# ACCIONES DE UN PROFESOR EN LA CLASE DE GEOMETRÍA CUANDO BUSCA QUE SUS ESTUDIANTES, DE GRADO OCTAVO, ARGUMENTEN

**FREDY ÁVILA SÁNCHEZ**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**
**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA**
**BOGOTÁ D.C.**
**2016**

**ACCIONES DE UN PROFESOR EN LA CLASE DE GEOMETRÍA CUANDO BUSCA QUE SUS ESTUDIANTES, DE GRADO OCTAVO, ARGUMENTEN**

**FREDY ÁVILA SÁNCHEZ**
**CÓD. 2013185002**
**Trabajo de grado para optar por el título de**
**Magíster en docencia de la matemática**

**Asesora:**
**TANIA PLAZAS MERCHÁN**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**
**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA**
**BOGOTÁ**
**2016**

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

NOTA DE ACEPTACIÓN

______________________________________________________

______________________________________________________

______________________________________________________

FIRMA DE EVALUADORES

_______________________________________________________
EVALUADOR 1

_______________________________________________________
EVALUADOR 2

Bogotá D.C., ________ de________del__________

# RESUMEN ANALÍTICO EDUCATIVO (RAE)

| 1. Información General | |
|---|---|
| Tipo de documento | Trabajo de grado |
| Acceso al documento | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| Título del documento | ACCIONES DE UN PROFESOR EN LA CLASE DE GEOMETRÍA CUANDO BUSCA QUE SUS ESTUDIANTES, DE GRADO OCTAVO, ARGUMENTEN |
| Autor(es) | ÁVILA SÁNCHEZ, FREDY |
| Director | PLAZAS MERCHÁN, TANIA |
| Publicación | Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016,100 p. |
| Unidad Patrocinante | Universidad Pedagógica Nacional |
| Palabras Claves | ARGUMENTACIÓN, ACCIONES DEL PROFESOR, TIPOS DE ARGUMENTOS, TAREAS. |

| 2. Descripción |
|---|
| El estudio se desarrolla bajo la premisa de determinar cómo algunas acciones del profesor afectan el desarrollo de procesos de argumentación entre estudiantes en la clase de geometría. Para esto, se escogió un grupo de tareas del texto “Geometría” (Samper, 2008) que se modificaron para ser trabajadas en tres momentos: trabajo individual, trabajo en pequeños grupos y socialización con toda la clase.<br>El diseño de las tareas se hizo en función de formar un sistema teórico local de geometría y que, a partir de este, los estudiantes argumentaran sus afirmaciones. Las tareas inicialmente propuestas se modificaron a la luz de los resultados de la aplicación de las mismas.<br>El análisis realizado a los fragmentos de las tareas, se centró en determinar cómo frente a ciertas acciones del profesor el estudiante respondía, y cómo frente a determinada respuesta del estudiante, el profesor generaba una acción que encaminara el trabajo a la argumentación. Cabe resaltar que el profesor no era consciente de que debía realizar ciertas acciones, el pretendía aplicar unas tareas para propiciar un ambiente de clase que propiciara la argumentación de los estudiantes.<br>Este estudio se enmarca en un trabajo de grado de Maestría en Docencia de la Matemática en la modalidad de profundización, dentro de la línea de Argumentación y Prueba asociada al grupo de investigación Æ•G. de la Universidad Pedagógica Nacional. |

| 3. Fuentes |
|---|
| Garuti, R., Boero, E., y Lemut, E. (1998). *Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof*. Reporte de investigación presentando en el (PME22)<br><br>Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. En P. Cobb, y H. Bauersfeld *The Emergence of mathematical Meaning, Interaction in classroom cultures* (págs. 229-269). Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associative Publishers.<br><br>Martin, T.S., McCrone, S.S., Bower, W., y Dindyal, J. (2005). The Interplay Of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof., *Springer, Educational Studies in Mathematics, doi:10.1007/s10649-005-6698-0*<br><br>Ospina, Y., y Plazas, T. (2011). *Actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado*. (Trabajo de grado de maestría*)*.Universidad Pedagógica Nacional UPN, Bogotá D.C.<br><br>Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*, Universidad Pedagógica Nacional, (págs. 11-32)<br><br>Samper, C. (2008). *Geometría*, Bogotá: Norma.<br><br>Sowder, L., & Harel, G. (1998). Tipos de Justificaciones de los Estudiantes. Traducción del original Types of student justifications. The mathematics Teacher, 91(8), 670-675, traducción hecha por Perry, P. y Socha, A.<br><br>Suárez, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en la educación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, N° 1, 17.<br><br>Toulmin, S. (2003). *The Uses Of The Argument*. Cambridge.<br><br>Yackel, E. (2001). *Explicación, Justificación y Argumentación en Matemáticas*. Pordue University Calumet. |

| 4. Contenidos |
|---|
| Este documento consta de cinco capítulos distribuidos así:<br>Capítulo 1, Planteamiento del problema: se presenta una revisión de los antecedentes, la formulación del problema, la justificación del estudio y los objetivos.<br>Capítulo 2, Marco teórico: se presenta la conceptualización de los dos aspectos fundamentales del estudio; la argumentación y las acciones del profesor.<br>Capítulo 3, Diseño metodológico: se presenta el proceso metodológico llevado a cabo durante el estudio, a través de una metodología con características de Investigación-Acción. Se expone la perspectiva metodológica, el diseño de las tareas, y las categorías de análisis. |

Capítulo 4, Análisis: se presenta el análisis realizado a los datos obtenidos en las transcripciones tras la aplicación de las tareas propuestas.

Capítulo 5, Conclusiones: se presentan las reflexiones relacionadas con el diseño de las tareas, la implementación de la metodología y las consideraciones sobre las intervenciones del profesor que se encontraron en el capítulo 4.

Finalmente, se presenta la Bibliografía y una sesión de anexos.

## 5. Metodología

Este trabajo se enmarca en un proceso de Investigación Cualitativa dado que pretende describir los datos y encontrar en ellos características y regularidades que permitan la elaboración de conclusiones. Para tal fin, se tomaron registros audiovisuales de las sesiones de clase donde se aplicaron las tareas propuestas, el objeto de estudio fue el cuadrilátero porque se correspondía con las temáticas planteadas en el plan de estudios de la Institución donde se hizo la aplicación.

Durante el desarrollo del estudio se identificó que lo realizado tenía afinidad con una metodología particular de la Investigación Cualitativa denominada Investigación-Acción, dado que en el trascurso de la aplicación de las tareas, se vio la necesidad de modificarlas, de acuerdo a lo que se observaba y se reflexionaba tras cada sesión, también porque quien investigaba era quien aplicaba las tareas en el aula de clase y posteriormente, fue sujeto de análisis.

La metodología de Investigación-Acción propone unas fases en su implementación, pero también aclara que estas no necesariamente se deben seguir de manera lineal, las fases planteadas en la metodología son: planear un cambio, actuar y observar el proceso y las consecuencias del cambio, reflexionar, y re-planear, nuevamente actuar y observar, y re-reflexionar. Dados los tiempos empleados para el desarrollo del estudio este trabajo solo se corresponde con las tres primeras fases.

## 6. Conclusiones

En general, el diseño de las tareas se hizo a partir de una metodología propuesta desde el marco teórico, considerando que las tareas por si solas no se constituyen en actividades que desarrollen los procesos de argumentación, sino que requieren del diseño por parte del profesor. El diseño de las tareas tuvo la estructura de una pregunta abierta que permitiera a los estudiantes conformar un sistema teórico local y elaborar argumentos axiomáticos.

Luego de clasificar, modificar y diseñar las tareas acordes con las temáticas requeridas para el grado, se establecieron fases dentro de las mismas (trabajo individual, de pequeños grupos y de socialización) acordes con la propuesta de Krummheuer (1995) para generar el ambiente de argumentación en clase. Como resultado se encontró que sí aportan a un ambiente de aprendizaje encaminado a los procesos de argumentación porque brindan los espacios para que los estudiantes desarrollen sus puntos de vista y el docente entra a jugar un rol más de mediador que de transmisor de conocimientos. Cada fase se caracteriza por formas diferentes de actuar: en la fase individual, permite a los estudiantes asumir un punto de vista y/o cuestionarse sobre sus alcances y limitaciones frente a la situación planteada; en la fase de pequeños grupos, aparecen unas primeras interacciones para escuchar y ser escuchado en relación a las heurísticas de cada estudiante frente a la tarea, pero que se destaca es un proceso que los estudiantes van asimilando con el pasar de las clases; en la fase de socialización, se destaca la importancia para consolidar acuerdos o ideas, hacer precisiones, fomentar el uso adecuado del lenguaje, las propiedades y las definiciones.

Todas las acciones mencionadas pueden hacer parte de la reflexión realizada durante diseño de la tareas, para que el profesor esté preparado y pueda orientar de la mejor manera, como se observó que en este estudio el profesor no era consciente de las acciones que se debían llevar al aula de clase y en muchas ocasiones se quedó sin herramientas para orientar a los estudiante; si bien es cierto que controlar todas las variables espontáneas es imposible, también es cierto que, si el profesor conoce y maneja varias estrategias, las podrá sortear de la manera más adecuada.

Los argumentos detectados fueron presentados en el Capítulo 4 bajo los subtítulos de: *argumentos y esquema de los argumentos*. En resumen, los argumentos planteados desde las ideas adaptadas de Sowder y Harel (1998), se encontró que este grupo de estudiantes usaron: *argumento transformacional* [AC], *argumento por autoridad* [AA], *argumento por percepción* [AP], *argumentos axiomáticos* [AX], siendo este último el que se quería que alcanzaran apoyados en el sistema teórico local organizado. Al final de la aplicación, se observó que los estudiantes usaron más argumentos de tipo [AC] y [AP] y que los argumentos [AX] fueron difíciles de formular por parte de los estudiantes, incluso en la prueba final el profesor se vio en la necesidad de recordarles que todas las tareas anteriores ayudaban a la solución y los invitó a revisar los apuntes. En contraste se observa que, de los argumentos propuestos desde el marco teórico no se identificaron con este grupo de estudiantes los siguientes: *argumento por rito* [AR], *argumento por uso de símbolos* [AS] y *argumentos por uso de ejemplos* [AE].

Se encontró que con el transcurrir de las clases los estudiantes fueron mejorando sus formas de justificar, pasando de simples afirmaciones con monosílabos (si o no) a justificaciones con algún tipo de argumento. Con respecto a la Tarea 1, que se analizó en los fragmentos 1, 2, 3, 4, se identificó el uso de las acciones *explica aspectos de las tareas* [PEA], *dirigir la tarea* [PD], *proporciona espacios de reflexión* [PPE] (fragmento 1), *dirigir la tarea* [PD], *reacciona para aclarar o precisar* [PRA], *parafrasea aporte de los estudiantes* [PPA] (fragmento 2), *explica aspectos de las tareas* [PEA], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *propicia la participación* [PPP], *proporciona espacios de reflexión* [PPE] (Fragmento 3), *dirigir la tarea* [PD] y *exige aclaración o precisión* [PEP] (fragmento 4), pero en ninguno de los dos primeros fragmentos estas recibieron como respuesta inmediata algún tipo de argumento, una de las causas de esta situación fue que el profesor se apoyó en preguntas cerradas, porque su intención de explicar la tarea la a bordo de esa manera. Pero, en el cierre de la Tarea, en los fragmentos 4 y 5, cuando el profesor usó acciones de tipo *propicia la participación* [PPP] *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG] y *exige aclaración o precisión* [PEP], pudo obtener tres argumentos de tipo [AC], [AP] y [AX]. Cierre que se caracterizó porque los estudiantes estaban más familiarizados con la intención y forma de desarrollar las situaciones planteadas y las preguntas allí permitieron más expresión de ideas por parte de los estudiantes.

En la Tarea 4, se analizaron los fragmentos 5, 6, 7, 8, a diferencia de la Tarea 1, se identificó que en esta cada fragmento tuvo al menos una justificación de los estudiantes enmarcada con un argumento. Las acciones empleadas fueron *aprovecha la intervención de los estudiantes* [PAI] (fragmento 5), *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] (fragmento 6), *dirigir la tarea* [PD] y *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] (Fragmento 7), *dirigir la tarea* [PD] y *se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes* [PIA] (fragmento 8). También se observó que los tres argumentos desarrollados por los estudiantes fueron de *tipo perceptivo* [AP], que está ligada al tipo de tarea propuesta en la cual la indicación era representar una diagonal.

Para finalizar en la Tarea 6, se analizaron los fragmentos 9, 10, 11, 12, las acciones usadas en esta última tarea fueron *dirigir la tarea* [PD], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG] (fragmento 9), *dirigir la tarea* [PD], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos* [PIC] (fragmento 10), *propicia la participación* [PPP], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] (fragmento 11) y *dirigir la tarea* [PD], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], [PPR] (fragmento 12), en esta tarea se evidenciaron, en las transcripciones, un total de siete argumentos (cuatro de tipo AP, dos de tipo AC, y 1 de tipo AX). En relación con esto se puede afirmar que el uso de los argumentos por parte de los estudiantes aumento considerablemente en esta última tarea, y si bien no se alcanzó a generar un gran número de argumentos de tipo AX, se debe considerar que los estudiantes no había tenido experiencia previa con relación a la argumentación.

Las acciones así vistas, tuvieron la función que se esperaba (ver cierre de Capítulo 3) en relación con su aporte a los procesos de argumentación, las únicas dos acciones que no se evidenciaron *institucionalizar el saber* [PIS] y *acepta material para validar* [PAM], son acciones que le profesor no usó, en la primera porque él tenía la concepción que Institucionalizar, era dar la respuesta a la tarea, y no el proceso de consolidación de las ideas de los estudiantes hacia un lenguaje formal y su inclusión al sistema teórico local de las ideas grupales. Y la segunda acción [PAM] no se dio porque en las tareas analizadas no se usó ningún tipo de material manipulativo. Es conclusión, se corrobora lo esperado desde la construcción de las categorías, que las acciones *exige aclaración o precisión* [PEP], *aprovecha la intervención de los estudiantes* [PAI], *institucionalizar el saber* [PIS], *declara, indica explica o corrige el error* [PDE], *diseña tareas* PDT, *reacciona para aclarar o precisar* PRA, *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *acepta material para validar* [PAM], pueden promover la argumentación de manera directa.

| | |
|---|---|
| Elaborado por: | Fredy Ávila Sánchez |
| Revisado por: | Tania Plazas Merchán |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fecha de elaboración del Resumen: | 27 | 01 | 2016 |

**TABLA DE CONTENIDO**

## LISTA DE ANEXOS

## LISTA DE TABLAS

**LISTADO DE IMÁGENES**

# INTRODUCCIÓN

Este estudio se enmarca en un trabajo de grado de Maestría en Docencia de la Matemática modalidad de profundización, dentro de la línea de Argumentación y Prueba asociada al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$). En este documento se presenta el análisis de las acciones de un profesor que pretende que sus estudiantes desarrollen procesos de argumentación en una clase de geometría de grado octavo. El estudio buscó determinar qué acciones realizaba el profesor frente a las intervenciones de los estudiantes, quienes respondían a una serie de tareas propuestas. Estas tareas estaban estructuradas previamente para conformar un sistema teórico local que permitiera que los estudiantes hicieran intervenciones argumentadas en el mismo. Para presentar los fundamentos y el estudio realizado, este documento se divide en cinco capítulos que se describen a continuación.

En el primer capítulo, se realizó una revisión de antecedentes, el planteamiento del problema, la justificación, la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos. Todo esto con el fin de dar sentido y ubicar el trabajo.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que dan soporte al presente estudio: la argumentación, los tipos de argumentos Perry et al. (2013), y las acciones del profesor Ospina & Plazas (2011).

En el tercer capítulo, se describe el diseño metodológico que permitió abordar la pregunta de investigación. Dicho diseño se aproxima a la metodología llamada Investigación-Acción y se estableció relación directa con algunas de sus fases. Además, se hizo una breve contextualización con respecto al grupo de estudiantes que participó del estudio. También se expone la fase de diseño de las tareas en pro de la construcción del sistema teórico local para que los estudiantes argumenten. En este capítulo también se presentan las herramientas de recolección de información usadas y las categorías de análisis que se implementaron con relación a los temas centrales (argumentos y acciones del profesor).

En el cuarto capítulo, se hace el análisis de algunos fragmentos de clase que reflejan las acciones que el profesor desarrolló. Para esto se hace una descripción de lo sucedido, un esquema de interacción estudiante-profesor, un análisis de los argumentos desarrollados y una reflexión de las acciones y los argumentos que se dieron. Finalmente, en el capítulo quinto, se presentan las conclusiones.

# 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN) estipula que, como parte de los ambientes de aprendizaje, se deben favorecer competencias en los estudiantes, entre otras, “el utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas, más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar” (MEN, 1998, p. 54). Es decir, las directrices de la labor docente en Colombia propenden por potenciar los procesos de argumentación que se deben considerar al momento de la elaboración de ambientes de aprendizaje adecuados.

En Colombia, como en otros países, también se han centrado esfuerzos para avanzar en la investigación de aspectos relacionados con la argumentación. Es así como el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional trabaja, entre otras cosas, en los ambientes de aprendizaje que favorecen el desarrollo de la justificación y plantean como uno de sus propósitos el contribuir a identificar cómo se puede lograr que los estudiantes conjeturen, argumenten y justifiquen en la clase de geometría.

En el presente trabajo se considera importante trabajar sobre los procesos de argumentación en el aula de geometría porque este se convierte en eje fundamental en las interacciones que favorecen el proceso de aprendizaje, puesto que brinda a los estudiantes una oportunidad para expresar ideas, generar debates y avanzar en la construcción de sus propios significados, en relación con los objetos geométricos y los procesos de la actividad matemática. Además, se tiene coherencia con las propuestas de competencias matemáticas y ciudadanas propuestas desde el Ministerio de Educación Nacional, como se expresa a continuación.

> El razonamiento y la argumentación son una competencia relacionada con la capacidad de dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente, plantear preguntas, recocer distintos tipos de razonamiento, distinguir y evaluar cadenas de argumentos.
> (ICFES, 2014, p. 66)

Por otra parte, en el aula de clase no solo están los estudiantes enfrentados con su proceso de argumentación, sino que además interviene otros actores, entre estos el profesor, quien es el encargado por ejemplo de diseñar las tareas, establecer los tiempos para cada actividad, y en gran medida guiar las discusiones de clase, a propósito Perry et al (2013 p. 26) menciona que el papel del profesor como guía de la interacción es fundamental pues es él quien puede dirigir el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propios de la actividad demostrativa. Pero desde la experiencia docente del profesor sujeto de estudio en este trabajo se ha observado que esta labor no es desarrollada conscientemente, es decir, el profesor no reflexiona sobre su papel y su actuar en clase, sino en los temas y los procesos que quiere trabajar con los estudiantes. Se hace necesario entonces abordar aspectos relacionados con la forma de actuar docente cuando busca dirigir los procesos de argumentación de los estudiantes con el fin de hacer reflexión y construcción de estrategias dentro del aula.

En síntesis, se considera que este trabajo de grado es acorde con las investigaciones que sobre la argumentación, en educación matemática, se están trabajando actualmente a nivel nacional e internacional; además, se busca cumplir con los objetivos propuestos en los estándares básicos de competencias en matemáticas en Colombia. Por todo lo anterior este trabajo puede ser un aporte para que los docentes en acción reflexionen sobre los retos que afrontan en el aula de clase y la importancia de la planeación, así como de la toma de conciencia de su rol y formas de actuar en el aula de clase.

## 1.2 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La propuesta que se aborda busca ser un aporte al desarrollo investigativo que sobre los procesos de argumentación y prueba se están realizando destacando la influencia que tienen en estos el actuar del profesor. El interés sobre dichos procesos radica en que estos están presentes en diversas prácticas sociales y culturales, hacen parte de las competencias que se desean desarrollar en los estudiantes desde el área de matemáticas, y son de interés para los investigadores en educación matemática, en particular para el grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, quien trabaja en esta línea, y por lo cual el presente trabajo está adscrito a ella.

En relación con lo anterior, el presente estudio busca abordar aspectos relacionados con el proceso de argumentación centrando la mirada en aquellas acciones que el profesor realiza frente a las intervenciones de los estudiantes de grado octavo, para esto se propondrá el desarrollo de algunas tareas que permitan la construcción de argumentos apoyados en un sistema teórico local, que implica entre otros aspectos tener en cuenta los acuerdos de grupo donde se desarrolla la situación.

Por otro lado, desde mi experiencia como docente de matemáticas, he evidenciado, que cuando los estudiantes, algunos de ellos, buscan argumentar acerca de la validez de sus afirmaciones no son capaces, en parte porque el profesor no da los espacios para esto y además existe una costumbre de esperar pasivamente a que el profesor o el estudiante “más aventajado” den los argumentos cuando estos son solicitados en la solución de una tarea. A dicha dificultad se refiere Boero, Garuti y Lemut (1998), y añaden que, en algunos casos esto se da porque el docente no cuenta con las herramientas necesarias para guiar la discusión dentro del desarrollo de la clase o las tareas diseñadas no permiten hacerlo.

En síntesis, se considera importante trabajar con relación a los procesos de argumentación de los estudiantes, pero centrando la mirada en las intervenciones que el profesor realiza durante la clase, cuando pretende fomentar un ambiente de participación en el cual los estudiantes elaboren justificaciones argumentadas apoyadas en un sistema teórico local.

Atendiendo a lo anterior la siguiente pregunta será la base para guiar el trabajo que se desarrollará en adelante:

***¿Cuáles son las acciones que realiza un profesor frente a las intervenciones de los estudiantes, cuando busca que estos argumenten desde un sistema teórico local, en la solución de una tarea propuesta en una clase de geometría de grado octavo?***

## 1.3 OBJETIVOS

Para acercarse a la respuesta de la pregunta se plantean los siguientes objetivos que buscan focalizar los aspectos más importantes que se deben atender.

### 1.3.1 Objetivo general

Estudiar las acciones del profesor, en una clase de geometría de grado octavo, cuando busca que sus estudiantes argumenten utilizando elementos de un sistema teórico local.

### 1.3.2 Objetivos específicos

1. Diseñar y aplicar unas tareas que permitan construir un sistema teórico local en geometría con estudiantes de grado octavo y otras en las que se argumente utilizándolo.
2. Identificar las acciones del profesor que se dan en el desarrollo de las sesiones en las cuales se aplicaron las tareas.
3. Reconocer los tipos de argumentos que usan los estudiantes para dar respuesta a las tareas propuestas.
4. Describir la relación se establece entre las acciones del profesor y el tipo de argumento que emplean los estudiantes.

## 1.4 ANTECEDENTES

Como parte de la revisión de literatura para abordar este trabajo, se presentan varios documentos que describen un panorama general sobre el campo de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, y que contribuyen con aspectos tales como: acciones del profesor, interacciones entre estudiantes, procesos de argumentación e interacción estudiantes-profesor.

### 1.4.1 Interacciones entre alumnos en aulas virtuales: Incidencia de distintos diseños instructivos (Chiecher y Donolo, 2011)

El documento plantea cómo el diseño de las tareas y, más aún, la interacción de los estudiantes al realizar las tareas afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para esto, Chiecher y Donolo (2011) desarrollan un trabajo donde se analiza cómo las tareas propuestas y el diseño instructivo afectan o generan distintos tipos de interacciones entre los alumnos. La población objeto de estudio fue un grupo de estudiantes de pregrado que trabajaron en un espacio de tres foros. Al final del trabajo, Chiecher y Donolo (2011, p. 127) concluyen que: "los diseños instructivos o tareas propuestas en los foros tendrían impacto en la configuración de situaciones de interacción notablemente diferentes". Es decir, que de acuerdo a cómo se estructuran las tareas para presentar a los estudiantes, se tendrán resultados diferentes en relación con la manera en que ellos interactúen sobre las mismas. Para llegar a esta conclusión, plantearon tres ejemplos de interacciones entre estudiantes y destacan que las interacciones pueden generar limitaciones que se pueden resolver en trabajos de socialización con el pleno de la clase donde se incluye al profesor. Asimismo resaltan que la metodología debe promover espacios individuales y luego de discusión en parejas donde se dé cuenta al otro de lo hecho, y mencionan que la repetición y el parafraseo que hacen los alumnos son parte de la habilidad de interactuar.

Además Chiecher y Donolo (2011), por un lado, destacan que si bien ya desde los años setenta se estudiaba la interacción estudiantes-profesor, también se empezaba a reconocer que los estudiantes ejercían una influencia educativa entre sus compañeros. Por otro lado, mencionan que "no toda situación de interacción entre iguales redunda en un beneficio directo para el aprendizaje" (Chiecher & Donolo, 2011, p. 128), pues si así se quiere, es necesario que la acción de interacción se centre en comunicar y defender un punto de vista.

Los autores mencionan que para poder abordar el diseño mencionado, es necesario considerar los siguientes aspectos:

- Las características de las tareas que se quieren presentar.
- La conformación de los grupos de trabajo y normas de participación dentro de los mismos.
- Las actuaciones del profesor.

A propósito de lo anterior, Chiecher y Donolo (2011) hacen una salvedad en relación con el trabajo en equipo: “los dos aspectos funcionales más importantes del trabajo en equipo son: los aprendizajes que cada miembro del equipo logra individualmente y la producción grupal donde todos deben responder por un producto que represente las producciones individuales” (Chiecher y Donolo, 2011, p. 62). Esto implica considerar varios momentos en el desarrollo de la tarea, momentos de trabajo individual para que los estudiantes concreten su punto de vista, y el de trabajo en grupo para debatir sus opiniones.

Se resalta que para realizar esta metodología es necesario que los estudiantes ya tengan práctica en el trabajo grupal y la experiencia previa con algunos de los conceptos a tratar. Además, el docente es el encargado de diseñar o adecuar las tareas para que estas permitan generar interacciones entre los estudiantes. También, se plantean los siguientes indicadores para determinar si hay evolución en el aprendizaje:

- Cambio de opinión.
- Uso de expresiones y notación matemática.
- Mayor nivel de formulación de ciertas preguntas.
- Mayor nivel de justificación de la resolución.

En relación con el profesor, Chiecher & Donolo (2011) mencionan que él debe ser moderador en el intercambio, ser el gestor en la participación de los expositores, realizar preguntas que orienten, controlar que todos los grupos reciban su devolución, ser mediador y ayudar en la comprensión de las correcciones, implicaciones importantes para el presente trabajo porque son acciones del profesor que se deben considerar para su rol en la aplicación de las tareas.

Este artículo aporta a este trabajo de grado en relación con el diseño de las tareas, atendiendo a que se deben considerar, entre otros aspectos, las posibles acciones grupales o individuales que se pueden propiciar con cierta indicación o pregunta dentro de la tarea, se puede considerar que el proceso de argumentación no debe ser visto como un aspecto que se dé espontáneamente entre los estudiantes, sino que deben ser concebido desde el diseño y, por consiguiente, ser planificado para que favorezca el aprendizaje.

### 1.4.2 Interacciones y aprendizaje en matemáticas: análisis de una experiencia didáctica. (Falsetti, Rodríguez, & Aragón, 2003)

En el artículo los autores presentan los diferentes tipos de interacciones que se pueden generar alrededor de un problema y se constituye en un aporte sobre las interacciones entre estudiantes y estudiantes-profesor. En el texto Falsetti, Rodríguez y Aragón (2003) asumen una postura desde el interaccionismo simbólico de Godino y Llinares (2000), que los lleva a asumir los aspectos culturales y sociales que terminan influyendo en el aprendizaje matemático de los estudiantes. En la investigación se presenta una experiencia didáctica con estudiantes preuniversitarios en torno a cierto tipo interacciones intencionalmente realizadas sobre el tema función cuadrática y modelación usando la función cuadrática.

Otro aspecto que resaltan Falsetti et al. (2003), son las interacciones, "como aquel el intercambio comunicativo, recíproco y voluntario entre actores que participan de un acto intencionado como es el de enseñar y aprender" (Falsetti et al. 2003, p. 61). Esta definición la caracterizan en función de enseñar y aprender, desligando así otro tipo de acciones de interacción que pueden no aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Es importante atender a esto, para que las tareas que se diseñen en el presente estudio brinden los espacios de intercambio de ideas y puntos de vista, y que en el análisis se discrimine cuales interacciones permitieron desarrollos en los procesos de argumentación de los estudiantes.

En síntesis, en relación con los aportes que puede brindar este documento al trabajo de grado que se desarrolla, se destacan las actuaciones del profesor, el diseño de las tareas y la metodología para el trabajo colaborativo, entendiendo que si se quiere generar procesos de argumentación en los estudiantes, debe existir la posibilidad de un intercambio adecuado de ideas.

### 1.4.3 Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de secundaria por parte de un grupo de profesores (Goizueta, 2011)

En el documento que Goizueta (2011) describe como exploratorio, se presenta un estudio sobre las posturas de varios profesores de matemáticas de secundaria con respecto a la argumentación, y se desarrolla en torno a dos aspectos: el primero, la interpretación que tienen los profesores sobre la argumentación, y segundo, las prácticas de enseñanza y aprendizaje que cada uno de ellos desarrolla. Uno de los aspectos de mayor importancia que llevó a considerar este trabajo como antecedente, tiene que ver con el aporte que puede brindar a la definición de argumentación.

En el documento se entiende la argumentación como una habilidad básica esencial que pretende desarrollarse en el marco de la educación obligatoria. Según Boero, Douek y Ferrari (2002) y Douek (2007) (como lo citó Goizueta, 2011), la argumentación (en general) la comprenden siguiendo al Webster Dictionary como "el acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión" (Goizueta, 2011, p. 8). Y además se entiende que el término argumentación es usado tanto para designar el proceso de producir un discurso lógicamente conectado sobre un tema, como para el producto de este proceso. Esta postura de los autores no será tomada porque para este trabajo de grado es necesario profundizar en el tema y no tomarlo de manera general, para esto en el marco teórico se deberá ampliar la mirada sobre argumentación con las posturas del grupo $\mathscr{Æ} \cdot \mathcal{G}$.

Goizueta (2011) destaca tres actuaciones del profesor en relación con la práctica matemática en el aula: la primera, como un mediador indirecto cuando selecciona producciones lingüísticas de sus alumnos; la segunda, como mediador semiótico directo, cuando provee a sus alumnos con experiencias lingüísticas apropiadas para codificar y controlar sus procesos de pensamiento y de producción; y la tercera, como un mediador cultural, cuando se provee a los alumnos de modelos válidos de actuación matemática. Estas acciones serán sujetas a análisis para determinar si pueden hacer parte de las categorías de análisis de las acciones del profesor.

Otro aspecto a considerar en Goizueta (2011), es la propuesta de fuerza en los argumentos, entendiendo que serán “fuertes” cuando no se les puede oponer otro argumento, es decir, “no puede tener réplica”. La fuerza del argumento está en función del valor epistémico que tenga para la persona a la cual se dirige y puede ser positivo (evidente, necesario, auténtico) o negativo (absurdo, imposible, inverosímil).

### 1.4.4 The ethnography of argumentation (Krummheuer, 1995)

El documento de Krummheuer (1995) hace parte de un compendio de textos The Emergence of Mathematical Meaning en los cuales se estudia la aparición del significado matemático en las interacciones de las culturas de clase en particular el capítulo siete titulado *la Etnografía de la Argumentación* es un estudio sobre las interacciones gestadas dentro de un proyecto de clase donde se trabaja sobre procesos de argumentación. Cabe resaltar que, la etnografía es un método de investigación, que consiste en observar las prácticas culturales de los grupos humanos y participar en ellas para poder contrastar lo que la gente dice y hace, es decir, que quien investiga hace y se considera parte de la realidad donde actúa.

El estudio realizado por Krummheuer (1995) tiene como tema central el análisis de la argumentación en un proyecto de clase en el cual, para el desarrollo de las sesiones, se resaltan las fases de: introducción, pequeños grupos, y discusión en clase. En la primera fase, los estudiantes y el profesor discuten sobre el tipo de preguntas o tareas propuestas, y el profesor tiene como papel principal hacer entendible los enunciados y generar el ambiente de discusión. En la segunda fase, los estudiantes se explican entre ellos, y se exponen sus estrategias de resolución del problema; aquí el profesor interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos. En la fase final, se da un espacio propicio para que todos los estudiantes presenten sus ideas, mientras que el profesor debe ser el encargado de organizar los turnos de participación y resumir las ideas de la manera más adecuada. Esta forma de entender la intervención en clase, como metodología para propiciar un ambiente de argumentación, es de interés del presente estudio y será usada como pautas en el diseño de las tareas.

Otro aporte del documento se centra en la forma en que se entiende la argumentación[1], vista como un fenómeno social, es decir, se da en el diálogo entre sujetos que se presenta cuando tratan de consolidar sus diferentes puntos de vista. Además implícitamente el texto invita a reflexionar sobre nuevas acciones del profesor en relación con su mediación en las fases de trabajo que se desarrollan en la metodología.

### 1.4.5 Geometría plana: un espacio de aprendizaje. Capítulo 1: Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013)

Perry et al. (2013) precisan términos como justificación, conjeturación, argumentación y la relación que estos guardan con la actividad demostrativa. Entre otros aspectos se considera los fenómenos sociales asociados a la actividad, como las experiencias académicas de los sujetos, la edad en que se encuentran, entre otros. También presentan tres productos de la actividad matemática que son la validación, la prueba, y la demostración y que menciona tiene relación con cada tipo de argumento propuesto por Toulmin.

El constructo teórico que desarrollan Perry et al. (2013) se basa en un modelo propuesto por Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010), a partir del cual se precisa el concepto de argumentación y se caracterizan los tres tipos de argumentos de Toulmin (inductivo, abductivo y deductivo) pero con una perspectiva que ellos denominan version reducida, se hace mención que es un modelo desarrollado con el propósito de aproximar a los estudiantes a "aspectos relevantes del demostrar y la demostración".

En otro apartado Perry et al. (2013) afirma que la argumentación es entendida como "la formulación de argumentos para apoyar una idea" y que además existe una contraargumentación si la pretensión es rechazarla. Y agregan, "por ser un acto comunicativo, toda argumentación se enmarca dentro de ciertas características que el grupo social en donde se expresa considera apropiadas" (Perry et al, 2013. pág. 20), aspecto relevante para este estudio porque implica considerar que los argumentos que desarrollen los estudiantes tienen ciertas características de acuerdo a las normas que se acuerden, o que desarrollen habitualmente en el grupo.

### 1.4.6 Acciones del profesor que promueven actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado (Ospina. Y., y Plazas. T, 2011)

Este trabajo corresponde a un trabajo de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, y adscrito a la línea de investigación de Argumentación y Prueba en Geometría. En este documento se pretendía determinar si era posible el desarrollo de

---

[1] *argumentation is seen here primarily as a social phenomenon, when cooperating individuals tried to adjust their intentions* (Krummheuer, 1995, p. 229)

actividad demostrativa con estudiantes de grado sexto, y que acciones realizaba el docente para que ello ocurriera.

Para abordar la problemática Ospina y Plazas (2011) contrastan dos clases de una profesora, una en la que se promovía la actividad la demostrativa y otra en la que no, para realizar el contraste se tomaron acciones del profesor propuestas por el grupo de investigación $\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$, que además complementaron y modificaron formando al final un grupo de 24 acciones.

Dentro de las conclusiones a las que Ospina y Plazas (2011) llegan, se destaca, la necesidad de que el profesor tenga como propósito favorecer la actividad demostrativa porque las tareas por si solas no la generan. Además afirman que cuando se pretendía realizar actividad demostrativa la profesora empleo más acciones de las habituales. También que existen acciones que son propias y necesarias cuando se realiza una clase en la cual la intención es generar la actividad demostrativa. Este trabajo es pertinente para este estudio porque sirve de referente con relación a las acciones del profesor ligadas a la actividad demostrativa y por ende a los procesos de argumentación.

En síntesis los antecedentes muestran algunos aspectos del campo de investigación que se va a abordar, unas relacionadas con el proceso de argumentación, los tipos de argumentos, otras con las acciones que debe considerar un docente cuando pretende fomentar una ambiente de clase más participativo, y los aspectos a tener en cuenta sobre el diseño de las tareas para lograr que estas también aporten en la construcción del sistema teórico local y el tipo de participación que tendrán los estudiantes en clase.

# 2 MARCO TEÓRICO

Este capítulo pretende caracterizar, desde la literatura, los aspectos argumentación y acciones del profesor. En el apartado 2.1 se presentan definiciones de diversos autores frente a la argumentación y, a partir de estas, se asume una postura para el presente trabajo. En el apartado 2.2 se realiza un compendio de diferentes tipos de acciones del profesor en el aula de clase, atendiendo desde el diseño y escogencia de tareas hasta la intervención en el aula.

## 2.1 ARGUMENTACIÓN

La argumentación es un término muy usado en matemáticas, pero no existe una única idea sobre este, tal como se observa en las diferentes definiciones que presentan autores como: Douek (1999); Yackel (2001); Mariotti (2000); Álvarez, Ángel, Carranza, y Soler (2014); y Perry, Samper, Camargo y Molina (2013). En este sentido se considera necesario presentar algunas posturas que, frente a la argumentación, tienen los autores mencionados, para destacar el panorama general y luego se presenta la definición que asume este trabajo.

A manera general las definiciones de estos autores son:

- Douek (1999), la argumentación es "una razón o razones que se ofrecen a favor o en contra de una propuesta, opinión o medida." El objetivo del proceso de argumentación recae en el *por qué*, es decir, los sustentos teóricos o hechos *grupalmente aceptados* que se concatenan para hacer una aseveración frente a una situación.
- Mariotti (2000), menciona que para Duval (1992) la argumentación consiste en lo que en retórica se emplea como medios para convencer a alguien de la verdad o la falsedad de una afirmación.
- Yackel (2001), asume una postura desde las ideas de Krummheuer (1995) para mencionar que la argumentación es una constitución interactiva de los participantes.
- Álvarez et al. (2014), resaltan que es uno de los procesos fundamentales de la actividad matemática junto con la conjeturación además mencionan que el proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, y en consecuencia, el proceso de generar argumentos tienen un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha.

Con este panorama general, se presenta en el apartado siguiente la postura que se asume sobre la argumentación desde las ideas de Perry et al. (2013), por los avances que sobre el tema ha tenido el grupo principalmente en geometría.

### 2.1.1 Definición de argumentación

Antes de abordar la definición es necesario comprender que Perry et al. (2013) enmarcan la argumentación como parte de la práctica de demostrar que ellos denominan Actividad Demostrativa, para ellos dicha actividad relaciona procesos del quehacer matemático como son la conjeturación y la justificación, porque según mencionan "el proceso de justificación tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada" (Perry et al. 2013, P. 16), de aquí, se considera que la justificación matemática es una argumentación que concatena argumentos con la intensión de que una proposición ya concluida puede ser usada como dato en otro momento.

El constructo teórico que desarrollan Perry et al. (2013) lo basan en un modelo propuesto por Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010), a partir del cual, se precisa el concepto de argumentación y se caracterizan los tres tipos de argumentos propuestos por Toulmin, pero con una perspectiva que ellos denominan *versión reducida*. Esto se hace con el propósito de aproximar a los estudiantes a "aspectos relevantes del demostrar y la demostración".

En este contexto propuesto se presenta la definición de argumentación con la cual se guiará este trabajo de grado: "la argumentación es la formulación de argumentos para apoyar una idea; y se habla de contraargumentación si lo que se pretende es rechazarla" Perry et al. (2013, p. 20), queda claro que la funcionalidad de este proceso está en tomar una postura a favor o en contra de un idea. Además Perry et al. (2013) resaltan que "por ser un acto comunicativo, toda argumentación se enmarca dentro de ciertas características del grupo social en donde se expresa" (p. 20), esto implica que algunos elementos de la formulación de los argumentos se verán afectados por aspectos tales como: la edad, los acuerdos de grupo y las experiencias previas.

### 2.1.2 Definición de argumento

Dado que se ha definido argumentación en términos de argumentos, enseguida se presenta la definición de argumento y a partir de esta se abordan consideraciones de diversos autores con relación a los tipos que pueden haber según: su naturaleza, las garantías, o las formas de relacionar las proposiciones que los conforman.

Un argumento para Douek (1999) es una razón frente a una proposición u opinión[2], para poder explicar algo con un sustento. La autora rescata parte de la naturaleza del argumento al mencionar que puede ser verbal, numérica, o con dibujos. Lo anterior permitirá tener una

[2] Traducido por el autor "The word "argument" will be used as "A reason or reasons offered for or against a proposition, opinion or measure" (Webster), and may include verbal arguments, numerical data, drawings, etc." (Douek, 1999, p.3)

perspectiva amplia con relación a las formas en que los estudiantes sustentan sus afirmaciones con respecto a las tareas propuestas.

Por su parte, Toulmin (2003) establece que un argumento puede ser visto como un constructo compuesto por tres elementos (ver Imagen 1):

- *Los Datos (D)*: hacen referencia a la información de que se dispone con anterioridad sobre el tema en cuestión, o que se puede inferir de las representaciones en las cuales se presenta dicha información.
- *Las Garantías (W)*: hacen referencia a elementos (afirmaciones, axiomas, leyes, propiedades, definiciones, hechos geométricos…) que puede unir los datos con la afirmación y son aquellos apoyos bajo los cuales los datos adquieren relaciones de validez.
- *Las Conclusiones (C)*: hacen referencia al resultado de la interpretación de los datos bajo dichas garantías. (En la Imagen 1, la D corresponde a los datos, la W hace referencia garantía y la C es la afirmación)

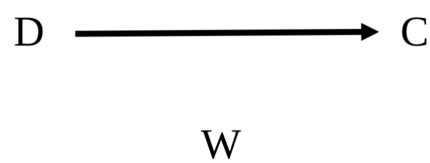


Imagen 1 Elementos de un argumento (Toulmin, 2003, p. 162)

Esta configuración de la estructura de argumento permite discernir entre argumentos que elaboran los estudiantes de otros tipos de afirmaciones, y del tipo de garantías que están usando, más aun cuando la intención es que usen garantías tomadas en tareas trabajadas dentro del aula de clase y que hacen parte del sistema teórico local. Con un idea similar, Perry et al. (2013) definen argumento como:

> Un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y conclusión) y una general (garantía) […] la forma como se relacionan las proposiciones particulares (p y q) y el general (r) definen el tipo de argumento [...] El argumento puede estar dirigido a uno mismo o a otro. (p. 17)

En este trabajo se entenderá argumento al igual que Perry et al. (2013) y se considera importante resaltar que se atribuye una característica a la proposición (r), y es que esta puede ser de la naturaleza que el grupo de trabajo acuerde (oral, escrita, gráfica, numérica, simbólica, etc.).

### 2.1.3 Tipos de argumentos

La forma en que se estructura un argumento permite establecer tipificaciones, ya sea por la relación entre las proposiciones, por los tipos de garantías utilizados, y hasta por consideraciones del grupo social donde se desarrollan. A continuación se presentan varias tipificaciones que diversos autores han asignado a los argumentos.

Para empezar se presentan las ideas de Sowder & Harel (1998) quienes hacen una clasificación desde los tipos de justificaciones[3] que dan los estudiantes. La tipificación se basa en el concepto de esquemas de demostración como se presenta en la Imagen 2.

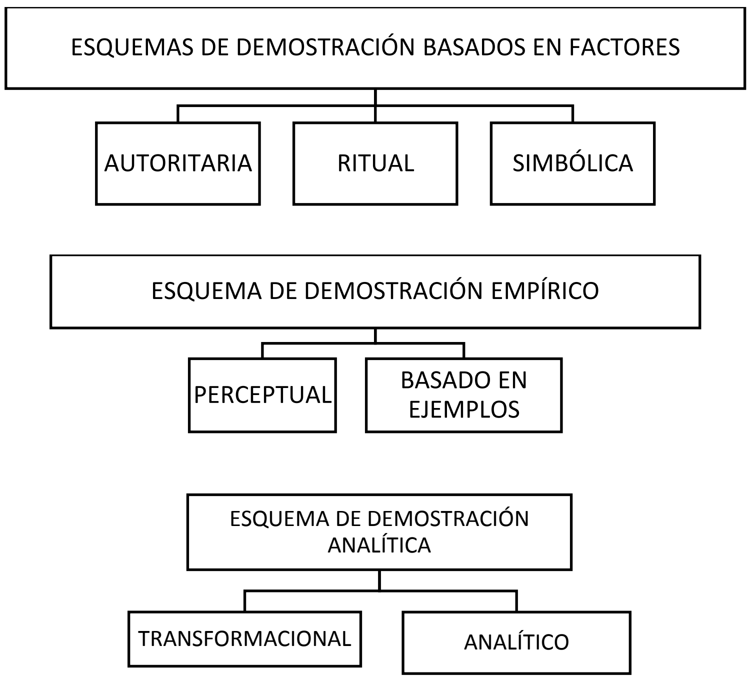



Imagen 2 Esquemas de demostración (Sowder & Harel, 1998, p. 3)

Los autores plantean tres esquemas generales: los esquemas de demostración basados en factores, los esquemas de demostración empíricos, y los esquemas de demostración analíticos, cada uno de ellos presenta unas subcategorías. Los autores consideran los esquemas de demostración en el sentido amplio de las justificaciones que pueden dar los estudiantes y no en un sentido restringido a la demostración en matemáticas. A continuación se describirán cada uno de ellos.

En la Primera categoría, *esquemas de demostración basada en factores externos*, se resalta que son aquellos en los cuales se trata de convencer utilizando factores externos. Según Sowder

[3] Sowder y Harel (1998) definen justificación como todo aquello que se haga para convencer o persuadir a otro o a uno mismo.

y Harel (1998) esto determina las subcategorías de *esquema de demostración autoritaria,* cuando la forma de validar está soportada en un texto, en el profesor o en un compañero que se categorice como el más “aventajado”. La subcategoría del *esquema de demostración ritual* en la que la aceptación del argumento se asume por la forma en que la información es presentada, (e.g., el formato a dos columnas de las demostraciones, la cantidad de notación matemática, cálculos usados). Finalmente, la tercera subcategoría, *el esquema de demostración simbólico* donde se considera que la fuerza recae en el manejo del lenguaje simbólico que se exprese (e.g., uso de fórmulas algebraicas).

La segunda categoría denominada *la demostración empírica*, se caracteriza porque las justificaciones se basan en ejemplos, y esto da lugar a las subcategorías de *esquema de demostración perceptual,* en el caso de la geometría, por ejemplo, las afirmaciones están centradas en lo que se ve de la representación gráfica que se presenta. Y la segunda subcategoría recibe el nombre de e*squema de demostración basado en ejemplos* en la cual las justificaciones se basan en uno o varios ejemplos puntuales sobre la situación que se estudia.

La tercera categoría es *esquema de demostración analítica*, con dos subcategorías, en la primera está el *esquema de demostración transformacional*, caracterizado por involucrar aspectos generales de la situación e ir en busca de construir una conjetura general. Esta categoría es la única que Sowder & Harel (1998) consideran como precedente para otra, la cual se constituye en la segunda subcategoría denominada *esquema de demostración axiomática*, en la cual las justificaciones se basan en el sistema axiomático propio de las matemáticas, que involucra una organización cuidadosa y lógica, además del uso de términos, definiciones, supuestos y teoremas.

Se resalta por parte de los autores, que el profesor debe crear estrategias que permitan a los estudiantes avanzar a justificaciones más sofisticadas, por ejemplo mencionan que un estudiante que dependa mucho de la autoridad del profesor, debería tener la oportunidad de trabajar en grupos pequeños donde con sus compañeros formen conjeturas dentro del grupo sin recurrir al profesor.

Otras tipificaciones elaboradas recaen en la forma en que se conciben las garantías. El trabajo de Toulmin (2003) ha servido para que autores como Yackel (1999) propongan una clasificación de los argumentos en *lógicos* o en *sustanciales*. Los argumentos *lógicos* son aquellos que se dan cuando son matemáticamente válidos, es decir, las garantías ofrecidas para apoyar los datos corresponden a proposiciones, leyes, teoremas, propiedades, definiciones, hechos geométricos y relaciones, entre otros aspectos formales de las matemáticas. Mientras que los argumentos *sustanciales* son aquellos que los participantes consideran aceptables, bien sea de manera individual o grupal, como el uso de imágenes o afirmaciones matemáticas no demostradas.

Para sintetizar lo trabajado en este apartado 2.1 se entenderá argumento como; un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y conclusión) y una general (garantía)" (Perry et al. 2013), y sobre los diferentes tipos, se asumirán las posturas de Sowder et al. (1998) para identificar los tipos de argumentos que usan los estudiantes porque presentan de manera clara la naturaleza de las garantías.

## 2.2 ACCIONES DEL PROFESOR

Dentro de las funciones que el profesor tiene en el aula, Sowder y Harel (1998) mencionan que "el profesor ciertamente tiene importantes roles con respecto a proponer tareas, guiar discusiones, generar dudas, dirigir a los estudiantes hacia la indagación, dar explicaciones, y establecer resultados" (p. 4). De manera particular, con relación a procesos como los de argumentación, Yackel (2001) afirma que "el profesor con frecuencia tiene la función de pedir que se expliciten, o explicitar él mismo, datos, garantías y respaldos que podrían apenas estar implícitos en las explicaciones y justificaciones que dan los estudiantes" (p. 8); es decir, la función del profesor no solo se centra en dictar un contenido, o proponer una serie de ejercicios, sino que debe ser capaz de observar y dirigir la forma en que sus estudiantes desarrollan diversos procesos, y explicitar situaciones que para ellos pueden parecer obvias pero que pueden suscitar situaciones de discusión en la clase.

Existe también un grupo de acciones que el docente desarrolla cuando trabaja en situaciones de interacción (Falsetti, Rodríguez, y Aragón, 2003), entre estas se encuentran: ser moderador en el intercambio, ser el gestor de la participación de los expositores, realizar preguntas que orienten, ser mediador y ayudar en la comprensión de las correcciones. Otro grupo de acciones tiene que ver con el desarrollo metodológico de la clase conformada por tres fases (Krummheuer, 1995): en la primera fase, denominada *introducción*, el profesor debe guiar la discusión sobre el tipo de preguntas o tareas propuestas, principalmente hacer entendibles los enunciados y generar el ambiente de discusión; En la segunda fase, *pequeños grupos*, el profesor puede intervenir y sugerir cambios en las ideas de los grupos; Y en la fase final, *discusión en clase*, el profesor debe ser el encargado de organizar los turnos de participación y resumir las ideas de la manera más adecuada.

Por otro lado, Martin, McCrone, Bower y Dindyal (2005) en el marco de una investigación sobre los aspectos influyentes en el aprendizaje de la prueba en geometría, establecen como acciones del profesor las siguientes:

1. *Seleccionar tareas*: Acción que se desarrolla cuando se planean o buscan las actividades.
2. *Rebote*: cuando el docente repite o parafrasea las preguntas o comentarios de los estudiantes; las intenciones pueden ser pedir más información, pedir una justificación o una verificación, resaltar las ideas principales, exponer fallas en el razonamiento o pedir que justifique sus preguntas.

3. *Pedir una explicación o razonamiento*: con esta acción el docente busca que el estudiante explique por medio de teoremas, definiciones o postulados sus afirmaciones.
4. *Modelar*: acción que se da cuando el profesor usa modelos para solucionar una situación, usa contraejemplos, usa una cadena lógica desde el sistema axiomático, se vale de diagramas y procesos generales para elaborar conclusiones.
5. *Evaluar las respuestas de los estudiantes*: cuando se analiza lo hecho por los estudiantes, ya sea explícita o implícitamente para refinar argumentos propuestos.
6. *Dar valor a las ideas de los estudiantes*: Acción que se caracteriza por escuchar y dar seguimiento a las ideas de los estudiantes con el fin de fomentar la participación.

Finalmente, otras acciones son propuestas por Ospina & Plazas (2011) cuando el profesor busca que los estudiantes realicen actividad demostrativa, estas son:

1. *Dar verbalmente información relativa al funcionamiento de la clase*: cuando se dan indicaciones de normas con respecto al trabajo en grupos, la participación de cada integrante y las normas socio matemáticas como el uso del lenguaje.
2. *Proporcionar espacios de reflexión*: esta acción se genera en dos momentos; El primero, cuando el profesor decide no guiar a los estudiantes y les pone a ellos la responsabilidad de desarrollar la idea que están en discusión. El segundo, cuando propone a todo el grupo una tarea que necesita tiempo para su elaboración.
3. *Se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes al abordar una tarea durante el trabajo individual realizado en clase*: Si el profesor ha propuesto una tarea a todo el grupo para ser desarrollada individualmente o en grupos, entonces pasa de grupo en grupo para ver lo que están haciendo, verificar la comprensión de la tarea y de ser necesario interactuar con los estudiantes para informarse sobre los procesos que están llevando a cabo. Con esta acción el profesor pretende hacerse una idea del trabajo individual, para luego destacar o poner en discusión estas intervenciones con los demás estudiantes de la clase.
4. *Se informa sobre los resultados geométricos obtenidos por los estudiantes durante el trabajo individual realizado en clase*: A diferencia de la acción anterior el profesor debe informarse sobre los resultados geométricos obtenidos de la tarea, con el fin de fundamentar sus decisiones en la gestión de la clase.
5. *Acepta material para validar*: Ocurre cuando se acepta el uso de material para validar conjeturas.
6. *Reacción para aclarar o precisar:* cuando a partir de una afirmación de un estudiante el profesor completa la idea, hace evidente algunas diferencias, agrega ideas a la discusión y corrige algunas expresiones matemáticas.
7. *Aprovecha la intervención de los estudiantes*: ocurre cuando el profesor usa el aporte de los estudiantes para continuar con la discusión, realzar elementos de dicha intervención útiles para la tarea, hacer preguntas o comentarios.

8. *Concreta el resultado logrado hasta el momento*: se lleva a cabo cuando el profesor redondea, resume o globaliza una idea de los estudiantes de la que no se ha concluido algo ni se ha institucionalizado. Con esta acción, se busca enfocar la atención de los estudiantes y favorecer la comprensión de lo hecho y lo dicho.
9. *Institucionaliza el saber:* ya sea después de descubrir un hecho geométrico o de discutir entorno a unas definiciones, el profesor presenta dichos elementos usando lenguaje matemático y señala que se puede disponer de ellos en las nuevas tareas.
10. *Declara, indica explica o corrige el error*: ante la intervención de un estudiante con una idea que tiene un error, el profesor reacciona haciéndolo evidente con la intención de que el estudiante se dé cuenta de su error y se corrija; además, aporta a la construcción de los elementos teóricos apropiados.
11. *Parafrasea aporte de un estudiante*: es usual que frente a un error o alguna afirmación que considera interesante, el profesor repita la intervención del estudiante expresándolo de otra forma, sin agregar información.
12. *Aprueba el aporte de un estudiante*: de manera explícita, el profesor acepta una idea del estudiante. La intención de esta acción es incentivar a los estudiantes a participar y fundamentar lo que dicen o hacen.
13. *Repreguntar:* acción que se da cuando el docente elabora nuevas preguntas ante la incomprensión de alguna indicación de trabajo que los estudiantes no entienden, en ocasiones la nueva pregunta aporta más elementos que permiten el desarrollo de la tarea propuesta.
14. *Incentiva la intervención de los estudiantes*: esta acción ocurre cuando el profesor invita a sus estudiantes a compartir algunas ideas con respecto a la tarea o al uso de determinados elementos teóricos en el desarrollo de la actividad.
15. *Responsabiliza a los estudiantes del desarrollo de la tarea o de los conocimientos trabajados*: cuando el profesor delega a los estudiantes la responsabilidad de justificar sus afirmaciones o conclusiones.
16. *Exige aclaración o precisión*: El profesor reacciona pidiendo que se complete una idea que no es clara o en la que faltan elementos en su elaboración.
17. *Exige justificación*: si la intervención de un estudiante no es clara o faltan elementos en su elaboración, entonces el profesor reacciona de manera inmediata solicitando que se complete o aclare la idea. Con esta acción se busca entender lo que dicen los estudiantes y favorecer la comunicación.
18. *Indaga*: sucede cuando en reacción a lo dicho por un estudiante, el profesor, por medio de preguntas, busca que el estudiante desarrolle un argumento, lo amplíe o revise el contenido de su intervención.
19. *Provee información*: si el profesor identifica que los estudiantes no pueden construir una demostración, él da información útil o la justificación.

20. *Dar información pertinente al procedimiento de la tarea:* cuando el profesor da pautas o explica de manera diferente la tarea propuesta, para asegurar la comprensión y realización de la tarea.
21. *Controla el cumplimiento de las normas:* sucede cuando el profesor realiza algún comentario sobre la importancia de algunas normas.
22. *Usa artefactos o expresiones para ilustrar conceptos geométricos.* Sucede cuando el docente usa analogías entre algún concepto matemático y otros elementos del espacio físico, o usa expresiones coloquiales, se refiere a personas presentes o ilustra con ademanes conceptos que se están trabajando.
23. *Solicita información*: el profesor solicita datos que están en el cuaderno o en el texto.
24. *Pregunta:* Acción dada cuando el docente por medio de preguntas quiere determinar si los estudiantes están realizando correctamente el ejercicio y entienden lo que están haciendo.

De todas las acciones recopiladas cabe resaltar que hay acciones concernientes a normas matemáticas, socio-matemáticas, y sociales, acciones que se pueden gestar antes o durante la intervención del docente en el aula, todas ellas se tendrán en cuenta porque se quiere identificar cuáles de esas acciones del profesor afectan la elaboración de argumentos en los estudiantes. También cómo algunas acciones tienen aspectos en común, por lo tanto algunas de estas se fusionarán o se modificarán, en el apartado 3.3 cuando se construyen las categorías de análisis se especificara cuales fueron tomadas y porque razón.

# 3 METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca como una Investigación Cualitativa, y particularmente de la Investigación-Acción en el desarrollo de algunas de sus fases, esta metodología se apropia porque permite abordar los objetivos propuestos durante el planteamiento del problema, a continuación se describe en que consiste esta metodología y de qué manera ayudará en la consecución de los objetivos.

La forma de investigación empleada es afín a la Investigación Cualitativa porque dentro de los propósitos y métodos pretende recolectar, describir y analizar información, y esto se corresponde con la forma en que se realiza este trabajo al hacer el análisis de los procesos de argumentación de los estudiantes en una clase de geometría de grado octavo, cuando el profesor diseña ciertas tareas e interviene con diversas acciones para propiciar el ambiente en el cual los estudiantes argumenten.

Por otro lado, la Investigación-Acción se define como una forma de estudiar y de explorar, una situación social, con el fin de mejorarla, en la que intervienen como indagadores los implicados en la realidad educativa (Suárez, 2002). En este estudio se tiene un acercamiento a este tipo de metodología porque se analiza al docente desde el momento en que propone unas tareas, con la intención específica de propiciar la argumentación en sus estudiantes, luego se hace una análisis de sus intervenciones y finalmente, como ser reflexivo, de su quehacer en el aula, se plantean unas consideraciones sobre lo realizado.

En la metodología Investigación-Acción se proponen unas fases específicas pero que, se aclara, pueden ser modificadas en el transcurso de la investigación según lo encontrado. Las fases propuestas para una Investigación-Acción, según Suárez (2002) citando a Kemmis (1995), son como un proceso de ciclos en espiral de la siguiente manera:

1. *Planear un cambio*: plantear una pregunta, o un objetivo para intervenir en determinado grupo.
2. *Actuar y observar el proceso y las consecuencias del cambio*: es la puesta en marcha de unas acciones que permitan ver la intervención y los resultados de la misma.
3. *Reflexionar:* con lo encontrado en la fase anterior durante o después del actuar, se examinan los objetivos, la pregunta y otros aspectos de la intervención.
4. Y entonces *re-planear*.
5. Nuevamente actuar y observar.
6. Finalmente re-reflexionar.

Este trabajo se corresponde con las primeras tres fases de la metodología porque los tiempos empleados en el desarrollo del estudio y las dinámicas de trabajo de la Institución donde se realizó la aplicación, además del cambio de lugar de trabajo del profesor quien aplicó la secuencia, no permitieron hacer las tres últimas fases. Las fases trabajadas se desarrollaron de la siguiente manera:

1. *Planear un cambio*: en esta fase se identifica una dificultad en el aula de clase (Capítulo 1), y con una descripción del entorno en que se pretende desarrollar el estudio (apartado 3.1 Fase 1).
2. *Actuar y observar el proceso y las consecuencias del cambio*: en esta fase se desarrollan acciones como: construcción de referentes que permiten asumir un punto de vista frente a la problemática (Capítulo 2); la estructuración y aplicación de tareas, toma de datos y reflexiones primarias que permiten observar el proceso (Capítulo 3).
3. *Reflexionar:* Se plantean categorías de análisis y se estudia lo sucedido en las clases en las que se aplican las tareas (Capítulos 4 y 5).

## 3.1 FASE 1: PLANEAR UN CAMBIO

Además de lo expuesto en el Capítulo 1 en esta primera fase es necesario caracterizar la población, (la Institución, los estudiantes y el docente) con el fin de obtener directrices en aspectos metodológicos y recursos para usar al momento de plantear las tareas.

### 3.1.1 Descripción de la Institución

La Institución donde se aplicaron las tareas es la Unidad Educativa el Futuro del Mañana, de carácter privado, ubicada en la localidad de Kennedy. Allí se maneja como modelo pedagógico la Enseñanza para la Comprensión, los contenidos programáticos para el grado octavo están organizados para álgebra, geometría y estadística. Particularmente, la geometría de octavo solo se estudia en el primer periodo (en las primeras 8 semanas del año escolar) sobre los conceptos de ángulos, bisectriz de un ángulo, rectas perpendiculares, paralelas, figuras planas, tipos de triángulos, tipos de cuadriláteros y figuras planas. No se cuenta con equipos de cómputo para el área de matemáticas.

### 3.1.2 Descripción de los estudiantes

El grupo de estudio está conformado por 28 estudiantes (15 niños y 13 niñas) de grado octavo con edades entre 12 y 15 años, y de estrato socioeconómico dos y tres. El grupo se toma porque el docente trabajó durante el año anterior a la aplicación (grado séptimo) con estos estudiantes. Dada la dinámica de la clase, son pocos los estudiantes que participan dando solución a los ejercicios propuestos. Los estudiantes han trabajado la geometría solo en el primer periodo de cada año, y los ejercicios desarrollados por ellos consisten en la representación de figuras geométricas, lecturas de definiciones de libros de texto de geometría, además del desarrollo de ejercicios que buscan que ellos se apropien de la definición mediante la repetición de figuras y memorización. Los materiales que usan los estudiantes para la clase de geometría son los tradicionales (compas, regla, trasportador y escuadras) y no se cuentan con espacios que permitan el uso de la sala de sistemas en matemáticas. La forma de trabajo habitual de los estudiantes es individual porque cuentan con módulos (libros dados por el colegio con las temáticas a trabajar y ejercicios) que deben ser entregados para revisión. Además dada la configuración reducida del espacio del salón, no se les permite mover los puestos para hacer grupos con la intención de no generar desorden según el profesor. Y finalmente se destaca que los estudiantes no están familiarizados formalmente con procesos de argumentación porque según el plan de estudios de la institución esto se debe trabajar en los grados superiores y por ende el profesor no ha centrado su atención en esto.

### 3.1.3 Descripción del profesor y su clase

El profesor que aplica la secuencia de tareas y autor de este documento, es Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y es estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

Tras una autorreflexión el profesor caracteriza su práctica de la siguiente manera, generalmente explica un tema usando el tablero, momento en el cual no se permite la participación de los estudiantes, luego, propone algunos ejercicios de aplicación, que revisa sólo a los primeros cinco estudiantes que presenten, los ejercicios son de única respuesta, y la intención en la clase de geometría es que los estudiantes conozcan los diferentes objetos geométricos y usen adecuadamente sus instrumentos de medición. Por lo que finalmente el profesor considera que su clase se enmarca en una metodología tradicional.

Se observa que generalmente los estudiantes que alcanzan la revisión del profesor son los mismos. Esta es una de las razones por la que se decide empezar un trabajo que propicie más participación de todos los estudiantes y el desarrollo de procesos de argumentación con ellos, dando la oportunidad a todos de expresar sus ideas.

Esta revisión de la población suscita, entre otros aspectos, a que las tareas sean elaboradas con preguntas, y situaciones que permitan a los estudiantes participar desde diversos puntos de vista, crear estrategias, pero sobre todo que se les dé la oportunidad de participar. Además, se identifica que el profesor debe repensar la metodología para el aula de clase, y su interacción con los estudiantes. Otro aporte fue la escogencia de la temática curricular a trabajar, que se centra en los cuadriláteros para atender a la propuesta curricular de la Institución, pero no centrando la mirada en el objeto mismo, sino pensando cómo a partir de esto se pueden desarrollar procesos de argumentación.

## 3.2 FASE 2: ACTUAR Y OBSERVAR EL PROCESO Y LAS CONSECUENCIAS DEL CAMBIO

En este apartado se presentan todas las tareas desarrolladas para el estudio con la intención de brindar a los estudiantes un sistema teórico local que luego les permitiera tener los garantes suficientes para argumentar, también se presentan resúmenes de lo ocurrido en clase que surgen de una actividad de retroalimentación con la cual se buscaba informar al asesor del presente trabajo de grado lo ocurrido en clase, quien con esta información asumía posturas y guiaba las formas de abordar las siguientes sesiones.

### 3.2.1 Tareas

Para analizar las acciones que realiza el profesor cuando busca fomentar un ambiente de argumentación en sus estudiantes en la clase de geometría, se diseñan unas tareas que están basadas en el texto de Geometría escrito por Samper (2008) y la escogencia de las mismas se hace en procura de desarrollar un sistema teórico local, para que los estudiante usen garantías axiomáticas en su procesos de argumentación. Algunas de las tareas del libro se modifican con la intención de brindar a los estudiantes espacios de reflexión sobre las mismas.

Se diseñan seis tareas, con la indicación de desarrollarse por completo en clase, para obtener un registro escrito de los argumentos con los cuales el estudiante llega a una solución determinada. Además, se establece el trabajo en tres momentos: trabajo individual, trabajo en grupos de tres personas y finalmente, socialización con toda la clase. Con esta organización se busca propiciar la interacción de los estudiantes y las formas en que ellos defendían sus puntos de vista. En cada momento del desarrollo de las tareas, el profesor realiza unas acciones que luego serán sujeto de análisis para determinar su impacto en el proceso de argumentación de los alumnos.

Las primeras cinco tareas tienen como propósito la descripción y comprensión de nociones, definiciones y propiedades sobre los cuadriláteros, y ayudan a organizar el sistema teórico local, que organice una serie de proposiciones que se puedan usar como sustento teórico para argumentar la solución de la Tarea 6. Para poder introducir al sistema teórico local el profesor diseña tres tipos de tareas. El primero se caracteriza porque, a partir de la definición de un objeto geométrico, se debe identificar los atributos de dicha definición; luego se analizan figuras y se determina si ellas cumplen o no la definición dada. El segundo consiste en que, dado un grupo de figuras, los estudiantes identifican las características comunes y construyen una definición que sea adecuada para que no exista ambigüedad entre tipos de figuras. El tercero, se enfoca en el trabajo sobre propiedades de los cuadriláteros; el estudiante debe visualizar figuras y explorar usando material concreto, bajo indicaciones específicas cómo medir, cortar y registrar en tablas los datos obtenidos, y descubrir una propiedad que se expresa, de ser posible, como una proposición condicional.

Las tareas propuestas tiene la siguiente estructura: propósito, materiales, descripción general, posibles acciones del profesor y el aprendizaje esperado. Y una vez aplicada cada tarea, se hace una reflexión (aparatado 3.2.3 reflexión primaria de la clase), esto implica un trabajo continuo y reflexivo sobre los datos. Dicha reflexión permite la modificación de las tareas según el transcurrir de las sesiones. A continuación se describe cada una de las tareas que finalmente se llevaron al aula de clase.

**Tabla 1 Propósitos de las tareas**

| TAREA | PROPÓSITO |
|---|---|
| **Tareas para organizar el sistema teórico local** | |
| Tarea 1: Definición de cuadrilátero (Ver Anexo 1) | Se pretende que los estudiantes identifiquen y comprendan la definición de cuadrilátero (entender cuáles son las condiciones suficientes y necesarias de la definición). |
| Tarea 2: Clasificación de cuadriláteros (ver Anexo 2) | Se espera que los estudiantes clasifiquen las figuras a partir de las características que brinda la representación gráfica. |
| Tarea 3: Clasificación de cuadriláteros y otras definiciones (ver Anexo 3) | Se espera que los estudiantes hagan una representación de las figuras, a partir, de las definiciones propuestas. |
| Tarea 4: Interior y exterior (ver Anexo 4) | Se espera que los estudiantes reconozcan la definición de diagonal, de interior y de exterior de un cuadrilátero, y que a partir de estas puedan construir otras definiciones. |
| Tarea 5: Propiedades de los cuadriláteros (ver Anexo 5) | Se pretende que los estudiantes identifiquen dos propiedades de los cuadriláteros. |
| **Tareas para utilizar el sistema teórico local para justificar** | |
| Tarea 6: Acerca de los cuadriláteros (ver Anexo 6) | Se pretende que los estudiantes den solución a las situaciones usando las definiciones y propiedades trabajadas anteriormente. |

#### *3.2.1.1 Descripción Tarea 1: definición de cuadrilátero*

La instrucción de la tarea uno, inicia con la definición de cuadrilátero propuesta en Samper (2008).

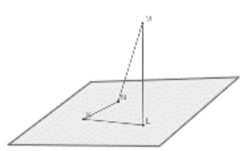
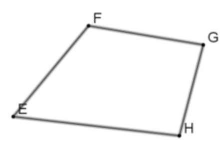
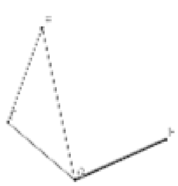
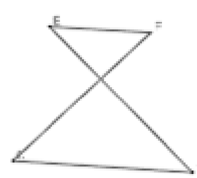
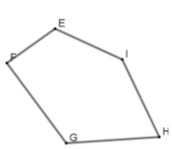
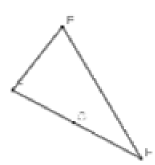
> La unión de cuatro segmentos coplanares que solo se intersecan en los extremos, en la que ningún par de segmentos son colineales, y en la que cada extremo de un segmento es extremo de exactamente dos segmentos, se denomina cuadrilátero. Los extremos de los segmentos son los vértices del cuadrilátero. (Samper, 2008, p. 37).

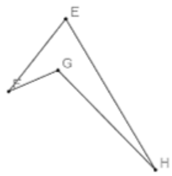
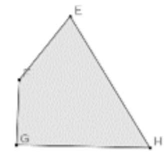
La intención de presentar esta definición es que los estudiantes se cuestionen sobre todas las condiciones que la componen. Para ello se diseña la tarea de la siguiente manera:

**Primer momento, individual**: conformado por tres ejercicios. En el primero se pide a los estudiantes escribir qué términos no conocen. En el segundo se pide identificar cada una de las características de la definición y en el tercero, se pide graficar un cuadrilátero usando la definición dada.

**Segundo momento, pequeños grupos**: se pide conformar grupos de trabajo con máximo cuatro integrantes, en cada uno de estos se debe revisar de nuevo los términos desconocidos. Luego, se propone un grupo de ocho figuras (algunas son cuadriláteros y otras no cumplen algún atributo de la definición). La indicación dada es determinar si las figuras son o no cuadriláteros analizando representaciones gráficas a la luz de la definición trabajada. En la tabla 2 se presentan el grupo de figuras propuestas y se destaca qué condición de la definición no están cumpliendo.

**Tabla 2 Figuras propuestas en la Tarea 1**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  Figura 1 | Incumple la condición ser segmentos coplanares | |  Figura 2 | Cumple con todas las condiciones de la definición |
|  Figura 3 | Incumple la condición de que cada vértice lo sea de exactamente dos segmentos | |  Figura 4 | No cumple la condición de que solo se intersequen en los extremos |
|  Figura 5 | Se incumple la condición de estar formado por cuatro segmentos | |  Figura 6 | Se incumple la condición que los segmentos no sean colineales |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  Figura 7 | Cumple con todas las condiciones | |  Figura 8 | Cumple con todas las condiciones, pero además adiciona la región comprendida por la figura |

#### *3.2.1.2 Descripción Tarea 2 y 3: clasificación de cuadriláteros.*

En la Tarea 2 se presentan tres grupos de figuras: cuadrados, rectángulos y rombos. Los estudiantes deben encontrar la característica común de cada grupo al utilizar la regla y el transportador. (Ver Anexo 2). La indicación para el desarrollo de esta tarea es: *De cada una de los grupos de figuras representadas diga: ¿cuál es la propiedad o propiedades principales que los hacen únicos o diferentes de los demás grupos?* Pregunta con la cual se buscaba dar la posibilidad a los estudiantes de postular sus ideas para una futura discusión con sus compañeros.

En el desarrollo de la *Tarea 3*, se presenta la definición y se solicita a los estudiantes hacer la representación gráfica correspondiente. Los cuadriláteros trabajados de esta manera son: trapecio, paralelogramo y cometa. Con esta indicación se pretendía que los estudiantes identificaran que las definiciones están compuestas por varios atributos y que el uso de los mismos es una fuente para construir argumentos.

#### *3.2.1.3 Descripción Tarea 4: Interior y exterior*

En esta tarea se presenta la definición de *diagonal* de un cuadrilátero: “una diagonal de un cuadrilátero es un segmento con extremos en dos vértices opuestos del cuadrilátero” (Samper, 2008). Como primera parte de la tarea se pide a los estudiantes que, a partir de esta definición, hagan la representación gráfica correspondiente. Luego se presenta una explicación de *interior y el exterior* de un cuadrilátero (ver Anexo 4). Y finalmente, se presenta la definición de *cuadrilátero convexo*, se solicita que se realice una representación gráfica de un polígono convexo y uno que no lo sea, con la indicación de justificar el porqué de la representación hecha.

#### *3.2.1.4 Descripción Tarea 5: propiedades de los cuadriláteros*

La tarea empieza con una introducción sobre qué es una propiedad; luego se presentan una serie de indicaciones que buscan que los estudiantes concluyan una relación sobre la suma interna de los ángulos (ver Anexo 5). A partir de las respuestas de los estudiantes, se pretende institucionalizar la Propiedad 1: *la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360°*.

En la segunda parte de la tarea se plantean preguntas que lleven a los estudiantes a deducir la Propiedad 2: *la suma de la medida de tres lados de un cuadrilátero es mayor que la medida del lado no sumado*, para el desarrollo de esta tarea, se plantean las siguientes indicaciones:

- Elija cuál va a ser el lado uno, dos, tres y cuatro de cada uno de ellos.
- Luego escriba en la tabla las medidas de cada uno de los lados.
- Haga la suma de tres lados que escoja.
- Compárelo para mirar la relación del resultado de la suma con el lado que no sumó.
- ¿Qué pueden concluir de la última columna?

Además, se entrega a los estudiantes tres cuadriláteros distintos para analizar. También se les asigna una tabla para que registren los datos tomados. (Ver Anexo 5, hoja dos). Se espera que los estudiantes identificaran y comprendieran dos propiedades de los cuadriláteros.

#### *3.2.1.5 Descripción Tarea 6: Acerca de los cuadriláteros*

En esta tarea se proponen cinco situaciones que indagan aspectos relacionados con los cuadriláteros, estructuradas de tal forma que, para dar una solución acertada, se necesitan de los conceptos trabajados. En seguida se presenta cada pregunta con su respectivo propósito.

Situación 1. Dado $\boxdot\, ABCD$ con el ángulo A, ángulo B y ángulo C rectos ¿El ángulo D es recto? Grafique si es posible.

Con esta situación se busca que los estudiantes justifiquen usando la Propiedad 1 (la suma interna de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360°)

Situación 2. Se tiene el cuadrilátero $\boxdot\, DEFG$ con todos sus lados de igual medida ¿Es el cuadrilátero $\boxdot\, DEFG$ un cuadrado?

Para esta situación se espera que los estudiantes hagan su análisis de acuerdo a lo trabajado en la guía de clasificación de cuadriláteros según ángulos y lados (Tarea 2 y 3), y que argumenten afirmando que la solución depende de la condición dada a los ángulos, es decir, que el cuadrilátero será cuadrado si los ángulos que lo conforman son ángulos rectos.

Situación 3. Dos ángulos de un cuadrilátero convexo tienen las medidas dadas. En cada caso, proponga medidas para los otros dos ángulos:

- 126° y 140°
- 100° y 58°
- 90 y 85°
- 66° y 159°

En este caso se espera que los estudiantes argumenten teniendo en cuenta que la suma interna de los ángulos debe ser 360° y que, al ser convexo, ninguno ángulo puede tener medida mayor o igual a 180°.

Situación 4. Dadas las siguientes medidas de segmentos; 10 cm, 3 cm, 2 cm y 4 cm, ¿se puede construir un cuadrilátero? Explica tus repuestas.

En esta situación se espera argumentos desde la Propiedad 2; es decir, la medida de la suma de tres lados de un cuadrilátero es mayor a la medida del lado no tomado (Tarea 5).

Situación 5. Se llaman **CUADRI** a un tipo especial de cuadrilátero, que cumple la condición: "cada lado tiene exactamente un lado adyacente de igual medida y ningún par de lados opuestos tiene igual medida". Dibujar a partir de la condición, tres **CUADRIS** diferentes.

Finalmente, en esta situación se espera el uso de diversas estrategias en relación con el análisis de la definición, tal como se ha hecho en las diferentes clases (Tarea 1, 2, 3), empezando por identificar cada una de las partes del enunciado, para luego construir la representación gráfica.

### 3.2.2 Sistema teórico local

En el desarrollo de las tareas se trabajan algunas definiciones, unas planeadas en las tareas y otras que se descubren o se institucionalizan en la clase. A continuación se presentan estas definiciones que pueden constituir en algún momento los garantes de los estudiantes. Las definiciones son elaboradas con base en el texto Geometría (Samper, 2008) y se presentan tal cual se establecieron con el grupo de estudiantes, por ello en algunos casos estas tienen condiciones que no son necesarias y en otros no se presentan con el lenguaje formal.

**Tabla 3 Definiciones y Hechos Geométricos trabajadas en clase**

| **Definiciones** | |
|---|---|
| Cuadrilátero | La unión de cuatro segmentos coplanares que solo se intersecan en los extremos, en la que ningún par de segmentos son colineales, y en la que cada extremo de un segmento es extremo de exactamente dos segmentos, se denomina cuadrilátero.<br>Los extremos de los segmentos son los vértices del cuadrilátero. |

| | |
|---|---|
| Lados de un cuadrilátero | Son cada uno de los segmentos que conforman el cuadrilátero. |
| Lados opuestos de un cuadrilátero | Son aquellos segmentos que no comparten vértices en el cuadrilátero. |
| Lados consecutivos de un cuadrilátero | Son los segmentos del cuadrilátero que comparten un vértice. |
| Ángulos opuestos de un cuadrilátero | Son los ángulos del cuadrilátero que se intersecan únicamente en dos vértices del cuadrilátero. |
| Ángulos consecutivos de un cuadrilátero | Son los ángulos del cuadrilátero cuya intersección es uno de los lados del cuadrilátero. |
| Rectángulo | Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y lados opuestos congruentes. |
| Cuadrado | Cuadrilátero con todos sus lados congruentes y ángulos rectos. |
| Trapecio | Cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. |
| Rombo | Cuadrilátero con cuatro lados congruentes y ángulos opuestos congruentes. |
| Paralelogramo | Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos. |
| Diagonal de un cuadrilátero | Segmento con extremos en dos vértices opuestos del cuadrilátero. |
| Convexo | Se llaman cuadriláteros convexos si las diagonales no tienen puntos en el exterior. |
| **Hechos Geométricos** | |
| Propiedad 1 de los cuadriláteros | La suma de las medidas de los ángulos internos de los cuadriláteros convexos igual 360º. |
| Propiedad 2 de los cuadriláteros | La suma de la medida de tres lados de un cuadrilátero es mayor que la medida del lado no sumado. |

### 3.2.3 Resúmenes de las clases

Una vez terminada la aplicación de cada una de las tareas con los estudiantes de grado octavo, el profesor realiza una descripción de lo sucedido, estos resúmenes se presentaban al asesor, y con esto se buscaba crear estrategias para las siguientes aplicaciones de las tareas. A continuación se presentan los resúmenes hechos en cada aplicación.

#### *3.2.3.1 Resumen del desarrollo de la Tarea 1*

En el desarrollo de esta primera tarea se observa que los estudiantes están un poco dispersos por el uso de la cámara y por las grabadoras de voz en la clase. Aunque trabajaban sobre las tareas se nota bastante dificultad en la comprensión de los enunciados propuestos en las guías, motivo por el cual el profesor recurre a leer la tarea haciendo énfasis en lo que quiere que los estudiantes desarrollen.

Frente al trabajo desarrollado, en un primer momento de clase, el docente pretende tomar apuntes de cada intervención de los estudiantes en un cuadro hecho en el tablero, parecido al usado en las guías, pero para propiciar la participación de los estudiantes, este decide, en el transcurso del ejercicio, cambiar la metodología y pedir que cada grupo intervenga, y explique alguna de las figuras analizadas.

Durante esta sesión se insiste en el uso de lenguaje geométrico, procurando que los estudiantes se apropien del mismo o realicen un acercamiento al manejo de los términos, y además se les insiste en nombrar las figuras a partir de los puntos que la conforman. También se identifica que los estudiantes desconocen las definiciones de recta, colineal, coplanar e intersección. Por esto, el profesor ve la necesidad de hacer explicaciones de estos aspectos.

Por otra parte, se observa que los estudiantes buscan mucho la aceptación del docente respecto a las ideas que proponen, en ocasiones negándose a los argumentos del compañero, que solo son aceptados hasta que el profesor los valide o los apoye. El profesor busca controvertir esta situación no respondiendo o apoyando, sino devolviendo la pregunta a otro integrante del grupo, cuestionando la postura frente a lo que dice el compañero y pide explicación de las afirmaciones hechas.

La dinámica de la sesión parece "lenta" según expresan los estudiantes, pero esto deja ver la poca práctica en este tipo de metodologías donde se deja que el estudiante elabore y discuta.

#### *3.2.3.2 Resumen del desarrollo de las Tareas 2 y 3*

A partir de lo observado en la clase anterior se decide modificar la Tarea 3 de forma que se pueda trabajar al tiempo con la Tarea 2, teniendo en cuenta que ambas están enfocadas sobre la clasificación de los cuadriláteros.

Durante el desarrollo de la sesión, los estudiantes inmediatamente ven las representaciones de cuadriláteros agrupadas, las empiezan a llamar por su nombre; es decir, aunque en la indicación de la Tarea 2 propone establecer grupos de cuadriláteros que cumplan cierta condición, los estudiantes se refieren a ellos como "el grupo de los rectángulos", "el grupo de los cuadrados" o "el grupo de los rombos". Después de 15 minutos de trabajo entre grupos el profesor empieza a pasar por cada uno de ellos, preguntando sobre lo realizado. En la mayoría de los casos encuentra que, para determinar las características de las figuras los estudiantes, recurren a algunas de las partes de la definición de cuadrilátero ya trabajada, es decir los estudiantes están entendiendo la tarea como “diga si son o no cuadriláteros”. El docente interviene para destacar que si se verifican las representaciones (por ser cuadriláteros) cumplirán con las características de la definición, por tanto, pregunta ¿qué otra característica se podría observar que hagan “especiales” a cierto grupo de cuadriláteros? (señalando las presentadas en la guía, ver Anexo 3) y que las hagan diferentes de los otros tipos de figuras (señalando las presentadas en las otras guías, ver Anexo 4).

Luego se da otro espacio de reflexión, cuando el profesor vuelve a pasar por los grupos y pide que digan la definición elaborada para cada conjunto de figuras, y acorde con esta, sin ver a qué grupo de cuadriláteros los estudiantes le han asignado dicha definición, el profesor trata de hacer la representación, en este caso él busca las condiciones faltantes y cuando las identifica hace una representación que no pertenece al grupo. Luego hace la reflexión sobre la falta de condiciones suficientes y necesarias para que las figuras sean de cierto grupo, y pide que completen la condición para que sea precisa y concisa.

En el desarrollo de la tercera tarea los estudiantes tienen que ser asesorados por el profesor sobre la definición de paralelismo. La duda de ellos radica en la diferencia entre paralelismo y perpendicularidad. Para sobrepasar esta dificultad, el profesor hace mención a los conceptos y los ejemplifica apoyado en la representación de segmentos paralelos y segmentos perpendiculares.

#### *3.2.3.3 Resumen del desarrollo de las Tareas 4 y 5*

Para el desarrollo de la sesión, el profesor inicia escribiendo en el tablero los términos interior, exterior, convexo y diagonal. Luego realiza preguntas sobre cada uno de ellos, empezando con la idea de exterior e interior de un polígono. Para ello dibuja en el tablero un cuadrilátero y ante la pregunta del profesor; -¿Cuál es el interior de la figura?- Se obtiene como respuesta; -lo que está por dentro-, un estudiante dice -es lo que está sombreado- (basándose en la figura presentada en la primera parte de la guía en la cual el interior estaba sombreado y tenía el rotulo de “interior” ver Anexo 5) el profesor formula una nueva pregunta con la intención de cambiar la interpretación con respecto a lo “sombreado”; -y en el cuadrilátero del tablero, que no tiene nada sombreado, ¿cuál es el interior?- el estudiante no tiene mucha dificultad en responder -es lo que está dentro-.

Otros estudiantes ahondan más y dicen que el interior corresponde a lo que está entre los segmentos. Aunque los llaman líneas, el profesor es enfático en recordarles que no se debe decir “línea” sino “segmento”. Para consolidar la noción de interior y exterior el profesor dibuja puntos dentro y fuera del cuadrilátero, y pregunta si están en el interior o en el exterior del mismo. Esto genera unas posturas interesantes sobre si los vértices del cuadrilátero están en su interior o en su exterior, en parte los estudiantes desarrollan esta discusión basados en la representación del punto, es decir; el punto sombreado o el punto graficado, el profesor hace la aclaración sobre lo que es un punto, acudiendo a ideas que se trabajaron antes de empezar el tema de cuadrilátero.

Luego el profesor dibuja un cuadrilátero en el tablero (⊡FGHI), se nombran sus vértices, y se pregunta -¿cuál sería la diagonal de dicho cuadrilátero?-, los estudiantes hacen señas con sus manos indicando trazar un segmento, pero el profesor, que ya había revisado lo hecho en las guías por parte de ellos, decide tomar una solución de uno de ellos y dibujarla en el tablero para generar discusión en clase, (ver Imagen 3), algunos estudiantes manifiestan que está mal, mientras otros defienden la idea, así que el profesor pide revisar la definición para determinar quién tiene la razón. Durante este ejercicio se revisa nuevamente la definición de vértice y segmento, para contrastarla con la definición de diagonal del cuadrilátero, esto ayuda a entender cuál es la diagonal y porque la representación hecha por el estudiante era errada. Además se determinó que el cuadrilátero solo tiene dos diagonales.

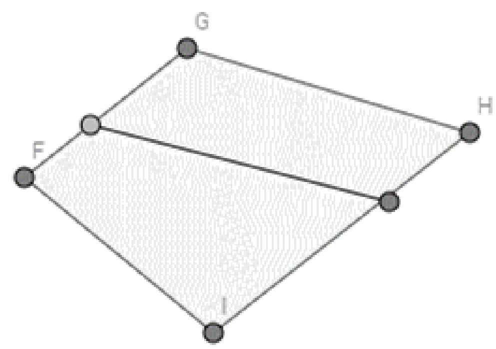
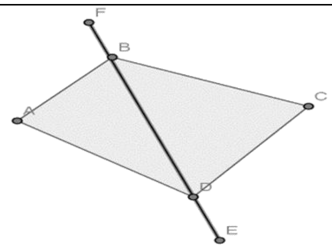
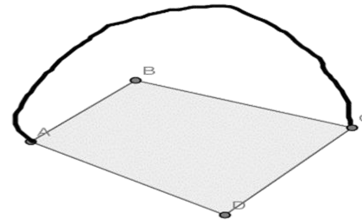
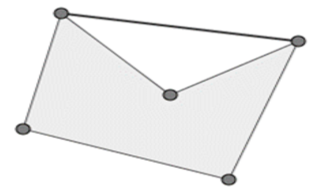



Imagen 3 Representación de diagonal hecha por un estudiante # 1

Para la fase de socialización de la idea de polígono convexo y no convexo, se plantea trazar una diagonal que tenga puntos en el exterior de un cuadrilátero, se presentan diversas explicaciones por parte de los estudiantes, algunos de ellos modifican la definición de diagonal; por ejemplo, algunos hacen segmentos más largos que pasan por los vértices, (ver Imagen 4). Otros modificaron la idea de segmentos haciendo curvas (ver Imagen 5). Finalmente, una estudiante encuentra una figura que cumplía la condición, la mayoría de los demás estudiantes no están de acuerdo, la estrategia de ella consiste en hacer primero un triángulo y luego a partir de este hacer el cuadrilátero, pero resulta que la figura hecha tiene cinco lados, (ver Imagen 6), luego de bastante discusión y no comprender lo graficado por la compañera, el profesor interviene y hace el cuadrilátero, siguiendo la estrategia de la compañera, se cierra la discusión y se da fin a la clase.

| | | |
|---|---|---|
|   |   |  |
| Imagen 4 Representación de diagonal hecha por un estudiante # 2 | Imagen 5 Representación de diagonla heccha por un estudiante # 3 | Imagen 6 Representación de diagonal hecha por un estudiante # 4 |
| (Porque los vértices se consideraban contenidos por la diagonal y no extremos). | (diagonal de un cuadrilátero no convexo, se hace énfasis en la unión de dos vértices opuestos, por una línea con puntos en el exterior) | (cuadrilátero no convexo, se presentó dificultad en la aceptación por parte de los estudiantes |

### *3.2.3.4 Resumen del desarrollo de la Tarea 6*

Durante el desarrollo de la sesión se observa que aún es difícil para los grupos expresar argumentos, por ejemplo en la Situación 1. (*Dado* $\boxdot$ $ABCD$ *con el ángulo A, ángulo B y ángulo C rectos ¿El ángulo D es recto? Grafique si es posible*) la respuesta de uno de los grupos fue -sí, porque sí-. El profesor repite la pregunta pidiendo que justifiquen -*¿y por qué, sí?*-” pero no pudo hacer una repregunta que lleve a los estudiantes a ver las cosas de otra manera y por lo tanto los estudiantes no pueden explicar.

Sobre la Situación 2. (*Se tiene el cuadrilátero* $DEFG$ *con todos sus lados de igual medida ¿Es el cuadrilátero* $DEFG$ *un cuadrado?*) la primera respuesta en los diferentes grupos fue: –*sí*-, el profesor decide formular una segunda pregunta, -*¿en la definición de cuadrilátero la única condición era tener cuatro lados iguales?*- en un grupo los estudiantes afirman que *sí*, así que el profesor procede a dibujar un rombo, y pregunta -*¿y esta figura*?- y los estudiantes del grupo contestan que también es un cuadrado, uno de los estudiantes menciona que no, y dice que “tiene que estar derecho”. Pero otro de los estudiantes lo gira y dice que el cuadrado es un rombo, entonces concluyen que lo hecho por el profesor también es un cuadrado, (el del profesor es un rombo con ángulos no rectos), el profesor realiza una nueva pregunta, -*o sea que si volteamos el rombo ¿queda un cuadrado?*- y entonces los estudiantes se dan cuenta que no es así.

En relación con la Situación 3 (*dos ángulos de un cuadrilátero tienen las medidas dadas. En cada caso proponga medidas para los otros dos ángulos*) se encontró que para los estudiantes fue difícil la comprensión del enunciado porque se les dio cuatro pares de medidas (ver Anexo 6, situación 3) y como el enunciado decía que UN cuadrilátero, los estudiantes no entendían para que las ocho medidas. Esto conllevo a que cuatro de los siete grupos no respondieran la situación. De los grupos que respondieron, uno manifiesta que tienen que “ser igual”  y qué si uno medía más, el otro debe medir menos (hace alusión a la clase donde se trabajó la Propiedad 1, y se dijo que la suma de las medidas de los ángulos de una cuadrilátero siempre daba 360°, y que por ende si a un ángulo de un cuadrilátero se le cambiaba su medida para que fuera mayor en consecuencia  a otro ángulo se le debía disminuir su medida).

Cuando se aborda la Situación 4 (*dadas las medidas de los segmentos; 10, 3, 2, y 4 cm ¿se puede construir un cuadrilátero?*) todos los grupos tratan de hacer la construcción con las medidas dadas y tras varios intentos y fracasos con las construcciones recuerdan la Tarea 5 y la Propiedad 2, que les ayuda a dar solución a la situación.

Finalmente, tres grupos alcanzaron a abordar la Situación 5, sobre los CUADRIS, (ver Anexo 6, situación 5), y los tres solicitaron al docente aclaración sobre el termino adyacente, luego de la explicación del docente, quien les dice “que en un cuadrilátero son los lados que comparten un vértice”, los estudiantes abordan la situación y hacen la representación que ellos consideraron apropiadas.

#### *3.2.3.5 Consideraciones generales del desarrollo de las tareas*

En las tareas en las cuales se trabajaron definiciones, los estudiantes defendían sus respuestas de acuerdo a lo que observaban, interpretaban, sabían o habían escuchado del profesor en otras ocasiones. El profesor sirvió de mediador en las opiniones de los estudiantes, validaba por medio de ejemplos y contraejemplos, y finalmente daba cierres generales que contribuían a la construcción del sistema teórico local, aunque hizo falta  más trabajo en la institucionalización de las definiciones y los hechos geométricos.

En las tareas en las cuales se descubrió una propiedad, los estudiantes también observaban, interpretaban y hacían supuestos en relación a lo que estaban analizando; el profesor debió guiar más al estudiante para resolver este tipo de tarea y se evidenció que su papel a la hora de institucionalizar las propiedades no se cumplió acorde con lo esperado, porque no destino el tiempo adecuado dentro de la actividad para ello.

En la última tarea el profesor actuó como mediador entre los estudiantes, validando las respuestas, por medio de ejemplos, contraejemplos y en algunas ocasiones dando la respuesta correcta, el profesor al notar que algunos estudiantes no recordaban lo trabajado, hacía remembranza de las tareas, definiciones y propiedades institucionalizadas.

## 3.3 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

En este apartado se presentan las categorías de análisis utilizadas en la reflexión de los fragmentos de clase escogidos, categorías relacionadas las acciones que realiza en profesor y los tipos de argumentos elaborados por los estudiantes.

Los tipos de argumentos expuestos en la Tabla 4, corresponden a una adaptación de los esquemas de demostración propuestos por Sowder & Harel (1998) y se centra en la forma de referirse a los mismos, más no en la forma en que los autores los definen. La adaptación radica principalmente en el cambio de las palabras "esquema de demostración" por la palabra "argumento", cabe mencionar que ya los autores Sowder & Harel (1998) indicaban que estos esquemas se consideraban en el sentido amplio de la definición; es decir, con relación a los tipos de justificaciones que podían dar los estudiantes, y no en el sentido particular de la demostración matemática. La necesidad del cambio se da porque la demostración tiene una connotación diferente a la de argumentación dentro de este trabajo.

**Tabla 4 Tipos de argumentos**

| **Esquema de demostración** (nombre propuesto por Harel & Sowder, 1998) | **Tipo de argumento** (nombre asociado a los tipos de argumentos en este trabajo) | **Definición (Sowder & Harel, 1998)** | **Cód.** |
|---|---|---|---|
| Esquema de demostración autoritario | Argumento por autoridad | Cuando la forma de validar está soportada en un texto, en el profesor o en un compañero que se categorice como el más "aventajado" | AA |
| Esquema de demostración ritual | Argumento por rito | La aceptación del argumento se asume por la forma en que la información es presentada, por ejemplo el formato a dos columnas de la demostración | AR |
| Esquema de demostración simbólico | Argumento por uso de símbolos | Se considera que la fuerza recae en el manejo del lenguaje simbólico que se exprese, por ejemplo usar el símbolo de paralelismo sin tener en cuenta su significado | AS |
| Esquema de demostración perceptual | Argumento por percepción | Las afirmaciones están centradas en lo que se ve de la representación gráfica que se proporciona | AP |
| Esquema de demostración basado | Argumento por uso de ejemplos | Las justificaciones se basan en uno o varios ejemplos puntuales sobre la | AE |

| | | | |
|---|---|---|---|
| en ejemplo | | situación que se estudia | |
| Esquema de demostración transformacional | Argumento transformacional | Caracterizado por involucrar aspectos generales de la situación e ir en busca de construir la conjetura general, por ejemplo la identificación de un patrón en una secuencia, sin necesidad de sin necesidad de hacer varios ejemplos. | AC |
| Esquema de demostración axiomático | Argumento axiomático | Las justificaciones se basan en el sistema teórico propio de las matemáticas, que involucra una organización cuidadosa y lógica además del uso de términos, definiciones, supuestos y teoremas | AX |

En relación con las categorías de análisis de las acciones que desarrolla el profesor en el aula de clase, se considerarán las que se presentan en las tablas 5, 6, 7, 8 y que se plantean a partir del marco teórico.

En la Tabla 5, se presentan las acciones que fueron tomadas textualmente de las definiciones de los autores. El texto en cursiva muestra alguna adaptación.

**Tabla 5 Acciones del profesor I**

| Cód. | Acción | Definición |
|---|---|---|
| PEP | Exige aclaración o precisión | El profesor reacciona pidiendo que se complete la idea ante la intervención de un estudiante que no es clara o faltan elementos en su elaboración (Ospina y Plazas, 2011). |
| PAI | Aprovecha la intervención de los estudiantes | Ocurre cuando el profesor usa el aporte de los estudiantes para continuar con la discusión *o cuando retoma ideas expresadas, en otro momento, por un estudiante* para realzar elementos de dicha intervención útiles para la tarea (Plazas y Ospina, 2011). |
| PIC | Intervenir y/o sugerir cambios en las ideas de los grupos | Se entiende que durante las acciones de interacción estudiantes-profesor, el profesor puede sugerir cambios en las ideas de los estudiantes, cuando se identifica que estas no les permitirán avanzar en la solución u objetivo de la tarea (Krummheuer, 1995). |
| PIS | Institucionaliza el saber | Ya sea después de descubrir un hecho geométrico o de discutir entorno a unas definiciones, el profesor presenta dichos elementos usando lenguaje matemático y señala que se puede disponer de ellos en las nuevas tareas (Ospina y Plazas, 2011). |

En la Tabla 6, se presentan acciones del profesor que se mencionan por varios autores y que se considera tienen ideas similares, es este caso se ha optado por escoger una como principal, y que se considerará representa la(s) otra(s) postura(s).

**Tabla 6 Acciones del profesor II**

| Cód. | Acción | Definición escogida | Se relaciona con |
|---|---|---|---|
| PDE | Declara, indica explica o corrige el error | Ante la intervención de un estudiante con una idea que tiene un error, *en el desarrollo de una discusión o en otro momento*, el profesor reacciona haciéndolo evidente con la intención de que el estudiante se dé cuenta de su error y se corrija (Ospina y Plazas, 2011). | Ayudar en la comprensión de las correcciones (Falsetti, et al. 2003).<br>Dar explicaciones (Sowder y Harel, 1998). |
| PPP | Propicia la participación. | Esta acción ocurre cuando el profesor invita a sus estudiantes a compartir algunas ideas con respecto a la tarea o al uso de determinados elementos teóricos en el desarrollo de la actividad (Ospina y Plazas, 2011). | Organizar turnos de participación (Krummheuer, 1995).<br><br>Gestor de la participación (Falsetti, Rodríguez, y Aragón, 2003).<br><br>*Dar valor a las ideas de los estudiantes*: Acción que se caracteriza por escuchar y dar seguimiento a las ideas de los estudiantes con el fin de fomentar la participación (Martin et al, 2005).<br><br>*Aprueba el aporte de un estudiante*: de manera explícita, el profesor acepta una información del estudiante. La intención de esta acción es incentivar a los estudiantes a participar y fundamentar lo que dicen o hacen. (Ospina y Plazas, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2011). |
| PPA | Parafrasea un aporte de los estudiantes. | Es usual que frente a un error o alguna afirmación que considera interesante, el profesor repita la intervención del estudiante expresándolo de otra forma, sin agregar información (Ospina y Plazas, 2011). | *Rebote*: cuando el docente repite o parafrasea las preguntas o comentarios de los estudiantes (Martin et al, 2005). |
| PM | Modela | Acción que se da cuando el profesor usa modelos para solucionar una situación, usa contraejemplos, usa una cadena lógica desde el sistema axiomático, se vale de diagramas y procesos generales para elaborar conclusiones (Martin et al, 2005). | *Usa artefactos o expresiones para ilustrar conceptos geométricos.* Sucede cuando el docente usa analogías entre algún concepto matemático y otros elementos del espacio físico, o usa expresiones coloquiales, se refiere a personas presentes o ilustra con ademanes conceptos que se están trabajando (Ospina y Plazas, 2011). |
| PIA | Se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes | Si el profesor ha propuesto una tarea a todo el grupo para ser desarrollada individualmente o en grupos, entonces pasa de grupo en grupo para ver lo que están haciendo, verificar la comprensión de la tarea y de ser necesario interactuar con los estudiantes para informarse sobre los procesos que lleva a cabo (Ospina y Plazas, 2011). | Se informa sobre los resultados geométricos obtenidos por los estudiantes durante el trabajo individual realizado en clase (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>*Solicita información*: el profesor solicita datos que están en el cuaderno o en el texto (Ospina y Plazas, 2011). |

En la Tabla 7 se presentan un grupo de acciones, que parten de las ideas de los autores, pero que se modificaron, tomando aspectos importantes de cada definición.

**Tabla 7 Acciones del profesor III**

| Cód. | Acción | Definición final | Acción de los autores |
|---|---|---|---|
| PPE | Proporciona espacios de reflexión | Acción que se desarrolla cuando el profesor propone, a los estudiantes, | *Responsabiliza a los estudiantes del desarrollo de la tarea o de los conocimientos trabajados*: cuando el |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | una tarea, de preguntas abiertas, con las cuales busca que los estudiantes reflexionen sobre sus propuestas y elaboren justificaciones o conclusiones. | profesor delega a los estudiantes la responsabilidad de justificar sus afirmaciones o conclusiones (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>*Proporcionar espacios de reflexión*: esta acción se genera en dos tipos de momentos. El primero cuando el profesor decide no guiar a los estudiantes y les pone a ellos la responsabilidad de desarrollar la idea que está en discusión.<br>El segundo, cuando propone a todo el grupo una tarea que necesita tiempo para su elaboración (Ospina y Plazas, 2011). |
| PDT | Diseña tareas. | Acción que se da cuando el profesor planea, busca, selecciona, y modifica tareas, para que estas favorezcan la argumentación de los estudiantes. | Proponer tareas (Sowder y Harel, 1998).<br><br>Seleccionar tareas: Acción que se desarrolla cuando se planean o buscan las actividades (Martin et al, 2005). |
| PCA | Controla la aplicación de la tarea | Acción que se da cuando el profesor indica normas para el trabajo en las diferentes fases, y controla su cumplimiento. | Dar verbalmente información relativa al funcionamiento de la clase: cuando se dan indicaciones de normas con respecto al trabajo en grupos, la participación de cada integrante y las normas socio matemáticas como el uso del lenguaje (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>Controla el cumplimiento de las normas: Sucede cuando el profesor realiza algún comentario sobre la importancia de algunas normas (Ospina y Plazas, 2011). |
| PEA | Explica aspectos de las tareas | Acción que se da cuando el profesor da pautas, explica de manera diferente o se vale de nuevas preguntas, ante la incomprensión de alguna indicación de trabajo que | Repreguntar: acción que se da cuando el docente elabora nuevas preguntas ante la incomprensión de alguna indicación de trabajo que los estudiantes no entienden (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>Realizar preguntas que orienten (Falsetti, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | los estudiantes no entienden. | et al. 2003) (no definen).<br><br>Hacer entendibles los enunciados (Krummheuer, 1995) (no define).<br><br>Dar información pertinente al procedimiento de la tarea: cuando el profesor da pautas o explica de manera diferente la tarea propuesta, para asegurar la comprensión y realización de la tarea (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>*Pregunta:* Acción dada cuando el docente por medio de preguntas quiere determinar si los estudiantes están realizando correctamente el ejercicio y entienden lo que están haciendo (Ospina y Plazas, 2011). |
| PRA | Reacciona para aclarar o precisar. | Acción que se da cuando el profesor interviene para puntualizar, completar una idea, corregir expresiones, redondea, resume, globaliza, para construir el sistema teórico local. | Reacciona para aclarar o precisar: cuando a partir de una afirmación de un estudiante el profesor completa la idea, hace evidente algunas diferencias, agrega ideas a la discusión y corrige algunas expresiones matemáticas (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>Resumir las ideas (Krummheuer, 1995).<br><br>Establecer resultados (Sowder y Harel (1998).<br>Concreta el resultado logrado hasta el momento: se lleva a cabo cuando el profesor redondea, resume o globaliza una idea de los estudiantes de la que no se ha concluido algo ni se ha institucionalizado (Ospina y Plazas, 2011).<br><br>Provee información: si el profesor identifica que los estudiantes no pueden |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | construir una demostración, él da información útil o la justificación (Ospina y Plazas, 2011). |
| PEG | Explicitar datos y garantías | Acción que se da cuando el profesor, tras el análisis de las respuestas de los estudiantes, busca que se expliciten o expliquen, los datos, garantías o respaldos, por medio de teoremas, definiciones, postulados, con el fin de refinar los argumentos. | Explicitar datos: Cuando el profesor busca que los estudiantes expliciten datos garantías y respaldos (Sowder y Harel, 1998).<br><br>Pedir una explicación o razonamiento: esta acción la realiza con la intención de que el estudiante explique por medio de teoremas, definiciones o postulados (Martin et al, 2005).<br><br>Evaluar las respuestas de los estudiantes: cuando se analiza lo hecho por los estudiantes, ya sea explícita o implícitamente para refinar argumentos propuestos (Martin et al, 2005).<br><br>Indaga: sucede cuando en reacción a lo dicho por un estudiante, el profesor, por medio de preguntas, busca que el estudiante desarrolle un argumento, lo amplíe o revise el contenido de su intervención. Ospina y Plazas (2011) |
| PAM | Acepta material para validar | Acción que se da cuando se acepta el uso de material, objetos del entorno, o situaciones semejantes para validar ideas o conjeturas. | Acepta material para validar: Ocurre cuando se acepta el uso de material para validar conjeturas (Ospina y Plazas, 2011) |

Finalmente, se presenta en la Tabla 8 una definición que se considera relevante, a partir de las ideas del marco teórico, pero de la cual no se tenía una definición.

**Tabla 8 Acciones del profesor IV**

| **Cód.** | **Acción del profesor** | **Definición final** | **Acción de los autores** |
|---|---|---|---|
| PD | Dirigir la | Acción que se da cuando el | Dirigir a los estudiantes hacia la |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | tarea | profesor genera dudas que lleven a los estudiantes a indagar. | indagación (Sowder y Harel, 1998).<br><br>Generar dudas, (Sowder y Harel, 1998). |

En resumen, las acciones que se considerarán en el análisis se presentan en la Tabla 9.

**Tabla 9 Acciones del profesor**

| CÓD. | ACCIÓN DEL PROFESOR |
|---|---|
| PEP | Exige aclaración o precisión |
| PAI | Aprovecha la intervención de los estudiantes |
| PIC | Interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos |
| PIS | Institucionaliza el saber |
| PDE | Declara, indica explica o corrige el error |
| PPP | Propicia la participación |
| PPA | Parafrasea un aporte de los estudiantes |
| PPE | Proporciona espacios de reflexión |
| PM | Modela |
| PIA | Se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes |
| PDT | Diseña tareas |
| PCA | Controla la aplicación de la tarea |
| PEA | Explica aspectos de las tareas |
| PRA | Reacciona para aclarar o precisar |
| PEG | Explicitar datos y garantías |
| PAM | Acepta material para validar |
| PD | Dirige la tarea |

De las acciones propuestas se considera que PEP, PAI, PIS, PDE, PDT, PRA, PEG, PAM, pueden promover la argumentación de manera directa, dado que dan la oportunidad para que el estudiante explique, generan comunicación en clase, puntualizan los saberes trabajados e invitan a usarlos como proposiciones verdaderas en futuras situaciones, corrigen las maneras de presentar las ideas, permiten la construcción de un sistema teórico local, muestran la importancia en el uso de los datos y las garantías, y da la oportunidad para hacer uso de diversas estrategias de solución de tareas.

Es importante resaltar que el profesor quien desarrolla las tareas en el momento de aplicarlas no era consciente de las acciones propuestas, y lo que se pretende con esta construcción de categorías desde la teoría, es determinar cuáles de estas acciones usa naturalmente cuando su intención es desarrollar unas tareas con sus estudiantes que le permitan la construcción de un sistema teórico local con el cual ellos puedan luego argumentar.

# 4 ANÁLISIS

Para el desarrollo del análisis se seleccionaron fragmentos de clases. Y se destacaron las acciones del profesor, los argumentos de los estudiantes y la interacción estudiante-profesor. Se presenta el análisis de la clase en la cual se desarrolla la Tarea 1, del desarrollo de la Tarea 4, y otro del desarrollo de la Tarea 6, y finalmente se presenta un análisis de acciones no desarrolladas. En cada apartado se encuentra descrita la siguiente información: introducción al fragmento de clase y transcripción del mismo, un esquema de la interacción estudiante-profesor, análisis de las acciones encontradas, identificación de argumentos y esquema de tipo de argumento, y finalmente, una conclusión que apunta a evidenciar la relación de la acción efectuada por el profesor y los argumentos de los estudiantes.

## 4.1 ANÁLISIS DE LA TAREA 1

En relación con la Tarea 1, se han tomado cuatro fragmentos que corresponden específicamente a la Fase 1 de discusión con toda la clase, (ver Anexo 1).

### 4.1.1 Fragmento 1: Discusión con el pleno de la clase Tarea 1

El profesor dibuja en el tablero la primera figura propuesta en la tarea, sobre la cual los estudiantes ya habían tenido un primer momento de trabajo individual y luego un trabajo en pequeños grupos, en este momento se pretende que los estudiantes discutan sus soluciones o puntos de vista frente a cada una de las figuras propuestas en la tarea.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Profesor | ¿Listo?, ¿ya todos tiene su guía a la mano? |
| 2 | Grupo | Sí |
| 3 | Profesor | Porque yo no la tengo, ¿Quién me la deja ver? [*Jaramillo, muestra la hoja al profesor*] Listo, vamos a hacer esto parte, por parte… Entonces en la primera figura, ¿sí la están observando? Menos el grupo de acá porque no la tiene (r*efiriéndose al grupo 3, que no tiene hoja porque se la prestó*). Voy a hacer un dibujito de la primera figura, para los que no la tienen, que creo que éste es el único grupo (grupo 3). [*el profesor dibuja en el tablero un cuadrilátero parecido al de la guía, lo dibuja a mano alzada y subraya el interior del mismo*] Aparece esto de acá. [Imagen 7] que ¿Qué es? (*subraya el interior de la figura y lo señala*) |

Imagen 7 Representación de cuadrilátero hecha por el profesor

| | | |
|---|---|---|
| 4 | Grupo | Un plano |
| 5 | Profesor | Y sobre ese plano hay un segmento acá (*señala el segmento KL*), otro segmento acá (*señala son KN*), y sale acá a unirse con este otro punto fuera del plano (*señala el punto M, y el segmento NM*), ¿listo?<br>Vamos a mirar cada una de las propiedades, a ver si cumplen cada una de esas propiedades las figuras. |

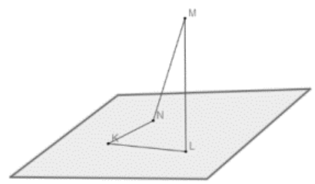


Imagen 8 Representación de la tarea 1

| | | |
|---|---|---|
| | | ¿Sí cumple cada una de esas propiedades? ¿Qué pasa con esa figura? |
| 6 | Liévano | Que sí, que sí es un… |
| 7 | Morales | Un cuadrilátero |
| 8 | Profesor | Que sí es un cuadrilátero, (*asintiendo con la cabeza a lo dicho por Morales*) si cumple todas es un cuadrilátero. Vamos a mirar. ¿Es unión de cuatro segmentos? |
| 9 | Grupo | Sí |
| 10 | Profesor | Entonces vamos a poner un chulito ahí, (cuando dice ahí, se refiere a la primera casilla de la tabla dibujada en el tablero, en la cual dice unión de cuatro segmentos, figura uno). Bueno, y ¿Cuáles son los segmentos ahí? |

#### ***4.1.1.1 Esquema del fragmento 1***

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| [3] *replantea lo propuesto* [PD] en la hoja y se *pregunta para verificar si todos lo comprenden* [PPE] | | [4] Los estudiantes dicen que interpretan. (conocimiento previos) |
| [5] Hace la representación de la figura a analizar, y *pregunta para identificar si los estudiantes entienden la finalidad de la tarea* [PEA] | | Los estudiantes responden la pregunta según lo esperado, es decir que están comprendiendo la tarea propuesta [6-7] |

#### *4.1.1.2 Acciones en el fragmento 1*

En el fragmento se observa que el profesor *decide empezar el desarrollo* de la tarea tomando una de las figuras propuestas en la guía y representándola en el tablero [PD], desde allí centra la idea, por medio de preguntas, sobre si la figura cumple o no las condiciones de la definición de cuadrilátero dando además un tiempo de *reflexión* a los estudiantes [PPE] [1-5]. Estas preguntas [3, 5] recaen en el objetivo mismo de la tarea, porque el profesor *determina si los estudiantes están comprendiendo lo que se debe realizar* [PEA]. Aparasen entonces tres acciones diferentes del profesor *dirigir la tarea* [PD], *proporciona espacios de reflexión* [PPE] Y e*xplica aspectos de las tareas* [PEA] acciones centradas en la comprensión y desarrollo de la tarea y que no están relacionadas directamente con los procesos de argumentación.

#### *4.1.1.3 Argumentos del fragmento 1*

En el fragmento estudiando no se evidenció argumentación por parte de los estudiantes. Pero se considera que se están dando herramientas para que más adelante los estudiantes puedan elaborar un argumento, porque hasta el momento se está analizando una sola propiedad de una definición.

#### *4.1.1.4 Relación acción-argumento 1*

Hasta el momento la intención que tiene el profesor es que los estudiantes entiendan la actividad y no se da la oportunidad de argumentar, aunque en este momento no hay argumentos elaborados por los estudiantes, se ve que la acción *explica aspectos de las tareas* [PEA] permite centrar el trabajo para que más adelante se den, es decir, si los estudiantes comprenden que para determinar si una figura es cuadrilátero o no se debe verificar que se cumplan cada una de las condiciones de la definición, y toman esas condiciones como garantes para concluir, entonces, posiblemente los estudiantes aplicarán ese proceso con las demás figuras y argumentarán.

### 4.1.2 Fragmento 2: Atributos de la definición de cuadrilátero Tarea 1

En este fragmento se observa que el profesor formula preguntas que buscan que los estudiantes identifiquen los atributos que conforman la definición de cuadrilátero.

| | | |
|---|---|---|
| 12 | Profesor | [*El profesor retiñe los segmentos de la figura dibujada en el tablero y los va contando]* uno, dos, tres y cuatro, ¡listo! ahí estarían los cuatro segmentos. ¿Los segmentos solo se encuentran en los extremos? |
| 13 | Grupo | Sí |
| 14 | Profesor | Los extremos ahí están nombrados. ¿Cuáles serían ahí? |
| 15 | Bautista | ¡Los vértices! ¡Los vértices! |

| | | |
|---|---|---|
| 16 | Morales | ¡Los punticos! |
| 17 | Liévano | Los extremos, K, L, N, M. |
| 18 | Profesor | (*Asiente con la cabeza a la intervención de Liévano*) Por acá un compañero dice que los podemos llamar como vértices. En el segmento sería un extremo, y en la figura sería un vértice. Entonces acá sería otro chulito *(refiriéndose al segundo tabla de la segunda parte de la definición y la figura uno)* |
| 18 | Profesor | Siguiente *(se refiere a la siguiente indicación de la tabla)* ¿Ningún par de segmentos son colineales? |

### *4.1.2.1 Esquema del fragmento 2*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| Se plantea como pregunta una de las características de la definición de cuadrilátero [12] [PD] | → | Responden afirmativamente [13] |
| | ↙ | |
| *Pide que se usen los términos* para referirse a los vértices [14][PRA] | → | Responden de tres maneras diferentes [15-17] |
| | ↙ | |
| *Parafrasea* dos de las *intervenciones de los estudiantes* [PPA] y la aprovecha para aclarar la relación entre vértice y extremo. | | |

### *4.1.2.2 Acciones en el fragmento 2*

En este fragmento se analiza la característica de definición de cuadrilátero "los segmentos solo se encuentran en los extremos" para esto el profesor pregunta *dirigiendo la tarea* ¿los segmentos solo se encuentran en los extremos? [12][PD], a lo que los estudiantes responden de manera acertada, "sí", el trabajo pudo haber parado ahí, pero el profesor hace otra pregunta con la intención de que los estudiantes *usaran las letras que denotaban el cuadrilátero* [14][PRA], las respuestas de los estudiantes refieren a la noción de punto, los extremos y los vértices [15-17], entonces el profesor decide *parafrasear las intervenciones* de los estudiantes [PPA] para recalcar la respuesta que él esperaba, además establece la relación extremo del segmento, con vértice del cuadrilátero [18], que hace parte de la definición que se está estudiando y finalmente, continua con la discusión.

#### *4.1.2.3 Argumentos observados en el fragmento 2*

En este fragmento no se observa un argumento creado por los estudiantes ya que no se piden justificaciones y la pregunta formulada por el profesor tampoco genera que estas sucedan.

#### *4.1.2.4 Relación Acción-Argumento 2*

*El parafraseo de la intervención del estudiante* [PPA] se hace importante en la medida que este muestra que se están tomando en cuenta sus intervenciones, lo cual favorece la discusión de la clase. Por lo tanto, es necesario que cuando se corrija el error no se haga énfasis en que se tiene la dificultad, sino que se resalte la importancia de observar todas las posibilidades de solución e interpretación, y con esto el estudiante empiece a adquirir la cultura de presentar sus ideas, debatirlas, defenderlas y apoyar o rechazar las de los demás. En síntesis, observamos que las acciones *parafrasea aporte de los estudiantes* [PPA], *dirigir la tarea* [PD] y *reacciona para aclarar o precisar* [PRA], no influyen de manera directa en la construcción de los argumentos por parte de los estudiantes en este fragmento en particular.

### 4.1.3 Fragmento 3: Conclusión Figura 1 Tarea 1

Este fragmento corresponde al cierre la discusión en torno a la primera figura.

| | | |
|---|---|---|
| 1-66 | Todos | Los estudiantes y el profesor han estado discutiendo sobre los atributos de la definición de cuadrilátero, esta discusión se desarrolló tomando una figura y con todo el grupo se analizó en el tablero. El profesor hace preguntas y toma los apuntes correspondientes. |
| 67 | Profesor | Listo, entonces también cumpliría esa. ¿Esta primera figura será cuadrilátero? |

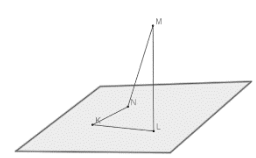


Imagen 8 Cuadrilátero propuesto para análisis Tarea 1

| | | |
|---|---|---|
| 68 | Caldón | Sí |
| 69 | Otros | No |
| 70 | Profesor | Sí, o no, ¿pero por qué? |
| 71 | Liévano | Sí, porque tiene cuatro lados |
| 72 | Profesor | Y ¿no porque? (Señala al grupo de Arias, que dijo que no) |
| 73 | Arias | Porque no cumple esa condición, (señala la condición de coplanaridad en el tablero) |

| | | |
|---|---|---|
| 74 | Profesor | Liévano, mire lo que dice la compañera, ella dice que no porque no cumple una. |
| 75 | Liévano | Ah sí, entonces no es. |
| 76 | Mórales | No, no es. |
| 77 | Profesor | ¡Ah!, no es, o sea que se dejaron convencer. |
| 78 | Caldón | Sí es. |
| 79 | Liévano | No, no es, porque tiene que cumplir todas las condiciones. |
| 80 | Profesor | Ah bueno, no es porque tiene que cumplir todas las condiciones. |

#### *4.1.3.1 Esquema del fragmento 3*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| *Pregunta sobre la comprensión de la terea* [67][PEA] | → | Expresan posturas contrarias [68-69] |
| | ↙ | |
| *Pide justificación* para cada una de las respuestas [70] [PEG] | → | Responde argumentando desde la ideas de cuadrilátero como figura de cuatro lados [71] |
| | ↙ | |
| *Pide la justificación* del otro grupo [72][PEG][PPP] | → | Responde argumentado que no cumple una de las condiciones de la definición [73] [AX] |
| | ↙ | |
| *Parafrasea el aporte del estudiante* [74] y lo confronta con el otro compañero [PPA] | → | Dos estudiantes manifiestan haber comprendido [75-76] |
| | ↙ | |
| Pone en duda de la afirmación para poder llegar a una sola conclusión y da *tiempo para que se piense* [77][PPE] | → | Un estudiante vuelve a respaldar la idea equivocada, pero el estudiante que la planteó le hace ver que efectivamente la de la compañera era correcta [78-79][AX] |
| | ↙ | |
| *Resume la idea* [PRA] y concluye | | |

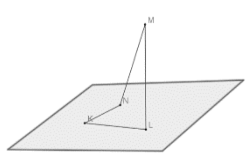
#### *4.1.3.2 Acción en el fragmento 3*

En este fragmento se observa cómo se da cierre al análisis de la primera figura (ver Imagen 8) en la cual la condición de coplanaridad no se cumple. Para esto el profesor pregunta a los estudiantes si la figura es o no cuadrilátero [67], algunos estudiantes dicen que sí otros que no, [68-69]. El profesor pide en una justificación de las respuestas [70], a lo cual uno de los estudiantes afirma que la figura sí es cuadrilátero porque tiene cuatro lados, desconociendo todo el análisis hecho de la definición [71], el profesor no corrige el error, sino que decide que se escuche a otro estudiante [72], quien manifiesta que la figura no es cuadrilátero porque no cumple unas de las condiciones (coplanaridad) [73], el docente usa la intervención del estudiante y la repite al compañero[PPA], quien manifiesta que el otro tiene la razón [74]. En ese momento se pudo parar la discusión, pero el profesor intenta asegurarse de que todos comprenden, y controvierte la respuesta, al decir “se dejaron convencer” [75], en este momento el estudiante Liévano, manifiesta haber comprendido [77], pero un estudiante continúa manifestando que la figura sí es cuadrilátero [76], así que el profesor termina por *concretar y redondear la idea* [PRA], para lo cual reafirma la última respuesta correcta y da el cierre a esa parte de la actividad, esto permite que se pueda avanzar en la tarea y que luego de la discusión todos los estudiantes del grupo tengan una idea similar sobre lo que se está trabajando.

#### *4.1.3.3 Argumentos fragmento 3*

En este fragmento un estudiante construye un argumento, la figura no es cuadrilátero porque incumple la condición de coplanaridad, que le permite refutar la respuesta dada por otro estudiante, y a partir de la garantía que usa logra hacer que su compañero cambie de opinión, el tipo de argumento empleado es AX, un argumento axiomático porque se emplea el concepto matemático de coplanaridad.

#### *4.1.3.4 Esquema del argumento 3*

| **Datos** | **Garantía** | **Conclusión** |
|---|---|---|
|  (Imagen 8) Revisión de cada una de las condiciones para que una figura sea cuadrilátero | Desde la representación hecha de la figura se observa que el vértice M, esta fuera del plano. | No es cuadrilátero. |

#### *4.1.3.5 Relación Acción-Argumento 3*

En síntesis en este caso la acción *explicitar datos y garantías* [PEG] de reaccionar para precisar, ayudó en la consolidación de un argumento ya elaborado por un estudiante. Si bien el argumento fue suficiente para convencer a un grupo de estudiantes, el docente consideró que otros necesitaban que él concretara la idea, para poder avanzar en la solución de la tarea.

### 4.1.4 Fragmento 4: Discusión sobre la Figura 2 Tarea 1.

En este fragmento se presenta la discusión sobre la segunda figura propuesta en la Tarea 1, en la cual se esperaba que los estudiantes, con la explicación del profesor con relación a la figura 1, determinar figura era cuadrilátero o no.

| | | |
|---|---|---|
| 89 | Profesor | La vamos a hacer acá (*en el tablero*), para que los demás la vean. Esta tiene dos segmentos, o sea partes de recta. ¿Alguien tiene una escuadra que me preste? Para que nos quede lo más parecida a la de la hoja. *[el profesor dibuja la figura en el tablero, y nombras sus vértices]* |

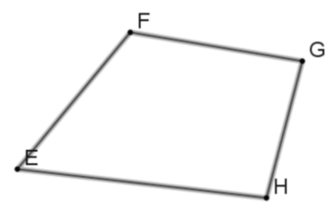



Imagen 9 Cuadrilátero # 2 propuesto en la Tarea 1

| | | |
|---|---|---|
| | | Listo, vamos a verificar si esta figura es cuadrilátero o no. […] |
| 90 | Ruiz | La primera regla dice unión de cuatro segmentos. Acá se unen, acá también, acá también, y acá también (*señalando los vértices E, F, G, H, de la figura*).<br>O sea las esquinas. |
| 91 | Profesor | ¿Y cómo se llaman las esquinas al fin? |
| 92 | Ruiz | Lados. |
| 93 | Morales | Extremos o vértices. |
| 94 | Ruiz | Segundo, los segmentos son los que se intersectan. |
| 95 | Arias | Intersecan. |
| 96 | Ruiz | Ay, pues como sea, sí. |
| 97 | Profesor | ¿Y qué es eso? |
| 98 | Ruiz | Se unen, un punto de encuentro. Luego dice ningún elemento colineales. |
| 99 | Arias | ¡Segmento! |
| 100 | Ruiz | Que, ¿qué es colineal profe? |
| 101 | Profesor | ¿Quién se acuerda que es colineal? |
| 102 | Liévano | Yo, yo, yo, que van en la misma dirección. ¡Punto profe! |
| 103 | Profesor | Correcto, que van en la misma dirección. |
| 104 | Ruiz | [dibuja unas flechas para indicar la dirección en la que se encuentra cada segmento] |

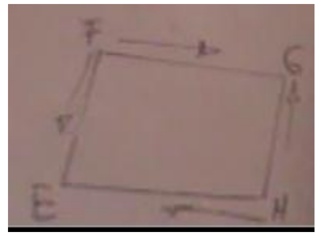



Imagen 10 Representación de dirección de uno de los estudiantes

| | | |
|---|---|---|
| 105 | Caldón | No. |
| 106 | Liévano | Caldón, dejen de pelear por todo. |
| 107 | Profesor | Caldón ¿si está de acuerdo? |
| 108 | Blanco | No. |
| 109 | Profesor | Los que no estén de acuerdo, vayan diciendo, porque la idea es que nos vaya quedando bien. |
| 110 | Bautista | No, no van en la misma dirección, porque una va bajando y la otra va subiendo. |
| 111 | Ruiz | Pero se unen. |
| 112 | Morales | Ahí está bien, ahí está bien. |
| 113 | Profesor | ¿Por qué ésta bien? |
| 114 | Morales | Porque hay dice que ningún. |
| 115 | Profesor | A bueno, porque dice que ningún par va a ser colineal. |

#### *4.1.4.1 Esquema del fragmento 4*

| **PROFESOR** | | **ESTUDIANTE** |
|---|---|---|
| *Hace la representación* del cuadrilátero [89][PD] | → | Analiza la primera proposición. Apoyado en la representación [90] |
| | ← | |
| *Exige precisión* [PEP], respecto al uso del lenguaje acordado. [91] | → | Dan la información solicitada y siguen con el análisis [92-94] |
| | ← | |
| *Exige aclaración* [PEP] sobre lo que entienden por intersección. [97] | → | Da la información solicitada, continúan con la discusión y le hace una pregunta al profesor [98-100] |
| | ← | |
| *Exige aclaración* [PEP] con respecto a qué es la colinealidad, a partir de la pregunta realizada por el estudiante. [101] | → | Dan respuesta a la pregunta. |

### *4.1.4.2 Acciones en el fragmento 4*

En el fragmento se destacan las intervenciones [91, 97, 101] en la cuales el profesor *Exige aclaración o precisión* [PEP], pues solicita a sus estudiantes el uso adecuado del lenguaje acordado en clase [91], la definición de intersección [97], y a la definición de colinealidad [101]. Esta acción *exigir aclaración o precisión* [PEP] se hace con la finalidad de generar un ambiente de discusión del cual todos los estudiantes formen parte y comprendan los términos que se trabajan. Cabe señalar que en las tres solicitudes recibe respuestas acordes con lo esperado y provenientes de los mismos estudiantes.

### *4.1.4.3 Argumentos fragmento 4*

En el fragmento se encuentran varias intervenciones de los estudiantes, pero se destacan las intervenciones [102-115]. En estas se discute sobre la idea de no colinealidad de un par de segmentos dentro de la figura dada, el profesor acepta la frase “ir en la misma dirección” como la definición de colinealidad[4], esto lleva a que uno de los estudiantes dibuje unas flechas para indicar la dirección de las mismas, y a partir de esto otro estudiante afirma que los segmentos no tenían la misma dirección. Si bien existe un error en las interpretaciones desarrolladas a partir de una definición aceptada por el profesor, el argumento hecho por el estudiante seria de tipo axiomático [AX] porque se usó un acuerdo espontaneo que haría parte del sistema teórico local y se expresa de la siguiente manera.

### *4.1.4.4 Esquema del argumento 4*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
|   (Imagen 10) En la representación hecha, las flechas indican la dirección (no se ha diferenciado entre sentido y dirección).<br>Y cada segmento tiene una dirección diferente | Definición que usan de colinealidad: “las rectas colineales van en la misma dirección”<br>(no es una definición que se trabajó en clase, sino que fue una idea espontanea del estudiante) | Los segmentos no son colineales. |

### *4.1.4.5 Relación Acción-Argumento 4*

[4] Definición de Colinealidad: Tres o más puntos son colineales si y solo si pertenecen a una misma recta

El uso de la acción *exigir aclaración o precisión* [PEP] por parte del docente permite que los estudiantes mejoren sus formas de expresarse y de esa manera tener una discusión más fructífera en términos de argumentación puesto que trae a colación elementos, propiedades o definiciones ya trabajadas. Pero se debe tener cuidado de no aceptar o proponer proposiciones falsas con el fin de que los estudiantes participen.

## 4.2 ANÁLISIS DE LA TAREA 4

El siguiente fragmento corresponde al trabajo realizado en el desarrollo de la Tarea 4 sobre el interior y el exterior de un polígono (ver Anexo 4), en la cual, a partir de la definición de diagonal, los estudiantes debían realizar una representación gráfica de lo que ilustrara la definición; es decir, se pedía que los estudiantes dibujaran las diagonales de unos cuadriláteros. Con la puesta en común de las representaciones hechas por los estudiantes se pretendía *institucionalizar el saber* [PIS] la definición de diagonal para que luego se usara en la clasificación de cuadriláteros convexos y no convexos.

### 4.2.1 Fragmento 5: Discusión sobre la definición de Diagonal Tarea 4

Durante el trabajo en pequeños grupos, uno de los estudiantes hace un aporte relacionado con la definición de diagonal, el profesor toma nota de ese aporte y en la puesta en común con toda la clase lo retoma para la discusión.

| | | |
|---|---|---|
| 372 | Profesor | Les mencionaba, que vi errores en algunos ¿Qué error vi? El error que vi en algunos trabajos, fue que hicieron esto, hicieron la diagonal y por ejemplo Hernández decía un segmento de acá a acá (*traza en el tablero el* $\overline{EF}$*, de un lado a otro lado opuesto del cuadrilátero pero cuyos extremos no son los vértices*). ¿Este es diagonal? |

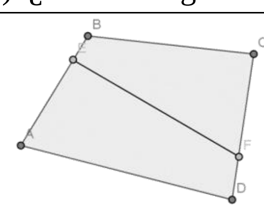



Imagen 11 Representación en el tablero de una de las figuras de los estudiantes.

| | | |
|---|---|---|
| 373 | Grupo | No. |
| 374 | Profesor | ¿Por qué no? |
| 375 | Escobar | No, porque no se unió con un segmento. |
| 376 | Liévano | Porque no tiene los vértices. |
| 377 | Bautista | Profe, porque no se unieron los vértices. |

| | | |
|---|---|---|
| 378 | Profesor | Porque se están tomando puntos, pero no los vértices. Listo, tienen que ser desde los vértices, por ejemplo en el cuadrilátero ¿cuál sería? |
| 379 | Jaramillo | Ahí sería BD y CA. |
| 380 | Ruiz | Venga profe ¿y por qué? ¿Por qué BD y CA son diagonales? |
| 381 | Profesor | Porque diagonal es un segmento que une dos vértices que no sean consecutivos, o sea, aquí tiene que ser este (*señala A*), con este (*señala C*) que está al otro lado. |

#### *4.2.1.1 Esquema del fragmento 5*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| *Retoma la intervención del estudiante* realizada en la clase anterior [PAI] y la pone en discusión [372] | | Responden a la pregunta con varias justificaciones [375-376][AP] |
| Usa la pregunta del estudiante, *aprovecha la intervención* para aclarar la definición de diagonal [PAI] [380-381] | | Un estudiante plantea una pregunta al profesor, porque parece no entender las justificaciones que sus compañeros profieren. [380] |

#### *4.2.1.2 Acción en el fragmento 5*

En el fragmento el profesor inicia *aprovechando la intervención* de un estudiante sobre la idea de diagonal [PAI] [372] (El estudiante tomó puntos que pertenecían a los lados opuestos del cuadrilátero y que no correspondían a los vértices). El profesor pone la idea del estudiante en discusión con todo el grupo [374] y para esto hace la representación del estudiantes en el tablero; los alumnos dan sus respuestas y justificaciones aludiendo a que allí se encuentra un error, porque los puntos no son los adecuados [375-379], pero uno de ellos aún no logra comprender y pregunta por el objeto que se está trabajando (la diagonal [380]), el profesor decide explicar para todo el grupo lo que se realizó en términos de la definición formal, "diagonal es un segmento que une dos vértices que no sean consecutivos" [381], con esto nuevamente *aprovecha la intervención* del estudiante [PAI] para resaltar la definición formal desde la discusión que se desarrolla.

#### *4.2.1.3 Argumentos fragmento 5*

En relación con los argumentos se encuentran tres aseveraciones, en las intervenciones [375, 376, 377], que se dan tras la interpretación hecha por uno de los estudiantes con relación a sí es o no la representación de una diagonal (ver Imagen 11), los alumnos usan la definición[5] para justificar, al afirmar que hace falta que los extremos del segmento dibujado correspondan con los vértices del cuadrilátero, pero la toman a manera perceptual [AP].

#### *4.2.1.4 Esquema del argumento 5*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
| Representación de un dibujo hecho en el punto dos de la tarea cuatro (ver Imagen 11). Conocimientos previos: segmento, extremos, vértices, y la definición de diagonal. | El segmento hecho se unió con los lados del cuadrilátero, en un lugar que no corresponde con los vértices. | No es diagonal |

#### *4.2.1.5 Relación Acción-Argumento 5*

La acción empleada por el docente permite consolidar, en este caso una definición, para que pueda ser usada como un garante, el profesor *aprovechó la intervención hecha por un estudiante* [PAI] porque parte de la idea que él tiene sobre diagonal. Esta valoración a la idea del estudiante puede incentivarlo a confiar en la forma en que construye sus argumentos, que este caso es un argumento de tipo perceptual [AP].

### 4.2.2 Fragmento 6: Socialización sobre ideas de una Diagonal Tarea 4.

El profesor está mostrando al grupo, algunas de las ideas desarrolladas por los estudiantes en el trabajo en grupo y las utiliza en la puesta en común con el pleno de la clase.

| | | |
|---|---|---|
| 372 | Profesor | Les mencionaba yo, que vi errores en algunos ¿Qué error vi? El error que vi en algunos trabajos, fue que hicieron esto, hicieron la diagonal y por ejemplo Hernández decía un segmento de acá a acá (*traza en el tablero un segmento de un lado a otro lado opuesto del cuadrilátero, pero cuyos extremos no son los vértices*). ¿Este es diagonal? |

[5] Definición de **Diagonal**: una diagonal de un cuadrilátero es un segmento con extremos en dos vértices opuestos del cuadrilátero

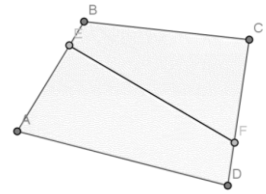



Imagen 11 Representación en el tablero de una de las figuras de los estudiantes.

| | | |
|---|---|---|
| 373 | Grupo | No. |
| 374 | Profesor | ¿Por qué no? |
| 375 | Escobar | No, porque no se unió con un segmento. |
| 376 | Liévano | Porque no tiene los vértices. |
| 377 | Bautista | Profe porque no están unidos los vértices. |
| 378 | Profesor | Porque se están tomando puntos, pero no los vértices. Listo, tienen que ser desde los vértices, por ejemplo en el otro cuadrilátero ¿cuál sería? |

#### *4.2.2.1 Esquema del fragmento 6*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| *Menciona que hay un error*, y lo reproduce en el tablero para discutir con el grupo. [372] [PDE] | | Los estudiantes presentan sus posturas [373-377] |
| *Corrige el error* [PDE] apoyado en las intervenciones de los estudiantes. [378] | | |

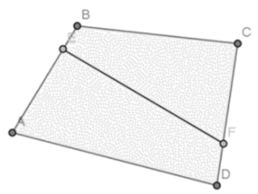
#### *4.2.2.2 Acciones en el fragmento 6*

La acción del profesor se corresponde con *declarar el error* que observó en el diagonal construida por uno de los estudiantes [PDE] [372], esto lo hace a manera de pregunta para que los demás presenten sus posturas [373-377], luego a partir de las respuestas dadas a su pregunta, el profesor *corrige el error* consolidando las ideas expuestas en la discusión [PDE].

#### *4.2.2.3 Argumentos fragmento 6*

En relación con los argumentos en este caso son formulados por el profesor, pero parte desde la identificación del error con ayuda de sus estudiantes y la discusión previa [372-378].

### *4.2.2.4 Esquema del argumento 6*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
|   Imagen 11<br>Definición de diagonal: Diagonal de un cuadrilátero es un segmento con extremos en dos vértices opuestos del cuadrilátero. | La representación hecha, tiene un segmento que une puntos del cuadrilátero, pero no los vértices. | El segmento representado en la Imagen 11, no es diagonal |

El argumento aquí desarrollado corresponde a un argumento de tipo axiomático [AX] dado que se usan los atributos de la definición de diagonal para establecer una postura con relación a la Imagen 11.

### *4.2.2.5 Relación Acción-argumento 6*

En este caso la acción *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] empleada por el profesor al corregir el error del estudiante, llevo a que fuera él quien propusiera el argumento apropiado, de esta manera la acción termino afectando directamente el proceso de argumentación, pero se considera que debió ser tratada de otra manera para desligarla de la idea del argumento por autoridad.

### **4.2.3 Fragmento 7, Diagonal para un cuadrilátero no convexo Tarea 4.**

En este fragmento se observa una discusión en torno a ideas de los estudiantes sobre un cuadrilátero que tuviera una diagonal en el exterior.

564 Profesor El compañero Laguna hizo algo así, si no estoy mal. Hizo un punto acá y unió este, con este y con este (*el punto B con el construido fuera y el C*). Y él dijo así, esta es una diagonal, porque vea, uní los dos vértices opuestos, solo que yo la saqué así,

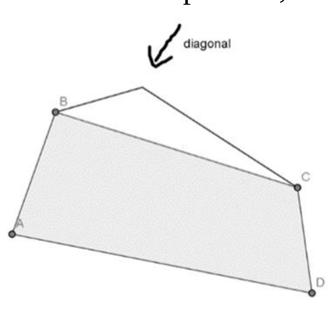



Imagen 12 Representación de diagonal hecha por un estudiante

565 Bautista Pero ya no tiene cuatro lados

| | | |
|---|---|---|
| 566 | Profesor | ¿Esto es una diagonal? (refiriéndose a los dos segmentos que unen BC). |
| 567 | Liévano | No, porque se sale de acá, [señalando la intersección de las dos diagonales] |
| 568 | Profesor | No, no necesariamente por eso. |
| 569 | Criollo | No porque tienen que estar unidos A y B |
| 570 | Hernández | No porque ya no es un cuadrilátero |
| 571 | Profesor | La diagonal es un segmento, en cambio acá tiene dos segmentos, este y este. [*Los dos segmento hechos fuera del cuadrilátero ABCD*] |

#### *4.2.3.1 Esquema del fragmento 7*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| [564] *propone la solución de un compañero para que se discuta* [PD] | | [567-570] los estudiantes plantean sus ideas |
| [571] ve que los estudiantes no logran *corregir el error* , entonces el profesor interviene y corrige [PDE] | | |

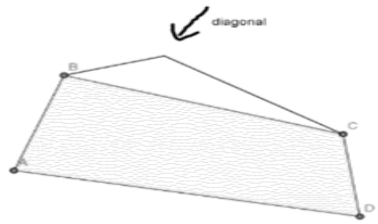
#### *4.2.3.2 Acciones en el fragmento 7*

En este fragmento siete el profesor *identifica un error* [PDE] el estudiante usa dos segmentos para representar una diagonal, pero el profesor no declara que existe ese error [564], sino que propone la discusión mostrando lo hecho por el estudiante Laguna, y nuevamente se genera una discusión [567-570], pero los estudiantes no logran identificar el error aunque manifiestan que está mal. Finalmente, el profesor *corrige el error* [PDE], aunque en esta ocasión no se apoya en lo dicho por los estudiantes [571].

#### *4.2.3.3 Argumentos fragmento 7*

En el fragmento el argumento presentado por los estudiantes recae sobre el análisis de la figura, mas no sobre la definición de diagonal. Esto hace que el argumento sea errado aunque la respuesta sea correcta, el argumento elaborado por los estudiantes se presenta a continuación. El argumento aquí elaborado corresponde a un argumento por percepción [AP]

### *4.2.3.4 Esquema del argumento 7*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
|   Imagen 12 | Los nuevos segmentos, modifican la forma de la figura. “Porque ahora ya no tiene cuatro lados” | No es una diagonal. |

### *4.2.3.5 Relación Acción-argumento 7*

En relación con la acción *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] se observa que puede ser generadora de discusión, y permite a los estudiantes ver la forma en que se puede analizar una propuesta de un compañero y debatirla (acorde con la definición de argumentación) a partir de las definiciones y hechos geométricos ya trabajados en clase. El profesor puede corregir el error pero atendiendo a no resolver los ejercicios por sí solo.

## 4.2.4 Fragmento 8, Ideas en pequeños grupos Tarea 4.

Para poder avanzar en el desarrollo de la sesión el profesor interactúa con los estudiantes en los pequeños grupos que se formaron esporádicamente, en los cuales trataban de representar un cuadrilátero en el cual una de sus diagonales tuviera puntos en el exterior.

| | | |
|---|---|---|
| 485-522 | Grupo | [El profesor ha estado pasando por los puestos observando qué han hecho los estudiantes, y a continuación pregunta para que le presenten avances de lo realizado] |
| 523 | Profesor | ¿Quién levantó la mano? |
| 524 | Laguna | Profe, mire ya |

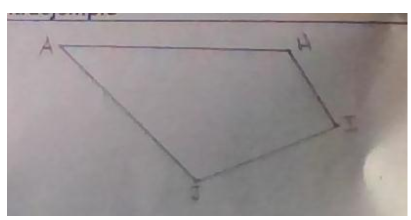


Imagen 13 Representación de cuadrilátero no convexo hecho por Laguna

| | | |
|---|---|---|
| 525 | Profesor | Pero solo el cuadro no más, (refiriéndose a que el estudiante solo dibujó un cuadrilátero en su hoja) necesitamos saber ¿si es convexo o no? |
| 526 | Laguna | Por eso, no es convexo |

| | | |
|---|---|---|
| 527 | Profesor | Bueno deje ahí ya revisamos, ¿Nadie la tiene todavía? |
| 528 | Caldón | Sí, yo |

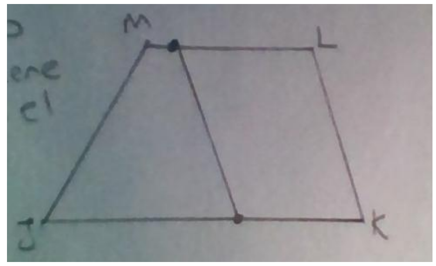



Imagen 14 Representación de cuadrilátero no convexo hecho por Caldón

| | | |
|---|---|---|
| 529 | Profesor | A ver ¿qué pasó?, ¿Ese es convexo, o no convexo? |
| 530 | Caldón | Es no convexo |
| 531 | Profesor | Y, ¿por qué no? |
| 532 | Caldón | Porque no tiene los puntos por dentro. |
| 533 | Profesor | ¿Dónde está el punto por fuera entonces? |
| 534 | Caldón | Véalo acá, [señala uno de los vértices del segmento trazado] |
| 535 | Profesor | ¿Ese está por dentro o por fuera? |
| 536 | Caldón | Por fuera |
| 537 | Profesor | ¿Por qué por fuera? |
| 538 | Liévano | Porque acá puede que esté por dentro o por fuera a la vez |
| 539 | Profesor | No, porque nosotros ya habíamos llegado a un acuerdo aquí entre todos, ¿Cuál era el acuerdo? |
| 540 | Caldón | Que estaban adentro |
| 541 | Profesor | Que estaban adentro, o sea que usted no me puede decir que está por fuera, porque ya llegamos al acuerdo que está por dentro. |
| 542 | Caldón | Aaaah, ya ya ya ya. (El profesor cambia de grupo) |

#### *4.2.4.1 Esquema del fragmento 8*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| *Profesor pregunta para informarse* [PD][PIA][PCA][523] | → | Presenta su representación [524] |
| | ↙ | |
| *Repregunta por la tarea, y aclara cuál es el objetivo* [PD][525] | → | Responde pero no justifica [526] |
| *Pregunta para enterarse de lo hecho por los estudiantes y pide la justificación* [PIA] [PEG] [527-531] | → | Responde y argumenta apoyado en lo que observa [532][AP] |
| | ↙ | |
| Pregunta *para entender lo hecho por el* | → | Responde mostrando lo que ha |

| | |
|---|---|
| *estudiante*. [PIA][533][535][537] | realizado [534][536][538] |

#### 4.2.4.2 Acciones en el fragmento 8

El profesor pasa por los grupos observando qué están realizando los estudiantes. El estudiante Laguna le presenta su idea de cuadrilátero no convexo (Imagen 13) [524], el profesor reacciona preguntando *para informarse sobre las acciones realizadas* [PIA] y le pregunta si la representación corresponde a un cuadrilátero convexo o no [525], y el estudiante responde que es un no convexo [527], el profesor decide dejar la idea para luego discutirla, y cambia de estudiante [527]. El profesor se informa sobre lo hecho por otro estudiante quien presenta su solución haciendo un cuadrilátero con un segmento que lo cruza y cuyos extremos del segmento, visualmente, están por fuera (Imagen 14), entonces el profesor, que no comprende por qué para el estudiante esa representación correspondía a una diagonal con puntos en el exterior del cuadrilátero, plantea una serie de preguntas [529][531][533][535][537], todas ellas encaminadas a *comprender la acción desarrollada por el estudiante* [PIA]. Como resultado de estas preguntas, el profesor comprende la idea del estudiante, y le recuerda cómo se debe representar, pues fue lo trabajado en clases anteriores y sobre el cual se tenía un acuerdo de grupo [539-541] finalmente, el estudiante comprende que no puede usar esa idea y el profesor cambia de grupo.

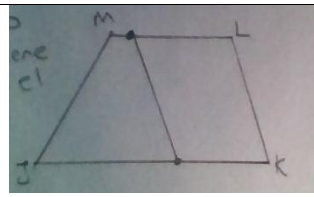
#### 4.2.4.3 Argumento del fragmento 8

Con relación a los argumentos que se encontraron en el fragmento se destaca que el estudiante Caldón elaboró uno de tipo perceptivo [AP] al mencionar que el segmento trazado por él tenía puntos por fuera, basado en que la representación de punto (punto dibujado con grosor) sobresalía del cuadrilátero propuesto. El profesor en este caso buscó llevarlo a refutar su idea usando un acuerdo grupal al que se había llegado con el grupo (los vértices se considerarían como puntos en el interior del cuadrilátero), acuerdo que hacia parte del sistema teórico local desarrollado por el grupo.

#### 4.2.4.4 Relación Acción-argumento 8

En síntesis, la acción de *indagación por parte del profesor* [PIA], sobre aquello que desarrollan los estudiantes es una fuente importante de discusión en el grupo y brinda al profesor la oportunidad de interpretar lo que un estudiante quiere plantear y no descartar de entrada las ideas propuestas por ellos. Además se observa cómo en esta situación la indagación puede propiciar espacios para guiar a los estudiantes al uso del sistema teórico local que se esté construyendo con el grupo.

#### 4.2.4.5 Esquema del argumento 8

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
| Definición de cuadrilátero convexo. (Se llama cuadrilátero convexo si sus diagonales no tienen puntos en el exterior. |  En la Imagen 14 se observa que los puntos del segmento dibujado por el estudiante son gruesos, y a consideración del estudiante desde la representación estos están se encuentran en el exterior del cuadrilátero. | El cuadrilátero es no convexo porque su diagonal tienes puntos en el exterior. (suponemos que para el estudiante ese segmento correspondía a la diagonal, o interpretó diagonal como cualquier segmento con puntos extremos en el cuadrilátero) |

## 4.3 ANÁLISIS DE LA TAREA 6

Los fragmentos que se presentan a continuación corresponden al desarrollo de la tarea 6, en esta tarea se esperaba que los estudiantes usaran las definiciones, propiedades y proposiciones de las tareas anteriores para argumentar sus ideas.

### 4.3.1 Fragmento 9: Situación 1 Tarea 6 grupo de Jaramillo.

En este fragmento se está trabajando la Situación 1, que pedía concluir si dada una figura con tres ángulos rectos, el otro ángulo también tenía que ser recto. En este caso el grupo ya tenía la respuesta, pero el profesor decide intervenir para generar dudas que encaminaran a los estudiantes a indagar y establecer los argumentos apropiados.

| | | |
|---|---|---|
| 574 | Profesor | La pregunta ahí es la siguiente: ustedes tienen el cuadrilátero $ABCD$, y les dan tres ángulos rectos. |
| 575 | Jaramillo | El $A, B\ y\ C$ . |
| 576 | Profesor | Bueno, les están preguntando cómo es el ángulo que hace falta. ¿Sería recto también? |
| 577 | Laguna | Sí, porque mire (señala en la representación hecha por ellos los ángulos del cuadrilátero), $CDA$ y $BCD$. |

Imagen 15 Representación de cuadrilátero hecha por un estudiante

| | | |
|---|---|---|
| 578 | Restrepo | Al ser los tres rectos, el otro tiene que ser recto. |
| 579 | Profesor | ¿No existe una posibilidad de qué no? |
| 580 | Jaramillo | Ah… pues (…) ¡no!, ¡no! |
| 581 | Perdomo | Ah… sí, sí, de pronto. |
| 582 | Jaramillo | no, no. |
| 583 | Perdomo | Sí, de pronto |
| 584 | Profesor | Bueno, ¿al fin sí o no?, Pónganse serios. |
| 585 | Jaramillo Y | No, no. |
| 586 | Profesor | ¿Cómo lo sabe? |
| 587 | Jaramillo Y | Porque ya intenté hacerlo. |
| 588 | Restrepo | Al ser los otros tres rectos, el otro es recto. |
| 589 | Profesor | ¿Por qué? |
| 590 | Restrepo | Porque no se puede, porque todos son rectos entonces miden 90º y obligan a que el otro tenga 90º, ¿sí? |
| 591 | Jaramillo Y | Usted sabe que sí, y ya. |
| 592 | Profesor | Pero ¿por qué? |
| 593 | Jaramillo Y | Porque sí. |
| 594 | Restrepo | Ya me confundí. |
| 595 | Profesor | Bueno yo creo que ya tienen la idea, cuádrenla y pasen al segundo punto. |

#### *4.3.1.1 Esquema del fragmento 9*

| **PROFESOR** | | **ESTUDIANTE** |
|---|---|---|
| *Explica en que consiste la tarea* propuesta [574-576][PD] | | Los estudiantes responden usando argumentos apoyados en la representación gráfica [577-578]. |
| Pregunta buscando que los estudiantes *argumenten su respuesta* a partir de una propiedad [PD][PEG][579] | | El estudiante responde en función de las medidas de los ángulos, pero aún falta argumentación. [590] |
| Pregunta por el porqué, se puede hacer esa afirmación, *buscando que los estudiantes argumenten* [592] [PD] [PEG] | | El estudiante manifiesta que se confundió. [594] |

#### *4.3.1.2 Acciones en el fragmento 9*

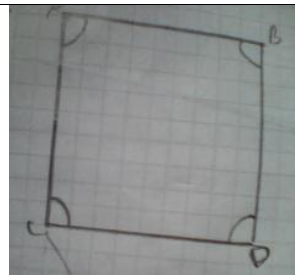
Este fragmento inicia con una explicación del docente sobre la primera parte de la tarea, para esto presentan los datos de la misma (el cuadrilátero $ABCD$ con tres ángulos rectos), y la pregunta sobre el otro ángulo (¿será recto también?) [574-576]. La respuesta de los estudiantes se basa en una representación gráfica elaborada por ellos, que les permite concluir que sí (Imagen 15). Ante dicha respuesta el profesor plantea una pregunta con la que quiere que sus estudiantes *reflexionen* y que permita que se use una propiedad que garantice que no hay otra posibilidad para la solución a la tarea "¿no existe una posibilidad de que no?" [479][PPE][PD], la pregunta lleva a que los estudiantes den respuesta diferentes, pero más importante a que duden de la veracidad de la afirmación [580-583]. La estudiante Jaramillo manifiesta que no hay otra posibilidad, y el profesor plantea la pregunta ¿Cómo lo sabe? buscando con esta pregunta que se explicitaran los datos y a que los estudiantes argumentaran [586], la estudiante responde nuevamente apoyada en un argumento de percepción [AP] y basado en ejemplos [AE] al indicar que ya intentó realizar otra figura, entonces Restrepo trata de completar la idea e introduce la medida del ángulo recto, que es 90°, y transforma la pregunta sobre el tipo de ángulos a las medida que pueden tener [590], el profesor pregunta nuevamente el porqué de dicha afirmación para seguir *dirigiendo la tarea* [PD] al argumento axiomático, pero el estudiante termina manifestando que se confundió [591-593].

#### *4.3.1.3 Argumento del fragmento 9*

En este fragmento los estudiantes plantean un argumento por percepción [AP], esto lo hacen al dar respuesta a la pregunta basados en dos representaciones gráficas que elaboran a la tarea dada. Para este caso, los estudiantes dibujan un cuadrilátero (Imagen 15), con tres ángulos rectos, y observan que el otro también es recto. El profesor busca que los estudiantes pasen del argumento por percepción [AP] a un argumento axiomático [AX] en el cual usen la Propiedad 2 de los cuadriláteros relacionada con la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero, en este caso, los estudiantes llegan a referirse a las medidas de los ángulos rectos, pero no mencionan la respectiva propiedad.

#### *4.3.1.4 Esquema del argumento 9*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Dado el cuadrilátero $ABCD$, con tres ángulos rectos<br>¿El ángulo que hace falta será recto también? | <br>Imagen 15 | Sí, porque mire, (señalan los ángulos en la representación hecha |

### *4.3.1.5 Relación Acción-argumento 9*

En síntesis, esta acción *dirigir la tarea* [PD] de dirigir la tarea con la intención de que los estudiantes indaguen puede ser usada como en este caso, para que los estudiantes se cuestionen sobre sus argumentos, pero el profesor debe dotarse de una serie de preguntas de diferente tipo y si es necesario, por ejemplo, indicar a los estudiantes la importancia de usar las propiedades ya trabajadas para que sean garantes en las conclusiones. En este fragmento la búsqueda del profesor porque los estudiantes argumentaran, por medio de la pregunta *¿por qué?*, repercutió en que un estudiante manifestara al final que se había confundido, y que el profesor ante la falta de otro tipo de preguntas, afirmara que ya tenían la idea y finalmente no se logró llegar a la construcción del argumento de tipo axiomático que se esperaba. Una posibilidad para superar dicha dificultad puede ser decirle al estudiante: ¿y no podemos usar una de las propiedades relacionadas con los cuadriláteros?

## 4.3.2 Fragmento 10: Situación 1 Tarea 6 grupo de Aura.

Se continúa el trabajo con relación la Situación 1 de la Tarea 6.

| | | |
|---|---|---|
| 602 | Profesor | Dado el cuadrilátero $ABCD$ que tiene tres ángulos de 90º, ¿Cuánto mide el otro ángulo? |
| 603 | Aura | 90º |
| 604 | Profesor | ¿Por qué? |
| 605 | Aura | Porque todos se ven iguales. porque que éste es igual a éste, y es igual a éste, (*señalando en la guía del grupo 2 los ángulos* $DCB, CBA, ADC$) |
| 606 | Profesor | ¿Por qué? |
| 607 | Aura | Porque colitas lo dice (refiriéndose a la compañera Martínez) |
| 608 | Profesor | ¿Cómo saben que están iguales? |
| 609 | Martínez | Con el compás |
| 610 | Profesor | ¿Midiendo con el compás? ¿O con el transportador? |
| 611 | Grupo 2 | Ah... sí, con el trasportador. |
| 612 | Profesor | Y lo que dice Hernández (*refiriéndose a Aura*) ¿por qué no han mirado la idea de Hernández?, porque ella dice que este es igual a este, y es |

| | | |
|---|---|---|
| | | igual a este, (*señalando en la guía del grupo 2 los ángulos* $DCB, CBA, ADC$) |
| 613 | Martínez | Es que ella no nos explica. |
| 614 | Aura | Yo solo dije que estos (*refiriéndose a los ángulos* $ADC$ *y* $ABC$) eran iguales, y a veces no sé ni lo que digo. |

### *4.3.2.1 Esquema del fragmento 10*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| *Se plantea la pregunta* de la guía [602][PD] | → | Responde sin argumento [603] |
| | ↙ | |
| *Pide una justificación* de la respuesta [604][PEG] | → | Responde apoyado en la representación gráfica, argumento por percepción [605] [AP] |
| | ↙ | |
| *Pide justificación* a partir de la teoría [606][PEG] | → | Justifica basado en la autoridad de una compañera, argumento por autoridad [AA] [607]. |
| | ↙ | |
| Plantea pregunta *pidiendo justificación* a partir de la teoría. [608] [PEG] | → | Justifican usando herramientas de medición, argumento perceptual [AP]. |
| | ↙ | |
| *Interviene para sugerir cambio de ideas* y pide que se considere otra idea diferente para solucionar [612] [PIC] | → | Interviene otra estudiante [614] |

### *4.3.2.2 Accione en el fragmento 10*

El profesor plantea la pregunta propuesta en la Situación 1 de la Tarea 6 (ver Anexo 6) [602], e inmediatamente recibe la respuesta “90°” por parte de algunos estudiantes [603]. Si bien la respuesta es correcta, el profesor decide hacer una nueva pregunta buscando que el estudiante *justifique sus respuestas* utilizando los elementos teóricos [PEG] [604] la estudiante justifica su respuesta apoyada en la representación gráfica, es decir plantea un *argumento por percepción* [AP] al mencionar que todos están iguales [605]. El profesor vuelve a hacer la misma pregunta, buscando que la estudiante *use un apoyo teórico* (*usar propiedades de los cuadriláteros*) [PEG], pero ella se apoya en un *argumento de autoridad* [AA], al mencionar que es correcto porque lo dice la compañera [607]. El profesor nuevamente pregunta con la intención de que los estudiantes elaboren un *argumento axiomático*, pero recibe nuevamente una respuesta apoyada en un *argumento de percepción* [AP]; dado que, otra estudiante garantiza la igualdad con la toma de medidas con el trasportador [611], el profesor realiza una intervención *sugiriendo cambios en la idea del grupo* [PIC][612 para esto propone que se analice la idea de otra de las compañeras del grupo la cual plantea que son iguales, y esta idea a consideración del profesor podía facilitar la solución al problema si se consideraban las medidas iguales entre los ángulos.

#### *4.3.2.3 Argumentos fragmento 10*

En este fragmento se observa una discusión en la cual los estudiantes argumentan en tres ocasiones, con dos tipos de argumentos: *argumento por autoridad* [AA] [607] y *argumento por percepción* [AP] en [605] y [609]. Al ser infructuosas las preguntas elaboradas, trata de cambiar la idea de los estudiantes para que avancen a otro tipo de argumento *usando la idea de una compañera* [PIC] la cual sí se acercaba al argumento axiomático.

#### *4.3.2.4 Esquema del argumento 10*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
| $\boxdot ABCD$ Con el ángulo A, ángulo B y ángulo C, rectos.<br><br>Conocimientos previos; ángulo recto mide 90° | Se hizo la representación, y todos se ven iguales. | El ángulo D mide 90° o es recto |
| | Lo dijo una compañera. | |
| | | |
| | (la garantía que se esperaba)<br>La propiedad dos, de los cuadriláteros, dice que la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360°<br>Y realizar los cálculos correspondientes. | |

#### *4.3.2.5 Relación Acción-Argumento 10*

En este fragmento se interpreta una clara intención del profesor en solicitar *argumentos axiomáticos* [PEG], específicamente el relacionado con la propiedad dos trabajada con los estudiantes que consistía en que la suma de las medidas de los ángulos internos de los cuadriláteros da 360°; sin embargo, las respuestas de los estudiantes están basadas en *argumento por autoridad* [AA], o *por percepción* [AP], por esto el profesor *interviene buscando un cambio en las ideas teniendo en cuenta la propuesta de una estudiante* [PIC]. Esta acción del profesor busca llevar a los estudiantes a que generen los argumentos esperados.

### 4.3.3 Fragmento 11: Situación 3 de la Tarea 6 grupo de Bautista.

Uno de los grupos solicita asesoría sobre cómo abordar la situación planteada, pero el profesor les da indicaciones por medio de preguntas buscando que ellos participen y propongan las soluciones.

| | | |
|---|---|---|
| 616 | Bautista | Profe y en este ¿cómo hacemos?, mire dice así: (*lee de la guía*) dos ángulos de un cuadrilátero convexo tienen las medidas dadas, en cada caso propón medidas para los otros dos ángulos. |
| 617 | Profesor | ¿Sí se acuerdan cuáles son los cuadriláteros convexos? |
| 618 | Bautista | Los que no tienen líneas en el exterior |
| 619 | Hernández | (Busca en su cuaderno de apuntes) |
| 620 | Profesor | O sea, ya sabemos cuáles son los cuadriláteros, y la línea, no se llama línea, se llama diagonal.<br>¿Este es convexo? (Señalando en la guía, un rectángulo hecho por el grupo cuando solucionó el ejercicio anterior) |

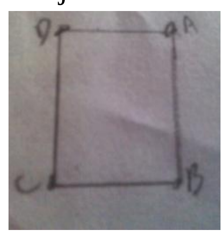



Imagen 16 Representación de cuadrilátero del grupo de estudiantes

| | | |
|---|---|---|
| 621 | Bautista | No |
| 622 | Profesor | ¿Por qué no? |
| 623 | Bautista | Porque no tiene diagonales. |
| 624 | Profesor | ¿No tiene diagonales? |
| 625 | Bautista | Bueno, sí tiene, pero no las he hecho. |
| 626 | Profesor | O sea, que este es convexo, porque si yo hago las diagonales van a quedar por dentro, listo.<br>(Da la vuelta a la guía, en esta los estudiantes tienen dibujado otro cuadrilátero). |

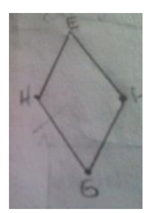



Imagen 17 Representación de rombo de los estudiantes

| | | |
|---|---|---|
| | | Entonces, las medidas que les den acá, son los ángulos, 126º y 140º, (*señala en la figura los ángulos GHE, y HEF*) la pregunta es ¿cuánto miden los otros dos? |
| 627 | Bautista | (…) 180. |

| | | |
|---|---|---|
| 628 | Profesor | ¿Por qué? |
| 629 | Bautista | Porque este mide 126, y este 180. |
| 630 | Hernández | Porque todos los cuadriláteros tienen que medir igual. |
| 631 | Profesor | ¿Tienen que medir igual? Yo creo que ella tiene una idea que puede servir, porque nosotros habíamos trabajado algo parecido, ¿recuerdan? |
| 632 | Bautista | Si un ángulo mide, si un ángulo mide más, el otro tiene que medir menos. |
| 633 | Profesor | ¿Si un ángulo mide más, el otro mide menos? ¿Por qué? |
| 634 | Bautista | Para igualar la balanza. |
| 635 | Profesor | Listo, solo les falta una cosita, ¿cuánto tiene que dar la suma? |
| 636 | Bautista | (…) 360 |
| 637 | Profesor | Eso, listo, y ¿que nos faltaría, para saber los otros dos? |
| 638 | Hernández | Sumarlos. |
| 639 | Profesor | Listo. |
| 640 | Bautista | No, no, es mejor restarlo para saber cuánto falta. |

### *4.3.3.1 Esquema del fragmento 11*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| | | Pregunta al profesor como desarrollar la tarea [616] |
| Responde con una pregunta sobre uno de los conceptos propuestos en la tarea i*ncentivando la participación* [PPP][617] | | El estudiante responde [618-619] |
| Corrige un error en la intervención del estudiante, y pregunta por un ejemplo (*propicia la participación*) [PPP][620] | | El estudiante responde, sin justificación. [612] |
| *Solicita justificación* [622][PEG] | | Provee la justificación, *(hay un error*) [623] |
| Hace una pregunta para hacer evidente el error en la justificación (*incentiva la participación y corrige el error*) [PPP][PDE] | | Aclara su intervención anterior. [625] |

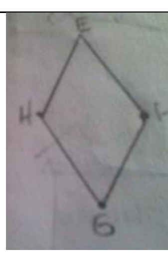
### *4.3.3.2 Acciones en el fragmento 11*

Se observa en el fragmento que tras una solicitud del estudiante [619] el profesor busca explicar la tarea a desarrollar y *pide la participación de un estudiante* [PPP] haciéndole una pregunta en relación con uno de los términos que se usan en la tarea propuesta (cuadriláteros convexos) [617]. El estudiante responde utilizando la noción que tiene de cuadrilátero convexo, pero usa el término línea para referirse a la diagonal, al mencionar que “los convexos son los que tienen líneas en el exterior” [618]. El profesor reacciona *aclarando el error* [PDE] y luego continua *propiciando la participación* [PPP], para esto toma un cuadrilátero hecho por los estudiantes para ejemplificar el tipo de cuadrilátero propuesto en la tarea [620], les pregunta si ese cuadrilátero es convexo, y tras aclarar que sí lo es, usa el cuadrilátero para replantear la tarea, es decir, en la guía solo se les daban las medidas de dos ángulos y se pedía encontrar las otras dos medidas, el profesor tomó el cuadrilátero hecho por los estudiantes, marcó los dos ángulos que les habían dado y señaló cuales eran los ángulos a los cuales les debía calcular o determinar las medidas [621-625]. Los estudiantes responden con afirmaciones [627-630] y el profesor responde rescatando la intervención de un estudiante sobre las medidas iguales, lo que permite *la participación* [PPP] [631]. Finalmente, los estudiantes logran proponer ideas clave para el desarrollo de la tarea propuesta [632-640].

#### *4.3.3.3 Argumentos fragmento 11*

En el fragmento se presentan dos casos en las cuales los estudiantes argumentan: si la figura elaborada era cuadrilátero convexo o no [620-623], y cuánto tienen que sumar los otros dos ángulos del cuadrilátero [626-640]. En ambos casos los argumentos son tipo [AC] porque se toman de manera general las justificaciones y surgen porque el profesor ha propiciado la *participación de los estudiantes* [PPP] por medio de preguntas en las que, además, pide las respectivas justificaciones.

#### *4.3.3.4 Esquema del argumento 11*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
|  (Imagen 17) Las medidas de los ángulos dados son 126º y 140º, (los ángulos GHE, y HEF) | Todos los cuadriláteros tienen que medir igual. Esa medida es 360°. (propiedad, la suma de la medida de los ángulos internos de los cuadriláteros convexos es 360°) | Teniendo dos medidas se puede hacer la suma y mirar cuánto falta. O restar las medidas dadas a 360. |

#### *4.3.3.5 Relación Acción-Argumento*

Se encuentra una interacción estudiantes-profesor en la cual el docente usa una serie de preguntas, en la que pide justificaciones, definiciones o estrategias, y en cada una de esas intervenciones del docente, se promueve que los estudiantes *participen de la discusión* [PPP] y los desarrollos del problema. Fomentar de manera continua la participación de los alumnos permite aclarar dudas, observar qué están entendiendo y aclarar las justificaciones y argumentos que se están elaborando, aunque la presentación final de los argumentos es de tipo AC, porque se toman aspectos generales de la situación.

Esta acción es una de las que más se observó en el trascurso de la aplicación de las tareas, dado que la metodología de clase del profesor, siempre propendía porque los estudiantes respondieran a una serie de preguntas que él realizaba.

### 4.3.4 Fragmento 12: Situación 3 de la Terea 6 conclusión.

Los grupos están trabajando la situación 3, que consistía en que, dadas dos medidas de los ángulos de un cuadrilátero, los estudiantes debían proponer medidas para los otros dos ángulos, y se esperaba que los estudiantes se apoyaran en la Propiedad 2 “la suma interna de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero convexo es 360°”

| | | |
|---|---|---|
| 626 | Profesor | (….) |

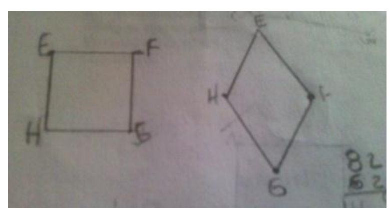


Imagen 18 Representación de cuadriláteros de los estudiantes

| | | |
|---|---|---|
| | | Entonces, las medidas que les den acá, son los ángulos, 126º y 140º, la pregunta es ¿cuánto miden los otros dos? |
| 627 | Bautista | (… …) 180. |
| 628 | Profesor | ¿Por qué? |
| 629 | Bautista | Porque este mide 126, y este 180. |
| 630 | Hernández | Porque todos los cuadriláteros tienen que medir igual. |
| 631 | Profesor | ¿Tienen que medir igual? Yo creo que ella tiene una idea que puede servir, porque nosotros habíamos trabajado algo parecido, ¿recuerdan? |
| 632 | Bautista | Si un ángulo mide, si un ángulo mide más, el otro tiene que medir menos. |
| 633 | Profesor | ¿Si un ángulo mide más, el otro mide menos? ¿Por qué? |
| 634 | Bautista | Para igualar la balanza. |
| 635 | Profesor | Listo, solo les falta una cosita, ¿cuánto tiene que dar la suma? |

| | | |
|---|---|---|
| 636 | Bautista | (Los estudiantes piensan por un momento) 360 |
| 637 | Profesor | Eso, listo, y ¿que nos faltaría, para saber los otros dos? |
| 638 | Hernández | Sumarlos. |
| 639 | Profesor | Listo. |
| 640 | Bautista | No, no, es mejor restarlo para saber cuánto falta. |

#### *4.3.4.1 Esquema del fragmento 12*

| PROFESOR | | ESTUDIANTE |
|---|---|---|
| *Propone la pregunta de la tarea* [626][PD] | → | Da respuesta. [627] |
| | ↙ | |
| *Pide justificación* [628][PEG] | → | Uno plantea una justificación con relación a los datos. Otro propone una idea que parece tener relación con la propiedad esperada [629-630] |
| | ↙ | |
| Toma la idea del estudiante y pregunta con la intención de que se *explicite la garantía* correcta [PEG] [631] | → | Plantea una idea, tratando de recordar algo trabajado antes [632] |
| | ↙ | |
| *Pide argumento* [PEG][633] | → | Plantea una idea, tratando de recordar algo trabajado antes [634] |
| | ↙ | |
| Plantea una pregunta buscando que los estudiantes den su respuesta usando la propiedad de la suma interna [635][PPR] | → | Los estudiantes responden, y expresan la propiedad no con el nombre sino con la idea global [636-638] |

#### *4.3.4.2 Acciones en el fragmento 12*

En este fragmento el profesor busca que los estudiantes expliciten los argumentos, y para esto, tras la pregunta inicial, solicita una justificación de la respuesta de un estudiante quien manifestó que uno de los ángulos restantes debía medir 180° [626-630], otro responde que los ángulos tienen que medir igual, y el profesor asume que hace referencia a la suma interna, que en una clase anterior se había trabajado, más precisamente se destacó que la suma de cualquier cuadrilátero convexo es 360°, así que *parafrasea la intervención del estudiante* [631][PPA], y pide de nuevo que se explique el porqué, el estudiante sigue tratando de establecer la relación de medida, en este caso al referirse a una idea de balanza trabajada en otra sesión de clase (donde se mencionó que las suma de las medidas de los ángulos tienen que ser 360, esto implicaba que si uno sumaba mucho, otro tendría que medir menos, para equilibrar la balanza) [634]. El profesor identifica que los estudiantes tienen alguna idea de la propiedad, así que formula una nueva pregunta relacionada con esta, en este caso ellos saben que los ángulos tenían que ser iguales a algo, "que si unos eran muy amplios entonces los otros tenían que medir menos", así que el profesor pregunta "¿Cuánto tiene que dar la suma?" que les invita a *pensar un rato* [PPE] los estudiantes inmediatamente responden que debe ser 360° y a partir de esto logran formular el argumento que se pedía.

#### *4.3.4.3 Argumento del fragmento 12*

En el fragmento el profesor identificó una idea que estaba relacionada con el uso de la propiedad que se esperaba fuera utilizada. Para esto buscó explicitar los argumentos de los estudiantes, al final los estudiantes usaron una idea de la Propiedad 1 (la suma interna de las medidas de los ángulos de los cuadriláteros convexos) esto se evidencia porque ellos determinan que sumando las medidas de los ángulos dados para completar 360°, o restando las medidas de los ángulos dados a 360° se obtendrán las medidas buscadas.

#### *4.3.4.4 Esquema del argumento 12*

| Datos | Garantía | Conclusión |
|---|---|---|
| Las medidas 180°, y 126°, dos ángulos de un cuadrilátero convexo. | La suma debe dar 360° | (se debe sumar las medidas y determinar cuánto falta para x= 360-(180+126) |

#### *4.3.4.5 Relación Acción-Argumento 12*

En síntesis, la acción de *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], está relacionada directamente con hacer justificaciones, en particular en este fragmento esta acción llevó a que los estudiantes elaboraran un argumento axiomático [AX], al tomar una de las propiedades trabajadas en tareas anteriores.

## 4.4 ACCIONES IMPLÍCITAS EN LAS TAREAS O NO EVIDENCIADAS EN LOS FRAGMENTOS ANALIZADOS

A continuación se presentan el grupo de acciones que no fueron desarrolladas por el profesor en la aplicación de las tareas o que se encuentran implícitas en el desarrollo de trabajo en general.

### 4.4.1 Diseña tareas [PDT]

Esta acción es previa a las sesiones de clase, y hace parte del marco metodológico Fase 2: actuar y observar el proceso y las consecuencias del cambio es importante recordar que para la formulación de las tareas, se buscó que estas permitieran a los estudiantes reconocer algunos conceptos que luego se debían usar como garantías de los argumentos para solucionar otras tareas, y a la vez se alternaron con diferentes disposiciones de trabajo (trabajo individual, en pequeños grupos, y socialización con toda clase) que fomentaran en la interacción entre los estudiantes, posteriormente se presentó una tarea (Tarea 6) en la cual se debía justificar.

Esta acción *diseña tareas* [PDT] se convierte en un ejercicio de autorreflexión y planeación basado en lo que se espera que el estudiante desarrolle, donde se involucran todos los elementos teóricos que se considera intervienen en el proceso de argumentación, con la intención de brindar las herramientas suficientes a los estudiantes. Esta acción de diseño de tareas que usa el profesor debe tener un carácter flexible, es decir, que debe considerar cómo en ocasiones lo planeado no se desarrolla tal y como se pensó, y por ende, sí es necesario tener la capacidad para modificarlas durante la aplicación.

En particular, en este trabajo el profesor decidió modificar las tareas de acuerdo a los tiempos empleados por los estudiantes, pero sin desarticular los elementos que se consideraban pertinentes para el sistema teórico local. La evidencia de esto es la diferencia entre los anexos 1, 2, 3, 4, 5 y los apartados de resumen de la aplicación de tareas 2, 3, 4 y 5. En estos se observa cómo en principio cada tarea fue diseñada con unos propósitos específicos, pero durante la aplicación se decidió modificar por la dinámica del grupo de estudiantes, pues utilizaron bastante tiempo para el desarrollo de la Tarea 1, pero en las tareas de identificación y clasificación avanzaran más rápido.

### 4.4.2 Proporcionar espacios de reflexión [PPE]

Si bien esta acción *proporciona espacios de reflexión* [PPE] se observó en varios fragmentos de clase se ha considerado implícita en el desarrollo de la metodología de las tareas; es decir, se partió del hecho de cambiar la metodología de clase del profesor que era de carácter magistral (el profesor daba la explicación en el tablero y en seguida se generaban espacios de prácticas de ejercicios) por una metodología que permitiera a los estudiantes tener espacios de reflexión frente a las propiedades de los objetos geométricos que se querían tratar, que se estructuraron un sistema teórico local, del cual todos fueran partícipes, y que les permitió tener herramientas para que ellos tomaran la responsabilidad de justificar sus afirmaciones.

La puesta en marcha de esta acción por parte del profesor generó en algún momento que los estudiantes manifestaran que la dinámica de la clase era algo lenta, dado que los tiempos en el desarrollo de la tarea en el ambiente de clase cambiaron es así como la primera tarea propuesta para el trabajo en clase tuvo que ser modificada y se aplicó en tres sesiones por las dinámicas de interacción que se observaron en los estudiantes.

### 4.4.3 Institucionaliza el saber [PIS]

En relación con esta acción se observa en las transcripciones que el docente no la usa, en ocasiones se hacen intervenciones para puntualizar ideas, aclarar dudas, hacer mención a los objetos geométricos que se estaban abordando, pero no se presenta un momento en el que el docente institucionalice, es decir, haciendo uso del lenguaje matemático formal y resaltando su uso para el desarrollo de actividades futuras.

Tras reflexionar porque no se usó esta acción que es tan importante para la consolidación del sistema teórico local, se concluyó que el profesor no lo consideró necesario, dado que algunas de las definiciones que se abordaron en el trabajo, fueron presentadas a los estudiantes en sus guías, por ejemplo las definiciones de: cuadrilátero, interior, exterior, y las definiciones de tipos de cuadriláteros. Pero se debe considerar que cada estudiante puede dar una interpretación a lo que está escrito, y por eso es necesario que el profesor institucionalice.

Otra situación que ocasionó que no se presentara esta acción *institucionalizar el saber* [PIS], tiene que ver con la concepción que tenía el profesor sobre Institucionalizar, para él, era dar la solución de la tarea por parte del profesor desconociendo lo hecho por los estudiantes, pero esto implica una mala interpretación de la acción de Institucionalizar, donde la idea es tomar precisamente lo dicho por los estudiantes y expresarlo de la manera matemática más adecuada, además hace parte del rol del profesor, quien como representante de la comunidad matemática en el aula de clase debe presentar los contenidos de la manera más formal posible.

### 4.4.4 Acepta material para validar [PAM]

La acción *acepta material para validar* [PAM] no se encontró en las transcripciones, entendiéndola como la validación con uso de material, u objetos del entorno para explicar alguna situación como por ejemplo mostrar la perpendicularidad de una figura aludiendo a la relación del piso y una pared. Esta acción no se desarrolló porque se pretendía que los estudiantes argumentaran con un nivel axiomático basado en el sistema teórico local, y se buscó precisamente desligarlos de la posibilidad de argumentos apoyados en materiales, aunque también es importante resaltar que se podrían considerar el uso del mismo en los dos primeros momentos de trabajo (fase individual y en pequeños grupos) para que los estudiantes exploren las relaciones y propiedades a trabajar, pero en este caso, en la fase de socialización con el pleno de la clase se tendría que pensar en la manera en que el profesor haría la transición de lo informal a lo formal.

### 4.4.5 Modela [PM]

La acción *modela* [PM] no se encuentra evidenciada en los fragmentos de clase analizados, y se considera hizo falta porque pudo ser una herramienta para el profesor, quien en el presente trabajo, usó preguntas que repetía constantemente con la intención de que los estudiantes expresaran sus argumentos (¿*Por qué*?), a las cuales los estudiantes respondían (*pues, porque sí*) sin que se diera la relevancia a los argumentos que pretendía el profesor. La acción *modela* [PM] puede ser usada por el profesor para ilustrar a los estudiantes en la forma de evaluar sus argumentos, como lo proponen Martin et al (2005) se puede hacer uso de contraejemplos para debatir una proposición, o usar diagramas para elaborar las conclusiones. Además, se mencionó en este trabajo el uso de *modela* [PM] se puede relacionar con el us*a artefactos o expresiones para ilustrar conceptos geométricos.* Que sería otra forma de ilustrar a los estudiantes y guiarlos a justificaciones diferentes al *porque sí.*

# 5 CONCLUSIONES

En este capítulo se presenta las consideraciones a las que se llegó con relación a cada uno de los objetivos propuestos, y una reflexión sobre el aprendizaje y la experiencia obtenida con el desarrollo de este estudio.

## 5.1 En relación con el diseño y aplicación de las tareas que permitan construir un sistema teórico local en geometría con estudiantes de grado octavo.

El primer objetivo planteado en este trabajo propendía por el diseño y aplicación de tareas para promover la argumentación de un grupo de estudiantes de grado octavo (Capítulo 3). En general, el diseño de las tareas se hizo a partir de una metodología propuesta desde el marco teórico, considerando que las tareas por si solas no se constituyen en actividades que desarrollen los procesos de argumentación, sino que requieren del diseño por parte del profesor. El diseño de las tareas tuvo la estructura de una pregunta abierta que permitiera a los estudiantes conformar un sistema teórico local y elaborar argumentos axiomáticos.

Luego de clasificar, modificar y diseñar las tareas acordes con las temáticas requeridas para el grado, se establecieron fases dentro de las mismas (trabajo individual, de pequeños grupos y de socialización) acordes con la propuesta de Krummheuer (1995) para generar el ambiente de argumentación en clase. Como resultado se encontró que sí aportan a un ambiente de aprendizaje encaminado a los procesos de argumentación porque brindan los espacios para que los estudiantes desarrollen sus puntos de vista y el docente entra a jugar un rol más de mediador que de transmisor de conocimientos. Cada fase se caracteriza por formas diferentes de actuar: en la fase individual, permite a los estudiantes asumir un punto de vista y/o cuestionarse sobre sus alcances y limitaciones frente a la situación planteada; en la fase de pequeños grupos, aparecen unas primeras interacciones para escuchar y ser escuchado en relación a las heurísticas de cada estudiante frente a la tarea, pero que se destaca es un proceso que los estudiantes van asimilando con el pasar de las clases; en la fase de socialización, se destaca la importancia para consolidar acuerdos o ideas, hacer precisiones, fomentar el uso adecuado del lenguaje, las propiedades y las definiciones.

## 5.2 En relación con identificar las acciones del profesor que se dan en el desarrollo de las sesiones en las cuales se aplicaron las tareas.

El segundo objetivo del trabajo era identificar las acciones del profesor que se dan en el desarrollo de las sesiones en las cuales se aplicaron las tareas. Para esto se recopilaron acciones desde el marco teórico, que luego fueron confrontadas con lo observado en las tres sesiones de clase tomadas para el análisis (Capítulo 3 y 4). Algunas acciones de autores como Ospina y Plazas (2011), Krummheuer (1995), Falsetti, et al. (2003), Sowder & Harel (1998), Martin et al. (2005), fueron modificadas para destacar aspectos particulares del proceso de argumentación como la construcción de conjeturas, atender a las fases de trabajo y destacar que las acciones podrían ser consecuencia de otros momentos de clase. Además, se determinó cuáles acciones no se fueron usadas por el profesor y se plantearon hipótesis sobre cómo estas pueden ayudar en el desarrollo del proceso de argumentación. A continuación se presentan algunas consideraciones de cada una de las acciones.

- [PDT] *Diseño de tareas*: esta acción no solo se centra en la propuesta de una serie de ejercicios, sino que se constituye en punto clave para organizar los momentos y formas de participación. Estas se deben construir en relación a un sistema teórico local que se use en la clase, y no que cada tarea sea independiente de las demás. Esta la acción no termina con la formulación de las tareas, sino que es un ejercicio continuo de reestructuración según los alcances o limitaciones que se observen en el grupo de estudiantes durante el desarrollo de la clase.
- [PPE] *Propiciar espacios de reflexión*: esta acción no solo se centra en las preguntas que se puedan dar al estudiante en clase para que analicen determinada situación, sino que puede ser concebida desde la metodología y el diseño de las tareas. Un ejemplo claro de esto es el no usar preguntas cerradas porque, cuando las respuestas o las estrategias de solución son variadas, se abre la posibilidad de un intercambio de posturas donde no solo uno tiene la razón. También cabe señalar que el espacio de reflexión no debe estar ligado al tiempo ("5 minutos de reflexión") sino al avance del estudiante ("invente una estrategia de solución").
- [PIS] *Institucionalizar el saber*: esta acción no implica dejar de lado las intervenciones hechas por los estudiantes, sino que por el contrario es el punto donde se consolidan dichas intervenciones de manera formal y permite construir un dialogó más ordenado con relación a las propiedades y hechos geométricos con todo el grupo, utilizando el lenguaje adecuado. Otro aspecto importante de *institucionalizar el saber* [PIS] es la oportunidad para recordarles a los estudiantes que determinada definición puede ser usado en tareas futuras como una garantía y así inculcar el uso de los argumentos axiomáticos en los estudiantes.
- [PM] *Modelar* y [PMA] *Aceptar material para validar*: estas acciones no se propiciaron en estas clases, pero se podrían considerar en un trabajo futuro para determinar el impacto de estas como estrategias para la exploración de soluciones de las tareas, esto con el fin de superar posibles dificultades del profesor, cuando no quiere ser él quien dé la respuesta.
- [PPA] *Parafrasear el aporte de un estudiante*: esta acción se hace importante en la medida que el profesor está tomando en cuenta las intervenciones, lo cual favorece la discusión de la clase y la participación. También se observó que ayuda a avanzar en la solución de las tareas, cuando las intervenciones son oportunas y a la vez se pueden usar para corregir errores y continuar con el trabajo.

- [PEA] *Explicar aspectos de la tarea*: esta acción puede, entre otras cosas, centrar el trabajo para que en las intervenciones que hagan los estudiantes sean las esperadas; en el caso particular de este trabajo, la explicación de aspectos de las tareas se centraban en dirigirlos para que cada solución fuera justificada. Esta explicación se puede hacer en varios momentos; por ejemplo, al proponer una tarea nueva en la clase se puede hacer lectura dirigida, y luego preguntar qué entienden de cada punto a desarrollar. Otro momento se puede dar cuando, durante en el desarrollo de la tarea, uno o varios estudiantes no comprendan alguna indicación.
- [PAI] *Aprovechar la intervención*: es una acción que puede incentivar al estudiante a confiar en la forma en que construye sus argumentos y fomentar su participación, pero se debe tener cuidado en la forma que se presenta dicha intervención, si va a ser usada para destacar un error en el procedimiento. También se observó que las intervenciones de los estudiantes pueden ser aprovechadas por el profesor para reforzar algunas propiedades o corregir la forma de comunicarse enfatizando en el uso adecuado del lenguaje matemático.
- [PIC] *Interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos*: esta es una acción bastante útil pero de cuidado; es muy útil porque puede ayudar al docente a ubicar a los estudiantes en la temática que se quiere abordar y en orientarles cuando una estrategia que desarrollaron no lleva a la solución de la situación o no avanzan; en ese caso el profesor puede intervenir y sugerir el cambio; Pero se debe tener cuidado de no estropear una solución que pueda aportar a superar una dificultad conceptual o procedimental que tengan varios estudiantes. En el caso de este trabajo en uno de los fragmentos presentados los estudiantes no estaban argumentando sus respuestas y la PIC fue usada para considerar la estrategia de otra compañera con la cual se tenía un argumento.
- [PEP] *Exige aclaración o precisión*: acción que permite, entre otras cosas, que los estudiantes mejoren sus formas de expresión y de esa manera tener una discusión más fructífera (para el caso de este trabajo en términos de argumentación) puesto que trae a colación elementos, propiedades o definiciones ya trabajadas. Como se presentó en el análisis, esta acción no revistió mayor dificultad, cuando el profesor solicitó la precisión en el uso de los términos ya trabajados los estudiantes los trajeron a colación y se corrigieron.
- [PDE] *Corregir el error*: esta acción puede ser generadora de discusión, y permite a los estudiantes ver la forma en que se puede analizar una propuesta de un compañero y debatirla a partir de las definiciones y hechos geométricos establecidos en clase.
- [PPP] *Propicia la participación de los estudiantes*: esta acción fue una de las que más se observó en el trascurso de la aplicación de las tareas. El profesor promovió que los estudiantes expresaran sus ideas y las sustentaran con argumentos. El *propiciar la participación* [PPP] se puede dar de formas muy variadas: de manera directa, al destacar una estrategia o pedirle a un estudiante que explique lo hecho para los demás; o de

manera indirecta si se toman los aportes y se presentan en el tablero para ser debatidos sin necesidad de decir el nombre del estudiante.

- [PRA] *Reaccionar para aclarar o precisar*: esta acción ayuda en la consolidación de argumentos ya elaborados por un estudiante, posibilita el avance en la solución de los demás puntos de la tarea y dinamiza el trabajo del grupo. Pero se debe tener cuidado de rescatar lo que ya estaba hecho y la precisión que se hace, esto con el fin de no caer en la dificultad mencionada al principio del trabajo de que los estudiantes justifiquen aludiendo a "es porque lo dice el profesor".
- [PEG] *Explicitar datos y garantías*: esta acción está relacionada directamente con hacer justificaciones, y se hace importante que le profesor exija que se usen hechos geométricos y definiciones ya trabajados. En el análisis de esta acción se determinó que el buscar explicitar los datos y las garantías no necesariamente implica que el profesor diga cuál es, sino que se puede valer de preguntas, refutaciones o ideas que controviertan para que los estudiantes se vean en la necesidad de explicitar la garantía y defender sus posturas.
- [PD] *Dirigir la tarea*: esta acción puede de ser usada, para que los estudiantes cuestionen sus propios argumentos, pero el profesor debe dotarse de una serie de preguntas de diferente tipo, y es necesario, indicar a los estudiantes la importancia de usar las propiedades ya trabajadas para argumentar. De esta manera el profesor da pautas que ayudan a los estudiantes a resolver la tarea.
- [PIA] *Se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes*: esta acción se evidenció en este trabajo como una estrategia del profesor quien, al indagar por los pequeños grupos de trabajo, generaba una discusión confrontando lo observado y proponiendo que se apoyara o rechazara una idea con las respectivas justificaciones. Además, la acción de *informarse* [PIA] implicaba que el profesor identificara el porqué de las respuestas dadas por los estudiantes, que en ocasiones, cuando eran erradas, aportaban en la aclaración de algunos conceptos o definiciones.
- [PCA] *Controla la aplicación de la tarea*: En las transcripciones analizadas esta acción solo se observó en una ocasión [523], con relación a la norma de levantar la mano para participar, si bien solo se evidencio en una intervención de las transcripciones se observa que tiene un impacto directo en los procesos de argumentación si se quiere apoyar o refutar una idea, porque para ello es necesario escuchar al compañero que se enfrenta a la misma situación.

Todas las acciones mencionadas pueden hacer parte de la reflexión realizada durante diseño de la tareas, para que el profesor esté preparado y pueda orientar de la mejor manera, como se observó que en este estudio el profesor no era consciente de las acciones que se debían llevar al aula de clase y en muchas ocasiones se quedó sin herramientas para orientar a los estudiante; si bien es cierto que controlar todas las variables espontáneas es imposible, también es cierto que, si el profesor conoce y maneja varias estrategias, las podrá sortear de la manera más adecuada.

## 5.3 En relación con reconocer los tipos de argumentos que usan los estudiantes para dar respuesta a las tareas propuestas.

El tercer objetivo propuesto era establecer el tipo de argumentos usados por los estudiantes al momento de dar respuesta a las tareas propuestas, los argumentos detectados fueron presentados en el Capítulo 4 bajo los subtítulos de: *argumentos y esquema de los argumentos*. En resumen, los argumentos planteados desde las ideas adaptadas de Sowder y Harel (1998), se encontró que este grupo de estudiantes usaron: *argumento transformacional* [AC], *argumento por autoridad* [AA], *argumento por percepción* [AP], *argumentos axiomáticos* [AX], siendo este último el que se quería que alcanzaran apoyados en el sistema teórico local organizado.

Al final de la aplicación, se observó que los estudiantes usaron más argumentos de tipo [AC] y [AP] y que los argumentos [AX] fueron difíciles de formular por parte de los estudiantes, incluso en la prueba final el profesor se vio en la necesidad de recordarles que todas las tareas anteriores ayudaban a la solución y los invitó a revisar los apuntes. En contraste se observa que, de los argumentos propuestos desde el marco teórico no se identificaron con este grupo de estudiantes los siguientes: *argumento por rito* [AR], *argumento por uso de símbolos* [AS] y *argumentos por uso de ejemplos* [AE].

## 5.4 En relación con describir qué relación se establece entre las acciones del profesor y el tipo de argumento que emplean los estudiantes.

En relación con el objetivo cuatro, describir la relación entre la acción empleada por el docente y el tipo de argumentos empleado por los estudiantes se encontró que con el transcurrir de las clases los estudiantes fueron mejorando sus formas de justificar, pasando de simples afirmaciones con monosílabos (si o no) a justificaciones con algún tipo de argumento. Con respecto a la Tarea 1, que se analizó en los fragmentos 1, 2, 3, 4, se identificó el uso de las acciones *explica aspectos de las tareas* [PEA], *dirigir la tarea* [PD], *proporciona espacios de reflexión* [PPE] (fragmento 1), *dirigir la tarea* [PD], *reacciona para aclarar o precisar* [PRA], *parafrasea aporte de los estudiantes* [PPA] (fragmento 2), *explica aspectos de las tareas* [PEA], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *propicia la participación* [PPP], *proporciona espacios de reflexión* [PPE] (Fragmento 3), *dirigir la tarea* [PD] y *exige aclaración o precisión* [PEP] (fragmento 4), pero en ninguno de los dos primeros fragmentos estas recibieron como respuesta inmediata algún tipo de argumento, una de las causas de esta situación fue que el profesor se apoyó en preguntas cerradas, porque su intención de explicar la tarea la abordó de esa manera. Pero, en el cierre de la Tarea, en los fragmentos 4 y 5, cuando el profesor usó acciones de tipo *propicia la participación* [PPP] *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG] y *exige aclaración o precisión* [PEP], pudo obtener tres argumentos de tipo [AC], [AP] y [AX]. Cierre que se caracterizó porque los estudiantes estaban más familiarizados con la intención y forma de desarrollar las situaciones planteadas y las preguntas allí permitieron más expresión de ideas por parte de los estudiantes.

En la Tarea 4, se analizaron los fragmentos 5, 6, 7, 8, a diferencia de la Tarea 1, se identificó que en esta cada fragmento tuvo al menos una justificación de los estudiantes enmarcada con un argumento. Las acciones empleadas fueron *aprovecha la intervención de los estudiantes* [PAI] (fragmento 5), *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] (fragmento 6), *dirigir la tarea* [PD] y *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] (Fragmento 7), *dirigir la tarea* [PD] y *se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes* [PIA] (fragmento 8). También se observó que los tres argumentos desarrollados por los estudiantes fueron de *tipo perceptivo* [AP], que está ligada al tipo de tarea propuesta en la cual la indicación era representar una diagonal.

Para finalizar en la Tarea 6, se analizaron los fragmentos 9, 10, 11, 12, las acciones usadas en esta última tarea fueron *dirigir la tarea* [PD], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG] (fragmento 9), *dirigir la tarea* [PD], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos* [PIC] (fragmento 10), *propicia la participación* [PPP], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *declara, indica explica o corrige el error* [PDE] (fragmento 11) y *dirigir la tarea* [PD], *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], [PPR] (fragmento 12), en esta tarea se evidenciaron, en las transcripciones, un total de siete argumentos (cuatro de tipo AP, dos de tipo AC, y 1 de tipo AX). En relación con esto se puede afirmar que el uso de los argumentos por parte de los estudiantes aumento considerablemente en esta última tarea, y si bien no se alcanzó a generar un gran número de argumentos de tipo AX, se debe considerar que los estudiantes no había tenido experiencia previa con relación a la argumentación.

Por otro parte, si se revisan las acciones, que en el transcurrir de las clases desencadenaron cierto tipo de argumento se encuentra que:

- *se informa sobre las acciones realizadas por los estudiantes* [PIA], *dirigir la tarea* [PD], *declara, indica explica o corrige el error* [PDE], *interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos* [PIC], fueron seguidas de intervenciones de los estudiantes en las cuales argumentaron por percepción [AP]
- *Explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *reacciona para aclarar o precisar* [PRA], *declara, indica, explica o corrige el error* [PDE], *exige aclaración o precisión* [PEP], fueron seguidas por intervenciones de los estudiantes en la cuales usaron argumentos axiomáticos [AX]
- *Propiciar la participación* [PPP], y *aprovecha la intervención de los estudiantes* [PAI], fueron seguidos de intervenciones de los estudiantes con argumentos transformacionales [AC]
- *Interviene y sugiere cambios en las ideas de los grupos* [PIC] recibió como respuesta un argumento por autoridad [AA]

- *Parafrasea un aporte de los estudiantes* [PPA], *explica aspectos de la tarea* [PEA], y *controlar la aplicación* [PCA], no repercutieron en la construcción de algún tipo de argumento.

Las acciones así vistas, tuvieron la función que se esperaba (ver cierre de Capítulo 3) en relación con su aporte a los procesos de argumentación, las únicas dos acciones que no se evidenciaron *institucionalizar el saber* [PIS] y *acepta material para validar* [PAM], son acciones que le profesor no usó, en la primera porque él tenía la concepción que Institucionalizar, era dar la respuesta a la tarea, y no el proceso de consolidación de las ideas de los estudiantes hacia un lenguaje formal y su inclusión al sistema teórico local de las ideas grupales. Y la segunda acción [PAM] no se dio porque en las tareas analizadas no se usó ningún tipo de material manipulativo. Es conclusión, se corrobora lo esperado desde la construcción de las categorías, que las acciones *exige aclaración o precisión* [PEP], *aprovecha la intervención de los estudiantes* [PAI], *institucionalizar el saber* [PIS], *declara, indica explica o corrige el error* [PDE], *diseña tareas* PDT, *reacciona para aclarar o precisar* PRA, *explicitar datos, garantías o argumentos* [PEG], *acepta material para validar* [PAM], pueden promover la argumentación de manera directa.

## 5.5 Reflexión final

El trabajo desarrollado me permitió ver un cambio en la actitud de los estudiantes, principalmente en su proceso de participación en la clase de geometría. El aula se contagió de una necesidad de mostrar lo hecho, de participar, y de compartir con los compañeros; con el pasar de las sesiones de clase se perdieron las ideas de creerle solo al compañero que "más" sabe, y de aprobar lo dicho por otro solo si el profesor apoya la idea. En parte, este cambio se dio porque ya el profesor no daba respuestas sino que hacía preguntas y los estudiantes tenían que dar la solución. Un ejemplo del cambio de actitud de los estudiantes se observó en una frase de una estudiante "yo sí sabía, que yo era muy inteligente" que a mi parecer es el reflejo de una clase que antes daba oportunidad a unos pocos y los demás se sentían relegados, perdidos y poco inteligentes en relación con la geometría y ahora brinda la oportunidad de expresarse.

Aún falta mucho por hacer en relación con el desarrollo de los procesos de argumentación de los estudiantes, aún no se logra llegar al completo uso de los argumentos axiomáticos, pero sin duda, es un primer gran paso y esto lleva a considerar mi cambio de actitud como docente. Al iniciar la Maestría tenían como objetivo adquirir habilidades para hacer actividades en matemáticas, pero con el trascurrir de los seminarios, la ayuda de la asesora y la elaboración del trabajo de grado, descubrí que el diseño de las tareas implica pensar en variables que antes no había considerado, tales como: el contexto de los estudiantes, los recursos de la institución y las competencias a desarrollar, y la forma de actuar del profesor en la clase. La clase no puede ser el profesor repitiendo lo que sabe a un grupo de estudiantes, porque el aprendizaje se gesta en la interacción con los otros, esto implica más trabajo y salir de la zona de confort.

De este trabajo de grado me queda la satisfacción de mejorar mi actuar como docente en el aula, los conocimientos profesionales que brindaron las lecturas, los espacios de formación, y la participación en los eventos de matemáticas en diferentes lugares del país y los aportes brindados por los profesores que acompañaron este proceso, en especial la asesora de trabajo de grado.

## BIBLIOGRAFÍA


Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler, N. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas,* N° 85, 75-90.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente, Universidad de los Andes.

Garuti, R., Boero, E., y Lemut, E. (1998). *Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof*. Reporte de investigación presentando en el (PME22)

Chiecher, A., y Donolo, D. (2011). Interacciones entre alumnos en aulas virtuales incidencia de distintos diseños instructivos. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación,* N° 39, 127-140.

Douek, N. (1999). *Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications*. (págs. 125-139). Recuperado de http://www.find.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Falsetti, M., Rodríguez, M., & Aragón, A. (2003). Interacciones y Aprendizaje en Matemáticas: Análisis de una Experiencia Didáctica. *Suma,* N° 42, 61-68.

Goizueta, M. (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de secundaria por parte de un grupo de profesores*. (Tesis de maestría no publicada) Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. En P. Cobb, y H. Bauersfeld *The Emergence of mathematical Meaning, Interaction in classroom cultures* (págs. 229-269). Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associative Publishers.

Mariotti, A. (2000). Proof and Proving in Mathematicas Education. En Á. Gutierrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 173-204). Netherlands: Sense Publishers.

Martin, T.S., McCrone, S.S., Bower, W., y Dindyal, J. (2005). The Interplay Of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof., *Springer, Educational Studies in Mathematics, doi: 10.1007/s10649-005-6698-0*

Ospina, Y., y Plazas, T. (2011). *Actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado*. (Trabajo de grado de maestría*)*.Universidad Pedagógica Nacional UPN, Bogotá D.C.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O., (2013). *Innovación en un Aula de Geometría de Nivel Universitario. En Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*. Samper, C. & Molina, O., Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, (págs. 11-32)

Samper, C. (2008). *Geometría*, Bogotá: Norma.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Tipos de Justificaciones de los Estudiantes. Traducción del original Types of student justifications. The mathematics Teacher, 91(8), 670-675, traducción hecha por Peery, P. y Socha, A.

Suárez, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en la educación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, N° 1, 17.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2014). *Lineamientos para las* aplicaciones *muestral y censal 2014*. Bogotá DC, Autor.

Toulmin, S. (2003). *The Uses Of The Argument*. Cambridge.

Yackel, E. (2001). Explicación, Justificación y Argumentación en Matemáticas. Pordue University Calumet.

# 6 ANEXOS.

## 6.1 ANEXO 1 TAREA 1, DEFINICIÓN DE CUADRILÁTERO

*GUÍA 1 TAREA 1*

***NOMBRE:*** ______________________________________***CURSO:***____

Lea de manera individual la definición de cuadrilátero que se presenta. Haga un listado de términos desconocidos, un listado de las condiciones o partes de la definición y grafique una figura que cumpla con las condiciones listadas.

**Definición de Cuadrilátero:** La unión de cuatro segmentos coplanares que solo se intersecan en los extremos, en la que ningún par de segmentos son colineales, y en la que cada extremo de un segmento es extremo de exactamente dos segmentos, se denomina **cuadrilátero**.

Los extremos de los segmentos son los **vértices** del cuadrilátero.

Los segmentos son los ***lados*** del cuadrilátero.

**Listado de los términos desconocidos:**

**Listado de condiciones de la definición:**

**Gráfico**

*GUÍA 2 TAREA 1*

***NOMBRE:*** _______________________________________***CURSO:***____

En grupo de 3 personas discutan lo elaborado en el primer punto, compartan interrogantes que surgieron, las condiciones listadas y las figuras graficadas, elaboren un listado en el cual se muestren los consensos del grupo, respecto a las condiciones de la definición y realicen un gráfico que muestre las condiciones.

**Listado de condiciones de la definición después del consenso:**

**Gráfico de la figura resultado del consenso**

*GUÍA 3 TAREA 1*

***NOMBRE:*** **____________________________________*CURSO:*____**

Determine cuáles de las figuras (del 1 al 8 que se encuentran al final) son cuadriláteros, para ello deben completar la tabla que se presenta a continuación. Pongan un chulo (✓) cuando la figura cumpla la condición, y una equis (×) cuando no. En los casos donde no cumpla escribir por qué creen que no lo hace.

| | **Unión de cuatro segmentos** | **Los segmentos solo se intersecan en los extremos** | **Ningún par de segmentos son coloniales** | **Los segmentos coplanares** | **Cada extremo lo es exactamente de dos segmentos** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Figura 1** | | | | | |
| **Figura 2** | | | | | |
| **Figura 3** | | | | | |
| **Figura 4** | | | | | |
| **Figura 5** | | | | | |
| **Figura 6** | | | | | |
| **Figura 7** | | | | | |
| **Figura 8** | | | | | |

*GUÍA 4 TAREA 1*

***NOMBRE:* ______________________________________*CURSO:*____**

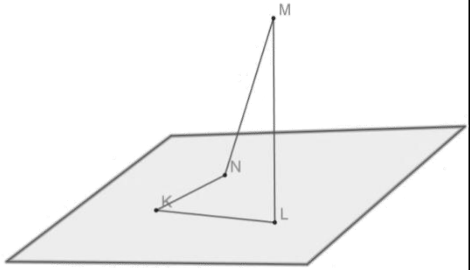



Figura 1

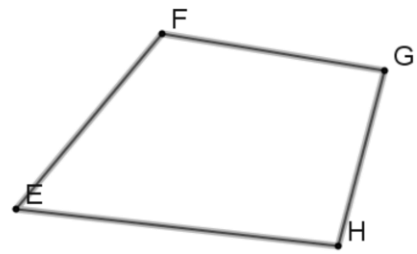



Figura 2

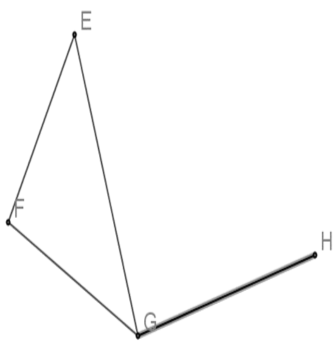



Figura 3

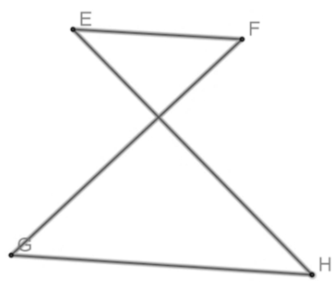



Figura 4

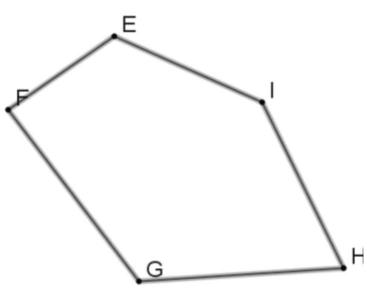



Figura 5

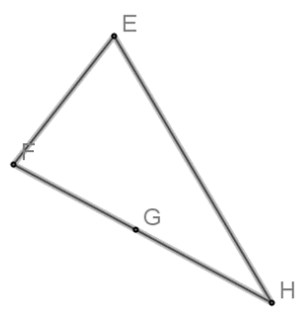



Figura 6

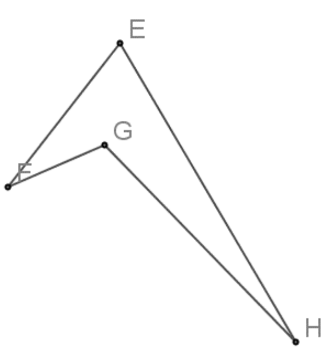



Figura 7

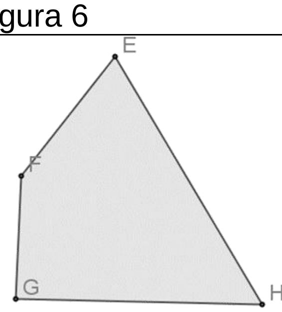



Figura 8

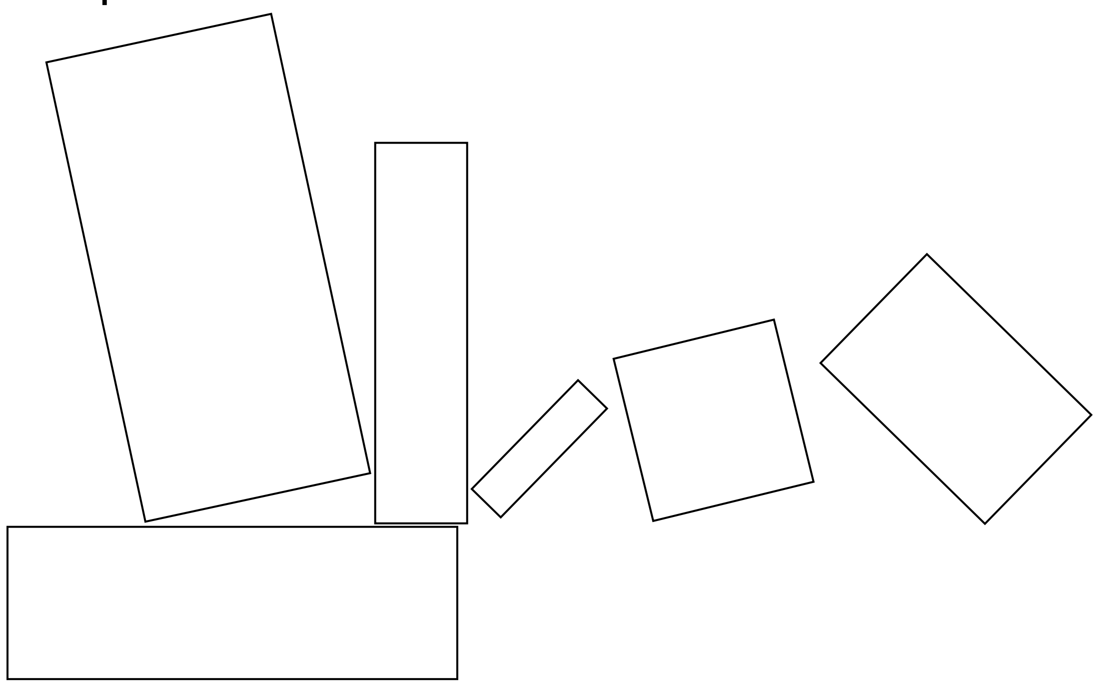
## 6.2 ANEXO 2 TAREA 2 CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

*GUÍA 1 TAREA 2*

***NOMBRE:*** _____________________________________________ _***CURSO:***____

A continuación se presenta un grupo de figuras que tienen una o más características en común.

**Grupo número 1**



Escriba una lista de la característica o las características comunes de las figuras del grupo

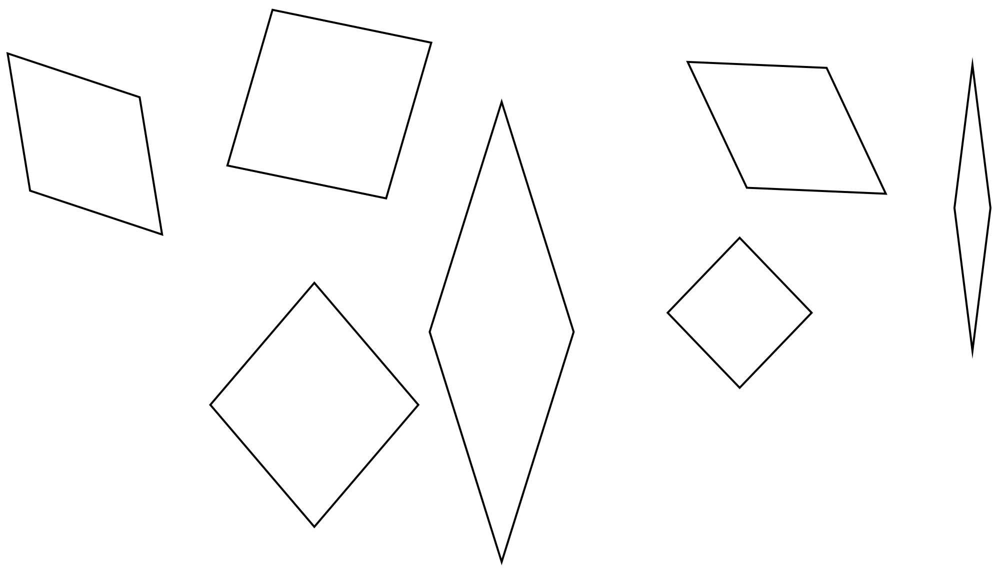
Escriba una definición de la figura anterior, de tal forma que alguien que no haya visto esa figura pueda dibujarla, solo con su definición.

*GUÍA 2 TAREA 2*

***NOMBRE:*** ______________________________________________***CURSO:***____

A continuación se presentan un grupo de figuras que tienen varias características en común.

**Grupo número 2**



Escriba cuáles son esas características que las hacen pertenecer a ese grupo:

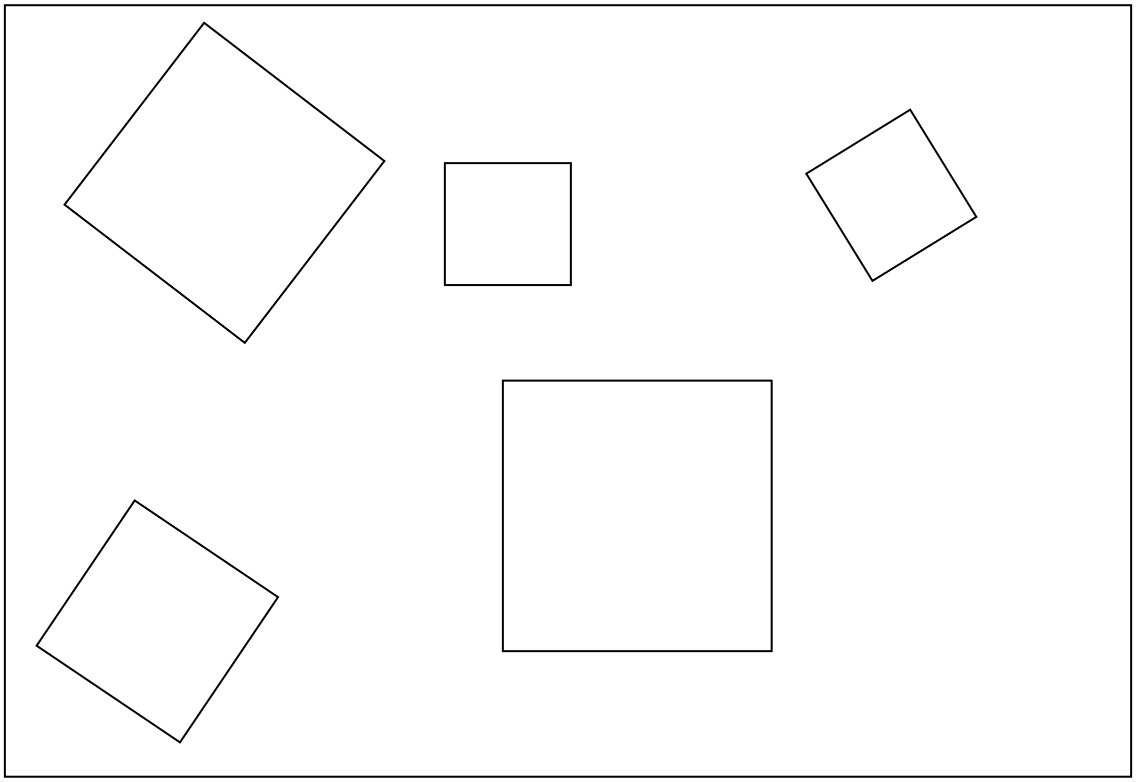
Invente una definición, tal que, si se le dice a una persona, que no haya visto las figuras, esa persona pueda dibujar una que pertenezca al grupo 2.

*GUÍA 3 TAREA 2*

***NOMBRE:*** ___________________________________________ _***CURSO:***____

A continuación se presentan un grupo de figuras que tienen varias características en común.

**Grupo número 3**



Escriba cuáles son esas características que las hacen pertenecer a ese grupo:

Invente una definición, tal que, si se le dice a una persona, que no haya visto las figuras, pueda dibujar una que pertenezca al grupo 3.

## 6.3 ANEXO 3 TAREA 3 CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS Y OTRAS DEFINICIONES

***NOMBRE:*** _______________________________________***CURSO:***____

Dadas las definiciones, grafique un ejemplo y dos contraejemplos diferentes para cada una, en los contraejemplos explique por qué no cumple la definición.

**D. Paralelogramo: cuadrilátero de dos pares de lados opuestos paralelos**

| Ejemplo | Contraejemplos |
|---|---|
| | |

**D. Trapecio: cuadrilátero con únicamente dos lados opuestos paralelos**

| Ejemplo | Contraejemplos |
|---|---|
| | |

**D. cometas: cuadrilátero en el cual cada lado tiene un lado adyacente congruente y cada par de lados opuesto no congruentes.**

| Ejemplo | Contraejemplos |
|---|---|
| | |

## 6.4 ANEXO 4 TAREA 4 INTERIOR Y EXTERIOR

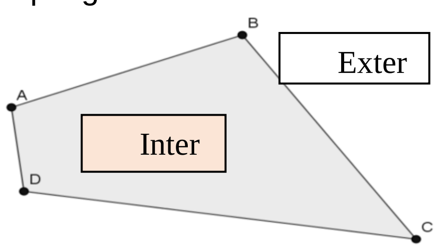
***NOMBRE:*** __________________________________________***CURSO:***____

A continuación se presenta la definición de **diagonal**, con esta definición elabora en la casilla de "ejemplo" una representación gráfica donde se muestre que significa dicha palabra y en la casilla "contraejemplo" hacer una representación gráfica que muestre que NO ES una diagonal.

**Diagonal**: una diagonal de un cuadrilátero es un segmento con extremos en dos vértices opuestos del cuadrilátero.

| **Ejemplo** | **Contraejemplo** |
|---|---|
| | |

A Los cuadriláteros también podemos clasificarlos de acuerdo a una característica que trabajaremos a continuación. Pero antes recuerda ¿qué es el interior y el exterior de un polígono?




El Interior de un cuadrilátero ABCD es la región sombreada. A la parte no sombreada se le llama exterior

**Cuadriláteros convexos:** Se llaman cuadriláteros convexos si las **diagonales** no tienen puntos en el exterior.

Has la representación gráfica de un cuadrilátero convexo y uno no convexo. Explica tu representación.

| Convexo | No convexo |
|---|---|
| | |

## 6.5 ANEXO 5 TAREA 5 PROPIEDADES DE ÁNGULOS Y LADOS DE LOS CUADRILÁTEROS

***NOMBRE:* ________________________________________*CURSO:*____**

Una propiedad es una condición que cumplen todos los elementos de un conjunto dado, a continuación se presenta un grupo de cuadriláteros que serán analizados, presta atención al ejemplo que realiza el profesor.

Sigue las siguientes indicaciones:

A cada grupo se le hará entrega de dos cuadriláteros. Corta los cuadriláteros por la línea punteada.

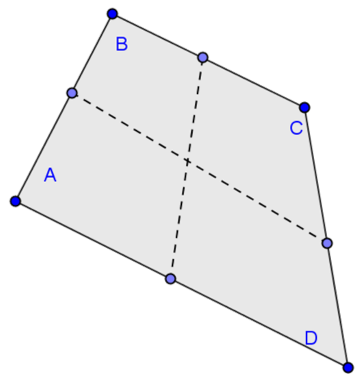
Une nuevamente las partes recortadas, pero de tal forma que uno de los lados de los ángulos marcados coincida entre sí (como en el ejemplo del triángulo realizado por el profesor).

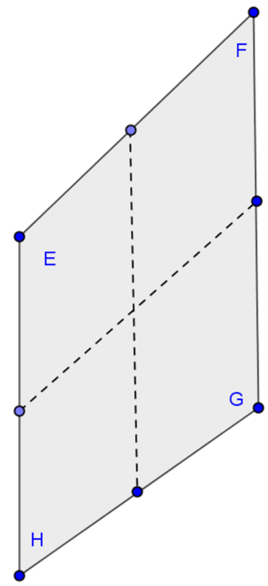
Elabora una conclusión de lo que observas, en la cual expliques qué sucede con los ángulos. EXPLICA TU RESPUESTA.

| |
|---|
| EN ESTE ESPACIO PEGAR DE LA FORMA INDICADA LOS CUADRILÁTEROS RECORTADOS |
| |
| ESCRIBE EN ESTE ESPACIO TU CONCLUSIÓN: |

GUÍA 2 PROPIEDAD 2 DE LOS CUADRILÁTEROS

CUADRILÁTEROS PARA RECORTAR Y PEGAR EN LA GUÍA ANTERIOR



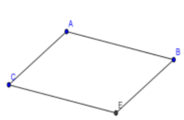



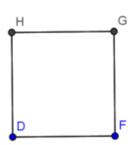

***NOMBRE:*** __________________________________________***CURSO:***_____

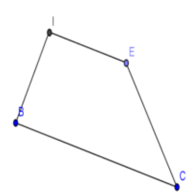
A continuación se presentan tres cuadriláteros:

- elige cual va a ser el lado uno, dos, tres y cuatro de cada uno de ellos.
- luego escribe en la tabla las medidas de cada uno de los lados.
- has la suma de tres lados que escojas.
- compáralos para mirar la relación del resultado de la suma con el lado que no usaste

¿QUÉ PUEDEN CONCLUIR DE LA ÚLTIMA COLUMNA?





| CUADRILÁTERO | Medida del LADO 1 | Medida LADO 2 | Medida LADO 3 | Medida LADO 4 | Suma de tres lados | RELACIÓN >, <, = |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

## 6.6 ANEXO 6 TAREA 6 TAREA FINAL

***NOMBRE:*** ________________________________________***CURSO:***____

TAREA 6, A cerca de los cuadriláteros

A continuación se presentan cinco situaciones sobre cuadriláteros, encuentra posibles soluciones y realiza una explicación de tu respuesta de acuerdo a lo trabajado en las clases de geometría.

Paso 1: escribe todas las ideas que surgen para dar solución a la situación

Paso 2: Discute con tus compañeros las soluciones de cada uno y encuentren la más adecuada.

Paso 3: Escriban la solución y escriban la explicación de la misma.

Situaciones:

1) Dado $\boxdot ABCD$ con el ángulo A, ángulo B y ángulo C rectos ¿El ángulo D es recto? Grafique si es posible.
2) Se tiene el cuadrilátero DEFG con todos sus lados de igual medida ¿Es el cuadrilátero DEFG un cuadrado?
3) Dos ángulos de un cuadrilátero convexo tiene las medidas dadas. En cada caso, propón medidas para los otros dos ángulos:

126° y 140°
100° y 58°
90 y 85°
66° y 159°

4) Dadas las siguientes medidas de segmentos; 10 cm, 3 cm, 2 cm y 4 cm, ¿se puede construir un cuadrilátero? Explica tus repuestas.
5) Llamamos **CUADRI** a un tipo especial de cuadrilátero, que cumple la condición: “cada lado tiene exactamente un lado adyacente de igual medida y ningún par de lados opuestos tiene igual medida”. Dibuja a partir de la condición 3 **CUADRIS** diferentes.