LOS NÚMEROS NEGATIVOS ¿CONSTITUYEN UN OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO PERSISTENTE?

Aurora Gallardo, José Luis Mejía
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
agallardo@cinvestav.mx, jose.luc.am@hotmail.com

Palabras clave: Números negativos, Obstáculo, Epistemología, Didáctica
Keywords: Negative numbers, Obstacle, Epistemology, Teaching

RESUMEN

Este trabajo explica las dificultades encontradas por estudiantes de secundaria al resolver problemas históricos de enunciado verbal con números negativos apoyándose en la idea de obstáculo epistemológico. Utilizando el método histórico-crítico analizamos las producciones de los alumnos poniendo de manifiesto semejanzas en la forma de conceptualizar dichos números entre ellos y los matemáticos del pasado.

ABSTRACT

This paper explains the difficulties encountered by high school students to solve word problems. Historic negative numbers are based on the idea of epistemological obstacle. Using the historical-critical method we analyze student productions highlighting similarities in the way of conceptualizing these numbers between them and mathematicians of the past.

Introducción

Considerar a los negativos como números fue una ardua tarea que tardó varios siglos por parte de los matemáticos del pasado. En el presente, este tópico de las matemáticas causa dificultades en los estudiantes de secundaria. Algunos estudios han mostrado y explicado dichas dificultades en términos del presente. Sin embargo, aquí tratamos de exponerlas basándonos en la historia, asiéndonos del concepto de obstáculo epistemológico.

Este artículo expone las nociones de obstáculo epistemológico y de Sisma Matemáticos de Signos (SMS). A continuación se presenta el método histórico-crítico para analizar las producciones de los estudiantes. En la parte empírica se da conocer el escenario de la investigación y el análisis de los diálogos de la entrevista de dos alumnos del nivel alto, en donde se ha denominado con E al entrevistador y con A al estudiante. Por último, la sección de comentarios finales muestra la naturaleza epistemológica de los obstáculos encontrados por los estudiantes.

La idea de obstáculo epistemológico

El obstáculo epistemológico aparece por primera vez en el ámbito de las ciencias experimentales (Bachellard, 1938/2011). Este autor advierte que en el problema del conocimiento científico:

> No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer donde aparecen por una especie de necesidad funcional. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización” (Bachellard, 1938/2011, p.15).

Brousseau, (1983) retoma la idea de obstáculo epistemológico en el ámbito de la didáctica de las matemáticas. Este autor postula que un alumno adquiere conocimiento a través de la resolución de problemas, pero esta actividad genera una concepción en el estudiante, la cual es funcional para un cierto tipo de problemas. Para resolver otro campo de problemas es necesario adaptar esta concepción, hacerla evolucionar, pero puede darse el caso en que no sea suficiente con adaptarla, sino se vuelve imperativo rechazarla, entonces esta concepción se vuelve un obstáculo, al cual podemos calificar de epistemológico cuando se puede rastrear en la historia de las matemáticas.

Antecedentes de la investigación

Son muchas las indagaciones realizadas acerca de los números negativos. Una de las más importantes es la de Gallardo (1994, 2002) quien pone de manifiesto los conflictos de los estudiantes para extender el dominio numérico de los naturales a los enteros. Otro estudio también trascendente es el de Bruno y Martinón (1997) quienes descubren que los alumnos usan tres tipos de procedimientos para resolver problemas aditivos con números negativos.

Asimismo, el estudio de Peled (1991) plantea cuatro niveles teóricos en dos aspectos del conocimiento de los números enteros: la recta y la cantidad. Estos inician desde el más elemental que implica ver los enteros negativos como naturales teniendo cualidades opuestas hasta el nivel más alto incluyendo la capacidad de realizar operaciones de adición y sustracción con cualquier número entero.

Investigaciones más recientes han estudiado a niños de 6-10 años de edad con respecto al tema de los enteros. Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schapelle & Lewis (2014) basándose en un análisis histórico se proponen buscar aquellas formas de razonamiento de los niños que les obstaculizan o permiten comprender los números enteros. Ellos encuentran tres obstáculos, tres formas de razonamiento positivo y una forma de pensamiento que puede funcionar como ambas, hacia la comprensión de los enteros, siendo paralelas éstas a las mostradas por los matemáticos históricos de distintas épocas.

Bofferding (2014) investiga cómo cambian los modelos mentales de los niños respecto al valor, orden y la magnitud de los enteros después de recibir una instrucción sobre los significados unario y binario del signo menos. Ella destaca en este trabajo que las concepciones del cero como el número más pequeño o como nada restringen la habilidad para aceptar otros números menores que cero y, por otro lado, que las concepciones de valor de los estudiantes son más difíciles de cambiar que sus ideas acerca del orden.

Es necesario considerar como antecedentes también las investigaciones históricas acerca de los negativos. Al respecto, Glaeser (1981) busca en la historia aquello que se opone a la comprensión de los números relativos e indica que el proceso de su construcción como concepto fue de una marcada lentitud. La evolución histórica del negativo ha franqueado según Glaeser, los siguientes obstáculos:
1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.
2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.
3. Dificultad para unificar la recta real.
4. La ambigüedad de los dos ceros.
5. El estancamiento en el estadío de las operaciones concretas.
6. Deseo de un modelo unificador. (Glaeser, 1981, p. 340)

A partir de lo anterior podemos afirmar que los obstáculos propuestos por Glaeser son obstáculos epistemológicos. En nuestro estudio queremos mirar estos obstáculos desde la perspectiva de los estudiantes.

■ Fundamentación teórica

Esta investigación se basa en un concepto fundamental de la matemática educativa: los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) (Filloy, 1999, Filloy, Rojano y Puig, 2008). Estos autores crean la noción de SMS basándose en la semiótica para señalar que los textos producidos por los estudiantes en los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas son sistemas matemáticos de signos y no sistemas de signos matemáticos. La diferencia entre estos conceptos es de suma importancia en la interpretación de dichos textos. Un sistema de signos matemáticos se compondría únicamente de los signos estrictamente matemáticos mientras que la segunda idea incluye todos los signos que el estudiante usa inclusive el lenguaje vernáculo. El significado de los textos se debe al sistema y no a los signos individuales.

Desde una perspectiva didáctica lo que los alumnos utilizan en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas son más que signos lingüísticos. Por esta razón no es adecuado hablar del par significado/significante proveniente de la lingüística sino más bien de par contenido/expresión que encaja mejor en la idea de que los procesos educativos son procesos de significación y comunicación. En matemáticas acostumbramos hablar de las expresiones algebraicas o expresiones aritméticas para referirnos a esas formas escritas.

El concepto de SMS señala el hecho de darle más importancia al significado en uso de las matemáticas más que su significado formal. Esto hace necesario considerar las ideas de “significado y sentido". La primera hace referencia al campo semántico del objeto conformado de un sistema estable de generalizaciones donde cada palabra será la misma para todas las personas de un conglomerado social determinado en una época histórica específica. La segunda hace alusión al campo personal del sujeto que produce “sentidos” que se convertirán en significado si hay una interpretación afortunada del estudiante, respecto a la situación problemática planteada.

1. Los objetivos

- Observar la existencia de semejanzas conceptuales u operativas entre los autores históricos y estudiantes actuales al resolver problemas del pasado.
- Determinar si los números negativos constituyen un obstáculo epistemológico.

2. El método

En este Estudio utilizamos el método histórico-crítico (Filloy y Rojano, 1984, Gallardo, 2002). Filloy y Rojano (1984) retomaron a Piaget (1960) para llevar este método al estudio de los procesos de enseñanza/aprendizaje del álgebra con estudiantes de 13-14 años de edad, descubriendo la existencia de un corte didáctico entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Más adelante Gallardo (2002) utiliza el mencionado método para descubrir los procesos por los cuales los estudiantes de secundaria realizan la extensión numérica de los naturales a los enteros.

El método histórico-crítico se caracteriza por movimientos recurrentes de ida y vuelta entre el análisis de los textos clásicos históricos de las matemáticas y el análisis del trabajo de los estudiantes en los sistemas educativos actuales. El análisis histórico sugiere la manera de construir secuencias didácticas que se pondrán a prueba con los estudiantes en un sistema educativo. Luego se regresará a la historia con una visión enriquecida por el trabajo empírico. Este movimiento de ida y vuelta es lo que ubica a este método en la matemática educativa y no en la historia o en la epistemología de las matemáticas.

El estudio empírico

Estudiamos la resolución por parte de estudiantes de secundaria de dos problemas históricos: el problema de “los monos” (Baskhara, Siglo XII) y el problema de “las telas” (Chuquet, Siglo XV). El estudio se llevó a cabo con 32 alumnos de 12-13 años de edad de una escuela pública matutina en México, D.F. Los grupos de esta escuela se componen de 30-40 estudiantes de ambos sexos y es considerada de un nivel académico promedio. Al grupo de investigación se aplicó un cuestionario con 30 ítems que abarcaron varios temas de los números negativos: operaciones, orden, recta numérica, problemas históricos y resolución de ecuaciones lineales con una y dos incógnitas. La resolución del cuestionario nos permitió ubicar a los alumnos en tres niveles: alto, medio y bajo. Se eligieron dos alumnos de cada nivel para entrevista videograbada.

El protocolo de entrevista contenía únicamente los problemas históricos. El entrevistador en ningún momento sugirió la respuesta, por el contrario, la idea era dejar hablar al alumno y sólo intervenir para profundizar cada vez más en su pensamiento.

Los resultados

Exhibimos dos episodios donde los números negativos representan un obstáculo epistemológico. Mostramos el análisis de la resolución de los problemas primero por los matemáticos históricos y a continuación por los estudiantes.

Episodio 1. Permanencia del obstáculo

El problema de "los monos". Báskhara (Siglo XII)

El cuadrado de la quinta parte de una manada de monos menos tres están escondidos en una cueva y uno de ellos está en un árbol. ¿Cuántos monos existen?

La ecuación que modela el problema es la siguiente:

$$(\frac{x}{5} - 3)^2 + 1 = x$$

a) La resolución histórica

Bhaskara señala que sólo se debe aceptar una solución, aunque ambas sean positivas. Al encontrar los valores, a saber, x_1= 50, x_2 = 5, indica que el segundo valor no debe tomarse por ser incongruente, señala que la gente no aprobaría un número negativo. Veamos por qué: el segundo valor es cinco, su quinta parte es uno y *no puede substraerse de tres.* Si el enunciado dijera "la quinta parte de la manada se sustrae de tres (3-1) se debería tomar el segundo valor y no el primero porque la quinta parte de 50 no puede restarse de tres (Colebrooke, 1817).

b) La resolución actual

En el siguiente fragmento de la entrevista realizada a un estudiante del nivel alto, se observa el obstáculo para concebir al número negativo muy similar al de Bháskara en el siglo XII.

Después de plantear la ecuación cuadrática que resuelve el problema el alumno (A) llega a las dos soluciones. Entonces el Entrevistador (E) pregunta:

> E: Resulta que hay dos soluciones. ¿Te dicen cuántos monos existen? ¿Cómo lo interpretas?
> A: Podrán existir 50 ó 5
> E: ¿Se pueden las dos?
> A: ¡Ah no! No, porque *nunca pueden existir menos dos monos.*
> E: ¿De dónde sacaste eso de menos dos monos? ¡No entiendo!
> A: Sí, porque 5 entre 5 a uno, menos 3, menos 2. Entonces no podría haber menos 2 monos en una manada.
> E: ¡Ah caray! ¿Entonces cuál es la solución?
> A: 50

Episodio 2. Superación del obstáculo

En seguida mostramos el problema "de las telas" resuelto por Chuquet (Siglo XV) en el cual encontramos el obstáculo en la concepción de la solución negativa, superado finalmente.

Un comerciante compró 15 piezas de tela por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas telas compró de cada clase.

El problema se modela por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y = 15$$
$$11x + 13y = 160$$

a) La resolución histórica.

El método de resolución conduce a Chuquet a x = 17 ½, y = - 2 ½. La interpretación atribuida a la solución negativa es la siguiente: el comerciante compró 17 ½ piezas a 11 escudos cada una con dinero en efectivo, pagando 192 ½ escudos. Además, el comerciante adquirió 2 ½ piezas a 13 escudos cada una para pagar a crédito la cantidad de 32 ½ escudos. De esta forma contrajo una deuda de 32 ½ que al restarla de la cantidad 192 ½, se obtiene 160. De esta misma forma las 2 ½ piezas adquiridas a crédito deben restarse de las 17 ½ compradas y el comerciante tiene únicamente 15 piezas realmente suyas (Marre, 1881).

b) La resolución actual

Presentamos una parte de la entrevista realizada a otro alumno de nivel alto.

El alumno ya ha planteado el sistema de ecuaciones lineales y sin ayuda de E arriba al valor de x, entonces se desarrolla el siguiente diálogo:

> E: Ya tenemos la x, la voy a encerrar (encuadra x=17.5)
> (Posteriormente, A llega a la de y)
> A: Totalmente imposible (Se refiere a *y= -2.5*).
> (Después de comprobar en una de las ecuaciones del sistema afirma:)
> A: ¡Oh sí salió!
> E: Entonces ¿qué pasó?
> A*: Pues compró 17 y media telas de la calidad 11 y le dio 2 telas y media de la calidad 13.*
> E: ¿A quién se las dio?
> A: Al que le vendió éstas (x= 17.5)
> E: ¿Y éstas (y=-2.5)?
> A: Es como un trueque. O sea, yo te doy estas telas. Valen tanto.
> A: Tú me das este valor en las telas de esto. En total suman 15 telas porque a éste (x=17.5) le restas dos y media que éste (y= 2.5) le dio.
> A: En total se queda con las 15 telas de la cantidad de 11.

Comentarios finales

En este estudio observamos las semejanzas al conceptualizar los números negativos entre los autores históricos y dos estudiantes de secundaria del presente. Las semejanzas no hablan únicamente de un paralelismo histórico sino también contribuyen a caracterizar a dichos números como obstáculos epistemológicos.

En el primer episodio observamos que el estudiante no logra superar el obstáculo, al no aceptar el número -2, aferrándose a un saber forjado en la "vida cotidiana". En el segundo, el alumno logra superar el obstáculo, haciéndose de dos situaciones: primero, la seguridad que le da la sustitución algebraica de -2.5 en la ecuación; segundo, consigue alcanzar una interpretación adicional adecuada al contexto del problema. Estos hechos nos hablan de obstáculos epistemológicos persistentes, no siendo superados, incluso por estudiantes de alto nivel académico.

En los diálogos de la entrevista podemos apreciar la necesidad de recurrir a la noción semiótica de SMS, pues la forma de comprender el comportamiento de los estudiantes al enfrentar dichos problemas, consiste en considerar la totalidad de signos empleados por ellos y no sólo los estrictamente matemáticos. Los "sentidos" producidos por el primer estudiante para la solución -2 lo conducen a ignorar la diferencia entre número y magnitud. En el segundo caso, el alumno transita de los "sentidos" al significado del número -2.5, apoyándose en las vicisitudes mencionadas en el párrafo anterior.

Del análisis del cuestionario observamos que la mayoría de los estudiantes muestran dificultades al enfrentar los diversos temas con números negativos. Dificultades extremas surgieron en la resolución de la sustracción a – b, con a y b números enteros, así como en la resolución de problemas de enunciado verbal modelados por esta operación.

En cuanto al planteamiento de problemas históricos incluidos en el cuestionario, varios alumnos no los resolvieron y aquellos que lo hicieron usaron métodos aritméticos llegando a soluciones incorrectas. Esta situación se confirmó con la entrevista de los estudiantes de los niveles bajo y medio.

Sería aventurado generalizar los resultados de esta investigación indicando que todos los alumnos se comportan en forma similar a los matemáticos históricos. Estamos conscientes de la necesidad de una investigación más amplia para poder precisar las características de estos comportamientos.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938/2011). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (27ª reimpresión). México: Siglo XXI Editores

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R.,Whitacre, I., Schapelle, B., & Lewis, M. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: an analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 45(1),* 19-61.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education 45(2)*, 194-245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémilogiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mahématiques 4(2),* 165-198.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias 15(2)*, 249-258.

Colebrooke, H.T. (1817). *Algebra, with arithmetic and measuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháskara*. London: John Murray.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Algebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'Educazione Matematica 5(3)*, 278-306.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach.* New York: Springer.

Gallardo, A. (1994). *El status de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in thetransition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics 49(2),* 171-192.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques 2(3),* 303-346.

Marre, A. (1881). Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet, parisien,14, 413-460.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. In F. Furinghetti (Ed.) *Proceeding of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,3* (pp.145-152). Assisi, Italy.

Piaget, J. (1960). *Introducción a la epistemología genética. I El Pensamiento Matemático*. México: Paidós.