LA PROPORCIÓN COMO UN EJE DE ARTICULACIÓN ENTRE LA SECUNDARIA Y EL BACHILLERATO

Jesús Israel Monroy Muñoz, Carlos Rondero Guerrero, Juan Alberto Acosta Hernández.
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. (México)
imunoz_emc2@hotmail.com, ronderocar@gmail.com, acostah@uaeh.edu.mx

Palabras clave: Articulación, proporción, curriculum, historia, epistemología
Keywords: Articulation, proportion, curriculum, history, epistemology

RESUMEN

Diversas investigaciones muestran las dificultades de alumnos y profesores de educación básica y media superior en México en la noción de proporción, a las que se anexa un curriculum desarticulado en este mismo tema. El presente trabajo muestra como la historia y la epistemología pueden ser referentes teóricos importantes para establecer a la proporción como un eje de articulación conceptual en la formación de profesores así como tener fuertes implicaciones para la didáctica de la matemática en la educación secundaria y el bachillerato, articulando nociones de aritmética geometría, trigonometría y geometría analítica, entre otras.

ABSTRACT

Various studies establish the professors and students difficulties at the elementary and high school levels in Mexico concerning proportion, in addition to a disorganized course planning. This assignment will demonstrate how history and epistemology can be important theoretical referents in establishing the proportion to be a conceptual starting point in the professors training, as well as being important factors in the teaching of mathematics in the first and second level of high school, integrating notions of arithmetics, geometry, trigonometry and analytical geometry, to name a few.

■ Introducción

La noción de proporción está relacionada con situaciones cotidianas y con otras áreas del conocimiento incluyendo las ciencias sociales y las artes, entre otras (Balderas et al. 2011). Esta noción se relaciona con diversos temas como conversiones de unidades, figuras a escala, porcentajes, interés simple y compuesto, semejanza, función lineal, razones, fracciones, y provee además herramientas útiles para interpretar y comunicar información así como enfrentar diversas situaciones problemáticas (SEP, 2011).

En los últimos 50 años en México, el curriculum y el libro de texto, referentes básicos para el profesor han cambiado, incluyendo el tema de proporción que se ha transformado de forma importante, de manera que existen múltiples problemáticas en su enseñanza y aprendizaje, debido en parte, a que la articulación con otras nociones y temas de la matemática básica y de la matemática superior no ha quedado suficientemente clara ni explicita (Block y Ramírez, 2009).

El tema de proporción fue excluido de los programas de estudio de educación básica en la década de los setentas por influencia del movimiento de la "matemática moderna", siendo un fracaso para educación matemática de educación básica (Kline, 1976), y reapareció en la de los ochentas, pero no como estaba originalmente antes de 1970, sino que tuvo influencia de elementos procedentes de teorías modernas de las fracciones y de las funciones, de acuerdo a (Block y Ramírez, 2009) este tema se encuentra actualmente desdibujado en el currículo.

Este problema del desdibujamiento de la noción de proporción está relacionado con su articulación con otras nociones y saberes de la matemática básica y la matemática superior, incluyendo primaria, secundaria y bachillerato, en forma tal que es importante que un estudiante transcurra entre estos niveles con nociones matemáticas coherentes y articuladas para que pueda avanzar en su capacidad de aplicar matemáticas en diferentes situaciones y actividades, con base en esto "No es posible seguir aceptando un currículo desarticulado en una misma asignatura, entre diferentes asignaturas de un mismo nivel y entre niveles educativos" (Rondero, 2013, p. 28).

Por otra parte, la desarticulación es un problema que no solo concierne al curriculum sino a los profesores, dado que para un 70% a 90% de ellos el libro de texto es el único referente utilizado para impartir clase (SEP, 2010), lo que propicia una conceptualización restrictiva de la enseñanza de la matemática, que se expresa en la misma práctica educativa del profesor.

■ Marco teórico

El tratamiento didáctico de la noción de proporción, por parte del profesor, requiere de una coherencia conceptual con otros saberes, para desarrollar e integrar cada uno de ellos y potenciar de ése modo sus aprendizajes. En tal caso, elementos teóricos como la articulación de saberes y el desarrollo histórico y epistemológico acerca de la noción de proporción, juegan un papel preponderante.

> La articulación de saberes es un elemento teórico de gran importancia no solo en la formación de profesores, sino además en lo que corresponde al diseño curricular de las asignaturas de matemáticas y, por supuesto, en los temas incluidos en los libros de texto… La articulación conceptual de los saberes matemáticos permite ver la importancia *del todo y de las partes,* en el sentido de darle significado a cada

> una de las partes que integran el todo, peo también significar al todo en cuanto a las implicaciones que conlleva en cada una de las partes. (Rondero, 2013, p. 28)

Esto implica que el profesor debe hacer explícito a los estudiantes los ejes de articulación conceptual, haciendo la compresión matemática más profunda y duradera, esto es fundamental debido al necesario requerimiento de hacer explícitas las interrelaciones entre diferentes conceptos y sus posibles aplicaciones.

Por otra parte, es conveniente remarcar que de las aproximaciones histórica y epistemológica, se deriva la concepción de la matemática como un quehacer, es decir que involucra creación y descubrimiento.

> Es creación, en cuanto que los objetos matemáticos sólo cobran existencia una vez que han sido pensados y su modo de existencia se reduce a ser formulados en lenguaje. Es descubrimiento en cuanto a que cada creación se presenta como algo no arbitrario, enraizado en los nexos de necesidad configurados por los primeros 'estados de cosas matemáticas' que emergieron en el horizonte cultural humano (Cañón, 1993, p.401).

Esto conlleva a considerar la relevancia de la historia para la articulación de la concepción del conocimiento matemático.

Las modificaciones realizadas al curriculum de educación básica en México por influencia de la matemática moderna en la década de los setentas concebían los saberes matemáticos como ya terminados o pulidos, su enseñanza estaba centrada en las definiciones, axiomas y teoremas lógicamente estructurados, memorizando procedimientos y demostraciones. Ahora bien, la perspectiva histórica y epistemológica permite aproximarse a la matemática no como procesos ya terminados sino como procesos históricamente gestados (Cañon, 1993), de ahí que la historia es epistemológicamente relevante para el conocimiento matemático.

■ Metodología

Para el desarrollo del presente trabajo se eligió un enfoque cualitativo, así también se establecieron categorías que permitieron la revisión de programas de estudio (vigente desde 2011), libros de texto de primaria y secundaria (ciclo 2013 – 2014) y algunos temas de bachillerato en trigonometría y geometría relacionados con la proporción. Dichas categorías se elaboraron con base en una revision histórica y epistemológica de la proporcionalidad, donde se identificó la evolución y relación de esta noción con otras en la matemática. El estudio del nivel básico fue importante debido a que es ahí donde los estudiantes adquieren las nociones básicas de proporción que despues utilizarán de forma no tan explicita en el bachillerato.

Adicionalmente, se realizó un análisis de programas de estudio y libros de texto de primaria y secundaria, de donde se desprende que existe una amplia desarticulación en el tratamiento del tema de proporción, en ambos niveles escolares.

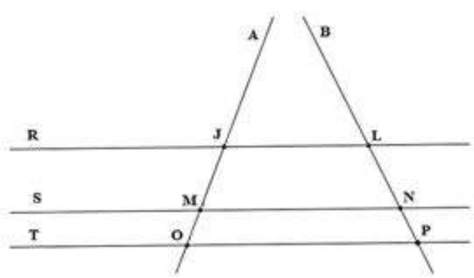
Desarrollo

En el estudio de la noción de proporción, es conveniente recurrir a su origen etimológico en tal caso la *proporción* es la disposición, conformidad o correspondencia debida de las partes de alguna cosa con el todo o entre cosas relacionadas entre sí (Academia Española, 1889). Se deriva del latín *proportĭo*, relación, analogía. Está compuesta del prefijo *pro*, (hacia adelante, en lugar de.) y *portio*, *portionis* que significa parte de un todo, subdivisión. Otra definición de *proportĭo*, *porportiōnis* sería la relación entre cosas que están puestas unas frente a otras.

Ahora bien, en la perspectiva histórica, de acuerdo a Collette (2000) y Boyer (2011) "No se puede fijar con exactitud la fecha en que surge la teoría griega de las proporciones, anterior al descubrimiento de la inconmensurabilidad de las líneas correspondientes a cantidades irracionales." (Collette, 2000, p.77), sin embargo se conoce que la proporción era estudiada por egipcios y babilónicos y fue heredada a los griegos a través de Pitágoras (569 a.C. – 475 a.C.), Tales de Mileto (625- 547), Solón de Atenas (638 – 558) y otros pitagóricos.

Los tres autores mencionadados, estudiaron en Egipto astronomía, geometría y armónica (Jámblico, 2003). A Tales le fue atribuida la creación de diversos teoremas como el del angulo inscrito (Boyer, 2011), o el teorema que lleva su nombre (Heath, 1921), uno de cuyos enunciados dice: Si rectas paralelas son cortadas por transversales, entonces los segmentos determinados por ellas son proporcionales, como se muestra en la figura 1.

Figura 1: Teorema de Tales

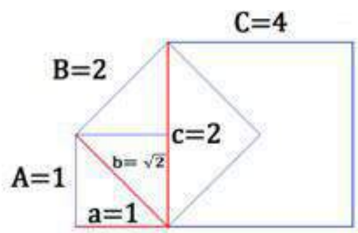


Por medio del teorema de Tales puede hacerse explicita la definición misma de proporción, los segmentos o partes, están frente a los segmentos, y , donde se relacionan proporcionalmente las partes con las partes o el todo con las partes, siempre unas puestas frente a otras. De donde se desprende la proporción, $JO:JM :: LP:LN$, entre otras que pueden ser identificadas.

En tal caso, esta perspectiva se puede ocupar en el tránsito entre secundaria y bachillerato en el tratamiento de temas numéricos, algebraicos y geométricos, mismos que pueden ayudar a sustentar conceptualmente a la trigonometría, como es el caso de las razones trigonométricas.

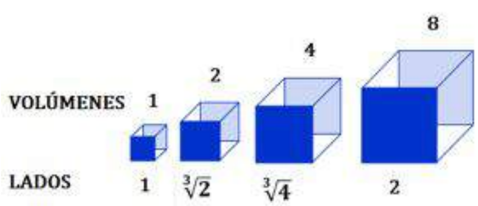
De acuerdo a otros historiadores antiguos como Plutarco y Eudemo, Tales calculó la altura de la pirámide mayor de Egipto, además de otros cálculos astronómicos a través de triángulos semejantes y proporciones. Posteriormente un seguidor de Pitágoras, Hipócrates de Quios (470 – 410), investigó sobre los principios generadores al duplicar o cuadruplicar, la línea, el cuadrado y el cubo, conectando la aritmética y la geometría. Redujo el problema de la duplicación del cubo a encontrar dos medias geométricas entre dos extremos en continua proporción (Heath, 1921).

Figura 2. Duplicación del cudrado.



En la figura 2, se tienen las áreas de cuadrados (A, B y C) y los lados (a, b y c), de tal forma que se pueden estalecer las proporciones siguientes, para las áreas $1:2::2:4$, y para los lados, $1:\sqrt{2} :: \sqrt{2}:2$. Aquí se observa cómo para la duplicación de áreas se tiene una media geométrica entre dos extremos, esta magnitud, posee la capacidad para duplicar el área, y es inconmensurable con respecto a los lados, en este caso cuando el lado se duplica, el área se cuadruplica.

Figura 3. Dos medias geométricas entre dos cubos.



Ahora, en la figura 3 se tiene, un cubo de volumen 1 y otro de volumen 8, entre estos existen otros dos de tal manera que se da la proporción entre volúmenes 1:2::2:4::4:8, así también para los lados se cumple que $1:\sqrt[3]{2} :: \sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{4} :: \sqrt[3]{4}:2$. A diferencia de las áreas, aquí se tienen dos medias geométricas entre dos extremos, la más pequeña de éstas dos posee la capacidad de generar el cubo del extremo derecho, en este caso de volumen 8, y además es inconmensurable con respecto a los lados del cuadrado que forman dicho cubo. Cabe mencionar que aunque los griegos identificaro las magnitudes para duplicar el cubo, estas no pueden elaborarse por medio de regla y compás, esto no fue demostrado sino hasta el siglo XVIII.

Además de la relación de la proporción con la duplicación y cuadruplicación de la línea, el cuadrado y el cubo, Menecmo (380 – 320), descubridor de las secciones cónicas (Heath, 1921) encontró relación entre éstas y la proporción al determinar que la intersección de la parábola y la hipérbola producen dos medias geométricas entre dos extremos, como en los cubos. Por esos mismos años Arquitas de Tarento (430 – 360) propuso, para la duplicación del cubo, la magnitud que produce la unión de un cilindro, un cono y un toro (Boyer, 2011). Este tipo de investigaciones eran la base de los programas educativos en la academia de Platón, quien lo expone principalmente en sus diálogos "Timeo" y "Teeteto" (Heath, 1921).

Es importante señalar que de acuerdo a González (2003) la contribución más importante a la teoría de la proporción fue creada por Eudoxo de Cnido (390 – 337), un miembro de la academia, quien resuelve la crísis de fundamentos a esta teoría al introducir los inconmensurables, mas adelante, esta aportación pasaría directamente al libro V de "Los elementos" de Euclides, donde se refiere a la teoría de la proporción tanto para números como para magnitudes.

Es así como la proporción ha sido un eje de gran trascendencia epistemológica que articula el estudio de semejanza, duplicación de áreas, volúmenes, secciones cónicas, entre otros conceptos que fueron recogidos por Euclides (Cañon, 1993), pero en el tránsito entre secundaria y bachillerato no presenta este proceso de conceptualización articulada referida a la misma proporción. La forma de presentar conceptos por parte de Euclides es muy similar a la que un profesor de secundaria o bachillerato presenta por primera vez los temas en matemáticas, como procesos terminados o enunciados carentes de contexto, propiciando que los estudiantes memoricen enunciados y procedimientos con la intención de aprobar un examen, no para resolver problemas de la vida diaria o bien aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

Posterior a los aportes de los griegos, en el siglo XVI la propocion fue estudiada por Nicolas de Cusa, él realizó importantes avances, y enseñó sus aportes a Pacioli y Da Vinci, quienes a su vez elaboran un completo tratado sobre este tema.

Con base en los elementos conceptuales y sus aplicaciones desarrollados hasta el siglo XVI con Cusa, Pacioli, Da Vinci y el astrónomo Johannes Kepler en torno a la proporción, se tuvo otro avance importante en el campo de la trigonometría.

Hasta el siglo XVI los aportes más importantes a la trigonometría fueron realizados por astrónomos. Pero fue Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574), quien de acuerdo a Boyer (2011), "…descartó la tradicional consideración de las funciones con respecto al arco de un círculo y se centró en cambio en los lados de un triángulo rectángulo. Así, las seis funciones trigonométricas ahora entraron en pleno uso" (2011, p.264), al respecto Kline comenta: "En vez de hablar de AB como el seno de AD, él habla del segmento AB como el seno del angulo AOB…Como consecuencia del cambio de Rhaeticus, el triángulo OAB se convirtió en la estructura básica mientras que el círculo con radio OA, secundario. Rhaeticus usó las seis funciones." (Kline, 1972, p. 239). Es así como se identificaría a la tangente como la pendiente de una recta o como la razón entre los catetos de un triángulo.

Por medio de este cambio de perspectiva conceptual de la tangente, se hace explicita y se articula la proporción con anteriores y nuevas nociones matemáticas. Estas aportaciones permitirían el desarrollo de métodos para el cálculo de tangentes y posteriormente hacia el cálculo diferencial por parte de Leibniz (Edwards, 1979).

De acuerdo a la experiencia de algunos profesores de bachillerato, ni en su práctica, ni en los libros de texto se hace explícita la articulación de la proporción con las razones trigonométricas o la razón de cambio instantáneo. En la mayoría de los casos se desconocen tanto los contenidos matematicos como la didáctica del nivel secundaria, que a su vez desconocen la didáctica y contenidos de nivel primaria, quedando así aislados los niveles educativos, sin un objetivo claro y sin contenidos matemáticos coherentes para los estudiantes.

■ Reflexiones finales

Conocer cómo se ha gestado y desarrollado la proporción tiene implicaciones didácticas importantes, adoptar esta perspectiva de la matemática como un quehacer (Cañon, 1993) permite hacer explícita su articulación con otras nociones como semejanza, secciones cónicas, duplicación de áreas y volúmenes, progresiones geométricas, segmentos proporcionales, razones trigonométricas, tangentes, pendientes y razón de cambio constante, entre otras. Así, la noción de proporción subyace a todos y cada uno de estos temas, por lo que requiere explicitar su comportamiento como un eje de articulación conceptual entre la secundaria y el bachillerato.

Estudiar la noción de proporción desde el quehacer implica reelaborarla, reconstruirla y reconocerla como un producto multicultural, que ha tenido continuidad en su estudio, conformándose a través del tiempo como un eje articulador de otros saberes matemáticos.

Según Heath (1921) la grandeza de los aportes matemáticos de los griegos se debe a la grandeza de sus aportes a la filosofía, de manera que esta consideración puede trasladarse a la formación de profesores de matemáticas de nivel básico y medio basico, para incluir en la misma aspectos relacionados con la epistemología, a la par del estudio de la matemática y su didáctica.

Finalmente, los cambios en el curriculum y libros de texto de matemáticas, no son suficientes para propiciar un mejoramiento sustancial en la calidad de la educación matemática, es por tanto necesario poner más atención en la formación de profesores, desde nuevas perspectivas teóricas y metodológicas como la aquí presentada.

■ Referencias bibliográficas

Academia Española. (1889). *Diccionario General Etimológico de la Lengua Española*. Tomo cuarto. Madrid: Faquineto ed.

Block, D. y Ramírez, M. (2009). *La razón y la fracción*: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática 21*(1), 63-90.

Boyer, C. (2011). *A history of mathematics*. Third edition. E.U: John Wiley.

Cañon, M. (1993). *La matemática. Creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Collette, J. (2000). *Historia de las matemáticas*. 4ª edición. México: Siglo XXI.

Edwards, C. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer.

González, P. (2003). *Platón y la academia de Atenas*. España: Nivola.

Heath, T. (1921). *A history of greek mathematics*. New York: Oxford University Press.

Jámblico. (2003). *Vida Pitagórica*. España: Gredos.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought. From ancient to modern times*. E.U: Oxford University Press.

Kline, M. (1976). *El fracaso de matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Madrid: Siglo XXI.

Rondero, C. (2013). Algunos elementos conceptuales sobre la formación de profesores. En Criollo, A., Tarasenko, A., Perez, M., Acosta, J. y O. Karelin (Eds), *La formación de profesores en competencias matemáticas* (pp.13-51), México: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y Ediciones Díaz de Santos.

SEP. (2010). *Uso pedagógico de los materiales educativos escritos para educación primaria por parte de sus destinatarios en el aula*. México: Secretaria de Educación Pública.

SEP. (2011). *Planes y programas de estudio*. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Mexico: Secretaria de Educación Pública.

Balderas, R., Block, D. Guerra, M. (2011). *La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros*. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa. México, D.F. Memoria Electrónica. [En Línea]. Consultado el 2 de Octubre de 2013 http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/ponencias.htm