UNA APROXIMACION AL ESTUDIO DE LA NOOSFERA: "LA CONSTRUCCIÓN DE LOS PARALELOGRAMOS EN EL NIVEL PRIMARIO Y SECUNDARIO"

Lidia Ibarra, Blanca Formeliano, Ivone Patagua, Silvia Baspiñeiro, Mirta Velásques, Graciela Méndez, Florencia Alurralde.
Universidad Nacional de Salta (Argentina)
ibarra@unsa.edu.ar, blafor@hotmail.com, ivonepatagua@gmail.com, smbaspi@hotmail.com, mirtvela@unsa.edu.ar, nildagramendez@yahoo.com.ar, florencialurralde@hotmail.com

Palabras clave: noosfera, antropológico, praxeología, transposición, geometría
Keywords: noosphere, anthropological, praxeology, transposition, geometry

RESUMEN

La enseñanza de la geometría ha sido postergada durante años en nuestro sistema educativo, a partir de esta realidad, el grupo de investigación ha realizado diversos trabajos dentro de la Construcción de Triángulos con regla y compás, teniendo como marco teórico la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD). Como continuación de lo trabajado, nos centramos en la construcción de Paralelogramos con regla y compás.

El objetivo de esta presentación es mostrar los resultados del estudio de la noosfera, a partir del análisis de los documentos curriculares correspondientes y los libros de textos escolares, elementos propios del Modelo Epistemológico de Referencia (MER).

ABSTRACT

The geometry teaching has been postponed for years in our education system, from this reality; the research group has carried out several works into construction of Triangles with ruler and compass, having as theoretical the Anthropological Theory of the Didactic (ATD).

As a continuation of the worked, we focus on parallelograms construction with ruler and compass.
The presentation's objective is showing the results of noosphere's studies from the analysis of relevant curriculum documents and school textbooks, elements of Epistemological Reference Model (ERM).

■ Introducción

La enseñanza de la geometría ha sido postergada en el sistema educativo argentino, especialmente las construcciones de objetos geométricos con regla y compás. El grupo de investigación realizó diversos Proyectos convalidados por la Universidad Nacional de Salta (Argentina) sobre Construcción de Triángulos, basados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se analizó y elaboró tres categorías teóricas: Organización Matemática de Referencia (OMR), Organización Matemática a Enseñar (OMaE) y Organización Matemática Enseñada (OME), puestas en práctica en 7º año de una escuela primaria.

Se presenta en este trabajo, el estudio de la construcción de los paralelogramos, en 6° y 7° año (Nivel Primario) y 1° año (Nivel Secundario), con el objetivo de interpretar la problemática referida a la "Construcción de paralelogramos con regla y compás" desde tres dimensiones: didácticas, curricular e institucional.

Se partió de la siguiente hipótesis "la ausencia de tareas de construcción de paralelogramos en el contexto áulico origina la pérdida de sentido del trabajo geométrico". Fue necesario analizar algunos componentes de la noosfera, como documentos curriculares, libros de textos y carpetas, que permitieron obtener conclusiones sobre la hipótesis inicial.

■ Marco teórico

Se parte de las cuestiones analizadas en la TAD (Chevallard, 1999) donde se destacan las nociones de "*saber sabio*", "*saber a enseñar*" y "*saber enseñado*". Las transformaciones de estos saberes dependen de las instituciones y del docente, En efecto,

> …un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El 'trabajo' que se hace de un objeto de saber a enseñar al transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica. (Chevallard, 1991, p. 45).

Según Chevallard, el sistema didáctico está constituido por el saber, el docente y el alumno, inmerso en un ambiente (sistema de enseñanza) y en la sociedad misma (padres, mundo político, medios de comunicación, "sabios" entre otros). Es por esto que el sistema didáctico se enfrenta con regularidad al debate social para la articulación con la sociedad y sus exigencias (Chevallard, 1991), constituyendo la denominada *"noosfera".* El tránsito entre la institución productora del saber y el saber enseñado se realiza mediante procesos transpositivos, no unidireccionales, que han sido simplificados por Barquero, Bosch y Gascón (2010) como: Praxeología sabia Praxeología a enseñar Praxeología enseñada Praxeología "aprendida". El aspecto esencial de la actividad matemática es la actividad de modelización que consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, el trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos permite contestar las cuestiones planteadas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

■ Proceso de elaboración del Modelo Epistemológico de Referencia

i. Fundamentación de las organizaciones didácticas.

Nos centramos en la "Construcción de paralelogramos con regla y compás" como herramienta para el análisis didáctico matemático, llamado modelo epistemológico de referencia (MER), cuya construcción orienta la aproximación del saber matemático antes de que se transforme en saber enseñado. En investigaciones anteriores (Ibarra, Formeliano, Alurralde, Méndez, Velásques, 2011) se construyó un MER de "Construcción de triángulos con regla y compás", que sirvió de base para esta propuesta.

Se parte que tanto las Organizaciones Matemáticas (OM) como las Organizaciones Didácticas (OD) tienen cuatro componentes: tareas (T), técnicas (τ), tecnologías (θ) y teorías (Θ). Los dos primeros (tareas y técnicas) conforman lo que se denomina el bloque práctico-técnico, mientras que los dos últimos (tecnologías y teorías) conforman el bloque tecnológico-teórico (Chevallard, 1999). Estas nociones son relativas a la función que desempeñan en la actividad matemática y varían de una institución a otra.

Las construcciones con regla y compás tienen por objetivo mostrar a través de los procedimientos, que son un encadenamiento lógico de proposiciones. Lo que requiere tener en cuenta problemáticas como la continuidad, los lugares geométricos y las transformaciones en el plano entre otros conceptos.

Por ejemplo: el problema de la reconstrucción de un triángulo equilátero enunciado como proposición por Levi (2003), admite el uso del compás en su procedimiento de resolución mediante el trazado de dos círculos y luego el de los lados. Ello es posible a pesar de que Euclides omitiera justificar la razón por la que dos circunferencias deben cortarse, noción topológica hoy admisible gracias al concepto de continuidad enunciado por Dedekind.

ii. Elaboración del MER específico para la construcción de los paralelogramos con regla y compás.

La TAD postula que toda actividad matemática institucional puede analizarse en términos de OM de complejidad creciente. Todo MER debe tener en cuenta la evolución histórica de las OM sabias, adaptadas a los procesos transpositivos. La elaboración del MER constituye una herramienta de distanciamiento de dicha institución sabia, al permitir a la investigación didáctica explicitar su propio punto de vista sobre el contenido matemático en juego dentro de los procesos didácticos que se diseñan, implementan, analizan y evalúan.

Una Organización Matemática Puntual (OMP) en una institución es generada por un único tipo de tareas. Por ejemplo, la tarea $\boldsymbol{T_i}$**:** *Construir un cuadrado dado un lado*.

Una Organización Matemática Local (OML) en una institución es el resultado de la integración de varias OMP en torno a un discurso tecnológico común. Esa tecnología (Θ), justifica, explica y relaciona entre sí a las OMP que la integran. A modo de ejemplo en el MER diseñado para este trabajo se describen cómo se realizarían algunas tareas $\boldsymbol{T_i}$, las técnicas (τ_i) y las tecnologías θ_i correspondientes para diferentes **OMP** y cómo emerge una **OML** a partir de las **OMP.**

- **Organizaciones Matemáticas Puntuales**

Para la construcción de los paralelogramos las técnicas, las tecnologías y teorías asociadas se explicitan en el siguiente cuadro. La enumeración discontinua de las mismas, obedece a una selección de las que fueron elaboradas en el MER de la construcción de triángulo.

Tabla 1. Técnicas, tecnologías y teorías asociadas a la Construcción de Paralelogramos

τ_4: Transportar segmentos (diagonal AB). τ_5: Trazar segmentos (determinado por la intersección de la mediatriz y la circunferencia y los extremos de la diagonal) τ_7: Trazar circunferencias. (De centro intersección de la mediatriz y la diagonal y radio igual segmento que queda determinado entre centro y uno de los extremos de la diagonal). τ_9: Trazar rectas perpendiculares por el punto medio de un segmento dado. τ_{11}: Interceptar una semirrecta (mediatriz) con la circunferencia. τ_{12}: Intersección de dos circunferencias τ_{13}: Trazar la mediatriz de un segmento AB (para ubicar el punto medio).	θ_3: Intersección de dos circunferencias. θ_4: El conjunto de puntos del plano a igual distancia d de dos puntos A y B es la mediatriz del segmento AB; recta perpendicular a AB que pasa por AB. θ_5: El conjunto de puntos del plano a igual distancia d de un punto A es la circunferencia de centro A y radio d. θ_{12}: Dos circunferencias de radios congruentes son congruentes. θ_{14}: las diagonales del rombo se bisecan en ángulo recto.	Θ_2: Dos puntos determinan una recta y un segmento Θ_4: Dado un segmento, se puede construir otro segmento de igual medida. Θ_5: Dado un punto A y una distancia d se puede construir el círculo de centro A y radio d. Θ_6: Por un punto P exterior a una recta r se puede construir la perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Θ_9: Si los pares de lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo. Θ_{11}: Dos circunferencias de radios congruentes son congruentes. Θ_{13}: Las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente (forman cuatro ángulos iguales). Θ_{14}: El punto de intersección de las diagonales divide a ambas en la misma proporción. Θ_{15}: El punto de intersección divide a una de las diagonales en dos partes iguales.

Se enuncian a continuación algunos posibles procedimientos para la realizar las tareas:

T_1: *construir un cuadrado dada la diagonal* **AC.**

T_2: *construir un rectángulo dada la diagonal* **AC**.

T_3: *construir un rombo dadas dos diagonales* **AC** y **BD.**

a) Procedimiento utilizando regla y compás para realizar **T_1**

Sea **AB** la diagonal del cuadrado a construir: Transporto el segmento **AC** con compás (τ_4). Con centro en **A** trazo la circunferencia **C_1** que pase por **C** (τ_7) y con centro en **C** trazo la circunferencia **C_2** que pase por **A** (τ_7), determinando el punto medio **M,** intersección de la mediatriz **s** con el segmento **AC** (τ_9 y τ_{13}). Con centro en **M** trazo la circunferencia **C_3** de radio **MC** que pasa por **C y** por **A** (τ_7). Llamo **B** y **D** a la intersección de **C_3** y **s** (τ_{11}).

Los puntos **A**, **B**, **C** y **D** son los vértices de un cuadrado de diagonal **AC.**

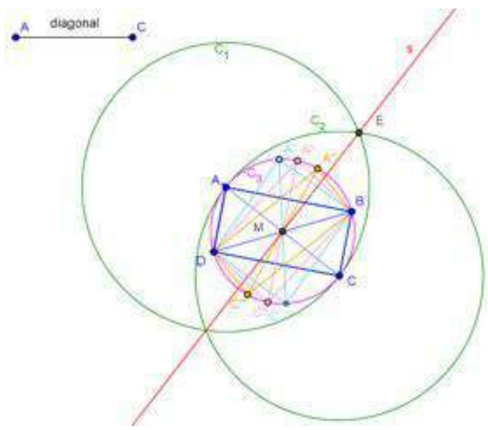
En síntesis el procedimiento descrito es: $\tau_4 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_{13} \rightarrow \tau_9 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_{11}$

Las tecnologías θ_3, θ_4, θ_5 y θ_{12} justifican las técnicas usadas en **T_1** y las teorías asociadas son Θ_4, Θ_5, Θ_6, Θ_9, Θ_{13}, Θ_{14} y Θ_{15}.

En esta construcción se obtiene solución única.

b) Procedimiento utilizando regla y compás para **T_2**:
Sea **AC** la diagonal dada como dato. Transporto el segmento **AC** con compás (τ_4). Con centro en **A** trazo la circunferencia **C_1** que pase por **C** (τ_7) y con centro en **C** trazo la circunferencia **C_2** que pase por **A** (τ_7), los puntos de intersección de las circunferencias determinan **s** mediatriz de **AC** y el punto medio **M** de **AC** (τ_9 y τ_{13}). Con centro en **M** trazo la circunferencia **C_3** de radio **MC** que pasa por **C** (τ_7). Transporto los segmentos que son los diámetros de la circunferencia **C_3** y coincide con la medida de la diagonal **AC** (τ_4). Los puntos de corte determinan la diagonal **BD** (τ_{11}). Los puntos **A**, **B**, **C** y **D** son los vértices del rectángulo dada la diagonal **AC.** En síntesis el procedimiento en este caso es**:** $\tau_4 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_9 \rightarrow \tau_{13} \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_{11}$. **Las tecnologías** θ_3, θ_4, θ_5 y θ_{12} justifican las técnicas usadas en **T_2** y las **teorías asociadas** En esta construcción se obtienen infinitas soluciones, como muestra la figura.

Fig. 1 – T_2: construir un rectángulo dada la diagonal AC.



c) Procedimiento utilizando regla y compás para **T_3**:
Sean **AC** y **BD** las diagonales dadas como dato. Transporto el segmento **AC** con compás (τ_4). Repitiendo las técnicas utilizadas en **T_1** y **T_2** se encuentran la mediatriz **s** y el punto medio **M** de **AC** (τ_9 y τ_{13}). Por el punto **M** se traza una circunferencia de radio igual a la mitad de la diagonal **BD** (τ_7) previa construcción de su mediatriz**.** Los puntos de intersección de la mediatriz y la circunferencia determinan los puntos **B y D** (τ_{11}). Los puntos **A**, **B**, **C** y **D** son los vértices del rombo dadas las diagonales **AC y BD.**

En síntesis el procedimiento utilizado es**:** $\tau_4 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_9 \rightarrow \tau_{13} \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_{11}$

Las tecnologías que justifican el procedimiento son θ_3, θ_4, θ_5 y θ_{12} y **los Elementos de teorías asociadas** son Θ_4,Θ_5,Θ_6,Θ_9,Θ_{13}, Θ_{14} y Θ_{15} .

En esta construcción se obtiene solución única.

Los tres ejemplos de **OMP** propuestos para la construcción con regla y compás de un cuadrado, un rectángulo dada una diagonal y un rombo dada dos diagonales, muestran técnicas comunes y algunas variaciones, al igual que las tecnologías y las teorías. Todas ellas generan una **OML** sobre la construcción de los paralelogramos con regla y compás. La inclusión de las tareas analizadas en el currículo de la escuela, lleva a estudiar las diferentes obras matemáticas focalizando en las actividades geométricas presentes en libros de textos y carpetas de los estudiantes.

■ Actividades geométricas en las diferentes obras matemáticas

Los aspectos institucionales que incidieron en la propuesta áulica fueron, entre otros, Diseño Curricular para la Educación Secundaria (Gobierno de la Provincia de Salta, 2012), Diseño Curricular para la Educación Primaria (Gobierno de la Provincia de Salta, 2012), libros de textos escolares (Itzcovich, Rudy, 1998, Canteros, Felissia, Fregona, 1997, Guelman, Itzcovich, Pavesi, Rudy 1998), trabajos prácticos y apuntes teóricos producidos por los docentes o por el departamento de matemática, los que se analizaron siguiendo a Chevallard, Bosch y Gascón (1997).

El Sistema de Enseñanza en Salta (Argentina) está en un período de transición por la nueva Ley Nacional de Educación. En los Diseños Curriculares consultados, las “Construcciones” aparecen en forma genérica, lo que lleva a que los proyectos áulicos sean amplios en su interpretación y secuenciación de los contenidos para enseñar el tema.

Trabajar la actividad matemática como actividad de modelización permite demostrar que a través de una tarea $\mathbf{T}_i$, aparecen nuevas condiciones no explícitas, generando otras tareas, nuevos elementos tecnológicos y teóricos, donde la función del dibujo complementa la tarea de modelización.

■ Conclusión

El estudio de la OMP y de la OML remite a la integración del discurso tecnológico común, en torno a las justificaciones y teorías que describen la construcción de los paralelogramos. En este sentido se analizó las tareas de *Construcción de cuadrado, rectángulo y rombo* mostrando los vínculos existentes entre las técnicas donde varían en el orden que se las utilizan; en todas ellas las tecnologías y las teorías asociadas son comunes. Lo que permitió la modelización de construcciones geométricas con regla y compás, con el fin de realizar su reconstrucción especificando tareas, procedimientos que se ponen en juego y modos en que se argumentan, dependiendo de la forma en que se presentan las técnicas utilizadas. La solución de estas cuestiones permitió visualizar las tareas en los distintos años de escolaridad, por ejemplo la tarea ***T_1:** construir un cuadrado dado* un lado en 6to año de escolaridad y ***T_2:** construir un cuadrado dado una diagonal* en 7mo año.

La propuesta de integración de los análisis concretados en distintos contextos socio-educativos en base a la construcción provisoria de MER, se sintetiza en el siguiente cuadro:

Tabla 2. Propuesta de integración en distintos contextos socio-educativos

Paralelogramos	Datos	Nivel de enseñanza en la Argentina
Cuadrado	Un lado	4º de la Escuela Primaria
	Diagonal	7º de la Escuela Primaria
Rombo	Un lado y una diagonal	7º de la Escuela Primaria
	Un lado y un ángulo	6º de la Escuela Primaria
	Dos diagonales	1º ESO
	Una diagonal y un ángulo	
Paralelogramo propiamente dicho	Dos lados consecutivos	6º de la Escuela Primaria
	Dos lados consecutivos y el ángulo comprendido	
	Un lado, una diagonal y un ángulo adyacente solo al lado	1º ESO
	Un lado, una diagonal y un ángulo adyacente al lado y a la diagonal	
	Un lado y dos diagonales	

En el **MER** propuesto se observa que el desarrollo progresivo de una determinada técnica genera nuevas técnicas y nuevas tareas dando lugar así a una **OML** que engloba casi todas las **OMP** analizadas.

En los diseños curriculares estudiados, la unificación de los ejes Geometría y Medida, lleva a centrar las actividades en el concepto de Medida y desplazar las actividades geométricas; esto se refleja en los libros de texto y en carpetas de los alumnos, siendo un indicador válido para la confirmación de la hipótesis planteada. Del mismo modo, las tareas propuestas para la construcción de paralelogramos en los libros de texto no tienen en cuenta la función de las variables didácticas que posibiliten la construcción de nuevos procedimientos. Variando los datos de lados, ángulos, diagonales entre otros, se generarían nuevos procedimientos que facilitarían la profundización y complejización de las prácticas a realizar. Por el contrario, el análisis de los proyectos institucionales y áulicos efectuados, y el seguimiento de trabajos de los estudiantes, permitió constatar que los docentes limitan la consulta de los estudiantes al texto disponible en la institución, imposibilitando el enriquecimiento de la potencialidad procedimental, agravado por la constatación que, en algunos casos, las actividades geométricas son reemplazadas por actividades algebraicas.

Del estudio de los libros de texto se desprende que, en su mayoría, ofrecen un tratamiento ostensivo distante del MER planteado, lo que confirma, en parte, la hipótesis enunciada.

La ausencia de tareas de construcción geométricas, parece originar la aritmetización y algebrización en su enseñanza, lo que muestra la importancia del trabajo de las construcciones con regla y compás, para la mejora de la enseñanza de la geometría.

El tránsito de la escuela primaria a la secundaria es un momento importante para todo la articulación del currículum de matemática en el sistema de enseñanza. De allí la importancia del estudio de las **OMP y OML** en forma integral, lo que permite comparar la técnica inicial y sus variaciones al abordar las distintas tareas. La comparación permitirá cuestionar las diferentes técnicas y teorías surgidas en la modelización del análisis *a priori* con el análisis *a posteriori* de la producción de los alumnos en otra etapa de la investigación. Asimismo permitirá discernir acerca de cuales sean las técnicas más fiables y económicas y la funcionalidad del discurso tecnológico.

Queda abierta la tarea de investigación sobre el problema de articulación del currículum de matemática, en la enseñanza de la geometría a través de las construcciones.

■ Referencias bibliográficas

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática. Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 527-549), Francia, Montpellier: IUFM.

Canteros, L., Felissia, A. y Fregona, D. (1997). *El libro de la Matemática 7*. Buenos Aires: Estrada.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñar.* Capital Federal, Argentina: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221 – 266.

Gobierno de la Provincia de Salta. (2012). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria*. (1a. ed.). Salta, Argentina: Gobierno de la Provincia de Salta.

Gobierno de la Provincia de Salta. (2012). *Diseño Curricular para la Educación Primaria*. (1a. ed.). Salta, Argentina: Gobierno de la Provincia de Salta.

Guelman, N., Itzcovich, H., Pavesi, L. y Rudy, M. (1998). *El libro de la Matemática 8*. Buenos Aires: Estrada.

Ibarra, L., Formeliano, B., Alurralde, F., Méndez, G. y Velásques, M. (2011). Un estudio sobre la noosfera para entender la enseñanza de la geometría a través de la construcción del triángulo. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 367-381), Barcelona: Centre de Recerca Matemática.

Itzcovich, H. y Rudy, M. (1998). *El libro de la Matemática 9*. Buenos Aires: Estrada.

Levi, B. (2003). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.