudiante ha desarrollado razonamiento proporcional cuantitativo.

La investigación en esta área muestra que el uso de diferentes estrategias depende no solamente del nivel de comprensión de los estudiante en el razonamiento proporcional sino también de las características mencionadas antes como el contexto del problema, el tamaño de los números involucrados, la relación entre esos números y las unidades usadas.

TECNOLOGÍA

Tecnología se refiere aquí a los recursos que profesores y estudiantes deberían usar en las actividades en el aula, a la manera en que esos recursos se usan y a las estrategias de evaluación durante el proceso de aprendizaje.

Los recursos

El uso de materiales concretos y objetos físicos en actividades como repartir y comparar para dar a los estudiantes una representación concreta ha sido estudiado por Streefland (1993). En el mismo sentido Kaput y West (1994) sugieren que es necesario usar los tipos de representaciones concretas que apoyen y extiendan los modelos constructivos de razonamiento proporcional que los estudiantes usan de modo natural como extensión de actividades de conteo, conteo saltado y agrupación (p. 283). La oportunidad de tener imágenes visuales antes que otros sistemas de representación da a los estudiantes referentes concretos para la construcción de significados matemáticos de conceptos como fracciones y proporciones. Además, el uso de representaciones simbólicas, como un paso intermedio entre la representación concreta y la representación formal, apoya el proceso de construcción de ideas matemáticas significativas. En particular, representaciones como los arreglos usados por Streefland para fracciones o los esquemas para los espacios de medida usados por Vergnaud son buenos ejemplos de herramientas de representación que pueden ayudar a los estudiantes a resolver y explicar sus procesos de solución y a la vez pueden ser usados por profesores para evaluar la comprensión de los estudiantes.

Evaluación

La evaluación tradicional enfocada en herramientas computacionales y la memorización de algoritmos tiene que cambiarse para una centrada en la comprensión de los estudiantes. El enfoque basado en esquemas que presenta Marshall (1993) podría ser un camino inicial para que los profesores diseñen e interpreten actividades adecuadas que provean información sobre la compresión matemática de los estudiantes acerca de proporciones y números racionales. Según Marshall un *esquema* está caracterizado por una red de cuatro tipos de conocimiento sobre una situación (p. 267). Esos cuatro tipos de conocimiento son el *conocimiento de las características* que tiene que ver con los detalles sobre la situación; el *conocimiento de las limitaciones* constituido por el conjunto de condiciones que deben cumplirse para que el esquema pueda ser usado en esa situación; el *conocimiento de planeación* que se refiere a cómo se deben ordenar los elementos del esquema y cómo definir las metas necesarias para resolver el problema; y el *conocimiento de ejecución* que incluye los algoritmos y las reglas usadas para efectuar cálculos (ver Ejemplo Nº 7).

El proceso de evaluación se desarrolla entonces en dos pasos. El primer paso consiste en identificar el esquema que se aplica a la situación particular y en el segundo paso se determinan los cuatro tipos de conocimiento mencionados antes. Marshall considera los cinco esquemas —parte-todo, cociente, medida, razón y operador— mencionados antes como particularmente importantes en números racionales. Estas situaciones representan las ideas básicas relacionadas con números racionales y razonamien-

Situación

Sombrear $\frac{1}{2}$ del rectángulo que se muestra aquí: 

Primer paso

Identificar el esquema. Esta es una situación parte-todo en la que la unidad, el rectángulo, va a ser dividido en 2 partes iguales.

Segundo paso

Características

Una de las características más importantes en las situaciones parte-todo es la visual. En este caso hay dos formas de representación que tienen un significado visual para el estudiante. El símbolo $\frac{1}{2}$ y la región misma que se va a partir.

Limitaciones

Una de las limitaciones de este tipo de esquema tiene que ver con lo que el estudiante considera como “el todo” y cómo va a partir esa región. La segunda limitación se refiere a “las partes”, cómo se define igualdad de las partes en una figura, cómo se relaciona igualdad con área, etc.

Planeación

En este caso se requiere poca planeación para desarrollar la tarea. Hay dos pasos: partir la figura y sombrear la región adecuada. Basado en el conocimiento de las características y las limitaciones, el estudiante sólo tiene tres alternativas: sombrear una parte, sombrear las dos, o no sombrear nada.

Ejecución

Es el conocimiento en el que la evaluación tradicional estaría enfocada. En este caso, la respuesta al problema.

Ejemplo Nº 7. Evaluación basada en esquemas

to proporcional. La idea de evaluación basada en esquemas podría ser usada también para evaluar el conocimiento previo de estudiantes, el desarrollo de la comprensión y el proceso de solución de problemas.

INVESTIGACIÓN DE APOYO AL CURRÍCULO

Los números racionales y el razonamiento proporcional han sido objeto de considerable investigación en años recientes. El currículo antes descrito considera, de diferentes maneras, muchos de los resultados de tal investigación. Algunos resultados se usan para definir las actividades que se deberían realizar en el aula, en tanto que, otros dan información sobre lo que los profesores necesitan saber para poder ayudar a los estudiantes en el proceso de construcción de significados matemáticos. Esta investigación puede ser categorizada desde diferentes perspectivas. En los siguientes párrafos se describen algunas de esas perspectivas.

Para tratar de comprender qué es un número racional se han utilizado dos perspectivas, la matemática (Ohlsson, 1988) y la psicológica o de desarrollo (Kieren, 1976). Otros grupos de investigadores se han interesado en estudiar cómo los estudiantes comprenden los diferente subconstructos de números racionales. Un grupo se ha interesado en el análisis semántico del concepto de número racional (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983) mientras otros se han enfocado en la comprensión de los niños cuando están resolviendo problemas de razonamiento proporcional (Lamon, 1994). Otro grupo ha trabajado en clasificación de problemas. Por ejemplo Vergnaud (1983, 1994) usa el análisis del campo conceptual multiplicativo mientras que Lamon (1993a) usa el análisis de las estrategias usadas por los estudiantes para clasificar problemas que requieren diferentes niveles de razonamiento proporcional.

Karplus, Pulos y Stage (1983) estudian las diferentes etapas en el razonamiento proporcional a través de la solución a un problema con un contexto definido —el acertijo de la limonada— donde la relación entre los números involucrados es variable. Lamon (1994) examina cómo el uso de procesos como unificar[6] y normalizar[7] determinan diferentes etapas en el razonamiento proporcional de los estudiantes.

Otras posibles clasificaciones de la investigación en esta área consideran si los investigadores toman una perspectiva matemática o realista en el proceso pedagógico. Los resultados desde el punto de vista matemático han mostrado la complejidad de este tema (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983). La perspectiva realista ha mostrado una alternativa para enseñar y aprender fracciones con verdadera comprensión (Streefland, 1993).

RELACIÓN ENTRE LA INVESTIGACIÓN Y LOS ESTÁNDARES

El interés en la investigación relacionada con números racionales y razonamiento proporcional comenzó antes de la publicación de los estándares del NCTM. Si bien esos trabajos no consideran los cambios en el contenido de las matemáticas escolares y en la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas promovida por los estándares, sus resultados han contribuido a comprender la complejidad de la estructura matemática subyacente al razonamiento multiplicativo. Esos estudios incluyen, entre otros, el análisis de

6. Unificar es la habilidad de construir una unidad de referencia y luego interpretar la situación dada en términos de esa unidad.

7. Normalizar es la reconceptualización de un sistema en relación a una unidad fija.

contenido desde la perspectiva matemática (Ohlsson, 1988), diferentes etapas de razonamiento proporcional (Karplus, Pulos y Stage, 1983), clasificación de problemas (Vergnaud, 1983) y análisis semántico de conceptos de número racional (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983).

Después de la publicación de los estándares del NCTM, algunos de estos trabajos han continuado cambiando su interés a fin de incluir la comprensión del razonamiento de los estudiantes en situaciones proporcionales (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993) o para comprender la interpretación que los profesores dan a algunos subconstructos (Behr, Khoury, Harel, Post y Lesh, 1997).

Ha surgido a la vez nueva investigación que sigue la propuesta del NCTM. Una parte de la investigación ha estado enfocada en el conocimiento informal de los niños con el fin de comprender cómo se puede utilizar el pensamiento de los niños para diseñar nuevas actividades de aprendizaje (Lamon, 1993a). Otros autores que tratan de dar información útil para el diseño de nuevas maneras de instrucción de este contenido, han estudiado tópicos tales como maneras alternativas de evaluación (Marshall, 1993), procesos de solución de problemas de los estudiantes (Lamon, 1993b) y diferentes sistemas de representación (Streefland, 1993).

A pesar del gran interés en investigación en este tema, todavía hay aspectos que necesitan más atención. Los estándares del NCTM promueven cambios en el contenido de las matemáticas escolares, en la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas y en la visión de la naturaleza de las matemáticas. En lo que se refiere al contenido de números racionales y razonamiento proporcional es entonces necesario estudiar maneras alternativas de organizar este contenido de modo coherente con otros contenidos de las matemáticas escolares. La idea de usar campos conceptuales como una estructura para organizar contenidos matemáticos es una opción que debe ser explorada. Por otra parte se requiere estudiar más el uso de situaciones problemáticas adecuadas con base en un enfoque realista usando diseños longitudinales de investigación. También merece más atención la pregunta sobre cómo integrar las matemáticas con otras áreas de contenido y con la situación social relacionada con el contexto cultural y social de los estudiantes.

Los temas que se mencionaron antes están asociados con cambios en la visión de la naturaleza de las matemáticas. No obstante, también se deben considerar el conocimiento, las actitudes y las creencias de los diferentes actores —profesores, padres de familia, administradores, legisladores e investigadores— involucrados en el proceso de cambio. Es necesario realizar estudios que se ocupen de interpretar esas concepciones y diseñar actividades para transformar la visión de los actores.

DESARROLLO PROFESIONAL

La preparación de profesores que puedan enseñar un currículo como el propuesto aquí requiere de un cambio radical en el concepto de enseñanza. El concepto tradicional que se tiene del profesor de matemáticas como un reportero que de manera objetiva presenta a los estudiantes la verdad, tiene que cambiarse por uno en el que la actividad del profesor sea contribuir a la construcción de conocimiento con base en redes estructurales alrededor de ideas poderosas. En esta propuesta las ideas de fracción y razonamiento proporcional son el centro alrededor del cual todas las situaciones se desarrollan. Las nuevas situaciones generadas por el profesor tienen que integrar el conocimiento anterior de los estudiantes en una interacción social que permita la construcción de nuevo conocimiento tomando como base esta ideas básicas.

Los resultados presentados por Sprinthall, Reiman y Theis-Sprinthall (1996) en relación con el desarrollo profesional de los profesores determinan puntos importantes que se deben considerar en cualquier programa de actualización de profesores. Tales resultados informan acerca del fracaso de cualquier modelo prescriptivo impuesto desde arriba, de la estabilidad de las concepciones de los profesores sobre la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje, de la falta de relación entre la teoría y práctica y de la exigente situación que encaran los profesores con relación a prácticas inclusivas y reconocimiento de diversidad cultural.

Cualquier programa de desarrollo profesional debe ofrecer a los profesores experiencias significativas con base en su conocimiento previo e integradas a su contexto social. Los seis principios que Little (1992) recomienda para el desarrollo profesional se deberían tener en cuenta en el diseño de esas actividades. Primero, el programa tiene que ofrecer un compromiso significativo a nivel emocional, social e intelectual con ideas, con materiales y con relaciones con otros colegas dentro y fuera de la profesión. Segundo, el diseño debe tomar en cuenta de manera explícita el contexto de enseñanza y la experiencia de los profesores. Tercero, la experiencia tiene que ofrecer apoyo para profesores con sentimientos u opiniones diferentes, o para quien no esté de acuerdo con estas ideas de cambio. Cuarto, la práctica en el salón de clase debe ponerse en contexto con la práctica de la institución y con el futuro de los estudiantes. Quinto, el programa de desarrollo profesional debe preparar a los profesores para emplear las técnicas y perspectivas de investigación. Finalmente, los intereses individuales y los intereses de instituciones deben ser considerados y equilibrados de la misma manera que deben ser consideradas las limitaciones burocráticas.

El conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y el conocimiento curricular necesario para desarrollar este currículo tiene que ser considerado en el programa de desarrollo profesional. Pero el conocimiento que tienen los profesores debe ser reconocido y valorado siempre. Este currículo no es una prescripción de lo que los profesores deben hacer en el aula sino más bien es un plan que considera los puntos importantes que profesores, administradores y estudiantes van a encontrar durante el proceso enseñanza-aprendizaje. Cualquier decisión final tiene que ser tomada por los profesores mediante la consideración de las particularidades de los estudiantes, su conocimiento informal y su cultura.

REFERENCIAS

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational numbers toward a semantic analysis —emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 48-69.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational-number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). Orlando, FL: Academic Press.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Fey, J. T. (1990). Quantity. En L. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: new approaches to numeracy* (pp. 61-94). Washington, DC: National Academy Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structure.* Dordrecht, Netherlands: D. Reidel.

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1994). The impact of number type solutions of multiplication and division problems: further investigations. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics* (pp. 365-384). Albany, NY: SUNY Press.

Kaput, J. y West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics* (pp. 237-287). Albany, NY: SUNY Press.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). Orlando, FL: Academic Press.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurements: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. (1996). Development of unitizing: its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27,* 170-193.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: SUNY Press.

Lamon, S. (1993a). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24,* 41-61.

Lamon, S. (1993b). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operation in the middle grades. Research agenda for mathematics education,* v. 2, (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Little, J. (1992). Teachers' professional development in a climate of educational reform. *Educational evaluation and policy analysis*, *15* (2), 129-151.

Lo, J. y Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: a story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 216-236.

Marshall, S. (1993). Assessment of rational number understanding: a schema-based approach. En T. Carpenter, E. Fennema, y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 261-288). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston. VA: NCTM.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En M. Behr y J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades. Research agenda for mathematics education,* v. 2, (pp. 53- 92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1974). *The child's conception of quantities.* Boston: Routledge and Fegan Paul.

Romberg, T. (1992). Problematic features of the school mathematics curriculum. En P. W. Jackson (Ed.), *Handbook of Research on Curriculum* (pp. 769-788). New York: Macmillan.

Sprinthall, N., Reiman, A. y Theis-Sprinthall, L. (1996). Teacher professional development. En J. Sikula (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (2da. ed., pp. 666-703). New York, NY: Macmillan.

Streefland, L. (1993). Fractions: a realistic approach. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 289-325). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: SUNY Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, FL: Academic Press.

Cristina Gómez
Estudiante Graduada
Depto. de Currículo e Instrucción
Universidad de Wisconsin-Madison
610 A Eagle Hts.
Madison, WI 53705
USA
Tel.: 608-2383354
E-mail:cgomez1@students.wisc.edu