

**RAZONAMIENTO BAYESIANO: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON
ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL COLEGIO GRANCOLOMBIANO
I.E.D**

KAREN YISSED TORRES MONDRAGÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.

2016

**RAZONAMIENTO BAYESIANO: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON
ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL COLEGIO GRANCOLOMBIANO
I.E.D**

KAREN YISSED TORRES MONDRAGÓN

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática

Asesor

FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Mg. en Estadística Universidad Nacional de Colombia

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.

2016

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

A Dios y a la vida que me permiten esforzarme día a día por lograr con perseverancia las metas que me he trazado. A las personas que siempre me han acompañado en este proceso académico y que me han promovido con amor y sinceridad su apoyo incondicional

Hermanas, mamá, sobrinos, amigos, Andrés y profesores que hicieron parte de este proceso y de mi vida académica.... Muchas Gracias

*“el hombre no es que sea un bayesiano conservador sino que no es bayesiano en absoluto”
(Alonso y Tabua, 2002 p. 46)*



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *Razonamiento bayesiano: un experimento de enseñanza con estudiantes de grado séptimo del Colegio Grancolombiano I.E.D* presentado por la estudiante:

Karen Yissed Torres Mondragon
Cód. 2015185018, CC. 1030580974

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 44 puntos.

Observaciones: Los jurados recomiendan otorgar distinción meritoria.

En constancia se firma a los 28 días del mes de noviembre de 2016.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor:

Felipe Fernández
FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Jurados:

Profesor:

Ady Salcedo
ADY SALCEDO (VENEZUELA)

Profesor:

Benjamín Sarmiento Lugo
BENJAMIN SARMIENTO LUGO (UPN)

RESUMEN ANALÍTICO DE EDUCACIÓN-RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Accedo al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca central
Título de documento	Razonamiento Bayesiano: Un experimento de enseñanza con estudiantes de grado séptimo del colegio Grancolombiano I.E.D.
Autor (es)	Karen Yissed Torres Mondragón
Director	Felipe Fernández Hernández
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Razonamiento Bayesiano, Experimentos de enseñanza, concepciones de la probabilidad, representaciones gráficas, falacias y sesgos.
2. Descripción	
<p>Este estudio es generado a partir de un experimento de enseñanza, para promover el Razonamiento Bayesiano, la propuesta se trabaja bajo las fases propuestas por Molina, Castro, Molina y Castro (2011). Bajo esta metodología se pretende dar respuesta a la pregunta ¿Cómo se puede promover el Razonamiento Bayesiano en los estudiantes de grado séptimo del colegio Grancolombiano I.E.D, en su proyecto 40x40, y que a su vez suscite el desarrollo de cultura estadística?, que se pretende responder a partir del estudio de investigaciones relacionadas con el campo, en las que se toman en cuenta aspectos fundamentales desde la teoría para ser accesible a los estudiantes en un nivel escolar.</p>	
3. Fuentes	
<p>Se consultan fuentes bibliográficas desde tres perspectivas:</p> <p>Experimentos de enseñanza: Molina, Castro, Molina y Castro (2011), Álvarez, I. y Montoya D. (2011) y Méndez, M. y Valero, N. (2014)</p> <p>Aplicaciones en el aula del Teorema de Bayes: Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006), Díaz, C. (2007), Blanco, H. (2006), León, N. (2008), Lopes, J. M. (2013) y Parra V. y Torres K. (2013)</p> <p>Sugerencias y sesgos en la aplicación del Teorema de Bayes: Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995). Yáñez, G. (2001), Lonjedo, M.A. y Huerta, P. (2005) y Yáñez, G., Rátiva, A., y Lozano, D. (2012),</p>	
4. Contenidos	

Inicialmente, se presenta el planteamiento del problema desde un estudio empírico, luego se enuncian las preguntas de indagación que orientan la consolidación y desarrollo de la propuesta, y se justifica la importancia del objeto de estudio a través de la revisión de antecedentes provenientes de investigaciones en Educación Estadística y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006), esto lleva al planteamiento del objetivo general y los objetivos específicos de este estudio.

Acto seguido, se establece el marco de referencia en lo que refiere a la perspectiva Bayesiana, y se muestra además el marco de referencia metodológico sustentado en las fases que hacen parte del experimento de enseñanza propuestas por Molina, et al (2011).

A continuación, se presenta el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de un experimento de enseñanza, a través de la descripción de las acciones seguidas en las fases de preparación, experimentación y análisis preliminar, y análisis retrospectivo del mismo. En la fase de preparación del experimento se presenta el contexto educativo y el institucional en donde se desarrolla la propuesta. Además, dado que esta fase se tiene en cuenta las sugerencias de Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995). Yáñez, G. (2001), Lonjedo, M.A. y Huerta, P. (2005) y Yáñez, G., Rátiva, A., y Lozano, D. (2012), en cuanto a sugerencias para que esta temática sea llevada al aula. En segunda instancia, en la fase de experimentación y análisis preliminar se describe, sesión a sesión, el desarrollo y análisis de las mismas. Por último, en la fase del análisis retrospectivo se profundiza sobre lo ocurrido durante la intervención en el aula, presentando una opción susceptible a mejorar para promover el Razonamiento Bayesiano en básica primaria y se presentan los posibles ajustes o sugerencias que se hacen al diseño presentado en fases anteriores.

Este reporte termina dando a conocer las conclusiones que se derivan del desarrollo del estudio, se inicia la exposición de las mismas atendiendo a la consecución de los objetivos específicos y describiendo paralelamente los aportes de este trabajo a la Educación Estocástica.

5. Metodología

Se hace uso del Experimento de Enseñanza dentro de la metodología de diseño. Para llevar a cabo esta propuesta se trabaja en las fases del experimento de enseñanza propuestas por Molina, et al (2011) en las cuales se distinguen: preparación del experimento, experimentación, y ejecución del análisis retrospectivo de la información recogida.

Como parte del desarrollo de la primera fase se realizan acciones entre las que se destacan: i) evaluar el conocimiento inicial de los estudiantes ii) realizar un análisis de de instrucción referido a dicho objeto estadístico; y iii) diseñar la recogida de datos.

En la fase de experimentación se siguieron tres pasos: 1) diseño y formulación de hipótesis y secuencia de tareas; 2) intervención en el aula y recogida de datos; y 3) análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis.

Por último, en la fase de análisis retrospectivo se realiza el análisis a partir de la recolección y organización de toda la información que se obtiene durante la intervención, para establecer el progreso de los estudiantes al comparar lo que se predice en la trayectoria hipotética formulada con lo que sucede en la práctica en el aula.

6. Conclusiones

A partir del proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis del experimento de enseñanza desarrollado, se logra concluir que:

1. Es posible acercar a los estudiantes de grado séptimo a situaciones probabilísticas que involucran Razonamiento Bayesiano. Contemplando la transformación de problemas de tipo bayesiano en términos de situaciones expresados en lenguaje cotidiano que hacen uso de: frecuencias naturales, representaciones tabulares, diagramas de Venn, y simulaciones de experiencias aleatorias.

2. Se puede evidenciar los planteamientos de León (2008) los estudiantes se desenvolvieron en situaciones donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condiciona las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá de tomarse decisiones, en esencia utilizaron el Razonamiento Bayesiano...” (p. 215). Considerando las actuaciones de los estudiantes en términos de las acciones registradas tanto verbales como escritas, y evidenciadas por la docente, se muestra que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un nivel [RB1] el cual se puede considerar básico donde comunican información estadística utilizando información a priori disponible, transformándola con un procedimiento matemático y obteniendo una información posteriori. Presentándose un avance en algunos estudiantes de nivel [RB3] donde además de realizar lo anteriormente descrito, en sus opiniones o argumentos adicionan información de acuerdo a los datos con los que se trabajaron (información a priori y posteriori).

3. Se puede afirmar que los Experimentos de Enseñanza permitió que este estudio se valiera de un proceso cíclico al requerir que el diseño, puesta en práctica y análisis fuera revisado de forma reiterativa, conjugando de forma cíclica el análisis del proceso de aprendizaje y el análisis de los elementos del diseño instruccional (Molina, et al, 2011). Frente al diseño, la secuencia de tareas a proponer debe estar enfocada a que el estudiante, en cada una de las situaciones presentadas, debían potencializar y promover el Razonamiento Bayesiano desde los fundamentos conceptuales de dicha concepción de la probabilidad. Así mismo, la secuencia debe ser pensada en pro de que las dificultades sean abordadas de manera paulatina y al mismo tiempo de forma acumulativa.

4. Respecto a los avances respecto a la cultura estadística, se puede afirmar que los estudiantes que asistieron de manera constante a las sesiones, en su totalidad interpretan información estadística proveniente de algún medio de comunicación o de algún contexto; unos avanzaron en comunicarla y una mayoría de estudiantes opinan con información estadística para argumentar. Es difícil evidenciar si efectivamente hay evaluación crítica de la información por parte de los estudiantes; por ende, este aspecto se dejará como un aspecto a mejorar.

5. Se da evidencia de la posibilidad de incluir el proceso Bayesiano en nivel escolar y centrándolo en la población donde se aplicó este experimento de enseñanza, como proyección, se pretende presentar un informe detallado del proyecto a las directivas del colegio, donde se contemplen las ventajas, dificultades y oportunidades que se tiene para poder plantear una electiva de probabilidad para los estudiantes que asisten a la contrajornada.

Los aportes de este estudio descritos anteriormente pueden ser útiles tanto para la enseñanza como para la investigación en Educación Estocástica, en términos de que la

secuencia de tareas, la descripción, objetivos de aprendizaje, capacidades, dificultades y errores, sobre el Razonamiento Bayesiano, constituye información relevante para el formador en Educación Estocástica.

Elaborado por	Karen Yissed Torres Mondragón		
Revisado por	Felipe Fernández Hernández		
Fecha elaboración del resumen	30	09	2016

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	17
1.1 DESCRIPCIÓN	17
1.2 FORMULACIÓN	22
1.3 ANTECEDENTES	22
2 JUSTIFICACIÓN	30
3 OBJETIVOS	32
3.1 OBJETIVO GENERAL.....	32
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	32
4 MARCO REFERENCIAL	33
4.1 PERSPECTIVA BAYESIANA	33
4.1.1 Probabilidad Condicional y Probabilidad Bayesiana	36
4.2 APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA	44
4.3 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	47
4.3.1 Representación Tabular.....	49
4.3.2 Representación Diagrama de Venn	50
4.3.3 Representación Diagrama de Árbol	50
4.3.4 Tecnología.....	51
4.4 ASPECTO CURRICULAR	52
5 MARCO METODOLÓGICO	54
5.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN	54
5.2 EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA	55
5.3 PROPUESTA DE INTERVENCIÓN	57
5.3.1. Población y contexto institucional	57
6 DESARROLLO DEL PROYECTO	62
6.1FASE DE DISEÑO Y PLANEACIÓN	62
6.2.1 Tarea 1“Qué dicen los datos”	62
6.2.2 Tarea 2 “Jugando con los dados”	66
6.2.3 Tarea 3 “Interpretando información”	73

7	ANÁLISIS PRELIMINAR.....	78
7.1	DESARROLLO DE LA INTERVENCIÓN.....	78
7.1.1	Sesión 1 “Qué dicen los datos”	79
7.1.2	Sesión 2 “Jugando con los datos”.....	85
7.1.3	Sesión 3 “Interpretando los datos”	99
8	ANÁLISIS RETROSPECTIVO	110
8.1	SOBRE EL RAZONAMIENTO BAYESIANO	110
8.2	PROCESO DE LOS ESTUDIANTES	115
8.3	HIPÓTESIS DE APRENDIZAJE	117
	CONCLUSIONES	119
	BIBLIOGRAFÍA	126
	ANEXOS	130

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Estándares básicos de competencias en matemáticas 2006- 2015	20
Tabla 2: Probabilidad desde la concepción clásica	35
Tabla 3: Probabilidad bajo la concepción frecuentista.....	35
Tabla 4: Probabilidad bajo la concepción Subjetiva	36
Tabla 5: Problema de índole Bayesiano, bajo las concepciones de la probabilidad	39
Tabla 6: Verosimilitudes	40
Tabla 7: Solución problema Bayesiano bajo las concepciones de la probabilidad	40
Tabla 8: Falacias y sesgos en la probabilidad condicional.....	44
Tabla 9: Representación Tabular de un problema Bayesiano	50
Tabla 10: Estándares básicos de competencias en matemáticas en el currículo 40 X 40.....	53
Tabla 11: Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.....	60
Tabla 12: Categorías y subcategorías de la herramienta analítica.....	61
Tabla 13: Representación Tabular, Actividad 1	64
Tabla 14: Simulación del juego de dados en Excel.....	69
Tabla 15: Recuento de la simulación del juego de dados para 20 replicaciones.....	69
Tabla 16: Representación tabular asociada a la actividad del juego de dados	69
Tabla 17: Tabla sugerida para la organización de datos del juego.....	72
Tabla 18: Nacionalidad de los jugadores.....	74
Tabla 19: Asistencia de estudiantes.....	79
Tabla 20: Categorías Emergentes, Actividad 1	80
Tabla 21: Análisis razonamiento a priori, Actividad 1.....	81
Tabla 22: Análisis Razonamiento Bayesiano, Actividad 1	83
Tabla 23: Sugerencia para la organización de los datos recogidos	86
Tabla 24: Categorías Emergentes, Actividad 2	87
Tabla 25: Análisis de información a priori, Actividad 2	88
Tabla 26: Análisis de información a priori, Actividad 2.....	89
Tabla 27: Sugerencia tabular, organización del puntaje en los 20 lanzamientos	90
Tabla 28: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad condicional	93
Tabla 29: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad marginal.....	94
Tabla 30: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad marginal.....	95
Tabla 31: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori.....	96
Tabla 32: Análisis del Razonamiento Bayesiano	97
Tabla 33: Análisis del Razonamiento Bayesiano	97
Tabla 34: Categorías Emergentes, Actividad 3	101
Tabla 35: Análisis sobre las particiones generadas	103
Tabla 36: Análisis sobre las intersecciones generadas	103
Tabla 37: Análisis sobre el cálculo de la evidencia.....	103
Tabla 38: Análisis del cálculo de la condicionalidad	104
Tabla 39: Análisis de la probabilidad conjunta	105

Tabla 40: Análisis cálculo de la verosimilitud	106
Tabla 41: Análisis cálculo de la probabilidad a posteriori	106
Tabla 42: Análisis del Razonamiento Bayesiano y Cultura Estadística (a)	107
Tabla 43: Análisis del Razonamiento Bayesiano y Cultura Estadística (b)	108
Tabla 44: Categorización Herramienta Analítica, Actividad 1	111
Tabla 45: Categorización Herramienta Analítica, Actividad 2	112
Tabla 46: Categorización Herramienta Analítica, Actividad 3	113
Tabla 47: Compilado Razonamiento Bayesiano en las tres sesiones	113

GRÁFICAS.

Gráfica 1: Representación del diagrama de Venn de un problema de índole Bayesiano	50
Gráfica 2: Representación del diagrama de árbol para los problemas de índole Bayesiano	51
Gráfico 3: Proceso del Experimento de Enseñanza, adaptado de (Álvarez y Montoya 2011	57
Gráfico 4: Diagrama de Venn, asociado a la Actividad 1	65
Gráfico 5: Representación diagrama de Venn: los europeos los más suertudos, tomado de: http://babb.telegraph.co.uk/2014/07/world-cup-goals-in-a-venn-diagram/	74
Gráfico 6: Proceso matemático realizado por los estudiantes para el cálculo de la probabilidad	82
Gráfico 7: Explicación actividad juego de dados	85
Gráfico 8: Registro tabular de los puntajes obtenidos en los 20 lanzamientos	91
Gráfico 9: Ejemplificación de los datos recolectados en el juego	92
Gráfico 10: Ubicación de nacionalidad en el Diagrama de Venn	101
Gráfico 11: Falacia tasa base	104
Gráfico 12: Desempeño de los estudiantes frente al Razonamiento Bayesiano.....	113
Gráfico 13: Razonamiento Bayesiano E11, Actividad 1	115
Gráfico 14: Razonamiento Bayesiano E11, Actividad 2	116
Gráfico 15: Razonamiento Bayesiano E11, Actividad 3	116
Gráfico 16: Razonamiento Bayesiano E20, Actividad 1	116
Gráfico 17: Razonamiento Bayesiano E20, Actividad 3	116
Gráfico 18: Razonamiento Bayesiano E22, Actividad 2	117

ANEXOS.

Anexo 1: Plan de estudios Matemáticas por ciclo [PEC-CG].....	129
Anexo 2: Análisis fuentes empíricas (Prueba diagnóstica)	133
Anexo 3: Análisis fuentes empíricas (Entrevista líder de matemáticas)	138

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo se presenta como requisito para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional y se enmarca dentro de la línea de investigación en Educación Estadística de la Maestría en Docencia de la Matemática. El trabajo pretende indagar acerca de cómo propiciar el Razonamiento Bayesiano utilizando elementos de la probabilidad Bayesiana para suscitar el desarrollo de cultura estadística en estudiantes de grado séptimo. La pertinencia de este objetivo obedece a las limitaciones que se han detectado desde varios reportes de investigación a nivel local e internacional sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad Bayesiana, por lo que este trabajo pretende utilizar los fundamentos de la concepción bayesiana para propiciar en los estudiantes rudimentos para enfrentarse a situaciones probabilísticas, al tiempo que presenta una reflexión acerca de la evolución del propio conocimiento desde el doble papel de docente e investigador de lo que se planifica para, y acontece en, el aula de clase.. Esta doble actuación se enmarca dentro de la metodología de los experimentos de enseñanza, de la cual se muestra no sólo su pertinencia al intentar acercar referentes teóricos acerca de la probabilidad Bayesiana con la propia práctica docente y proponer hipótesis y posibles gestiones de aula sobre esta temática, sino también atendiendo a restricciones de tiempo y equipo acompañante, que irremediablemente limitan el alcance de algunas recomendaciones que son sugeridas desde este enfoque metodológico, sino también las restricciones de tiempo, equipo acompañante, recursos que simplificaron el equipo de investigadores a la relación entre el asesor y estudiante y que, se advierte de una vez, se distancia de las referencias teóricas asumidas desde este enfoque metodológico.

Un valor agregado de este trabajo es que pueda ser referente para futuras investigaciones sobre el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad Bayesiana a nivel no solo local sino en grados inferiores a los regidos por las políticas educativas, que favorezca ampliar la visión limitada que se tiene de ésta, ligada a la presentación de fórmulas memorísticas que poco dejan espacio para valorar y potenciar las estrategias originales que los estudiantes puedan proponer en la resolución de los problemas probabilísticos.

1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 DESCRIPCIÓN

Cuando se quiere expresar la probabilidad condicional de un evento aleatorio H dado otro evento E, en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento E dado H y la distribución de probabilidad marginal de sólo H y E, se requiere utilizar lo que en teoría de probabilidad se conoce como Teorema de Bayes. El papel que usualmente asume el evento H es el de una hipótesis que se analiza a la luz del conocimiento de una evidencia encontrada (el evento E); así, la idea es poder expresar la probabilidad condicional de H dado E denotada como $P(H | E)$ y conocida como la probabilidad a posteriori de la hipótesis dada la evidencia encontrada, en términos de tres probabilidades: la probabilidad a priori de la hipótesis ($P(H)$), la probabilidad de que ocurra la evidencia dada la hipótesis ($P(E | H)$) y la probabilidad de que ocurra la evidencia ($P(E)$), mediante la siguiente relación:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

Este algoritmo, atribuido a la resolución de problemas de tipo bayesiano se utiliza mayormente en cursos de probabilidad de nivel universitario. Por ejemplo, su uso se reporta en distintos semestres en estudiantes de matemáticas (Blanco, 2006) (Zapata y Quintero, 2009) y (León, 2008), o en estudiantes de psicología (Díaz y de la Fuente, 2006a), (Díaz, C., Ortiz, J. J., & Serrano, L. 2007), (Díaz, 2007) y (Puga, J, García, J., De la Fuente Sánchez, L., & de la Fuente Solana, E. 2007), donde se muestra que este tipo de razonamiento, al trabajar con información a priori y tratarla para encontrar la probabilidad de un evento, es de gran relevancia, y aplica también para muchos otros tipos de profesionales, quienes lo encuentran importante en situaciones de toma de decisión bajo incertidumbre, como el diagnóstico, la evaluación o la investigación empírica (Díaz y de la Fuente 2006).

A pesar de esta importancia, encontramos que en la actualidad no se hace suficiente énfasis en la enseñanza a este tipo de razonamiento, e incluso se encuentran recomendaciones para disminuir los contenidos de probabilidad en los cursos de estadística dirigidos a universitarios (Díaz y de la Fuente, 2005). Una de las posibles razones para que se insinué este tipo de

recomendaciones es que el Razonamiento Bayesiano es difícil para el estudiante, como lo muestran investigaciones en el campo de la psicología. (Díaz y de la Fuente, 2005).

Sin embargo, investigaciones más recientes sugieren que la enseñanza del Razonamiento Bayesiano podría facilitarse si se enseña a los estudiantes estrategias de resolución basadas en diferentes representaciones. Por ejemplo: diagramas de árbol (Antequera y Espinel, 2011), utilizando un software dinámico (Díaz y de la Fuente, 2005) o con otro tipo de recurso didáctico como lo es el relato en los cursos de básica primaria (Parra V. y Torres K. 2013). También, si se utiliza un formato adecuado en la presentación de los problemas, se pueden hacer intervenciones de aula que vale la pena explorar. Este hecho ya lo hacen notar Yáñez, Rativa, y Lozano, (2012), quienes después de analizar los posibles errores y dificultades en la solución de problemas en probabilidad, concluyen que los tipos de formatos de presentación de los problemas influyen significativamente en la forma en la que se comprende la información. Ellos en concreto, aluden a tres tipos de formatos: probabilidades, frecuencias relativas y frecuencias naturales.

[En el] formato de probabilidad: la información está dada en probabilidades y los valores numéricos en porcentajes; formatos de frecuencias relativas: igual que el formato de probabilidad, pero sin utilizar la palabra probabilidad en la información, esta solo aparece en la pregunta final. Formato de frecuencias naturales: los porcentajes se traducen en función de un universo que permita trabajar con expresiones enteras... (p.33)

Con relación al efecto de los formatos de presentación de la información, Lonjedo (2007) y Carles (2009)(citado por Yáñez, Rativa, y Lozano 2012) concluyen, luego de realizar varias investigaciones para diversos tipos de problemas de probabilidad condicional, que presentar el dato condicional como porcentaje, cuando todos los demás datos se dan en frecuencias naturales, contribuye positivamente a disminuir el porcentaje de estudiantes que confunden la probabilidad condicional con la conjunta.

Ahora bien, Respecto a las sugerencias de formalización de la probabilidad en el aula, donde su inclusión responde a varias necesidades. Por un lado, hay recomendaciones que surgen como producto de experiencias e investigaciones y por otro lado, de falencias detectadas en lineamientos a los que se intenta atender desde las disposiciones o políticas educativas.

Respecto a las primeras, se reconoce la importancia del Razonamiento Bayesiano, en el aula para contribuir al proceso de toma de decisiones, investigación, evaluación y la resolución de problemas; y las segundas referidas a las políticas educativas plantean desde los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006), en lo referido al pensamiento aleatorio y sistemas de datos y enfocados en los grados de básica primaria y secundaria, Una propuesta donde se observa que solamente hasta los grados 10 y 11 se hace una breve alusión a conceptos como el de probabilidad condicional, que se puede ligar, en cierta forma, con el Razonamiento Bayesiano. Y además se termina favoreciendo la probabilidad clásica en los grados superiores, respecto a otras perspectivas como la subjetiva y la frecuencial. Privilegiar la probabilidad clásica en los grados superiores, respecto a otras perspectivas como la subjetiva y la frecuencial. La siguiente extracción de los estándares se presenta para que se valore lo afirmado. Más allá de la importancia que tiene la relación del razonamiento bayesiano con la probabilidad condicional, está el hecho de que a través de este tipo de razonamiento está la necesidad de vincular las tres concepciones más conocidas de la probabilidad (clásica, frecuencial y subjetiva) para responder a diversas situaciones problemáticas probabilísticas; por ejemplo, como se ilustrará en marco de referencia (p. 33) una probabilidad a priori definida desde la perspectiva clásica se puede revisar con base en el teorema de Bayes, a partir de evidencia empírica, detrás de la cual puede estar una asignación de probabilidad frecuencial; así el razonamiento bayesiano no solo se limita al tratamiento de probabilidades subjetivas sino que abre espacio para relacionar estas tres perspectivas

Estándar	Grados
Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento	6° - 7°
Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad	6° - 7°
Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).	8° y 9°
Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.	8° y 9°
Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.	10° y 11°

Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).	10° y 11°
Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas	10° y 11°

Tabla 1: Estándares básicos de competencias en matemáticas 2006- 2015

A nivel institucional, en el Colegio Grancolombiano I.E.D [CG], lugar elegido para desarrollar este proyecto, se puede ejemplificar la problemática insinuada desde tres perspectivas: la primera referida a la organización o propuesta curricular que se sugiere desde la institución para el desarrollo y trabajo del pensamiento aleatorio en el ciclo tres, cuatro y cinco; por otra lado, lo relacionado a las condiciones de formación de los estudiantes de grado séptimo, en las que se refleje los conceptos previos en cuanto a representaciones gráficas y nociones básicas de probabilidad; y por último, a nivel humano, las opiniones que surgen desde la jefatura de área respecto a la importancia que tiene como área, la implementación del pensamiento aleatorio, y en especial la probabilidad.

En el plan de estudios [PE] del ciclo tres (grados 5, 6 y 7) se observa que los procesos y contenidos inherentes a la Estadística han sido minimizados en cuanto se ha privilegiado el pensamiento numérico y en su contra jornada, el Proyecto 40 X 40¹ trabaja el pensamiento espacial y sistemas geométricos. En lo grados superiores ciclo cuatro (8 y 9), se trabaja mediante la contra jornada el pensamiento aleatorio, una parte referido a las medidas de tendencia central y la otra a las nociones básicas de la probabilidad, recurriendo nuevamente a la probabilidad clásica (Regla de Laplace) y en el ciclo cinco ausencia total ([PEC- CG] 2015)², generando como consecuencia que el pensamiento aleatorio y sistemas de datos se vea afectado, siendo insuficiente y las pocas veces trabajadas centrando la atención al tratamiento algorítmico de los datos y repitiendo las temáticas de la Estadística como son: las Medidas de Tendencia Central y la recopilación y representación de datos.

¹**Jornada educativa única para la excelencia académica y la formación integral**¹, que consiste en ampliar en forma progresiva la jornada educativa en los colegios distritales, combinando la implementación de jornadas únicas y la ampliación de la jornada a **40 horas semanales, 40 semanas al año (40x40)**, en colegios con doble jornada con centros de interés, mediante una pedagogía centrada en el aprendizaje activo, el pensamiento crítico y científico, y el aprovechamiento de la vida cotidiana en la escuela y en el entorno, para mejorar el acceso equitativo y la calidad de la educación en Bogotá.

²Ver Anexo 1 (PEC- GC)

Respecto a la conceptualización, se puede afirmar que los estudiantes se han visto afectados por la ausencia de dichos temas, ya que evidenciaron gran dificultad al enfrentarse a situaciones en las que se privilegia la incertidumbre y que a la vez incentivan la capacidad para interpretar, comunicar y evaluar situaciones probabilísticas³; Es plausible que esto ocurra porque ocurre porque la población ha sido educada desde una postura que favorece una lógica determinista o bivalente (Cardona y Arias 2008) que tiende, además, a generar conflictos para la comprensión de conocimiento de carácter estocástico.

Se percibe así, que la educación de los estudiantes de grado séptimo del CG, no se esté potenciando en dos aspectos importantes para el estudio de la probabilidad en la enseñanza secundaria, el primero: la probabilidad como parte de la formación matemática y base de otras disciplinas (Batanero, 2001); y, segundo: la probabilidad como algo esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998), dejando de lado procesos que se consideran importantes para el desarrollo de una *Cultura Estadística* (CE), entendida desde los planteamientos de Gal, citado en Batanero, (2002), como la unión de dos componentes relacionados:

La capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos; y la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

Para contrastar lo anterior, se analiza la experiencia de cinco años de labores pedagógicas en el [CG] por parte del jefe de área, al que la investigadora/docente entrevistó, permitiendo afirmar que allí convergen condiciones que no son asumidas en el desarrollo del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, ni explícitas en el plan de estudios que posiblemente reflejan el desempeño en las diferentes pruebas nacionales en matemáticas.

³ Ver anexo 2

1.2 FORMULACIÓN

Bajo las anteriores condiciones se considera pertinente proponer un proyecto de investigación en el Colegio Grancolombiano I.E.D, en su espacio de contra jornada (proyecto 40x 40) donde en su diseño, ejecución y evaluación se promueva el Razonamiento Bayesiano y este se aproxime al desarrollo de una cultura estadística en los estudiantes de grado séptimo.

Así, la pregunta de investigación que se propone es:

¿Cómo se puede promover el Razonamiento Bayesiano en los estudiantes de grado séptimo del colegio Grancolombiano I.E.D, en su proyecto 40x40, y que a su vez suscite el desarrollo de cultura estadística?

1.3 ANTECEDENTES

Se presentan algunos antecedentes correspondientes a dos ejes que fundamentan la investigación: Aplicaciones de la probabilidad Bayesiana y Experimentos de enseñanza de algún concepto de la Educación Estadística.

Enseñanza del Teorema de Bayes

- **Enseñanza del Teorema de Bayes con apoyo tecnológico**

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006), presentan los resultados de una experiencia de enseñanza del teorema de Bayes y sus aplicaciones con apoyo tecnológico, a 78 estudiantes de psicología, apoyada en material para los estudiantes y subrutinas de cálculo en Excel. Se trabajó un total de tres horas a la enseñanza del Teorema de Bayes, de las cuales las dos primeras se llevaron a cabo en aula tradicional, con ejemplos de pruebas médicas para introducirlos conceptos de probabilidad inicial, final y verosimilitud, presentando el teorema como recurso transformador de las probabilidades iniciales en finales Para posibilitar un aprendizaje de la experiencia; y la tercera hora, en el laboratorio de informática donde los estudiantes trabajaron en parejas resolviendo problemas con ayuda de un programa tecnológico.

Estos autores concluyen que la mayoría de estudiantes adquirió una comprensión intuitiva del Teorema de Bayes, identificaron los datos en los problemas abiertos, organizaron los

datos en una tabla de frecuencias, realizaron los cálculos y los interpretaban en el contexto de los problemas. La tasa de éxito fue mayor que la informada en otras investigaciones, incluso las basadas en formatos de frecuencias. Más aún, la tabla de frecuencias es fácil de generalizar a mayor número de sucesos o a experimentos múltiples. Por otro lado, incluso cuando el formato de frecuencias pueda ayudar a los estudiantes a resolver algunos problemas, es difícil de generalizar a situaciones más complejas. Por último, presentan la necesidad de replicar la investigación y mejorar el diseño de la enseñanza, con objeto de facilitar a los estudiantes la adquisición de este importante teorema.

Este antecedente advierte sobre la necesidad de tener en cuenta recursos de tecnología puestos, a tener presente la numerable cantidad de software de tecnología puestos en Internet para trabajar el Teorema de Bayes, algunos de ellos gratuitos que permiten incorporar tanto gráficamente como el cálculo, el tema de las Tics en el aula.

- **Una aplicación de Bayes en la toma de decisiones**

Blanco, (2006) propone en esta investigación realizada con estudiantes de nivel superior, a partir del planteo de situaciones en las que el decisor puede contemplar la posibilidad de comparar información adicional que le ayude a delinear, dentro de su visión subjetiva, el comportamiento de una o más variables inciertas estimadas como relevantes en su problema. Es un trabajo que se enfoca en la construcción de la matriz de verosimilitud y la determinación de la probabilidad conjunta para luego comparar estos resultados con el valor de la información adicional.

Aportando hacia la reflexión sobre el trabajo y aprovechamiento de los conceptos estadísticos es fundamental para la comprensión del valor de la información adicional y medición de su cantidad.

- **Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología**

Díaz, (2007) en su tesis doctoral una situación problema en cuanto a la aplicación de la inferencia estadística, tanto en Psicología, como en otras ciencias empíricas: Mientras que el uso incorrecto o insuficiente de los métodos estadísticos se denuncia desde las sociedades

profesionales, no se observan cambios ni en la metodología de investigación ni en la enseñanza de los métodos estadísticos dentro de los planes de estudio de pregrado y postgrado. Para ello muestran un estudio investigativo con estudiantes de licenciatura en psicología dando a conocer las posibilidades brindadas por la inferencia bayesiana, desde el punto de vista filosófico (diferentes filosofías de la inferencia) y psicológico (errores comunes y causas de los mismos; diseñando un material didáctico que tiene en cuenta los análisis anteriores, las investigaciones sobre didáctica de la estadística y las características de nuestros estudiantes sobre la probabilidad Bayesiana.

Una de las conclusiones referidas al Teorema de Bayes y su aplicación; considera que la mayoría de los alumnos, demostraron una comprensión de los conceptos y su aplicación en diversos contextos prácticos. El único objetivo que pareció no conseguirse es la correcta diferenciación entre una probabilidad condicional y su transpuesta, que no es específico de la inferencia bayesiana. Haciendo notar que la enseñanza comenzó por el Teorema de Bayes (y no por la probabilidad condicional propiamente dicha). Se propone promover a continuar en el futuro el estudio de estos instrumentos, que verifiquen la viabilidad del Teorema de Bayes completando el estudio de su validez en nuevas muestras de estudiantes.

Es así como esta tesis doctoral, aporta a este trabajo de investigación en primera medida a la conceptualización de temas como: inferencia bayesiana, Razonamiento Bayesiano, errores y dificultades de la probabilidad Bayesiana; y en segunda medida a continuar el trabajo sobre probabilidad Bayesiana con otro grupo de estudiantes, quizás el comenzar con grupos escolares.

- **Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al Teorema de Bayes: un caso con futuros profesores de matemática**

León, (2008) en su reporte de investigación realizado con 20 estudiantes inscritos en el curso de probabilidad y estadística inferencial, ubicada en el séptimo semestre de la carrera de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) en Maturín, Venezuela. El propósito general fue ensayar y evaluar alternativas de instrucción en los relacionado con el Teorema de Bayes, que han dado buenos resultados en otros ámbitos, centradas en el uso de un modelo particular de solución de problemas, la consideración de

objetos de diversa naturaleza (como proporciones, razones y probabilidades) y el uso de diferentes estrategias de representación (como las tablas de doble entrada y los diagramas de árbol y de área). Los resultados muestran que, aun cuando se dedicó más tiempo del reglamentario a la instrucción y a la ejercitación, no se logró lo esperado en cuanto a la comprensión del tema por parte de los estudiantes; sus principales limitaciones se manifiestan en la identificación de los eventos y de sus respectivas probabilidades, en el uso de esquemas de representación y en la presencia de las falacias de la tasa base, del eje de los tiempos y de la condicional transpuesta.

Aportando a este trabajo, el aspecto didáctico frente al uso de los registros de representación que pueden ser utilizadas como estrategias para enfrentarse a estos problemas, a su vez permite la conceptualización de los sesgos y heurísticas en los cuales se puede caer, cuando se solucionan problemas de índole bayesiano. Otro aporte fundamental de este trabajo es la definición propia que se le da al Razonamiento Bayesiano, que deja de lado solo el tratamiento matemático, sino que lo envuelve en la importancia de utilizarlo para desenvolverse en las situaciones de incertidumbre.

- **Una experiencia didáctica en la enseñanza del Teorema de Bayes**

Zapata y Quintero (2009) presentan una experiencia didáctica en la enseñanza del Teorema de Bayes en un curso de estadística introductoria para el programa de Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Esta propuesta de intervención surge de la necesidad de explorar experiencias didácticas que favorezcan el Razonamiento Bayesiano de los estudiantes que toman el curso de estadística introductoria. El equipo de investigación diseñó una intervención tomando en cuenta las recomendaciones de la GAISE para abordar el Teorema de Bayes. Esta intervención fue revisada con detalle en dos reuniones y se le hicieron los ajustes respectivos antes de ser ejecutada, incluyendo variedad de representaciones por los estudiantes.

Concluyendo y aportando a la investigación, que el desarrollo de una intervención didáctica en la que se presente a los estudiantes variedad de aplicaciones en problemas reales con apoyo adicional de la tecnología facilita la conceptualización de ideas complejas como el Teorema de Bayes.

- **Una propuesta para la enseñanza del Teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas**

Lopes, (2013) presenta una propuesta didáctica-pedagógica no aplicada para la enseñanza del Teorema de Bayes en la cual se emplea un juego de dados asociado con la resolución de problemas, utilizada como punto de partida para la construcción de conceptos matemáticos. El juego propuesto se fundamenta en Game of Kasje, presentado originalmente en (Schuh, 1968) citado por (Lopes, 2013). A través del uso de este juego se formulan varios problemas, que al ser resueltos con una adecuada intervención del profesor, permiten estimular a los estudiantes en la construcción o reconstrucción de los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, en particular, el estudio del Teorema de Bayes. La estrategia propuesta puede ser aplicada en la escuela secundaria, y también puede auxiliar en la práctica de profesores que enseñan esos conceptos matemáticos.

El autor concluye que estas herramientas (juego) desarrollan el raciocinio deductivo del estudiante y no la memorización de fórmulas, la memorización puede ser temporal, mientras que el raciocinio y el conocimiento adquirido son para toda la vida. La metodología de trabajo con juegos y resolución de problemas sugerida en el trabajo sigue la tendencia constructiva de la enseñanza y el aprendizaje en la Matemática. El estudiante se convierte en el constructor de su propio conocimiento, mientras que el profesor se convierte en un mediador que incentiva y facilita el aprendizaje, interviniendo y polemizando.

Esta propuesta, aporta al trabajo de investigación en plantear como posible opción a ejecutar, teniendo en cuenta que la resolución de problemas es un proceso importante en la educación matemática, en este caso aplicable a la estadística y está diseñada para una población de básica secundaria, que podría ser la utilizada para esta investigación.

- **Análisis del uso del Razonamiento Bayesiano**

Parra, y Torres, (2013) presentan una investigación sobre un trabajo investigativo, que centró la mirada en el análisis del Razonamiento Bayesiano no como el hecho de utilizar algoritmos, sino como el tomar decisiones en situaciones de incertidumbre para estudiantes de básica primaria, con la utilización del relato; el objetivo general está relacionado con la descripción

y análisis de los resultados de la trayectoria que recorren los estudiantes cuando se enfrentan al uso de la probabilidad Bayesiana.

Concluyendo que el Razonamiento Bayesiano es un concepto que se debe construir mediante un proceso, donde el estudiante debe dejar de lado el pensamiento determinista, para que empiece a ser consciente de la información proporcionada teniendo en cuenta sus condicionantes, entendiendo la importancia de la estimación en una situación aleatoria. Es allí donde la cultura estadística cobra gran importancia, ya que permite reflexionar estadísticamente frente a la cotidianidad. Aportando a su vez en la teorización con autores importantes que relacionan el Teorema de Bayes a la enseñanza.

Experimentos de Enseñanza

- **Ambientes de aprendizaje y cultura estadística a través de un experimento de enseñanza para estudiantes de grado noveno**

Álvarez, I. y Montoya D. (2011) desarrollan un Experimento de Enseñanza basado en el diseño e implementación de Ambientes de Aprendizaje que suscitan el desarrollo y apropiación de la Cultura Estadística, mediante la utilización del Análisis Exploratorio de Datos como herramienta para interpretar el macro y micro contexto de la clase de noveno grado de la Institución Educativa Antonio Nariño, con el fin de procurar la formación de individuos críticos, democráticos y socialmente participativos, lo cual permite aproximarse a la caracterización de Ambientes de Aprendizaje para la Educación Estadística Crítica.

Como conclusiones plantean la necesidad de caracterizar el contexto de la clase, con el fin de establecer condiciones iniciales para los Ambientes de Aprendizaje que propician el desarrollo de la Cultura Estadística, lo cual se puede lograr a partir de la conjugación de siete principios: Cognitivo de la Estadística, Razonamiento estadístico, Análisis crítico de los datos, Contextualización de los datos, Comunicación y organización en el aula, Políticas institucionales y Tecnología y productividad; dichos principios son considerados como ejes articuladores que permiten orientar las actividades de los estudiantes a partir de un transitar por los Ambientes de Aprendizaje, que son caracterizados, por lo menos, por uno de los principios anteriormente mencionados.

Aportando a este trabajo en la conceptualización de un experimento de enseñanza, para contemplar todos los aspectos involucrados en el aula para su ejecución; así como la teorización y desarrollo de la cultura estadística.

- **Experimento de enseñanza para la superación de algunas dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición.**

Méndez, M. y Valero, N. (2014) en su trabajo investigativo, describe el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis del experimento de enseñanza en el que se implementó un análisis didáctico que orientó una secuencia de tareas cuyo fin es la superación de dificultades y errores relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición con los estudiantes de grado noveno.

Centrado en su aporte frente a la conceptualización y aplicación esquematizada de los experimentos de enseñanza, se reconoce en dicho trabajo las diferentes subfases que se desprenden de las fases iniciales que plantea un experimento de enseñanza; es decir, las autoras desarrollan en la primera fase acciones entre las que se destacan: i) evaluar el conocimiento inicial de los estudiantes ii) realizar un análisis de didáctico según lo propuesto por Gómez, (2002) que tuvo como eje central la variable estadística y sus escalas de medición, en el cual se determina el contexto educativo, el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción referido a dicho objeto estadístico; y iii) diseñar la recogida de datos. En la fase de experimentación se siguieron tres pasos: 1) diseño y formulación de hipótesis y secuencia de tareas; 2) intervención en el aula y recogida de datos; y 3) análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis. Por último, en la fase de análisis retrospectivo se realiza el análisis a partir de la recolección y organización de toda la información que se obtiene durante la intervención, para establecer el progreso de los estudiantes al comparar lo que se predice en la trayectoria hipotética formulada con lo que sucede en la práctica en el aula.

Concluyendo eficazmente sobre los experimentos de enseñanza, que al realizar el estudio teórico del análisis didáctico, se encuentra elementos para concretar acciones propias de las etapas del experimento de enseñanza, logrando establecer que son dos teorías complementarias, puesto que el experimento de enseñanza requirió una teoría que orientara

la planificación de una secuencia de tareas respaldada por un proceso de análisis que tuviera en cuenta los intereses de este estudio y promoviera la superación de dificultades y errores, para retornar luego con el análisis preliminar del experimento sesión a sesión y con el análisis retrospectivo del mismo haciendo uso del análisis de actuación.

2 JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta, se constituye en un trabajo que pretende aportar al interés que se ha despertado en los últimos años frente a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad como una herramienta que tiene aplicaciones para manejar la incertidumbre tanto del diario vivir como en el contexto profesional. Tal como lo manifiesta Rocha (2007) cuando afirma:

“Es común en la sociedad actual que los medios de comunicación presenten diariamente estadísticas relacionadas con elementos de tipo financiero, económico, político, social y cultural, que realicen sondeos de opinión y encuestas a nivel nacional. Las organizaciones en general necesitan también recolectar o utilizar información de tipo estadístico para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre...” (2007, p. 9)

También se releva su importancia desde tres aspectos fundamentales; en el primero se propone utilizar situaciones cercanas al estudiante para dejar a un lado la lógica determinista o bivalente, con la manera convencional con la que se está enseñando el concepto; ya que como afirman Cardona y Arias (2008):

“Uno de los errores más comunes que se comete como docente y que además se plantea de esta forma en los textos, es que se define el concepto de probabilidad condicional y de una vez se pasa a exponer la fórmula. Después de que las formulas son expuestas, se comienza, generalmente a desarrollar ejercicios que tienden más a que se haga un reemplazo en la formula dada y no a que se comprenda el concepto como tal, es decir este tipo de ejercicios se convierten en la realización de una tarea mecánica que en última instancia no aporta mucho al desarrollo del pensamiento aleatorio ni a aumentar el nivel de abstracción del estudiante.” (2008, p. 8)

El segundo aspecto se relaciona con la importancia de la enseñanza del Teorema de Bayes y se comenta en dos sentidos. En primer lugar se remite a las afirmaciones de, Díaz (2007), León (2008), Lopes(2013) y Parra y Torres (2013), quienes proponen un mayor posicionamiento de la investigación de la enseñanza de la probabilidad Bayesiana en el aula. Y en segundo lugar, para ayudar a contrarrestar la importancia que se le da a la probabilidad clásica, y hacer que se contemplen las ventajas que el método bayesiano reúne, que aunque

están referidas a la investigación, aplican a la enseñanza, como lo afirman los siguientes autores:

El método Bayesiano hace uso de toda la información previa disponible, mientras que en inferencia clásica esta información no se tiene en cuenta. Puesto que el investigador especifica la distribución inicial, el enfoque Bayesiano tiene en cuenta la perspectiva del investigador y su conocimiento del problema. [...] Además, la inferencia Bayesiana proporciona un método totalmente general, debido a que su aplicación no requiere un tipo particular de distribución y no precisa deducir las distribuciones en el muestreo (Díaz y Batanero, 2006).

Varios trabajos sugieren que la inferencia Bayesiana proporciona una respuesta más ajustada, que la probabilidad clásica, teniendo en cuenta las necesidades del investigador, además el método Bayesiano ayuda a comparar la probabilidad de un suceso observado bajo la hipótesis nula y bajo diferentes hipótesis alternativas (Lindley, 1993).

Paulos (1998) afirma que:

El Teorema de Bayes nos ayuda asimismo a entender nuestra inclinación, natural pero injustificada, a sobrevalorar la probabilidad de los acontecimientos infrecuentes. A pesar de lo que se lee en la prensa, por ejemplo, los casos de hijos violados por uno de los padres son relativamente infrecuentes; a modo de ilustración, supongamos que la incidencia real es de dos niños de cada mil. Si sólo el uno por ciento de los no violados creyera recordar o informara falsamente que lo fue, y si el 50 por ciento de los realmente violados creyera recordar o informara falsamente que no lo fue, la mayoría de nosotros pensaría que se subestimaría la incidencia real de las violaciones infantiles o, por lo menos, que no se la sobrevaloraría ni un ápice (1998, pp. 54-55)

El último factor corresponde al notable interés de la autora de este documento por enriquecer la formación de profesor investigador a partir de la práctica, con el fin de iniciar en la investigación educativa y de potencializar la línea de Investigación de estadística, debido a que se pretende realizar un aporte teórico y de experimento de enseñanza sobre una posible alternativa didáctica para promover el Razonamiento Bayesiano en estudiantes de grado séptimo.

3 OBJETIVOS

Los objetivos que se proponen para orientar el trabajo investigativo, son los siguientes.

3.1 OBJETIVO GENERAL

Plantear un experimento de enseñanza con el concepto de probabilidad Bayesiana tendiente a promover el Razonamiento Bayesiano y el desarrollo de la cultura estadística en estudiantes de grado séptimo del colegio Grancolombiano IED en el proyecto 40 x 40.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Consolidar una postura conceptual que describa los fundamentos para elaborar una propuesta de enseñanza que atienda a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad desde una perspectiva bayesiana.
- Planear y gestionar un experimento de enseñanza que involucren la utilización de nociones que subyacen en la aplicación de la probabilidad Bayesiana en la básica secundaria.
- Evaluar y reflexionar sobre los resultados de la implementación del experimento de enseñanza realizado.

4 MARCO REFERENCIAL

Este capítulo se encuentra organizado en cuatro partes. La primera contiene una presentación del marco de referencia conceptual en torno al objeto de estudio perspectiva bayesiana; así como sus relaciones con las diferentes concepciones de la probabilidad, sus puntos en común y de separación con la probabilidad condicional; enfatizando lo que se considerará como Razonamiento Bayesiano. La segunda parte describe la aproximación a la enseñanza, donde se expone lo que se entenderá por aprender y enseñar en matemáticas, puntualizando en estadística. La tercera parte de carácter didáctico, refiriéndose a las estrategias para llevar el objeto de estudio al aula, se mencionan los formatos de problemas de la probabilidad, así como la comprensión del Teorema de Bayes en términos de sus registros de representación y algunos softwares tecnológicos que facilitan el aprendizaje de dicho concepto y las falacias que también se involucran en el aprendizaje. La última parte corresponde al aspecto curricular donde se mencionan el aspecto legal que guía dicho concepto al aula, así como las orientaciones que rigen el aula donde se aplica dicha propuesta.

4.1 PERSPECTIVA BAYESIANA

Algunas concepciones que conducen a diferentes asignaciones de probabilidad relativas a procesos aleatorios en los que se cuantifican probabilidades, se pueden clasificar en dos grandes grupos atendiendo al tipo de evidencia que utilizan en su cuantificación. Así, por un lado, están las concepciones clásica y frecuentista, que asignan probabilidades a los posibles resultados de un proceso aleatorio teniendo en cuenta información objetiva, bien sea de carácter empírico como en el caso frecuentista, o bien atendiendo a argumentos de simetría o recuento de posibilidades como es usual en el caso clásico. Por otro lado, está la concepción subjetiva, que suele incorporar el conocimiento personal de un individuo sobre el proceso aleatorio en cuestión, tanto de información que sobre el experimento o fenómeno aleatorio se tenga, como del conocimiento que proviene de otros experimentos anteriores relacionados.

La concepción clásica responde a la formulación que expuso Laplace en 1812, que se basa en la idea de resultados igualmente verosímiles, sin que exista predisposición hacia alguno de ellos en particular. Así, la medida de la probabilidad de que ocurra un suceso es expresada como el cociente entre el número de resultados favorables al suceso y el número total de

resultados posibles, siempre y cuando todos los resultados posibles se consideren como equiprobables. Sin embargo, esta concepción presenta limitaciones en su aplicabilidad, pues exige que el conjunto de posibles resultados del proceso sea finito. De esta manera, no es posible aplicar su definición a procesos aleatorios cuyo conjunto de resultados posibles sea infinito o continuo. Aunque desde una abstracción geométrica hay asignaciones de probabilidad basadas en argumentos de razones de proporcionalidad de segmentos, o de superficies o volúmenes, que se pueden utilizar para definir asignaciones de carácter clásico, también es conocido que pueden conducir a paradojas como la de Bertrand (Contreras, Batanero, Arteaga, y Cañadas, 2011).

La concepción frecuentista se apoya en dos principios: la ley de la estabilidad de las frecuencias relativas y el principio de aleatoriedad de las condiciones en las que se repite sucesivamente el proceso. La ley de estabilidad se fundamenta en el supuesto de que en sucesivas repeticiones del experimento o fenómeno observado bajo condiciones similares, las frecuencias relativas de un suceso tienden a estabilizarse alrededor de un número constante. El principio de aleatoriedad hace referencia a la independencia o no causalidad entre cada realización del proceso. Esta concepción también presenta limitaciones por el hecho de que la asignación de probabilidades mediante frecuencias relativas, es únicamente aplicable en procesos susceptibles de ser repetidos. Quedarían, excluidos todos aquellos procesos que no pueden ser reproducidos, como los fenómenos donde el investigador es solamente observador.

La concepción subjetiva se originó gracias a los trabajos de Bayes, y se afianzó posteriormente gracias a las aportaciones de De Finetti (1937) y Savage (1954 citado en Fishburn 1986) entre otros. Desde esta concepción, la probabilidad se concibe como el grado de creencia o de convicción que tenga una persona acerca de la ocurrencia de un suceso y representa un juicio personal sobre la verosimilitud de que el suceso ocurra. Este juicio no está basado únicamente en las características propias del proceso, sino que el sujeto también tendrá en cuenta en su asignación su propia percepción, la experiencia personal acumulada y las opiniones y evidencia de que dispone. Esto último es lo que otorga a esta concepción su carácter subjetivo y personalista y la convierte en especialmente útil para asignar

probabilidades en aquellos fenómenos que no se prestan a la repetición y, por lo tanto, donde no es posible basar dicha asignación en las frecuencias relativas.

Por medio de un ejemplo, donde se considera el experimento de lanzar tres monedas y observar el número de caras resultante, se puede ejemplificar aproximaciones a las tres concepciones mencionadas antes.

Asignación de probabilidades bajo una concepción clásica:

Probabilidad Clásica		
P(3)	1/8	0,125
P(2)	3/8	0,375
P(1)	3/8	0,375
P(0)	1/8	0,125

Tabla 2: Probabilidad desde la concepción clásica

Desde esta concepción se observa que los eventos elementales que configuran una partición del espacio muestral asociado al lanzamiento de tres monedas son: {CCC} para tres caras, {CCS, CSC, SCC} para dos caras, {CSS, SCS, SSC} para una cara y {SSS} para cero caras. Esta partición tipifica los eventos de interés, de manera que en la unión de estos conjuntos se verifica un total de elementos que define el total de posibilidades como ocho, que es conocido como el número de resultados posibles, y que además se asumen como equiprobables; por otra parte, el cardinal de cada conjunto de la partición generada indica la cantidad de veces que salió cara en cada caso, y se conoce como el número de resultados favorables.

Asignación de probabilidades bajo una concepción frecuentista:

Probabilidad Frecuentista		
P(3)	13/100	0,130
P(2)	36/100	0,360
P(1)	37/100	0,370
P(0)	14/100	0,140

Tabla 3: Probabilidad bajo la concepción frecuentista

En este caso, para definir la asignación de probabilidades, se realizaron cien replicaciones del lanzamiento de tres monedas. Para proceder a una asignación de probabilidades ahora se

observa la frecuencia absoluta de ocurrencia de cada uno de los cuatro eventos para luego determinar la frecuencia relativa de cada evento. Entonces se define la asignación de probabilidad frecuentista como la repetición de una serie de pruebas (en este caso 100), que determina la probabilidad de ocurrencia de cada cara en el lanzamiento de tres monedas. La ley de estabilidad de las frecuencias y el principio de aleatoriedad sugieren, desde esta concepción, que si se realiza un número suficiente de pruebas, se obtendrá una probabilidad similar a la establecida desde la concepción clásica.

Asignación de probabilidades bajo una concepción subjetivista

Probabilidad Subjetiva		
P(3)	7/16	0,438
P(2)	5/16	0,313
P(1)	3/16	0,188
P(0)	1/16	0,063

Tabla 4: Probabilidad bajo la concepción Subjetiva

La concepción subjetivista asociada al experimento de lanzar tres monedas y observar el número de caras, parte de que el subjetivista podría recordar casos, quizás de experiencias en juegos, donde la aparición de tres caras “no es tan frecuente”, debido, por ejemplo, a sospechas de que las monedas no están realmente equilibradas. Por lo tanto, podría pensar que todos los resultados no son igualmente probables. Una vez realizadas las pruebas, si las frecuencias de todos los resultados son similares, el subjetivista ajustará su teoría para justificar los nuevos datos; y si el resultado de tres caras no aparece tan frecuentemente como los otros posibles resultados, esta evidencia daría más sustento a su creencia de que es menos probable que aparezca.

4.1.1 Probabilidad Condicional y Probabilidad Bayesiana

La probabilidad condicional y el Teorema de Bayes son dos conceptos interrelacionados y que posiblemente se puede vincular a través del seguimiento a su desarrollo histórico. Por ello, frente al desarrollo del objeto estadístico a trabajar, se considera pertinente hacer referencia a las concepciones, surgimiento y desarrollo que subyace a ellos. En lo que sigue, se presentan sus definiciones y las relaciones y que se consideran relevantes para constituir una base conceptual a este trabajo.

4.1.1.1 Probabilidad Condicional

Autores como Contreras, Díaz, Batanero, y Cañadas (2013) aluden al recorrido histórico de la probabilidad condicional, mencionando que su origen se puede vislumbrar a comienzos del siglo XVII, aunque en las civilizaciones primitivas también se trabajaba de manera intuitiva con los juegos de azar. Se define matemáticamente: si A y B son dos sucesos de un mismo espacio muestral E, la probabilidad del suceso B condicionado por A, que se suele representar como $P(B/A)$, está dada por la expresión

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No tiene que existir una relación causal o temporal entre A y B. A puede preceder en el tiempo a B, sucederlo o puede ocurrir simultáneamente. A puede causar B o viceversa o pueden no tener relación causal. Las relaciones causales o temporales son nociones que no pertenecen al ámbito de la probabilidad. Pueden desempeñar cierto papel dependiendo de la interpretación que se le dé en los eventos.

La probabilidad condicional es fundamental en la estadística, porque permite examinar y seleccionar ciertos eventos dependientes o condicionados por la existencia de otros; también porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que se adquiere nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos indispensables en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional. (Estrada, Diaz, y de la Fuente, 2006).

4.1.1.2 Probabilidad Bayesiana

Thomas Bayes (1702-1761) introdujo una innovación fundamental en la ciencia de la probabilidad: el estudio del problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados. El teorema que lleva su nombre se refiere a la probabilidad

de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Más específicamente, con su teorema se resuelve el problema conocido como "de la probabilidad inversa". Esto es, valorar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen supuesto que se ha observado cierto suceso. Se trata de probabilidad "inversa" en el sentido de que la "directa" sería la probabilidad de observar algo supuesto que rigen ciertas condiciones.

El Teorema de Bayes proporciona una traducción matemática de la frase "la probabilidad de un evento A dado que sé la probabilidad de un evento B". El reconocido algoritmo para el modelado de esta frase, se hace referencia en Contreras, J. (2011, pp. 24-52), como:

Sean n sucesos disjuntos $B_1, B_2, \dots, B_n, A \in \Omega$ tales que $P(B_i) > 0, P(A) > 0;$
 $i = 1, 2, \dots, n$; tales que forman un completo de sucesos. Se verifica que:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) P(B_i)}{\sum_i P(B_i) P(A/B_i)} = \frac{P(A/B_i) P(B_i)}{P(A)}$$

Cuadras y Cols (1988, pág. 22), define los sucesos $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \in \Omega$ con $(P(B_i) > 0)$, con una partición en el espacio muestral E . A estos sucesos los denominan "causas" y al suceso A "efecto". A es un suceso cualquiera que si ocurre, lo hace conjuntamente con uno de los sucesos de la partición $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.

Las probabilidades $P(B_i) > 0; i = 1, \dots$ se denominan probabilidades a priori ya que son las que se asignan inicialmente a los sucesos B_1 . Las probabilidades $P(A/B_i) > 0; i = 1, \dots, n;$ se denominan verosimilitudes del suceso A admitiendo la hipótesis B_1 . Las verosimilitudes $P(A/B_i) > 0$ nos permiten modificar el grado de creencia original $P(B_i)$ obteniendo la probabilidad a posteriori $P(B_i/A)$. Sean B_1, B_2, \dots, B_n y A k sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, entonces:

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + \dots + P(B_k \cap A) = P(B_i)P(A/B_i) + \dots + P(B_k)P(A/B_k)$$

La teoría Bayesiana establece, cierto número (la probabilidad) que no representa una frecuencia, sino que es una medida de lo que se conoce, una medida de la incertidumbre y de la certeza. Lo que mide la estadística bayesiana es la certeza y la incertidumbre, la seguridad de quien está esperando el evento, y no solamente "propiedades" del evento en sí. Esto significa también que la probabilidad es una opinión que se puede volver una "apuesta".

Actualmente, las aplicaciones de este teorema permean bastantes campos; y se considera como la base de la estadística bayesiana, cada vez más utilizada para lograr nuevos conocimientos y aplicaciones. Gracias a esta se desarrollan programas para combatir el spam en Internet, juegos, sistemas de control, al análisis de ensayos clínicos en medicina o ingeniería, investigación empírica, diagnósticos, evaluación y aspectos jurídicos.

4.1.1.3 Enfoque Bayesiano

En este documento se considera que la probabilidad Bayesiana permite trabajar la probabilidad desde las tres concepciones descritas anteriormente y será la posición tomada al referirse a la probabilidad Bayesiana. De hecho, mientras las concepciones clásica y frecuentista van restringido su campo de aplicación, la perspectiva bayesiana además de adaptarse de manera natural a la concepción subjetiva, también puede aplicarse en aquellos procesos donde es posible efectuar la asignación por cualquiera de las concepciones anteriores, esto es, procesos en los que los resultados se pueden considerar como igualmente verosímiles de ocurrir o bien son susceptibles de ser repetidos en las mismas condiciones un número elevado de veces.

Retomando el ejemplo de salir tres caras, desde la perspectiva Bayesiana será tomado así:

Teorema de Bayes			
	priori subjetiva	priori clásica	priori frecuencial
P(A3)	0,438	0,125	0,090
P(A2)	0,313	0,375	0,420
P(A1)	0,188	0,375	0,380
P(A0)	0,063	0,125	0,110

Tabla 5: Problema de índole Bayesiano, bajo las concepciones de la probabilidad

Evidencia (B): salen 1 o 2 caras

Verosimilitudes

P(B/A0)	0
P(B/A1)	1
P(B/A2)	1
P(B/A3)	0

Tabla 6: Verosimilitudes

¿Cuál es la probabilidad de que salgan una o dos caras dado que salió una cara?

P(A1/B)	0,875	0,166666667	0,178082192
---------	-------	-------------	-------------

Tabla 7: Solución problema Bayesiano bajo las concepciones de la probabilidad

La perspectiva bayesiana, reúne las tres concepciones, revisándolas bajo la verosimilitud: si sale 1 o 2 caras. Esta, consiste en usar recursos probabilísticos para actualizar (cambiar) la asignación probabilística inicial o previa (haya sido ésta “objetiva” o “subjetivamente establecida”) a la luz de nuevas observaciones; es decir, asignaciones condicionadas por nuevas observaciones. El Teorema de Bayes es el puente para pasar de una probabilidad a priori o inicial, de una hipótesis a una probabilidad a posteriori o actualizada, basado en una nueva observación. Produce una probabilidad conformada a partir de dos componentes: una que con frecuencia se delimita subjetivamente, conocida como “probabilidad a priori”, y otra objetiva, la llamada verosimilitud, basada exclusivamente en los datos. A través de la combinación de ambas, el analista conforma entonces un juicio de probabilidad que sintetiza su nuevo grado de convicción al respecto. Esta probabilidad a priori, una vez incorporada la evidencia que aportan los datos, se transforma así en una probabilidad a posteriori.

4.1.1.4 Razonamiento Bayesiano

Después de percibir diversidad de aplicaciones y utilidades del teorema, a nivel conceptual, se retoma lo que afirma Krauss, Bruckmaier y Martignon (2010) “...Este concepto conduce a una mejora de las técnicas de razonamiento probabilístico y su representación”. Para ello se define Razonamiento Bayesiano desde las primeras investigaciones que se realizaron sobre este. Estas fueron acerca de las intuiciones y concepciones de las personas, los primeros trabajos fomentaron el interés para el inicio de más estudios sobre los conceptos asociados al Teorema de Bayes.

Investigaciones asociadas a la psicología y a investigadores como Phillips y Edwards (1966), (citado en Alonso y Tabua, 2002 p. 46) donde refiriéndose a la resolución de problemas con urnas. Kahneman y Tversky (1972) estudiaron las estrategias usadas por los sujetos cuando se les pedía que estimasen la probabilidad de un determinado acontecimiento, encontrando evidencia que las personas ignoran o menosprecian significativamente las probabilidades

previas o tasas básicas de frecuencia, aun cuando se les presenten explícitamente, lo cual los llevó a afirmar: “el hombre no es que sea un bayesiano conservador sino que no es bayesiano en absoluto”(Alonso y Tabua, 2002 p. 46).

De estas dos investigaciones se concluye la insensibilidad a las probabilidades previas en las personas. Los investigadores encontraron que las personas tendían a calcular la probabilidad de un evento utilizando reglas no estadística tales como la heurística de representatividad, por medio de la cual se evalúa la probabilidad de un evento por el grado de representatividad que se presume tiene respecto al proceso que lo genera, y se manifiesta en el Razonamiento Bayesiano en el olvido de las probabilidades a priori (Alonso y Tabua, 2002)

Desde un aspecto algorítmico, Morgado y Yáñez, (2013) refieren al Razonamiento Bayesiano incorporado al cálculo de probabilidades condicionales inversas mediante el Teorema de Bayes, definiendo:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B/A_j)P(A_j)}$$

La ocurrencia del evento B está condicionada a la realización de algunos de los eventos A_j que conforman una partición del espacio muestral. La idea es que B ocurrió y se indaga por la probabilidad de que haya ocurrido $P(A_i/B)$ es la probabilidad a posteriori en tanto que $P(A_i)$ es la probabilidad a priori; los valores $P(B/A_i)$ son las llamadas verosimilitudes o probabilidades de que B ocurra cuando ha ocurrido A_i .(p.317).

En el documento se ejemplifica que “...un claro Razonamiento Bayesiano en el sentido de que una información adicional modifica una probabilidad inicial, evidencia muestras de un proceso de enseñanza deficiente en estos temas.” (p. 151).

Por otro lado, León (2008) después de realizar una investigación sobre los problemas bayesianos con estudiantes universitarios, utiliza el algoritmo que se ha presentado de dicho teorema, y recoge que :

“...la importancia que merece la formación de los individuos para actuar en situaciones de incertidumbre, en general, y muy en particular en aquellas donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condiciona las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá de tomarse decisiones, es en esencia, el planteamiento del Razonamiento Bayesiano...” (p. 215).

Se contempla en este último un buen acercamiento lo que se considerará relevante y las condiciones sobre las que en el presente trabajo se referirán al Razonamiento Bayesiano.

4.1.1.5 Puntos en común: Probabilidad condicional y Probabilidad Bayesiana.

Los algoritmos y procedimientos utilizados en el campo de la probabilidad Bayesiana, son el Teorema de Bayes y la asignación subjetiva de probabilidades, Batanero (2006, citado en Contreras 2009) teniendo en cuenta que en el significado subjetivo de probabilidad se hace presente el Teorema de Bayes, se hace una mirada a dicho procedimiento matemático. *El Teorema de Bayes*, permite calcular las *probabilidades finales*, a partir del conocimiento de las *probabilidades iniciales* y de los datos obtenidos experimentalmente Rivadulla (1991 y Bolstad, 2004, citado en Contreras 2009). En su forma más simple según Serrano (2003 citado en Batanero 2007), este teorema se expresa en la forma siguiente: Tenemos un suceso B (los datos) y queremos saber si ha sido producido por una de las causas A_1, A_2, \dots, A_n (una serie de hipótesis científicas rivales; son las posibles causas de B). Se conocen las probabilidades $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$.

En otras palabras, la probabilidad condicional, es la probabilidad de cierto evento, dado que ha ocurrido otro, y el Teorema de Bayes, se considera un método para calcular dicha probabilidad. Como regla de probabilidad es indiscutible, así como su validez. A partir de un conjunto de probabilidades llamadas "a priori" o "sin corregir", calcula un conjunto de probabilidades "a posteriori" o "corregidas" que no son más que una modificación de las primeras ante la evidencia de que un determinado suceso ha ocurrido.

Para aclarar estos conceptos, observemos a continuación la diferencia entre el planteamiento de probabilidad condicional realizado hasta este momento y el de Bayes. Cuando se escribe:

$P(B / A)$, se dice que esto la probabilidad de que habiendo ocurrido el suceso A, ocurra B. Probabilidad condicional. Lo que plantea Bayes es que suceso B ha ocurrido, cual es la probabilidad de que provenga de A. Que A sea causa de B. Es decir, debo hallar $P(A / B)$.

Un aspecto importante de estas probabilidades, es el señalado por Batanero (2006),(citado en Contreras 2009) cuando afirma, que si queremos preparar a los estudiantes para enfrentarse a la toma de decisiones en la vida cotidiana, es importante introducir la probabilidad condicional, base de la concepción subjetiva de la probabilidad. Dicha concepción aparece implícitamente en las orientaciones curriculares y tiene una aplicación mucho más general que otros enfoques de la probabilidad.

4.1.1.6 Falacias o sesgos

Trabajar con probabilidad condicional puede ser cauteloso y tedioso, se debe tener en cuenta aquellos sesgos o dificultades, que suelen concretarse en la manifestación de falacias o errores asociados al aprendizaje de la probabilidad condicional. Autores como León (2008. p. 191), sintetiza dichas falacias desde varios autores en base a un trabajo elaborado por Díaz y de la Fuente (2007). Se seleccionan de esta fuente las que aplican al tema considerado.

AUTORES	PROBLEMÁTICA	CONCLUSIONES
Tverky y Kahneman (1982)	Condicionamiento y causación	Algunas personas no distinguen entre condicionalidad y causalidad
Gras y Totohasima (1995)	Falacia del eje del tiempo (Falk, 1989)	Creencia que la probabilidad de un suceso no puede condicionar la de otro que haya ocurrido con anterioridad
Sánchez y Hernández (2003)	Situaciones sincrónicas y diacrónicas (Falk, 1989)	Los sujetos no perciben que las situaciones sincrónicas (secuencialidad) y las diacrónicas (simultaneidad) son formalmente equivalentes.
Tversky y Kahneman (1982)	Falacia de la conjunción	Algunas personas creen que es más probable la

		intersección de dos eventos que cada una de ellas por separado
Falk (1982) Batanero y Sánchez (2005)	Falacia de la condicional transpuesta	Con frecuencia las personas confunden las dos probabilidades condicionales $P(A/B)$ $P(B/A)$
Lonjedo y Huerta (2004) Gigerenzer (1994) Ojeda (1996)	Naturaleza de los datos	Los datos en los problemas de probabilidad pueden presentarse en forma de frecuencias, porcentajes, razones o probabilidades. Se sugiere un enfoque frecuencial de la probabilidad antes de que esta se muestre de una manera formal.

Tabla 8: Falacias y sesgos en la probabilidad condicional

4.2 APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA

En esta sección, se presenta la postura que se asume respecto a la enseñanza, que inevitablemente está estrechamente ligada la relacionada con el aprendizaje. Para ello se retoma lo que afirma Cardona y Arias (2008):

“Uno de los errores más comunes que se comete como docente y que además se plantea de esta forma en los textos, es que se define el concepto de probabilidad condicional y de una vez se pasa a exponer la fórmula. Después de que las formulas son expuestas, se comienza, generalmente a desarrollar ejercicios que tienden más a que se haga un reemplazo en la fórmula dada y no a que se comprenda el concepto como tal, es decir este tipo de ejercicios se convierten en la realización de una tarea mecánica que en última instancia no aporta mucho al desarrollo del pensamiento aleatorio ni a aumentar el nivel de abstracción del estudiante.” (2008, p. 8)

La afirmación anterior es consonante con concepciones enmarcadas dentro de lo que Skovsmose (2000) denomina como paradigma del ejercicio, el cual se caracteriza principalmente por la realización de actividades matemáticas descontextualizadas donde la

aplicación y repetición, por parte de los estudiantes, de los algoritmos que realiza el profesor al momento de explicar un tema son suficientes para lograr el aprendizaje de las matemáticas.

Cotton (1998) percibió que una clase de matemáticas que sigue este paradigma normalmente se divide en dos partes. En primer lugar, el profesor presenta algunas ideas y técnicas matemáticas para ejecutar y aplicar un algoritmo y a continuación los estudiantes trabajan en replicar el proceso visto, en ejercicios seleccionados por el profesor; ejercicios que comúnmente provienen de una autoridad externa a la clase que se toma como un “hecho o verdad” en las prácticas de aula (v.g. el libro de texto). Esto significa que la justificación de la relevancia del ejercicio no es parte de la lección de matemáticas como tal. Más aun, una premisa central del paradigma del ejercicio es que hay una sola respuesta correcta, por tanto, el estudiante que reproduzca la secuencia de enseñanza realizada por el profesor y llegue a esa única respuesta es quien “aprende realmente”.

Esta visión parcializada del aprendizaje no es la que se comparte como ideal de aprendizaje; sin embargo, se debe admitir que es tendiente a usar con mayor frecuencia en las prácticas pedagógicas o quehacer profesional, ya sea por cuestiones institucionales o por políticas educativas establecidas.

En este sentido, la noción de aprendizaje en nuestra labor diaria se ajusta en gran parte a la definición de aprendizaje descrita por Schunk en 1991 (citado por Zapata, 2012): “El aprendizaje implica adquisición y modificación de conocimientos, estrategias, habilidades, creencias y actitudes” (p. 6).

La cual, según Mayer (1992) corresponde a la metáfora del enfoque cognitivo: *aprendizaje como adquisición de conocimiento*. En la cual la enseñanza se basa en la transmisión de información, el foco de instrucción de esta propuesta pedagógica está centrada en el currículo (información apropiada) y los resultados son medibles de forma cuantitativa (de acuerdo a la cantidad de información).

De esta manera, el aprendizaje avanza de la misma forma que el contenido, y con el mismo esquema: El bloque o núcleo temático se divide en temas, cada tema se compone de lecciones y cada lección consta de enunciados de hechos, principios, fórmulas y ejercicios específicos. Independientemente de la naturaleza de los contenidos, de que sean acumulativos o no. El

alumno progresa paso a paso para dominar cada una de las partes por separado hasta cubrir el total del contenido curricular. El papel del profesor es mostrar de la mejor forma y transmitir la información del currículo. La evaluación se centra en valorar la consecución de objetivos de conocimiento y de información: Lo que el alumno sabe. Se evalúa de forma continua o por bloques, es lo mismo. (Zapata, 2012, p. 8)

Aun así, se han adoptado medidas para ir cambiando esta postura por un enfoque más constructivista en la que se atribuya valor y significado a los aprendizajes construidos por los estudiantes y principalmente, buscando la forma de contextualizarlos y transferirlos a situaciones apropiadas para ellos. No obstante, de acuerdo con Mayer (1992) esto implica retos en la enseñanza al estar orientada al procesamiento cognitivo, en el cual el foco de instrucción sea el estudiante (no tanto el currículo) y en consecuencia, el conocimiento no sea copiado por ellos sino construido conjuntamente con el profesor, desde la atribución de significado (comprender) y representando el nuevo conocimiento con un sentido adquirido (contenido del aprendizaje).

Ahora, desde los antecedentes reportados en la aplicación del Teorema de Bayes, el nivel de escolaridad al que se aplicó es diferente al escogido en este trabajo; aun así, la documentación deja entrever que el modelo de enseñanza trazado, recurre al trabajo desde un instrumento con uno o varios problemas de índole bayesiano, al cual los estudiantes (universitarios) utilizan alguna estrategia para su solución, por ejemplo el uso de representaciones gráficas o algún concepto particular (Blanco (2006)) y con ello analizan en sus respuestas, en su mayoría las falacias o sesgos que están conectados al Teorema de Bayes (Díaz y Batanero (2006a), Díaz (2007), Díaz, Ortiz, y Serrano (2007) León (2008), Zapata (2009), Morgado y Yáñez 2013) y una reportada en estudiantes de colegio que reporta el relato como instrumento para analizar los elementos del razonamiento estadístico (Parra y Torres 2013). Investigaciones presentan la enseñanza con apoyo tecnológico, donde se destaca el software de cálculo Excel (Díaz, y de la Fuente (2005 y 2006))

Contemplando que desde la postura asumida y algunas recomendaciones detectadas en los antecedentes, en este trabajo investigativo se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones: las situaciones presentadas deben estar dotadas de sentido para el estudiante, el docente debe procurar en vez de ser expositor, ser facilitador del aprendizaje

del estudiante, se desea que las tareas generen conflictos cognitivos que se puedan en lo posible resolver con base en las mismas tareas propuestas, se prevé de acuerdo al nivel de los estudiantes, dificultades y maneras de facilitar la comprensión y aprendizaje de los conceptos y procesos implicados, se busca que las situaciones propuestas sean fenomenológicamente relevantes para los estudiantes.

4.3 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

El uso de diversas representaciones semióticas en la resolución de problemas, presenta mayor accesibilidad y entendimiento si se utilizan diferentes tipos de representación en su solución. Es de aclarar que según la diversa literatura reportada, este tipo de estrategias se asocia a las presentadas para la probabilidad condicional, que por ende serán tenidas en cuenta. Algo común que poseen la gran mayoría de las referencias citadas, referentes al estudio del efecto del formato y del tipo de información sobre la capacidad de resolver problemas de probabilidad condicional, es que se han concentrado básicamente en problemas asociados con el Razonamiento Bayesiano en el sentido de calcular probabilidades condicionales inversas a partir del conocimiento de probabilidades condicionales, probabilidades marginales y verosimilitudes. Si bien este tipo de problemas son los de mayor utilidad y aplicación práctica, no son los únicos que se relacionan con la comprensión de la probabilidad condicional, al contrario, existe una variedad distinta de problemas que, si bien no son tan interesantes, sí pueden ayudar a identificar las dificultades que representan los problemas bayesianos en la medida que pueden brindar luces sobre la forma de razonar de las personas alrededor de la probabilidad condicional.

Estudios como los de Parzysz (1990), Dupuis y Rousset-Bert (1996) y Ávila (2001), evidencian cómo se potencializa la capacidad de resolver problemas de probabilidad condicional al utilizar diagramas de árbol, tablas de doble entrada y, en algunas ocasiones, los diagramas de Venn. Shaughnessy (2002) destaca la utilización de las tablas de contingencia o de doble entrada cuando se asume un enfoque de frecuencias naturales para resolver problemas de probabilidad condicional. En este mismo contexto, Yáñez (2001), asumiendo problemas binarios de probabilidad condicional, en el sentido de que solo se consideran dos eventos y sus complementos, determina claramente el alcance y las

limitaciones de los diagramas de árbol y de las tablas para resolver problemas de probabilidad condicional, así como las exigencias operativas que exige la solución algebraica.

Otra línea de investigación relacionada con la dificultad para resolver problemas de probabilidad condicional hace referencia a la forma en que se presenta la información:

Formato de probabilidad: la información está dada en probabilidades y los valores numéricos en porcentajes; formatos de frecuencias relativas: igual que el formato de probabilidad, pero sin utilizar la palabra probabilidad en la información, esta solo aparece en la pregunta final. Formato de frecuencias naturales: los porcentajes se traducen en función de un universo que permita trabajar con expresiones enteras... (p. 33)

Gigerenzer y Hoffrage (1995) realizaron una investigación del razonamiento involucrado en los problemas que implican el uso del Teorema de Bayes, llegando a la conclusión de que dicho razonamiento se mejora cuando a las personas se les presenta la información en formato de frecuencias naturales. Los formatos en frecuencias relativas producen la misma proporción de buenas respuestas que los formatos de probabilidad. En consecuencia, dicen los autores, la enseñanza de estos temas debe estar dirigida fundamentalmente a que los estudiantes puedan pasar del formato de probabilidades o porcentajes al formato de frecuencias naturales y evitar enseñar a insertar probabilidades en la fórmula de Bayes. En esta misma dirección están las investigaciones de Cosmides y Toby (1996); Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S. & Martignon, L (2002), y Martignon y Wassner (2002) y Sin embargo, los resultados de otras investigaciones conducen a pensar que no siempre las frecuencias naturales facilitan la resolución de un problema de probabilidad condicional (Lewis y Keren, 1999; Mellers y McGraw, 1999; Evans y et.al., 2000; Girotto y González 2002).

Lewis y Keren (1999), para destacar la cercana relación entre los formatos y el tipo de información, realizaron una investigación con el ánimo de probar que las mejoras reportadas por Gigerenzer y Hoffrage (1995) son producto más de la información que se suministra que del formato en que se presenta. Aclaran que la presentación de las probabilidades condicionales en formato de frecuencias naturales contiene algo más que esto, existe una continuidad en la información dada en el sentido de que la información condicional se da

sobre los resultados favorables al evento marginal condicionante, logrando que las probabilidades condicionales se asimilen con las probabilidades conjuntas, facilitando de esta manera la solución de los problemas. En conclusión, añaden los autores, lo que hace más fácil el problema es el tipo de información y no el formato en que se presenta. Gigerenzer & Hoffrage (1999) responden a Lewis & Keren (1999) diciendo que si el efecto del formato de frecuencias fuera debido fundamentalmente a que la información se presenta con intersecciones, como Lewis & Keren (1999) afirman, entonces el formato de probabilidad con intersecciones conduciría a un rendimiento similar al obtenido con el formato de frecuencias. Pero no es el caso, los resultados del estudio de 1995 muestran que con formato de probabilidades sólo se obtuvo 28% de respuestas bayesianas, en tanto que con el formato de frecuencias se alcanzó el 50%.

Para ejemplificar, se presenta un evento de índole bayesiano observado desde tres tipos de representación: Tabular, Diagrama de Venn y Diagrama de árbol.

Ejemplo: Características físicas

Se encuestaron 100 personas, donde se observa las características físicas que presentan de acuerdo a su color cabello y color de ojos. Se sabe que el total de personas con ojos verdes, es 34 y con cabello negro 15. El total de personas con cabello de color rojo es 10, entre ellos 3 con ojos color negro y 35 personas con ojos color café, entre ellas 25 con cabello color negro. Si una persona es elegida al azar y tiene los ojos color verde, ¿Cuál es la probabilidad que sea rubia?

4.3.1 Representación Tabular

Se emplean para registrar y analizar la relación entre dos o más variables habitualmente de naturaleza cualitativa.

Color ojos/ Color cabello	Rubio(B1)	Rojo(B2)	Negro(B3)	
Verde(A1)	15	4	15	T= 34
Negro(A2)	8	3	20	T=31
Café(A3)	7	3	25	T= 35
	T=30	T=10	T=60	TOTAL= 100

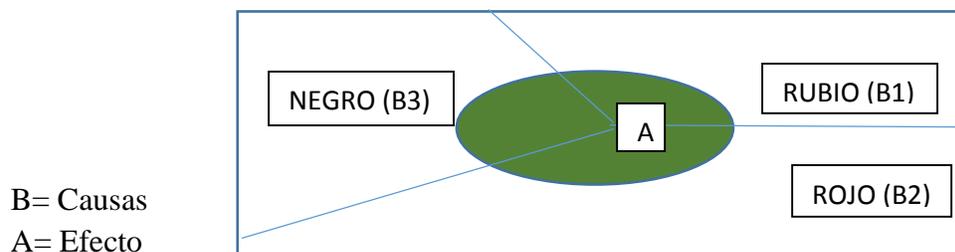
Tabla 9: Representación Tabular de un problema Bayesiano

Es decir, se necesita saber la frecuencia de Rubio/ojos verdes con el total de ojos verdes:

$$P(A/B) = \frac{15}{34} = 0.441$$

4.3.2 Representación Diagrama de Venn

Sirve para graficar la relación entre eventos y el correspondiente espacio muestral, se representa el espacio en un rectángulo y los eventos con círculos trazados dentro del rectángulo



Gráfica 1: Representación del diagrama de Venn de un problema de índole Bayesiano

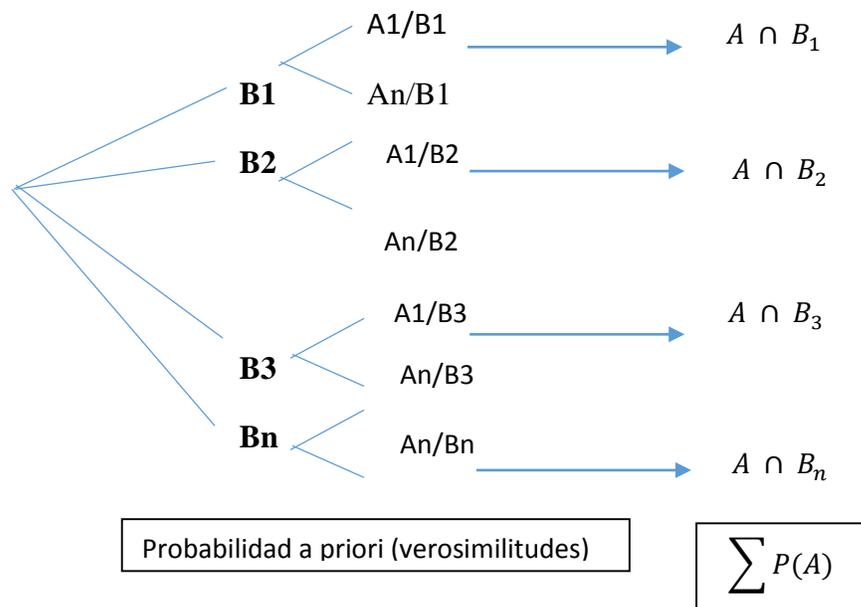
$P(B_1)$ Creencia original

$P(B_1/A)$ Creencia revisada

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) P(B_1)}{\sum P(B_1) P(A/B_1)} = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)}$$

4.3.3 Representación Diagrama de Árbol

Es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En el cálculo de la probabilidad se requiere conocer el número de objetos que conforman el espacio muestral.



Gráfica 2: Representación del diagrama de árbol para los problemas de índole Bayesiano

4.3.4 Tecnología

El Razonamiento Bayesiano es de gran relevancia para todo tipo de profesionales, como psicólogos, médicos, economistas o políticos, quienes lo encuentran importante en situaciones de toma de decisión bajo incertidumbre, como el diagnóstico, la evaluación o la investigación empírica; sin embargo su enseñanza en ocasiones no es lo suficientemente amplia como para superar los obstáculos que presenta este tema (falacia de las tasas base o falacia del eje temporal). Diaz y de la Fuente, (2006) proporcionan un listado de herramientas tecnológicas que podrían facilitar la adquisición de estas estrategias y la comprensión de los conceptos latentes tras ellas. Todo ello como parte de un trabajo más amplio, en el que pretenden diseñar estrategias didácticas de introducción de la inferencia bayesiana en estudiantes de psicología.

Algunos applets y recursos disponibles en Internet para facilitar la enseñanza del Razonamiento Bayesiano, clasificados en varios apartados, con su respectivo enlace:

- Bayes rule simulator: <http://www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/Bayes.html>
- Diagrama en árbol:
 - <http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html>
 - <http://www.stat.sc.edu/~west/applets/tree.html>

- Cálculo bayesiano:

http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v8n1/p_discrete.html

<http://members.aol.com/johnp71/bayes.html>

<http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Bayes/Bayes.html>

- Gratuitos: "Le Bayesien"

<http://www.univrouen.fr/LMRS/Persopage/Lecoutre/LeBayesienPlusenglish.htm>

<http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/welcome.shtml>

<http://espse.ed.psu.edu/espse/hale/507Mat/statlets/free/pdist.htm>

<http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/Distributions.html#BETA>

4.4 ASPECTO CURRICULAR

En este aspecto se observa la concepción de la probabilidad desde los aspectos legales e institucionales. Los lineamientos curriculares de matemáticas (1998) presentan la probabilidad incorporado en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos: La enseñanza de las matemáticas convencionales ha enfatizado la búsqueda de la respuesta correcta única y los métodos deductivos. La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permita exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones.

“Explorar e interpretar los datos, relacionarlos con otros, conjeturar, buscar configuraciones cualitativas, tendencias, oscilaciones, tipos de crecimiento, buscar correlaciones, distinguir correlación de causalidad, calcular correlaciones y su significación, hacer inferencias cualitativas, diseños, pruebas de hipótesis, reinterpretar los datos, criticarlos, leer entre líneas, hacer simulaciones, saber que hay riesgos en las decisiones basadas en inferencias” (p. 49)

Desde los estándares básicos en competencias en matemáticas (2006), se observa en la Tabla 1 (*Estándares básicos de competencias en matemáticas 2006- 2015*), que el trabajo de probabilidad

comienza de manera informal en los grados iniciales y la probabilidad condicional en los grados superiores.

Puntualizando a nivel institucional, el programa de electivas es regido por el currículo para la excelencia académica y formación integral, currículo 40 X 40 (2014); que aunque se basan en los pensamientos enunciados desde los lineamientos (numérico, variacional, geométrico, métrico y aleatorio), y retoman cierta gradualidad dada desde los estándares, estos son distribuidos en cada ciclo y dependiendo el centro de interés; la información se condensa en la Tabla 10:

CICLO	INDICADOR REFERIDO A PROBABILIDAD
Ciclo 1	No hay
Ciclo 2	No hay
Ciclo 3	No hay
Ciclo 4	No hay
Ciclo 5	Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.

Tabla 10: Estándares básicos de competencias en matemáticas en el currículo 40 X 40

Contemplando así, la ausencia de este concepto que efectivamente debe ser promovido desde la primera infancia que posiblemente ayuda a desarrollar la cultura estadística y posiblemente se pueda llevar un proceso y no una lista de conceptos por ciclo.

5 MARCO METODOLÓGICO

En el presente capítulo, se hace referencia a la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación y en el método para la recolección de los datos que proporcionaron información para dar cuenta de la pregunta y los objetivos de dicha investigación. Se considera como metodología de diseño (Molina, et al. 2011) de la que hace parte el experimento de enseñanza; propuesta donde se presentan: el objetivo de la sesión, las tareas planteadas, su intención, el proceso hipotético de aprendizaje, la gestión de clase, ideas para la socialización y el enlace de cada taller.

5.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Se asumen las características de la investigación cualitativa; para ello, se acepta el énfasis que plantea Wolcott (1982; citado en Miles & Huberman, 1994) ya que cumplirá las siguientes particularidades (a) se llevará a cabo a través de un contacto prolongado con un “campo”; (b) el papel del investigador es obtener una visión sistémica e integrada del contexto de estudio; (c) el investigador intenta captar datos sobre las percepciones de los actores locales; (d) el tipo de interpretación depende de razones teóricas o de razones de coherencia interna; (e) la mayoría de los análisis se realizan con “palabras”, las cuales, pueden ser sub-agrupadas o divididas en segmentos semióticos.

Se enmarca en el paradigma del interpretativismo, con una perspectiva interpretativa, y algunos rasgos de la antropología social; pues así, como lo describe Miles y Huberman (1994), estas perspectivas centran su atención en la interpretación, comprensión y comparación de signos, en cuanto a las acciones y discursos con base al marco de referencia, en este caso de problemas bayesianos, así como en los fenómenos del aula que interfieran y permitan hacer inferencias sobre la cultura o la sociedad objeto de estudio.

Es una estrategia metodológica que permita un acercamiento a la comunidad educativa del Colegio Grancolombiano IED, accediendo a la comprensión de las necesidades formativas de los estudiantes, no sólo en lo relacionado con los aspectos cognitivos, sino con aquellos elementos sociales, que caracterizan la clase de matemáticas (estadística) de los estudiantes de grado séptimo, en su espacio de contrajornada. En razón de los anteriores argumentos, se

acoge como herramienta de organización de las actividades en el aula, el Experimento de Enseñanza, el cual enfatiza en la importancia de analizar la actividad matemática de los estudiantes a medida que ésta es situada en el contexto social del aula y que además permite:

- Intervención directa en la práctica
- La ilustración de los hechos, para la comprensión, interpretación y explicación de situaciones en torno al Razonamiento Bayesiano.
- La contextualización de dichos hechos y de los mismos argumentos e interpretaciones, procurando dar significado a los fenómenos que rodean, tanto a la investigadora/docente, como a los estudiantes.
- La observación e interpretación, por parte de la investigadora/docente frente a las acciones que sucedan en el aula de matemáticas.

La inclusión de elementos metodológicos concernientes a los experimentos de enseñanza obedece a una razón principalmente y es que dado que una de las intenciones de este trabajo es el acercamiento de investigaciones relacionadas con el Razonamiento Bayesiano en el aula, la metodología de experimentos de enseñanza intenta dar respuesta a este propósito en la medida en que se concibe como un enfoque que vincula teoría y práctica, de tal manera que no se priorice la primera por encima de la segunda (Cobb, 2000; Simon, 1995).

5.2 EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El Experimento de Enseñanza, dentro de la metodología de diseño, se considera el modelo más cercano a la “práctica habitual del docente, al constituir[se] en el diseño, puesta en práctica y análisis de un conjunto de intervenciones en un aula, que persigue un [determinado] aprendizaje” (Molina, et al. 2011, p. 86), lo que caracteriza el método del docente, al: planear y diseñar una actividad para determinado momento del proceso pedagógico; gestionar la misma dentro del aula afrontando imprevistos y el manejo de variables no controlables propias del proceso; evaluando los resultados, tanto desde la planeación como desde los “avances” en el transcurso de aprendizaje, y a partir de estas reflexiones, retomar el proceso cíclico, de iniciar otra planeación y diseño para hacer una nueva y secuencial intervención en el aula, hasta llegar a los objetivos esperados.

Para poder implementar este tipo de organización y diseño dentro de la investigación, es necesario comprender que “la característica principal de estos estudios es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos” (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000, citados en Molina, et al., 2011, p.81). Para efectos tanto de la intervención como de los análisis posteriores que se proponen en este trabajo, es necesario precisar que dicho equipo de investigadores no coincide con los anteriores planteamientos, dado que no se pudo conformar un equipo distinto al que se conformó con el profesor asesor. Es necesario entonces señalar que ésta es una diferencia esencial de la que fueron conscientes el asesor y la estudiante en las discusiones que sostuvieron con regularidad frente a los experimentos de enseñanza y a las decisiones y acuerdos que se consensuaban. No obstante, no se escatimaron esfuerzos por tomar elementos de este enfoque que como ya se justificó son pertinentes para abordar la pregunta de investigación planteada en este trabajo. Los roles de la docente/investigadora están enmarcados con la participación activa en el análisis hipotético y retrospectivo del diseño, planeación, gestión y evaluación. A su vez, el asesor/ investigador tendrá una participación activa en el diseño y análisis tanto preliminar como retrospectivo del experimento.

Desde estos roles, se abordan las tres fases del Experimento de Enseñanza: **(F1)** Diseño Instruccional y Planeación, en el cual se traza la trayectoria hipotética de aprendizaje **(F2)** Experimento en el Aula, a través de un proceso cíclico entre: el diseño de los instrumentos para la recolección de datos propios de la investigación, la puesta en marcha de dichos diseños, la recolección de los datos, y el análisis de las hipótesis de aprendizaje particulares de cada una de las sesiones. **(F3)** relacionada con el Análisis Retrospectivo en el cual se hace una revisión de todos los datos recogidos durante la **(F2)** y se contrasta con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje formulada en la **(F1)**. El fin de este análisis, es el de contribuir en la propuesta y desarrollo de un *modelo teórico*, que sirva como fuente orientadora para el diseño del Razonamiento Bayesiano que susciten el desarrollo de la Cultura Estadística, en estudiantes de grado séptimo; es decir, que el Análisis Retrospectivo tiene como fin identificar aspectos relevantes, que se deben tener en cuenta para futuros Experimentos de Enseñanza en el ámbito de la probabilidad Bayesiana que promueva la cultura estadística.

5.3 PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

Basándose en referentes teóricos acerca de los fundamentos de la didáctica de la Estadística, y el espacio académico del Colegio Grancolombiano I.E.D, se propone y desarrolla un Experimento de Enseñanza, que pretende consolidar los objetivos de la Cultura Estadística, en el sentido que Gal citado por Batanero (2002), hace referencia a la unión de dos componentes: la capacidad para interpretar, evaluar críticamente la información estadística y la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a informaciones estadísticas cuando sea relevante. Por medio del diseño y desarrollo de una propuesta que utiliza los elementos del Razonamiento Bayesiano. El proceso se sintetiza en la Gráfica 3.

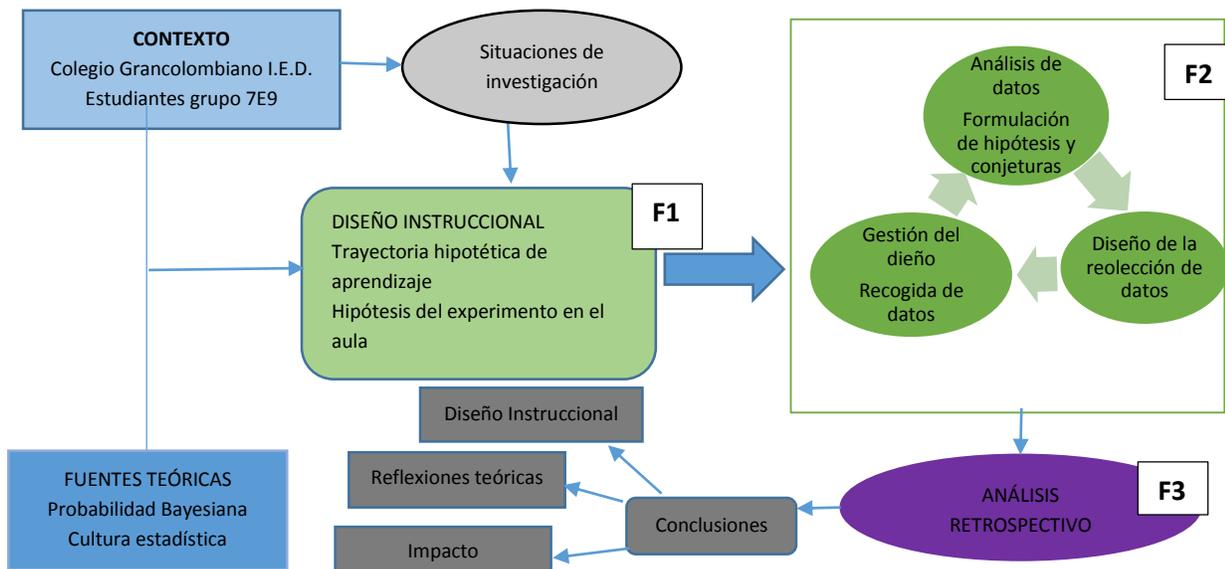


Gráfico 3: Proceso del Experimento de Enseñanza, adaptado de (Álvarez y Montoya 2011)

5.3.1. Población y contexto institucional

Los datos reunidos que se presentan en este trabajo, son recogidos en el Colegio Grancolombiano I.E.D ubicado en la localidad séptima Bosa de Bogotá, D.C (lugar donde labora la docente/investigadora), en su proyecto de contra jornada, denominado allí como electivas; estas están regidas por las orientaciones curriculares para la excelencia académica y formación integral, currículo 40 X 40 (2014); El grupo 7E9 es el escogido para la aplicación ya que cumple con la viabilidad en cuanto a tiempo y conceptos previos sobre estadística. Está conformado por 26 estudiantes con edades comprendidas entre los 12 y 15 años de edad.

Institucionalmente las electivas del grupo escogido son: Música, Desarrollo del pensamiento lógico matemático, (espacio donde se realizará la intervención) y Fútbol. Dichas electivas son semestrales y tienen el mismo sistema de evaluación que el de la jornada regular.

1. FASE DE DISEÑO Y PLANEACIÓN (F1)

La aplicación del experimento de enseñanza, será trabajado bajo tres “tareas”, que pretenden promover el desarrollo del Razonamiento Bayesiano, contemplando alternativas de solución dirigidas hacia las representaciones gráficas, precauciones con las falacias o sesgos de Díaz, Ortiz y Serrano (2007), León (2008) y las sugerencias dadas por Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995) y Yañez, et all (2012) en cuanto a los formatos para representar la probabilidad condicional. En las siguientes tablas se sintetizan dichas tareas, que contemplan: las metas de las sesiones, intencionalidad, el proceso hipotético de aprendizaje, las ideas para la socialización y el análisis preliminar de cada sesión.

2. EXPERIMENTO EN EL AULA (F2)

Aquí, se pone en marcha la fase uno del experimento de enseñanza, estableciendo como **Hipótesis de aprendizaje:** La transformación de problemas de tipo bayesiano en términos de situaciones expresados en lenguaje cotidiano que hacen uso de: frecuencias naturales, representaciones tabulares, diagramas de Venn, y simulaciones de experiencias aleatorias, posibilitan en los estudiantes de grado séptimo un acercamiento a situaciones probabilísticas que involucran Razonamiento Bayesiano.

Se exponen los desarrollos de cada sesión y sus elementos significativos, los cuales aportan desde el análisis preliminar a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y la reformulación del diseño, en los casos que se considera necesario, se debe evidenciar, de igual manera, avances en los proceso de aprendizaje de los estudiantes, en cuanto al desarrollo y apropiación de los elementos del Razonamiento Bayesiano con la Cultura Estadística, reorientando las acciones hacia las metas de aprendizaje, si así se considera preciso.

Para la recolección de datos de la investigación, en cada una de las sesiones se le entrega a cada estudiante una copia con los problemas, se disponen de una cámara de video, para grabar

las entrevistas del profesor a los estudiantes, las socializaciones y la clase en general. La recolección de la información se hará a partir de la observación (informal y no sistematizada), al igual que se extraerá de la experiencia vivida por la investigadora/docente a lo largo del desarrollo de la sesión. Se tendrán como evidencia, los registros de los estudiantes y los diálogos y/o discusiones que se susciten en cada clase.

La recolección de la información durante las intervenciones en el aula se hace a partir de los recursos descritos en la Tabla 11, estos constituyen los insumos a través de los cuales se realiza el análisis preliminar sesión a sesión y el análisis retrospectivo:

TÉCNICA	INSTRUMENTO	PROPÓSITO	LOGÍSTICA
Registro escrito de los estudiantes	Portafolio Hojas de registro	Recopilar registros escritos en cuanto al desarrollo de cada una de las consignas individuales y los espacios de la socialización	Al iniciar cada sesión se entrega a los estudiantes, el material a trabajar (hojas, las tareas, actividades) para trabajar en dicha sesión, al finalizar se recoge para organizarlo y analizar los registros escritos hechos por los estudiantes
Grabaciones de video	Cámara de video	Capturar de forma precisa las intervenciones que realizan los estudiantes en el momento de las socializaciones, sus grupos de trabajo e intervenciones con la docente/investigadora	Cada una de las sesiones será grabada con una o dos cámaras de video que estarán enfocando el trabajo en el aula. Una de las cámaras será fija y la otra se ira moviendo. Luego se observan y transcriben para realizar el análisis preliminar sesión a sesión
Grabaciones de audio	Grabadora Celulares	Registrar las intervenciones que realizan cada uno de los estudiantes, ya sea estudiante-estudiante o estudiante- docente /investigadora en los momentos de la clase	Se dispone de videograbadoras o celulares para grabar las discusiones de cada par de estudiantes al solucionar y socializar las consignas. Luego se escuchan y transcriben para

			realizar el análisis preliminar sesión a sesión
Observación directa/ Notas de clase	Portafolio de la docente/Investigadora Hojas	Observación atenta a lo que vaya transcurriendo en las sesiones, para registrar información relevante que ha de ser importante en el análisis preliminar y el retrospectivo	En cada sesión se recogen notas sobre las observaciones de manera informal, para luego en el análisis preliminar sesión a sesión tomar decisiones acerca de la logística y rediseño de las siguientes tareas, parte de esta información se tendrá en cuenta en el análisis retrospectivo haciendo el balance de cada tarea y reportando asuntos relacionados con las estrategias de solución en problemas de tipo bayesiano

Tabla 11: Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

3. ANÁLISIS RETROESPECTIVO (F3)

Implica, en primer lugar, la organización de la información obtenida en la F2, profundizando en el análisis del Experimento en el Aula, apoyados en el marco teórico que fundamenta la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y evidenciando si los logros de la clase que corresponden a las metas de aprendizaje propuestas; y en segundo lugar, implica el desarrollo de un modelo teórico. En esta fase se hace necesaria la herramienta analítica donde se elaboran posibles matrices y se cruza la información obtenida en cada instrumento y es contrastada desde el marco de referencia. Además, este proceso de elaboración y refinamiento de categorías debe acompañarse de una discusión enfocada a validar las categorías propuestas y emergentes que se materializa con base en evidenciar la concordancia con el asesor u otros pares académicos en cuanto a la clasificación de respuestas de los estudiantes en una u otra categoría.

De acuerdo con la pregunta de investigación y los objetivos planteados, se pretende categorizar los datos recogidos, respecto a tres conceptos fundamentales: Cultura estadística (Batanero 2002), Razonamiento Bayesiano (León 2008) y los registros de representación de los problemas bayesianos (Díaz y de la fuente 2005). Estableciendo así, las siguientes categorías y subcategorías sin discriminar que podrán existir algunas emergentes:

CATEGORÍA	SUB-CATEGORÍA			
Cultura estadística [CE]	Interpretar [CEI] Información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos.		Evaluar [CEE] críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos.	
	Comunicar [CEC] los hechos respecto a información estadística.		Discutir [CED] Opina respecto a la información estadística cuando sea relevante.	
Razonamiento Bayesiano [RB]	La utilización del Razonamiento Bayesiano es nula, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le realiza a los datos. [RBO]	Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori [RB1]	Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori condicionada a la experiencia [RB2]	Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori adicionando argumentos respecto a los datos [RB3]
Registros de Representación [R]	Tabular [RT]		Diagrama de Venn [RDV]	
	Frecuencias Naturales [RF]			

Tabla 12: Categorías y subcategorías de la herramienta analítica

6 DESARROLLO DEL PROYECTO

Basándose en referentes teóricos acerca de los fundamentos de la Didáctica de la Estadística, y en el contexto del espacio académico del Colegio Grancolombiano I.E.D, se propone y desarrolla un Experimento de Enseñanza, que pretende consolidar objetivos de la Cultura Estadística, en el sentido sugerido por Gal (citado por Batanero, 2002), que hace referencia a la unión de dos componentes: la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, y la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones cuando sea relevante.

6.1 FASE DE DISEÑO Y PLANEACIÓN

La metodología de diseño y su desarrollo se organiza en torno a elementos del Razonamiento Bayesiano y está dividida en tres tareas, que pretenden promover el desarrollo del mismo. Para ello se contemplan alternativas de solución dirigidas hacia las representaciones gráficas, precauciones con las falacias o sesgos (Díaz, Ortiz y Serrano, 2007 y León, 2008) y sugerencias dadas por Gigerenzer y Hoffrage (1995) y Yañez, (2012) en cuanto a los formatos para representar la probabilidad.

6.2.1 Tarea 1 “Qué dicen los datos”

OBJETIVO DE APRENDIZAJE. Utilizar los elementos de la probabilidad Bayesiana: la probabilidad a priori y la evidencia observada, para argumentar la probabilidad a posteriori.

TAREA PROPUESTA. Los estudiantes de grado séptimo del I.E.D Grancolombiano realizarán una encuesta que indagará sobre sus gustos hacia el fútbol. La muestra será constituida por los estudiantes que asisten a las electivas en su contra jornada. Se estima que el grupo está compuesto por 60 mujeres y 40 hombres.

Con los datos recolectados en el colegio, se enuncia la siguiente relación: Uno de cada 4 hombres juega el fútbol y una de cada 10 mujeres juega fútbol.

En un sorteo se selecciona al azar un estudiante del colegio y resulta que juega fútbol. ¿Será que el sorteo lo ganó una mujer?

A la luz de la información anterior determine:

- Total de estudiantes de ambos sexos que juega futbol
- Total de mujeres que juega fútbol
- Cociente del número de estudiantes mujeres que juega fútbol sobre el total de estudiantes de ambos sexos que juega futbol.
- Justifique si está de acuerdo con la siguiente afirmación:

Si la rifa la gana alguien que juega fútbol lo más probable es que sea mujer.

INTENCIÓN DE LAS TAREAS. Con el trabajo planteado se quiere propiciar el uso de los elementos de la probabilidad Bayesiana, que están expuestos en la recolección de datos, para que por medio del tratamiento de esta información se abra espacio a la argumentación sobre la probabilidad a posteriori. Además, subyacente a la tarea se quiere propiciar cultura estadística. Así, en el ítem a y b se pretende que los estudiantes construyan y verifiquen la evidencia utilizando la información a priori. En el ítem c, se pretende que los estudiantes hallen la probabilidad del evento y en el ítem d, se pretende que los estudiantes revisen la probabilidad dada en el ítem anterior y argumenten o verifiquen la información a posteriori, además que revisen lo que entienden a partir de la evidencia sin utilizar el formalismo del Teorema de Bayes.

Transposición del Teorema de Bayes a la actividad

I. La expresión general del Teorema:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2)}$$

II. Para el caso expuesto toma la siguiente forma:

$$P(M/F) = \frac{P(F/M) \cdot P(M)}{P(F/M) \cdot P(M) + P(F/H) \cdot P(H)}$$

Donde se tiene:

M: Es Mujer

H: Es Hombre

F: Juega Fútbol

F^c : No juega fútbol

a) La evidencia la constituye el evento F, es decir, saber que juega fútbol.

b) Las probabilidades a priori son:

$$P(M) = \frac{60}{100} \text{ y } P(H) = \frac{40}{100}$$

c) Y las verosimilitudes son:

$$P(M/F) = \frac{1}{10} \text{ y } P(H/F) = \frac{1}{4}$$

III. La solución con el Teorema de Bayes se expresa así:

$$P(M/F) = \frac{(1/10) \cdot (60/100)}{(1/10) \cdot (60/100) + (1/4) \cdot (40/100)}$$

$$P(M/F) = \frac{(0.1) \cdot (0.6)}{(0.1) \cdot (0.6) + (0.25) \cdot (0.4)}$$

$$P(M/F) = \frac{0.06}{0.06 + 0.1}$$

$$P(M/F) = \frac{0.06}{0.16}$$

$$P(M/F) = 0.375$$

IV. Al utilizar registros de representación se tiene:

En la representación tabular:

	F	F^c	Totales
M	6	54	60
H	10	30	40
Totales	16	84	100

Tabla 13: Representación Tabular, Actividad 1

$$P(\text{Mujer dado que juega fútbol}) = \frac{6}{16} = 0,375$$

Al utilizar un Diagrama de Venn la representación se puede representar así:

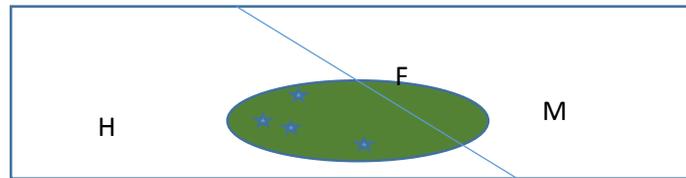


Gráfico 4: Diagrama de Venn, asociado a la Actividad 1

En donde se quiere significar que los eventos H y M son disyuntos y que el evento F, que contiene 16 elementos en total, comparte 10 elementos con el evento H (es hombre) y 6 elementos con el evento M (es mujer).

PROCESO HIPOTÉTICO DE APRENDIZAJE. Se espera que los estudiantes luego de la recolección de datos de la encuesta (gustos hacia el fútbol) organicen e interpreten los datos para que propongan respuestas a los ítems a, b y c. En donde se supone que las sugerencias de Gigerenzer y Hoffrage (1995) y Yañez, (2012), al presentar la información omitiendo la palabra probabilidad sino en términos de frecuencias naturales deben posibilitar acercamientos a la pregunta formulada y propiciar que los estudiantes empleen diferentes estrategias para la solución, de modo que se puedan identificar distintas actuaciones en los estudiantes. Al igual que las Lonjedo y Huerta (2004) Gigerenzer (1994) y Ojeda (1996) (citado en Díaz y de la Fuente 2007), con la naturaleza de los datos; presentarse en forma de frecuencias en vez de porcentajes, razones o probabilidades. Se sugiere un enfoque frecuencial de la probabilidad antes de que esta se muestre de una manera formal.

Además, se espera que los estudiantes no respondan por intuición, si no que utilicen la información a priori contrastando con los datos recogidos.

GESTIÓN DE LA CLASE E IDEAS PARA LA SOCIALIZACIÓN. En un primer momento la sesión será llevada a cabo de manera grupal (tres personas), para que se diseñe la encuesta, se lleve a cabo la recolección de datos, y se organice dicha información. En este momento el profesor revisará las encuestas (en cuanto a la formulación de preguntas y opciones de respuesta) para su posterior aplicación. Así como la verificación de la organización de la información recolectada.

Luego en un espacio de 10 a 15 minutos se socializan los resultados, para establecer relaciones de proporcionalidad tales como: uno de cada cuatro hombres juega el fútbol y una

de cada diez mujeres juega fútbol. En el segundo momento de la sesión, el trabajo será individual, donde cada estudiante responde a los tres cuestionamientos (ítem a, b, c) presentados. En seguida se realizará una socialización en general sobre las respuestas. El rol del profesor será observador, guía de la actividad, y de escucha activa frente a los argumentos que los estudiantes expongan.

Por último, se presentará la pregunta d, para que los estudiantes respondan individualmente, se dará un espacio de 10-15 minutos para posteriormente hacer la socialización final. El rol del profesor nuevamente será observador, y de escucha activa frente a los argumentos que los estudiantes proporcionen para justificar dicha solución.

Durante la socialización de las preguntas se podrían plantear interrogantes como: ¿el resultado del cociente influye en la respuesta de la pregunta D? ¿Se pregunta por la dificultad del problema?

Se enfatiza en si los estudiantes optaron por alguna estrategia de resolución y en los argumentos que plantean los estudiantes.

Los estudiantes asumirán un rol participativo en donde, darán a conocer sus opiniones sobre los resultados obtenidos. Se espera que escuchen a sus compañeros y contrasten sus opiniones.

6.2.2 Tarea 2 “Jugando con los dados”

OBJETIVO DE APRENDIZAJE. Tomar decisiones de acuerdo a la experiencia de juego, para que utilizando el Razonamiento Bayesiano se propongan estrategias ganadoras.

TAREA PLANTEADA. La tarea planteada fue adaptada de la propuesta que presenta Lopes (2013) acerca de un juego con dados. En este juego se utilizan dos dados, y se disputa por dos jugadores. Son considerados casos ganadores los siguientes resultados:

(4; 1) o (1; 4) vale 1 punto; (4; 2) o (2; 4) vale 2 puntos; (4; 3) o (3; 4) vale 3 puntos; (4; 4) vale 4 puntos; (4; 5) o (5; 4) vale 5 puntos; y (4; 6) o (6; 4) vale 6 puntos.

Cada participante podrá realizar hasta dos lanzamientos. Si en el primer lanzamiento el participante no consigue obtener un 4 en alguno o en ambos dados, entonces se realizará un

segundo lanzamiento con los dos dados. Si en el primer lanzamiento aparece en alguno de los dados una cara con 4, se guarda este dado y se decide si se lanza o no el otro dado. El punto registrado será el del segundo lanzamiento. Gana el juego el participante que obtenga la mayor puntuación. (En veinte lanzamientos) Cuando los dos jugadores obtengan la misma puntuación entonces se realizará una nueva partida.

En el intermedio del juego, se realizarán las siguientes preguntas:

- a) ¿El jugador siempre debe aprovechar el segundo lanzamiento?
- b) ¿El segundo jugador tiene mayor posibilidad de ganar?

Luego, al finalizar el juego, Lopes (2013) propone realizar las siguientes preguntas de acuerdo a la información (puntaje) obtenida en los lanzamientos:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador 1 marcara un punto en este juego?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador 1 marcara 5 puntos en este juego?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador 1 obtenga 0 puntos en el primer lanzamiento sabiendo que marcó 5 puntos en el juego?

Pero, atendiendo al nivel de los estudiantes para hallar la probabilidad; se reformulan las preguntas de la siguiente manera:

- 1) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje final sea 5 si en el puntaje inicial fue 0?
- 2) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje final sea 0?
- 3) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje inicial sea 0?
- 4) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje inicial sea 0 si el puntaje final fue 2?

Según los datos recopilados, explique:

- a) ¿Es conveniente jugar si en el puntaje inicial tienes 3?
- b) ¿Es conveniente jugar nuevamente si el puntaje inicial fue 4?
- c) Usted que prefiere: ¿jugar de primero o jugar de segundo?

INTENCIÓN DE LAS TAREAS. Con esta tarea se pretende potencializar el Razonamiento Bayesiano y suscitar la cultura estadística, impulsando a que los estudiantes organicen de manera tabular el puntaje de los lanzamientos; y a su vez utilicen este registro como estrategia productiva para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Los ítems a y b, tienen como intención que los estudiantes se familiaricen con el juego y dominio de sus reglas o estrategias que han elaborado y que consideran ganadoras. Estas deber ser respondidas basándose en la información a priori dispuesta; es decir por la experiencia que se lleva del juego hasta el momento.

Con los ítems 2 y 3 se pretende que los estudiantes inmersamente calculen la probabilidad marginal; contemplen las posibles opciones de resultados probables en el juego y a su vez sugieran o manifiesten los posibles resultados que pueden ocurrir. Además, de que observen si existe algún evento condicionado a otro. Con el ítem 1 y 4 se pretende que los estudiantes hagan uso de la tabla para calcular la probabilidad a posteriori del evento.

Con la experiencia del juego, los datos recolectados y organizados, se pretende que los estudiantes utilicen el Razonamiento Bayesiano para que evalúen y argumenten su estrategia de juego al “plantarse” en 3 o 4 de acuerdo al resultado de su primer lanzamiento

Por último, se intenta hacer una reflexión que utilice el Razonamiento Bayesiano sobre la posición del jugador (c) ya que: Cuando el segundo jugador realiza sus lanzamientos, su posibilidad de victoria está condicionada a los puntos que el primer jugador obtuvo a priori. Teniendo en cuenta que el jugador 2 realizó su juego después del jugador 1. El jugador 2, podría adoptar por la siguiente estrategia: Si en su primer lanzamiento obtiene una puntuación mayor que la del jugador 1, el juego termina con la victoria del jugador 2. Si obtiene una puntuación menor que la del jugador 1 en su primer lanzamiento, debe utilizar su segundo lanzamiento. Ahora, de haber un empate con el jugador 1, en el primer lanzamiento, debe utilizará su segundo lanzamiento en el caso de que el jugador 1 haya obtenido 3 puntos o menos.

Se deben revisar estas probabilidades, para así concluir que: la probabilidad de ganar el juego es ligeramente mayor que la probabilidad de perder. El segundo jugador está en mejor situación, ya que conoce la puntuación obtenida por su adversario.

Transposición del Teorema de Bayes a la actividad

Para esta sesión se utilizó una simulación del juego, que permitiera verificar la relación con el Teorema de Bayes debido a la gran cantidad de datos implicado en la actividad.

I. Un extracto de 20 replicaciones que contiene la presentación de la hoja electrónica en la que se plasma la simulación del juego para 200 lanzamientos, se presenta en la Tabla 14.

1er Juego de JUAN							2do juego de JUAN				1er Juego de María						2do juego de María					
J N°	D1	D2	Pin	¿Sale 4?	¿Juega?		D1	D2	Pts 2L	Balance	J N°	D1	D2	Pin	¿Sale 4?	¿Juega?	D1	D2	Pts 2L	Balance	Ganador	
1	6	2	0	no	si, dos dados		5	4	5	excelente	1	4	2	2	si	si, un dado	1		1	mal	Juan	
2	3	4	3	si	si, un dado		1	listo	1	mal	2	1	1	0	no	si, dos dados	6	5	0	no ganó nada	Juan	
3	5	3	0	no	si, dos dados		3	3	0	no ganó nada	3	2	1	0	no	si, dos dados	4	6	6	excelente	María	
4	6	4	6	si	no	no jugó	no jugó	no jugó	6	bien	4	6	6	0	no	si, dos dados	5	1	0	no ganó nada	Juan	
5	2	6	0	no	si, dos dados		5	4	5	excelente	5	1	5	0	no	si, dos dados	6	4	6	excelente	María	
6	2	6	0	no	si, dos dados		1	6	0	no ganó nada	6	3	6	0	no	si, dos dados	4	2	2	excelente	María	
7	2	1	0	no	si, dos dados		4	6	6	excelente	7	5	3	0	no	si, dos dados	4	3	3	excelente	Juan	
8	3	6	0	no	si, dos dados		5	1	0	no ganó nada	8	6	3	0	no	si, dos dados	1	5	0	no ganó nada	empate	
9	1	3	0	no	si, dos dados		3	5	0	no ganó nada	9	4	6	6	si	no	no jugó	no jugó	6	bien	María	
10	4	4	4	si	no	no jugó	no jugó	4	bien	10	5	5	0	no	si, dos dados	2	3	0	no ganó nada	Juan		
11	2	5	0	no	si, dos dados		6	2	0	no ganó nada	11	5	1	0	no	si, dos dados	2	4	2	excelente	María	
12	4	4	4	si	no	no jugó	no jugó	4	bien	12	4	5	5	si	no	no jugó	no jugó	5	bien	María		
13	4	2	2	si	si, un dado		1	listo	1	mal	13	5	6	0	no	si, dos dados	6	6	0	no ganó nada	Juan	
14	4	6	6	si	no	no jugó	no jugó	6	bien	14	4	6	6	si	no	no jugó	no jugó	6	bien	empate		
15	4	6	6	si	no	no jugó	no jugó	6	bien	15	3	5	0	no	si, dos dados	6	3	0	no ganó nada	Juan		
16	2	1	0	no	si, dos dados		1	3	0	no ganó nada	16	1	2	0	no	si, dos dados	2	4	2	excelente	María	
17	3	1	0	no	si, dos dados		3	6	0	no ganó nada	17	5	3	0	no	si, dos dados	4	3	3	excelente	María	
18	6	5	0	no	si, dos dados		1	3	0	no ganó nada	18	2	6	0	no	si, dos dados	2	3	0	no ganó nada	empate	
19	5	3	0	no	si, dos dados		2	5	0	no ganó nada	19	5	2	0	no	si, dos dados	2	4	2	excelente	María	
20	5	1	0	no	si, dos dados		4	1	1	excelente	19	4	4	4	si	no	no jugó	no jugó	4	bien	María	

Tabla 14: Simulación del juego de dados en Excel

II. El recuento en la simulación para el primer jugador en 20 lanzamientos es:

Etiquetas de fila	Cero	Cinco	dos	seis	tres	uno	Total General
Cero	10		2	2	1	1	16
Cinco		1					1
Dos		1	1				2
Uno						1	1
Total General	10	2	3	2	1	2	20

Tabla 15: Recuento de la simulación del juego de dados para 20 replicaciones

III. Transposición de la representación tabular, de la simulación realizada en Excel

Puntaje Final	Puntaje Inicial							Totales
	0	1	2	3	4	5	6	
0	10							10
1		1						1
2			1					1
3	1							1
4		1	1					2
5	1			1	1	1		4
6							1	1
Totales	12	2	2	1	1	1	1	20

Tabla 16: Representación tabular asociada a la actividad del juego de dados

En las preguntas:

$$1) P(5/0) = \frac{1}{12} = 0,083$$

$$2) P(\text{puntaje final } 0) = \frac{10}{20} = 0,500$$

$$3) P(\text{puntaje inicial } 0) = \frac{12}{20} = 0,600$$

$$4) P(0/2) = \frac{0}{1} = 0$$

IV. La expresión del Teorema de Bayes para esta actividad se debe enunciar así:

$$P(A_0/B) = \frac{P(B/A_0) \cdot P(A_0)}{P(B/A_0) \cdot P(A_0) + P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) + P(B/A_4) \cdot P(A_4) + P(B/A_5) \cdot P(A_5) + P(B/A_6) \cdot P(A_6)}$$

Donde se tiene:

Evidencia B es el conocimiento de que el puntaje final es 2, por lo que $P(B) = \frac{1}{20}$

a) Las probabilidades a priori son:

$$P(A_0) = \frac{12}{20} \quad P(A_1) = \frac{2}{20} \quad P(A_2) = \frac{2}{20} \quad P(A_3) = \frac{1}{20} \quad P(A_4) = \frac{1}{20} \quad P(A_5) = \frac{1}{20} \quad \text{y} \quad P(A_6) = \frac{1}{20}$$

b) Las verosimilitudes son:

$$P(B/A_0) = \frac{0}{12} \quad P(B/A_1) = \frac{0}{2} \quad P(B/A_2) = \frac{1}{12} \quad P(B/A_3) = \frac{0}{1} \quad P(B/A_4) = \frac{0}{1} \quad P(B/A_5) = \frac{0}{1} \quad P(B/A_6) = \frac{0}{1}$$

V. Solucionando con el Teorema de Bayes

$$P(A_0/B) = \frac{\binom{0}{12} \cdot \binom{12}{20}}{\binom{0}{12} \cdot \binom{12}{20} + \binom{0}{12} \cdot \binom{2}{20} + \binom{1}{2} \cdot \binom{2}{20} + \binom{0}{1} \cdot \binom{1}{20} + \binom{0}{1} \cdot \binom{1}{20} + \binom{0}{1} \cdot \binom{1}{20} + \binom{0}{1} \cdot \binom{1}{20}}$$

$$P(A_0/B) = \frac{0 * 0.6}{(0 * 0.06) + (0 * 0.1) + (0.5 * 0.1) + (0 * 0.05) + (0 * 0.05) + (0 * 0.05) + (0 * 0.05)}$$

$$P(A_0/B) = \frac{0}{(0) + (0) + (0.05) + (0) + (0) + (0) + (0)}$$

$$P(A_0/B) = \frac{0}{0.05}$$

$$P(A_0/B) = 0$$

PROCESO HIPOTÉTICO DE APRENDIZAJE. Se espera que los estudiantes utilicen el Razonamiento Bayesiano en una situación de toma de decisiones por medio del juego

Además, se espera que utilicen alguna representación gráfica para la solución de las situaciones presentadas (tabular o diagrama de árbol)

Se espera que la solución de las preguntas a y b, sean dadas de acuerdo a la experiencia del juego, para que de allí, cada estudiante considere, genere y argumente una estrategia ganadora.

En las preguntas problema 1, 2, 3, y 4 se espera que los estudiantes se apropien del Razonamiento Bayesiano, ya que aquellas situaciones donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condiciona las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá de tomarse decisiones.

Se supone que las sugerencias de Gigerenzer y Hoffrage (1995) y Yañez, et all (2012), al presentar la información omitiendo la palabra probabilidad sino en términos de frecuencias naturales deben posibilitar acercamientos a la pregunta formulada y propiciar que los estudiantes empleen diferentes estrategias para la solución. Además, se espera que los estudiantes no respondan por intuición, si no que utilicen la información a priori contrastando con los datos recogidos.

GESTIÓN DE LA CLASE E IDEAS PARA LA SOCIALIZACIÓN. Se planea iniciar la sesión con la presentación e instrucciones del “juego de dados”; allí se espera que los estudiantes desarrollen un juego libre que permita entender el funcionamiento y las reglas del juego. La docente estará verificando en estos lanzamientos si se entiende el juego y respondiendo dudas del mismo.

Cuando se cercioré que todos los estudiantes se han apropiado del juego, se explicará que de ahí en adelante se deben registrar los lanzamientos y puntaje obtenido. Se espera que los estudiantes opten por realizar una tabla; si no es así, la docente guiará el proceso para que se organicen los puntajes en una tabla.

En el intermedio del juego (10 lanzamientos) se realizarán las preguntas (a y b) donde cada estudiante responderá y registrará en cada portafolio. Se estima un tiempo de 5 a 10 minutos; para allí realizar la primera socialización; donde cada estudiante responderá de acuerdo a la experiencia que lleva en el juego. Aquí el rol del profesor será observador, guía de la actividad, mediador de la participación y de escucha activa frente a los argumentos que los estudiantes.

Se prosiguen los lanzamientos hasta llegar a 20 y definir el ganador de la partida. En este momento, la docente verifica: los datos registrados, que sean coherentes y de acuerdo a las reglas del juego; así como la suma total de los puntos. Luego, se hace una pequeña socialización, sobre aspecto como la dificultad del juego, ganadores y estrategias del juego.

La docente tendrá como sugerencia para la organización de datos la siguiente tabla de doble entrada (17) que permitirá organizar los datos y las frecuencias absolutas. Así como la simulación del juego en el programa de Excel para guiar y ayudar a los estudiantes frente a dicha organización.

PUNTAJE FINAL	PUNTAJE INICIAL							Total
	0	1	2	3	4	5	6	
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
Total								

Tabla 17: Tabla sugerida para la organización de datos del juego

Cada estudiante debe registrar los datos recolectados; para ello se formularán preguntas como: ¿Cuántas veces en su juego, obtuvieron 0 en el puntaje inicial y 0 en el puntaje final? Ese número se debe colocar en la intersección (0,0). Luego de completar la tabla, se totalizan las columnas y las filas verificando efectivamente que la suma de todas las filas y columnas sea 20, resultante de la cantidad de lanzamientos.

Cuando los estudiantes realicen sus respectivas tablas; se indagará con la intención que se familiaricen 100% con la tabla. ¿Cuántas posibilidades hay de que el puntaje inicial sea 0 si el puntaje final fue 5? ¿Cuántas posibilidades hay de que el puntaje inicial sea 2 si el puntaje final fue 6?, entre otras.

Luego, se entregará el formato con las preguntas a responder individualmente; para esto se estima un tiempo de 15 a 20 minutos. La docente estará observando el proceso que realizan los estudiantes para resolver las probabilidades. Si es necesario guiará el proceso recordando la actividad 1 (¿Qué dicen los datos?) y formulando de otra manera las preguntas; por ejemplo: ¿Cuál es el cociente entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5

si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0?, entre otras. A su vez incentivando el uso de la tabla realizada.

Para esta parte no se tiene una socialización en general, pues todos los resultados son distintos; para ello se tiene prevista una simulación en Excel que pretende agrupar los datos de todos los estudiantes y socializar con ellos.

Por último, se enunciarán las preguntas a, b y c finales; para ello se tiene de 10 a 15 minutos disponibles para luego socializar y escuchar las diferentes opiniones y argumentos. El rol del profesor nuevamente será observador, moderador de las participaciones y de escucha activa frente a los argumentos que los estudiantes proporcionen para justificar sus respuestas.

Los estudiantes asumirán un rol participativo en donde se espera que se apropien del juego, den a conocer sus opiniones sobre los resultados obtenidos. Se espera que escuchen a sus compañeros y contrasten sus opiniones.

6.2.3 Tarea 3 “**Interpretando información**”

OBJETIVO DE APRENDIZAJE. Interpretar, comunicar, discutir y evaluar información estadística proveniente de una noticia de interés representada por un diagrama de Venn, utilizando el Razonamiento Bayesiano.

TAREA PROPUESTA. Cada grupo de tres estudiantes tendrá información proporcionada por un medio de comunicación (internet), de acuerdo con un tema de interés (jugadores de fútbol) que estará representada de manera gráfica por un diagrama de Venn.

¡¡ Los europeos los más suertudos!!



Gráfico 5: Representación diagrama de Venn: los europeos los más suertudos, tomado de: <http://babb.telegraph.co.uk/2014/07/world-cup-goals-in-a-venn-diagram/>

JUGADOR	NACIONALIDAD	CONTINENTE
James Rodríguez	Colombiano	América
Lionel Messi	Argentino	América
Robin van Persie	Holandés	Europeo
Neymar da Silva Santos Júnior	Brasileño	América
Miroslav Josef Klose	Polaco- Alemán	Europeo
Oscar dos Santos Emboaba Júnior	Brasileño	América
Gary Cahill	Inglaterra	Europeo
Bryan Ruiz	Costarricense	América
Jermaine Jones	Estadounidense	América
Carlo Closty	Holandés	Europeo
Michael John Jedinak	Inglés	Europeo
Fernando Torres	España	Europeo
Diego Godín	Uruguayo	América
Wayne Rooney	Inglaterra	Europeo
David Luiz Moreira Marinho	Brasileño	América
Igor Akinfeev	Moscú	Europeo
Clint Dempsey	Estadounidense	América

Tabla 18: Nacionalidad de los jugadores

Con la información anterior responda individualmente las siguientes preguntas:

1. ¿Qué cantidad de goles se podría catalogar como chiripazos?
2. ¿Cuál es el número de goles que se clasifican como chiripazos y sublimes?
3. ¿Qué posibilidades hay de que el gol sea europeo?
4. ¿Qué posibilidades hay de que el gol sea europeo sabiendo que es un chiripazo?

5. ¿Cuál es la posibilidad de que un gol sea de un europeo y sea exclusivamente de chiripazo?
6. Si se sabe que un gol fue exclusivamente de chiripazo, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de un europeo?
7. Si se sabe que el gol fue europeo, ¿Qué posibilidades hay de que sea un gol exclusivamente de chiripazo?

A la luz de lo trabajado antes responda las siguientes preguntas:

- a. Está de acuerdo con el título ¡¡ Los europeos los más suertudos!!
- b. ¿Qué opinión tiene acerca de los goles de los europeos?

INTENCIÓN DE LAS TAREAS. Con el trabajo propuesto se pretende potencializar el Razonamiento Bayesiano utilizando el diagrama de Venn de acuerdo a una noticia de interés; que a su vez, suscite la cultura estadística.

En el ítem 1 y 2 se pretende realizar preguntas que pidan completar números (o probabilidades) relativas a la partición implícitamente generada o simplemente a los eventos (los conjuntos o las intersecciones). El ítem 3 indaga sobre la evidencia (el gol fue de un europeo). El ítem 4 pregunta sobre las verosimilitudes. El ítem 5 sobre la probabilidad conjunta. El ítem 6 pregunta sobre la condicionalidad y el ítem 7 pregunta por la probabilidad a posteriori.

En las preguntas finales a y b, se pretende indagar por el Razonamiento Bayesiano que se produce después de realizar los numerales anteriores y que permiten emitir justificaciones a la luz de los datos disponibles.

PROCESO HIPOTÉTICO DE APRENDIZAJE. En esta sesión, se espera que los estudiantes utilicen la información proporcionada gráficamente en el diagrama de Venn, para revisar la probabilidad conjunta, marginal, posteriori, haciendo uso de técnicas como el conteo.

Se espera que los estudiantes respondan con la información a priori disponible e interpreten el tratamiento matemático realizado, que permita argumentar la probabilidad a posteriori;

para así mismo reflexionar sobre la información presentada evaluando, discutiendo o comunicando lo que presentan los medios.

Se prevé evidenciar el uso de estrategias como el recuento de casos y si la información del diagrama es tenida en cuenta para que los estudiantes, verbalicen su razonamiento y utilicen aspectos abordados en las sesiones anteriores. Por esto, se espera que determinen probabilidades asociados a los eventos solicitados.

Además, se espera que en menor medida, se utilicen respuestas de si o no sin justificación, y que los argumentos no sean dados por intuición o de manera subjetiva; sino que se enuncie un razonamiento con características bayesianas.

Transposición del Teorema de Bayes a la actividad

I. Retomando la expresión:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) + P(B/A_4) \cdot P(A_4) + P(B/A_5) \cdot P(A_5) + P(B/A_6) \cdot P(A_6) + P(B/A_7) \cdot P(A_7)}$$

Donde se tiene:

a). La evidencia es B, es decir, el conocimiento de que el gol es europeo

$$P(B) = \frac{8}{17} = 0,4$$

b) Las probabilidades a priori son:

$$P(A_1) = \frac{3}{17} = 0,17 \quad P(A_2) = \frac{4}{17} = 0,23 \quad P(A_3) = \frac{3}{17} = 0,17 \quad P(A_4) = \frac{2}{17} = 0,11 \quad P(A_5) = \frac{1}{17} = 0,05$$

$$P(A_6) = \frac{2}{17} = 0,11 \quad P(A_7) = \frac{2}{17} = 0,11$$

c) Y las verosimilitudes son:

$$P(B/A_1) = \frac{1}{3} = 0,3 \quad P(B/A_2) = \frac{1}{4} = 0,25 \quad P(B/A_3) = \frac{3}{3} = 1 \quad P(B/A_4) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad P(B/A_5) = \frac{1}{1} = 1 \quad P(B/A_6) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P(B/A_7) = \frac{0}{2} = 0$$

II. La solución con el Teorema de Bayes es:

$$P(A_1/B) = \frac{(1/3) \cdot (3/17)}{(1/3) \cdot (3/17) + (1/4) \cdot (4/17) + (3/3) \cdot (3/17) + (1/2) \cdot (2/17) + (1/1) \cdot (1/17) + (1/2) \cdot (2/17) + (0/2) \cdot (2/17)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{(0,3 * 0,17)}{(0,3 * 0,17) + (0,25 * 0,23) + (1 * 0,17) + (0,5 * 0,11) + (1 * 0,05) + (0,5 * 0,11) + (0 * 0,11)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{0,051}{0,051 + 0,0575 + 0,17 + 0,055 + 0,05 + 0,055 + 0}$$

$$P(A_1/B) = \frac{0,02125}{0,4335}$$

$$P(A_1/B) = 0,12$$

GESTIÓN DE LA CLASE E IDEAS PARA LA SOCIALIZACIÓN. Se inicia la sesión entregando y presentando a cada estudiante la información representada en el diagrama de Venn. Los primeros 15 minutos están enfocados a que los estudiantes se familiaricen con el diagrama y la información disponible. En este momento la docente verificará que la totalidad de estudiantes presentes entiendan la información; interrogando a varios estudiantes con preguntas como: ¿Qué cantidad de goles se pueden catalogar como chiripazo?, entre otras.

En los 30 minutos siguientes se procede a que individualmente los estudiantes respondan las preguntas planeadas. En el transcurso, el profesor revisará las producciones de los estudiantes y tomará nota de aquellas que puedan generar discusión en el momento de la socialización. Después, en la socialización se pretende discutir las respuestas dadas y estrategias usadas.

En los 30 minutos finales de la sesión, se espera que luego de contrastar los datos hallados matemáticamente, los estudiantes verifiquen, interpreten, analicen, discutan y evalúen el título de la información presentada. Para así dar paso a la socialización y se evidencien las diferentes interpretaciones; así como el Razonamiento Bayesiano en cada estudiante.

7 ANÁLISIS PRELIMINAR

A partir de los elementos expuestos en los referentes metodológicos de acuerdo con Simon (1995), los resultados que se presentan a continuación se dividen en dos partes. En primer lugar, se describe el desarrollo de la intervención de las sesiones planeadas presentadas en la sección anterior, detallando su puesta en práctica, las estrategias empleadas por los estudiantes descritos de manera general, aspectos relevantes de las socializaciones en el grupo y del proceso de la Trayectoria de Aprendizaje. En segundo lugar, se presenta un análisis a partir de cada pregunta realizada en las diferentes sesiones, contrastándola con la teoría presentada.

7.1 DESARROLLO DE LA INTERVENCIÓN

Se presenta la forma en que se desarrolló cada una de las sesiones, una descripción de las diferentes acciones dadas por los estudiantes, las cuestiones centrales de la socialización y finalmente las decisiones que se tomaron entre las sesiones para el desarrollo de la intervención a partir del distanciamiento con cada sesión planeada.

Desde este momento del trabajo se hablará en tercera persona de mis propias actuaciones como docente en el aula, con el fin de hacer un esfuerzo por analizar las actuaciones propias de “la docente que participó en la intervención” con lo que se espera contribuir en las descripciones y análisis que en adelante se exponen, y que espera sirvan a manera de autorreflexión sobre la propia práctica docente y al tomar distancia del papel del equipo de investigación que como ya se había mencionado en el marco metodológico, se redujo al asesor y el estudiante, con lo que se intenta satisfacer, al menos parcialmente, los planteamientos sugeridos para los experimentos de enseñanza (Simon, 1995).

Debido a la irregularidad en la asistencia de los estudiantes a las sesiones, se genera la siguiente tabla sobre la cual serán basados los análisis, la cual será tomada en cuenta para ver el progreso grupal e individual.

ESTUDIANTE	SESIÓN 1	SESIÓN 2	SESIÓN 3
E1	X	X	X
E2	X	X	X
E3	X	X	X

E4	X	X	X
E5	X	X	X
E6	X	X	X
E7	X	X	X
E8	X	X	X
E9	X	X	X
E10	X	X	X
E11	X	X	X
E12	X	X	X
E13	X	X	X
E14	X	X	X
E15	X		X
E16	X		X
E17		X	X
E18	X		X
E19	X	X	
E20	X		X
E21		X	
E22		X	
E23	X		
E24	X		
E25	X		
E26	X	X	X

Tabla 19: Asistencia de estudiantes

7.1.1 Sesión 1 “Qué dicen los datos”

FECHA: 18 de febrero de 2016 – Hora: 3:00-4:20 pm

Para esta primera sesión se tienen en cuenta las siguientes categorías de análisis emergentes:

CATEGORÍAS EMERGENTES

CATEGORÍAS EMERGENTES	SUB- CATEGORÍAS EMERGENTES			
Utilización de la información a priori disponible	No utiliza la información a priori disponible para dar una respuesta. [RP0]	Utiliza la información a priori para dar una respuesta acertada [RP1]	Utiliza la información a priori para dar una respuesta y adiciona información no relacionada a los datos [RP2]	Utiliza la información a priori para dar una respuesta adicionando información respecto a los datos [RP3]

Planteamiento de la razón ligada a las probabilidades	No plantea la relación para hallar la cantidad de personas que juegan fútbol [CR0]	Plantea la relación para hallar la cantidad de personas que juegan fútbol, con datos no pertinentes. [CR1]	Plantea la relación correctamente y halla la cantidad de personas que juegan fútbol, con los datos pertinentes[CR2]
Realización del cálculo de probabilidades	No realiza el cociente entre el número de estudiantes mujeres que juega fútbol sobre el total de estudiantes de ambos sexos que juega futbol. [CP0]	Expresa el cociente entre el número de estudiantes mujeres que juega fútbol sobre el total de estudiantes de ambos sexos que juega futbol, pero el resultado no es correcto[CP1]	Expresa correctamente el cociente entre el número de estudiantes mujeres que juega fútbol sobre el total de estudiantes de ambos sexos que juega futbol. [CP2]

Tabla 20: Categorías Emergentes, Actividad 1

Transcurso de la sesión. En la sesión participaron 23 estudiantes. En esta primera parte, los estudiantes se organizaron en grupos de a tres; quienes en ese momento diseñaron la encuesta y así mismo recolectaron y organizaron los datos. Allí el rol del docente, fue de guía de la actividad, quien verificaba el diseño de las preguntas; luego su rol fue netamente observador de la actividad desarrollada por los estudiantes.

Cuando los estudiantes organizan la información y comienzan a interpretar la situación, se procedió a entregar las preguntas de dicha situación; está fue mediada por la docente para que paulatinamente se hicieran las socializaciones, de tal manera que fueran siendo explícitas las estrategias, argumentos y razonamientos que surgieran de las preguntas planteadas.

Desarrollo de las socializaciones. Las primeras intervenciones estuvieron guiadas de acuerdo a la interpretación de los datos y contrastadas con la información dada: El grupo encuestado está compuesto por 60 mujeres y 40 hombres. Con los datos recolectados, en el colegio se sabe que uno de cada 4 hombres juega el fútbol y una de cada 10 mujeres juega fútbol.

La actividad se centra en la pregunta: En un sorteo se selecciona al azar un estudiante del colegio y resulta que juega fútbol. ¿Será que el sorteo lo ganó una mujer?

Allí, se puede afirmar frente a la utilización de la información a priori, que la mayoría de los estudiantes utilizan la información disponible dada para responder. La siguiente tabla recuenta las respuestas encontradas y ejemplifica algunas evidencias.

Razonamiento	Estudiantes	Evidencia
No utiliza la información a priori disponible para dar una respuesta. [RP0]	2 Estudiantes	
Utiliza la información a priori para dar una respuesta acertada [RP1]	18 Estudiantes	
Utiliza la información a priori para dar una respuesta y adiciona información no relacionada a los datos [RP2]	1 Estudiantes	
Utiliza la información a priori para dar una respuesta adicionando información respecto a los datos [RP3]	2 Estudiantes	

Tabla 21: Análisis razonamiento a priori, Actividad 1

En los argumentos verbales, se observa en la participación de algunos estudiantes, que existieron dos tipos de respuesta:

- Estudiantes que no tienen en cuenta la información a priori disponible:

Profesora: Eso lo escribimos lo que crean, en la hoja que estaban haciendo, por detrás

En un sorteo, con esos datos.. ¿Ustedes que creen?, ¿el sorteo se lo ganó una mujer o se lo ganó un hombre?

Estudiante: se lo ganó un hombre

Estudiante 2: yo creo que ahí uno no sabe quién se lo ganó

Profesora: pero mira los datos... pero que creen... ¿Quién tiene más posibilidades de salir en ese sorteo?

Estudiante: Las mujeres no

- Estudiantes que tienen en cuenta la información previa disponible:

Profesora: Listo... Algún grupito cree, que ¿el sorteo se lo ganó una mujer?

Estudiante: noo

Profesora: Ósea que la respuesta a la pregunta sería ¿sí?

Todos dicen que no

Estudiante: los que tienen mayor posibilidad son los hombres

Profesora: ¿Por qué?

Estudiantes: porque hay más hombres

Profesora: pero más hombres en ¿qué? En ¿total de estudiantes? O en ¿Que juegan fútbol?

Estudiante: no, en que juegan fútbol

Siguiendo con las socializaciones, se procede a poner en común las respuestas de los literales:

A. Total de estudiantes de ambos sexos que juega fútbol

B. Total de mujeres que juega fútbol

C. Cociente del número de estudiantes mujeres que juega fútbol sobre el total de estudiantes de ambos sexos que juega fútbol.

En este ítem, se puede evidenciar tanto en los argumentos verbales como escritos cierta facilidad procedimental para operar los datos de la información a priori; la mayor dificultad se encontró en asociar la palabra cociente a la división y a su vez resolverla.

Handwritten mathematical work on grid paper. On the left, a division problem is shown: $60 \overline{) 16}$ with a quotient of $0,375$. To the right, the calculation is written as $\frac{6}{16} = 0,375 \times 100 = 37\% \text{ mujeres}$ and $63\% \text{ hombres}$.

Gráfico 6: Proceso matemático realizado por los estudiantes para el cálculo de la probabilidad

Llegando al ítem: Justifique si está de acuerdo con la siguiente afirmación:

Si la rifa gana alguien que juega fútbol lo más probable es que sea mujer. En este ítem se presta atención a la verificación de información utilizando el Razonamiento Bayesiano; se puede afirmar, en los argumentos escritos, que:

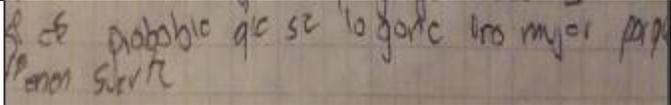
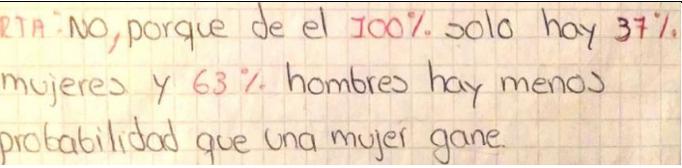
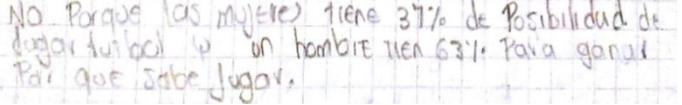
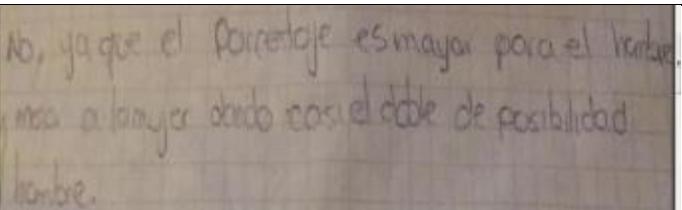
Razonamiento Bayesiano	Estudiantes	Evidencia
La utilización del Razonamiento Bayesiano es nula, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le realiza a los datos. [RB0]	2 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori [RB1]	18 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori condicionada a la experiencia [RB2]	1 Estudiante	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori adicionando argumentos respecto a los datos [RB3]	2 Estudiantes	

Tabla 22: Análisis Razonamiento Bayesiano, Actividad 1

En cuanto a los argumentos verbales, se evidencia, algo similar que en los registros escritos:

Profesora: listo, socialicemos .. ¿Están de acuerdo con la afirmación?

Estudiante: No, ya que el porcentaje es mayor para los hombres y menor para las mujeres, dando casi el doble de posibilidad al hombre.

No, porque hay menos mujeres.

No, porque le a las mujeres le corresponde un 37% mientras que a los hombre un 63% de posibilidades de salir

Proceso hipotético de aprendizaje. En la sesión se observó, que efectivamente en la gran mayoría de estudiantes recogieron, organizaron, e interpretaron los datos. En los ítems a, b y c, se planteó la comparación de cantidades que permitía “tratar la información”; y que en la mayoría de estudiantes resultó acertada.

De acuerdo a las sugerencias por Gigerenzer y Hoffrage (1995) y Yañez, (2012), se evidencio que al presentar la información en términos de frecuencias naturales facilitó en los estudiantes el abordaje y acercamiento natural de la situación planteada, evidenciando proximidad a las situaciones probabilísticas a la cual se enfrentaban por primera vez, y de la cual se obtienen resultados positivos, al observar que no se evidencia ninguna de las falacias referenciadas en León (2008) y la mayoría de los estudiantes evidenciaron Razonamiento Bayesiano.

En la mayoría de estudiantes se evidenció que no responden por intuición, si no que utilizaron en lo posible la información a priori contrastándola con los datos que obtuvieron en el tratamiento de la información.

Frente a los objetivos de la sesión se puede afirmar que los estudiantes identificaron implícitamente en el enunciado, los elementos importantes de la probabilidad Bayesiana: La probabilidad a priori y la evidencia observada, para así argumentar la probabilidad a posteriori.

En esta primera sesión se puede concluir y afirma que según los planteamientos de León (2008) los estudiantes se desarrollaron en situaciones donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condiciona las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá de tomarse decisiones, en esencia utilizaron el Razonamiento Bayesiano...” (p. 215)

Decisiones para la sesión 2. Por un lado, al analizar los resultados presentados por los estudiantes, queda en consideración que en los resultados no se preguntó por la revisión de

la probabilidad inicial; es decir: volver al sorteo y rectificar los datos a priori, los estudiantes pueden dar la misma respuesta con la información dada que sin tenerla.

Para realizar dicha rectificación, se escogieron cuatro estudiantes del grupo, donde se retoma la situación, y se enuncia nuevamente el literal d, sin tratar los datos; tres de los estudiantes nuevamente respondieron que las mujeres tenían menos probabilidad de salir en la rifa por la cantidad y el estudiante restante dijo efectivamente que las mujeres tenían menos probabilidad de salir porque los hombres sabían jugar más fútbol; intencionalmente fue el estudiante que en los registros escritos siempre intervino con algunas concepciones desde su propias experiencia. Allí se le preguntó ¿En un sorteo influye eso? A lo cual respondió: no, pero en la vida real sí.

Por otro lado, al observar que el Razonamiento Bayesiano fue suscitado en este grupo de estudiantes, se decide que para potencializar dicho razonamiento, se debe promover el uso de las representaciones gráficas, como la tabular o diagramas como opción a utiliza en las estrategias de solución, ya que estas son esenciales en la probabilidad Bayesiana y que en la primera sesión el diseño de las preguntas no promovía el uso de este tipo de representación.

7.1.2 Sesión 2 “Jugando con los dados”

Transcurso de la Sesión

PRIMERA SESIÓN: Fecha: 2 de Marzo de 2016 Hora: 1:30- 2:55pm

Las sesiones se desarrollaron con 19 estudiantes. La primera sesión se inició organizando a los estudiantes de tal manera que quedarán en parejas y en una distribución adecuada en el espacio del salón. Se repartió el material (dos dados por pareja) y se aclaró a los estudiantes que el portafolio debe permanecer en el puesto para registrar las situaciones que se fueran presentando. Así, se procede a la explicación de la actividad “juego de dados”:

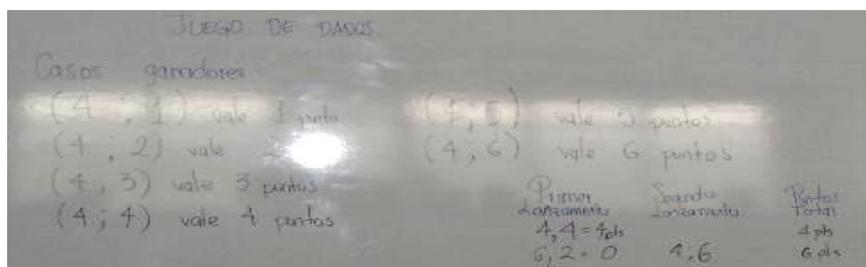


Gráfico 7: Explicación actividad juego de dados

Dada las indicaciones, los estudiantes proceden a realizar cinco lanzamientos de manera libre para que se familiaricen en qué consiste el juego. En los primeros momentos se observó total confusión del juego; pero luego, cuando parecía que entendían el juego, se dio la instrucción de ir registrando los lanzamientos en una tabla con el siguiente formato:

1er Lanzamiento	2do Lanzamiento	Puntaje Total
4;6= 6 puntos	No lanza	6 puntos
...

Tabla 23: Sugerencia para la organización de los datos recogidos

Luego de que cada estudiante realizó 10 lanzamientos se propusieron las primeras preguntas, desde las cuales se comienzan a dar las intervenciones de los estudiantes y algunas guiadas por la docente.

En esta sesión, surgieron las siguientes categorías emergentes:

CATEGORÍAS EMERGENTES:

CATEGORÍAS EMERGENTES	SUB- CATEGORÍAS EMERGENTES			
Utilización de la información a priori disponible	No utiliza la información a priori disponible para dar una respuesta. Es decir, responde por intuición[RP0]	Utiliza la información a priori para dar una respuesta, pero esta no es coherente con el experimento realizado [RP1]	Utiliza la información a priori para dar una respuesta acorde al experimento realizado [RP2]	Utiliza la información a priori para dar una respuesta adicionando información respecto a los datos [RP3]
Sobre el cálculo de las probabilidades condicionales (1)	No realiza la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0. [CP0]	Efectúa la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0, pero el resultado no es correcto[CP1]	Realiza correctamente la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0. [CP2]	

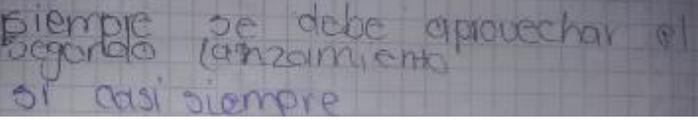
Sobre el cálculo de la probabilidad marginal (2 y 3)	No efectúa la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0[CM0]	Efectúa la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0, pero el resultado no es correcto. [CM1]	Efectúa correctamente la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0[CM2]
Sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori (4)	No realiza la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje inicial sea 0 si en el puntaje final es 2[CPp0]	Efectúa la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje inicial sea 0 si en el puntaje final es 2, pero el resultado no es correcto[CPp1]	Realiza correctamente la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje inicial sea 0 si en el puntaje final es 2. [CPp2]
Registro tabular	No organiza con alguna representación los datos recolectados. [RT0]	Organiza de manera tabular los datos recolectados; pero estos no corresponden con los datos presentados. [RT1]	Organiza de manera tabular los datos recolectados de manera coherente con los datos presentados[RT2]

Tabla 24: Categorías Emergentes, Actividad 2

Desarrollo de las socializaciones. Cada estudiante registra las repuestas a dichas preguntas en su portafolio, y allí se encuentra que:

Primera pregunta:

En esta pregunta, se encontró que la mayoría de los estudiantes consideran que se debe aprovechar el segundo lanzamiento, solo que pocos reconocen siempre las condiciones necesarias de acuerdo al juego para justificar el segundo lanzamiento.

Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
No utiliza la información a priori disponible para dar una respuesta. Es decir, responde por intuición[RP0]	3 Estudiantes	

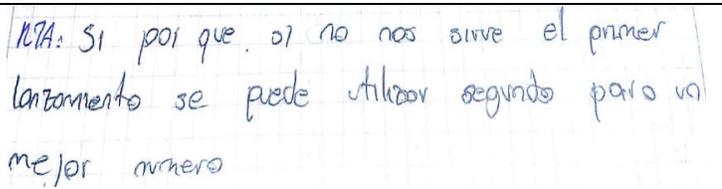
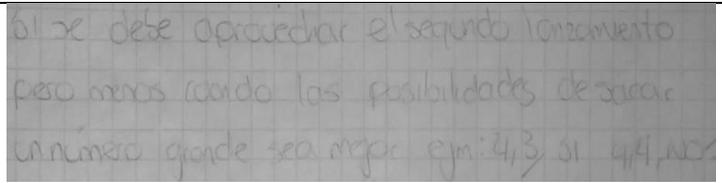
Utiliza la información a priori para dar una respuesta acorde al experimento realizado [RP2]	5 Estudiantes	
Utiliza la información a priori para dar una respuesta adicionando información respecto a los datos [RP3]	11 Estudiantes	

Tabla 25: Análisis de información a priori, Actividad 2

Al socializar la pregunta y observar los ejemplos de respuestas, en el caso que se ilustra en la tercera evidencia del cuadro anterior, la intervención del docente se vio necesaria para confirmar las estrategias que estaba utilizando los estudiantes.

El diálogo dado, fue el siguiente:

Profesora: ¿Con qué puntaje se debe aprovechar el segundo lanzamiento?

Estudiantes: Cuando sale cuatro

Profesora: ¿Cuatro? ¿Y cuándo sale tres?

Estudiantes: No...

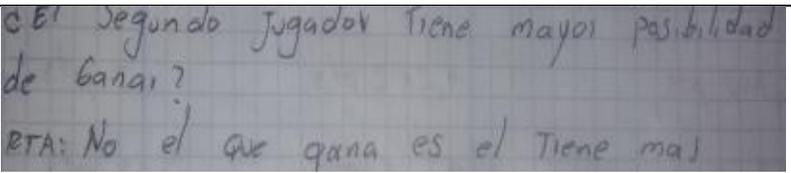
Profesora: ¿Por qué?

Estudiantes: Porque con tres, todavía hay opciones de aumentar el puntaje.

Profesora: Con cuatro también

Estudiantes: Pero más con tres

En cuanto a la segunda pregunta, sobre si el segundo jugador tiene mayor posibilidad de ganar, se registró que la mayoría de los estudiantes, no consideran ninguna ventaja relevante en la posición del jugador uno o dos.

Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
No utiliza la información a priori disponible para dar una respuesta. Es decir, responde	12 Estudiantes	

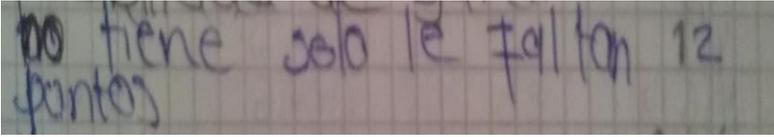
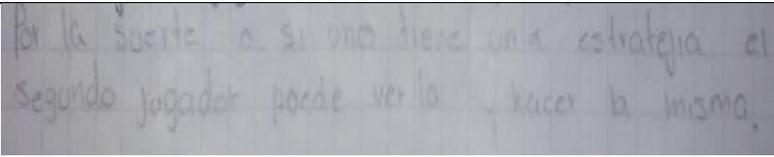
por intuición[RP0]		
Utiliza la información a priori para dar una respuesta acorde al experimento realizado [RP2]	6 Estudiantes	
Utiliza la información a priori para dar una respuesta adicionando información respecto a los datos [RP3]	1 Estudiantes	

Tabla 26: Análisis de información a priori, Actividad 2

Los estudiantes continuaron su juego hasta completar los veinte lanzamientos; se les pidió contabilizar los puntos para definir el ganador.

Se realiza una socialización, donde se destaca:

Profesora: Levante la mano el ganador de cada pareja,

Estudiantes: ¿En el juego total?

Profesora: Total

(Alzan la mano los respectivos ganadores)

Profesora: Listo, de los ganadores ¿Alguno optó por alguna estrategia para ganar?

Estudiantes: Murmullos

Profesora: O ¿sencillamente era la suerte de los dados?

Estudiantes: Suerte.

Profesora: ¿Todos suerte?... Ahora de los que levantaron la mano ¿Quiénes eran el jugador 2?

Conteo (de 10 parejas 4 de ellas tenían el jugador 2)

Se pregunta a una de estas personas.

Profesora: ¿Crees que influyó ser el jugador 2 para ganar?

Estudiante: no

Profesora: ¿También fue suerte?

Estudiante: suerte

Profesora: Yonatan, para ti ¿Influyó ganar siendo el jugador 2?

Yonatan: No, suerte

Profesora: ¿Milagros?

Milagros: Da igual ser el jugador 1 o 2

Profesora: Listo, para el resto del curso ¿No importa si soy el jugador 1 o 2, no influye en el resultado?

Estudiantes: La mayoría no

Profesora: Les voy a poner este ejemplo:

Supongamos el jugador 1, sacó 4,1 en el primer lanzamiento ¿Aprovecha o no el segundo lanzamiento?

Estudiantes: Aprovecha

Profesora: Sacó 4,2; tuvo 2 puntos (eso le paso al segundo jugador)

Yo soy el segundo jugador

Me saque 4,1; me pasó lo mismo que el jugador número 1, ¿Aprovecho?

Estudiantes: Aprovecho

Profesora: Independientemente de que acá me pueda salir otro 1

Estudiantes: si

Profesora: ¿Siempre lo aprovecho? ¿Por qué?

Estudiante: Pues, es que ya sabe que el jugador 1 solo tiene 2 le puede ganar en ese lanzamiento con más.

Profesora: Ah entonces si puedo estar pendiente siendo el jugador dos de las estrategias o resultados del jugador 1.

Seguido de esto; se pide organizar en una tabla los veinte lanzamientos distinguiendo los resultados iniciales y totales en el siguiente formato de tabla:

Primer Lanzamiento (Puntaje Inicial)	Puntaje Total
1	6
...	...

Tabla 27: Sugerencia tabular, organización del puntaje en los 20 lanzamientos

SEGUNDA SESIÓN. Fecha: 3 de Marzo de 2016. Hora: 2:55-4:20pm

La sesión inicia con la organización de los datos en la tabla 17 sugerida desde la planeación, para que sean manejados en frecuencias.

El proceso de agrupar los datos en la tabla generó bastante dificultad, así que para ilustrar la manera de hacerlo se seleccionó al azar la hoja de trabajo de un estudiante y se iba realizando su registro en el tablero, mientras cada estudiante trabajaba en su hoja. (Esto debido a que por cuestiones logísticas y de la institución, no fue posible presentar la simulación dispuesta para esta actividad).

Para completar la tabla, se realizaban, por ejemplo, las siguientes preguntas: ¿Cuántas veces se obtuvo puntaje inicial 0 y en el puntaje final 5? ¿Cuántas veces en la primera tabla se encuentra (1,1)? Esos números se anotan en las intersecciones de los dos números.

	0	1	2	3	4	5	6	
0	12	0	0	0	0	0	0	= 12
1	0	0	0	0	0	0	0	= 0
2	0	0	2	0	0	0	0	= 2
3	0	0	0	2	0	0	0	= 2
4	0	0	0	0	0	0	0	= 0
5	0	0	0	0	0	2	0	= 2
6	0	0	0	0	0	0	2	= 2
	12	0	2	2	0	2	2	= 20

	0	1	2	3	4	5	6	
0	12	0	0	0	0	0	0	= 12
1	0	0	0	0	0	0	0	= 0
2	0	1	0	0	0	0	0	= 1
3	0	0	1	0	0	1	1	= 3
4	0	0	0	2	1	0	0	= 3
5	0	0	0	0	1	0	0	= 1
6	0	0	0	0	0	0	2	= 2
	12	1	1	2	1	1	2	= 20

Gráfico 8: Registro tabular de los puntajes obtenidos en los 20 lanzamientos

Luego de que cada estudiante agrupara sus datos, se procedió a la formulación de las preguntas planeadas. Las primeras estaban enfocadas a la familiarización con el registro tabular, que se mostraba en el tablero, a manera de ejemplo, con la intención de que revisara cada estudiante su propia tabla.

The image shows a handwritten table with two columns: 'PUNTAJE INICIAL' and 'PUNTAJE FINAL'. The 'PUNTAJE INICIAL' column has values 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. The 'PUNTAJE FINAL' column has values 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. The table is filled with numbers representing probabilities or counts. A vertical label 'PUNTAJE' is written to the left of the table. The total for the initial scores is 19, and for the final scores is 20.

PUNTAJE INICIAL	PUNTAJE FINAL
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
19	20

Gráfico 9: Ejemplificación de los datos recolectados en el juego

Se prosiguió plantando las preguntas:

¿Cuántas posibilidades hay de que el puntaje inicial sea 0 si el puntaje final fue 5?

¿Cuántas posibilidades hay de que el puntaje inicial sea 2 si el puntaje final fue 6?

Se cercioró que todos los estudiantes entendieran la tabla, pues con ella se debían responder las preguntas. Estas, fueron registradas en cada portafolio. Como cada estudiante tenía datos distintos, se hizo un registro verbal de las preguntas con los datos de la tabla registrados en el tablero. Así, en la primera pregunta:

1) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje final sea 5 si en el puntaje inicial fue 0?

Cuando los estudiantes la leyeron inmediatamente respondieron al número que se encontraba en la intersección de 5 y 0.

Así que para que los estudiantes logaran determinar la probabilidad, se retomó el procedimiento de la actividad 1 llamada “Qué dicen los datos” llevaba a establecer la probabilidad como un cociente. Dando así la instrucción: ¿cuál es el cociente entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0?

En general, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes utilizan los datos a priori y realizan correctamente el cálculo de probabilidades condicionales. La información recolectada se sintetiza de la siguiente manera:

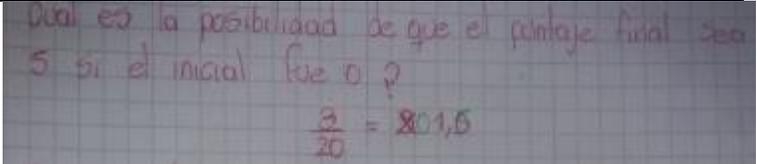
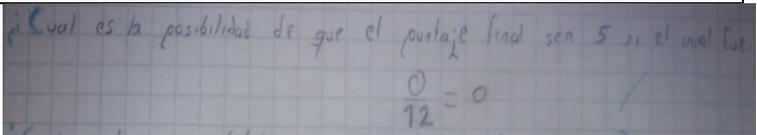
Respuesta Procedimental	Cantidad de estudiantes	Evidencia (con los datos mostrados en la tabla de cada estudiante)
No realiza la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0. [CP0]	1 Estudiante	
Efectúa la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0, pero el resultado no es correcto o no coincide con los datos. [CP1],	5 Estudiantes	
Realiza correctamente la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje final sea 5 si el puntaje inicial fue 0, sobre el total del puntaje inicial de 0. [CP2]	13 Estudiantes	

Tabla 28: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad condicional

2) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje final sea 0?

Para esta pregunta, nuevamente para que los estudiantes comprendieran el enunciado y operación a realizar, se dijo: cociente entre la suma del puntaje final cero sobre el número de lanzamientos.

Allí se encontró que la mayoría de los estudiantes utilizan los datos proporcionados y efectúan correctamente el tratamiento matemático para el cálculo de la probabilidad marginal.

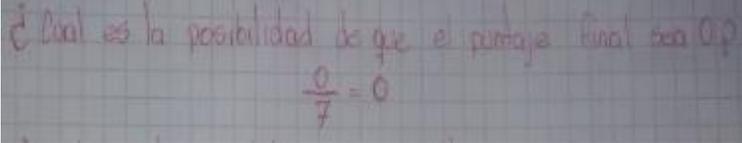
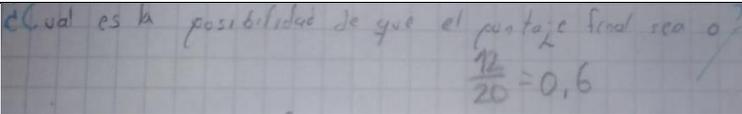
Respuesta Procedimental	Cantidad de estudiantes	Evidencia (con los datos mostrados en la tabla de cada estudiante)
No efectúa la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0[CM0]	1 Estudiante	
Efectúa la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0, pero el resultado no es correcto o no coincide con los datos [CM1]	5 Estudiantes	
Efectúa correctamente la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0[CM2]	13 Estudiantes	

Tabla 29: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad marginal

3) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje inicial sea 0?

En este punto, los estudiantes ya relacionaban la instrucción como el cociente entre la suma del puntaje inicial 0 y sobre el número de lanzamientos.

Aquí nuevamente la gran mayoría de los estudiantes procedían con el tratamiento matemático correcto, el inconveniente que existía, se presentaba en la relación de los datos, pues no utilizaba los datos correctamente respecto a cada tabla.

Respuesta Procedimental	Cantidad de estudiantes	Evidencia (con los datos mostrados en la tabla de cada estudiante)
No efectúa la determinación para hallar la probabilidad	1 Estudiante	

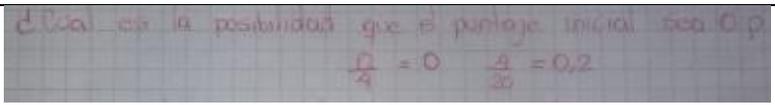
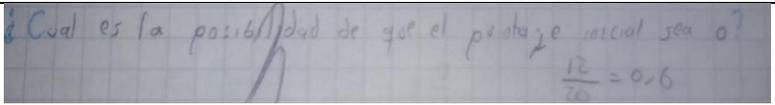
marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0[CM0]		
Efectúa la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0, pero el resultado no es correcto o no coincide con los datos [CM1]	6 Estudiantes	
Efectúa correctamente la determinación para hallar la probabilidad marginal, que el puntaje final y/o inicial sea 0[CM2]	12 Estudiantes	

Tabla 30: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad marginal

4) ¿Cuál es la posibilidad de que el puntaje inicial sea 0 si el puntaje final fue 2?

De igual manera, la instrucción los estudiantes la relacionaban con cociente entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje inicial sea 0 si en el puntaje final sea 2, sobre la cantidad de puntaje final 2.

Se considera que la mayoría de los estudiantes, se acogieron al proceso matemático que se realizaba, la dificultad en los estudiantes en los que el cálculo de la probabilidad a posteriori no fue el correcto se debe a errores en la organización de los datos en la tabla, o que al seleccionar los datos no eran los adecuados.

Respuesta Procedimental	Cantidad de estudiantes	Evidencia (con los datos mostrados en la tabla de cada estudiante)
No realiza la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje	1 Estudiante	

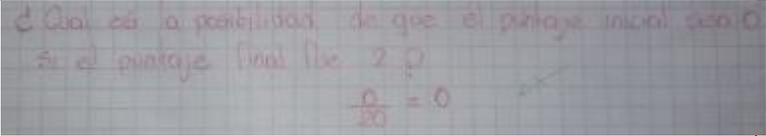
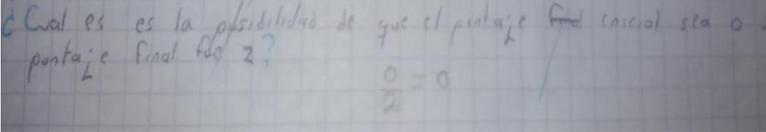
inicial sea 0 si en el puntaje final es 2 [CPp0]		
Efectúa la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje inicial sea 0 si en el puntaje final es 2, pero el resultado no es correcto, o no coincide con los datos [CPp1]	5 Estudiantes	
Realiza correctamente la determinación entre la cantidad de posibilidades de que el puntaje inicial sea 0 si en el puntaje final es 2. [CPp2]	13 Estudiantes	

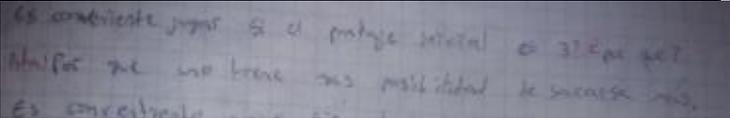
Tabla 31: Análisis sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori

Dado que en esta actividad cada estudiante respondía de acuerdo con los datos que de manera individual había recolectado, es necesario precisar que la selección de las evidencias que ilustran el tipo de respuestas dadas depende de la información particular de cada estudiante.

Ahora, con los datos recolectados, la experiencia y operaciones realizadas, responda:

¿Es conveniente jugar nuevamente si el puntaje inicial es 3? ¿Por qué?

Aquí, contrastando las respuestas con los datos obtenidos, efectivamente la mayoría de los estudiantes cuando obtenían en el primer lanzamiento (4,3) es decir tres puntos, aprovechaban el segundo lanzamiento y este superaba dicho puntaje.

Razonamiento Bayesiano	Cantidad de estudiantes	Evidencia
La utilización del Razonamiento Bayesiano es nula, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le	2 Estudiantes	

realiza a los datos. [RB0]		
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori [RB1]	15 Estudiantes	
No responde	2 Estudiantes	

Tabla 32: Análisis del Razonamiento Bayesiano

¿Es conveniente jugar nuevamente si el puntaje inicial es 4? ¿Por qué?

En esta pregunta, se evidencia que la mayoría de los estudiantes, responden de acuerdo a la experiencia dada en el juego; evidenciando que si obtenían cuatro puntos en el puntaje inicial, las posibilidades de superar ese puntaje eran mínimas, así que decidían como estrategia “plantar” en cuatro.

Razonamiento Bayesiano	Cantidad de estudiantes	Evidencia
La utilización del Razonamiento Bayesiano es nula, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le realiza a los datos. [RB0]	2 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori [RB1]	14 Estudiantes	
No responde	3 Estudiantes	

Tabla 33: Análisis del Razonamiento Bayesiano

A manera de cierre, se preguntó: Usted que prefiere ¿Jugar de primero o de segundo?

Estudiantes: *Pues tiene ciertas ventajas porque se va mirando que hace el jugador uno*

Proceso Hipotético de aprendizaje. En la sesión se observó, que la mayoría de los estudiantes se apropiaron, organizaron, e interpretaron los datos. Aunque, el organizar los datos de manera tabular haya sido impuesto por la docente; se puede afirmar que facilitó y permitió la determinación de probabilidades, donde los estudiantes reconocían de alguna manera mejor las cantidades.

En los ítems 1, 2, 3, y 4 se establecieron razones o cocientes que permitían “tratar la información”; Y que en la mayoría de estudiantes fue positiva; y en los que no obtuvieron respuesta positiva, se puede evidenciar que posiblemente según las falacias referenciadas en León (2008), al presentarse (similarmenete) la falacia de tasa base, cuando se ignora la información general acerca de la probabilidad de un evento y se centra en la información específica.

Se evidencia el acercamiento natural a la situación, en cuanto a que la información presentada, es decir los datos recolectados estaban en frecuencias naturales y fueron obtenidos por la situación experimentada por los estudiantes. Así que evidentemente al seguir las recomendaciones dadas por Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995) y Yañez, et all (2012), al presentar la información sin la palabra probabilidad sino en términos de frecuencias naturales posibilitó acercamientos a la pregunta formulada y propició que los estudiantes utilizaran el registro tabular como herramienta para la solución de este tipo de problemas de índole bayesiano.

Además, se evidencia que algunos estudiantes se siguen rigiendo por la lógica determinista o bivalente (Cardona y Arias 2008); al no encontrar ventaja en ser el jugador 2, argumentando que es cuestión de suerte. Se ha avanzado en que la mayoría de estudiantes no respondan por intuición, si no que utilizaron en lo posible la información a priori contrastándola con el tratamiento de los datos.

Frente a los objetivos de la sesión se puede afirmar que la mayoría de estudiantes, utilizaron el Razonamiento Bayesiano para tomar decisiones en la situación de juego, a su vez,

utilizaron la información a priori, el experimento, el tratamiento de los datos para argumentar la probabilidad a posteriori.

Se debe reconocer la importancia y utilidad de haber realizado la simulación del juego en Excel, ya que se podía llegar a predecir algunos resultados del juego y a su vez contribuía al docente/investigador sobre las decisiones por ejemplo de cómo formular las preguntas referentes a la actividad.

De esta segunda sesión, se evidencia que según los planteamientos de León (2008) los estudiantes se desarrollaron en situaciones donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condiciona las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá de tomarse decisiones, en esencia utilizaron el Razonamiento Bayesiano...” (p. 215)

Decisiones para la sesión 3. En la actividad, aunque se observa cierto progreso en el Razonamiento Bayesiano, la utilización de la tabla no llegó a la totalidad de los estudiantes; pues fue de gran dificultad organizar los datos allí, lo mismo que interpretarla.

Se podría decir que la falta de algún recurso tecnológico, no permitió formalizar la actividad como se tenía planeado; pues por cuestiones logísticas no se pudo realizar con la simulación de Excel (esta fue previa solo para la docente); realizando una pequeña formalización con el trabajo de alguno de los estudiantes; lo cual presentó cierta desventaja pues no todos los estudiantes entendían ya que eran diferentes datos.

Por otro lado, al observar que el Razonamiento Bayesiano es un proceso, que aunque tuvo dificultades potencializándolo con la representación tabular se decide que para promover dicho razonamiento se debe potencializar las estrategias de solución con representaciones gráficas, para ello se propone utilizar el diagrama de Venn.

7.1.3 Sesión 3 “Interpretando los datos”

FECHA DE LA SESIÓN: 9 de marzo de 2016- HORA: 1:30-2:55 p.m.

Transcurso de la sesión.

La sesión se desarrolló con 20 estudiantes, entre ellos 15 hombres y cinco mujeres.

Se da inició a la sesión repartiendo el material de trabajo individualmente. Al recibir la información los estudiantes mostraron cierto interés y motivación, relacionando la imagen con la experiencia vivida en el mundial del 2014. Se dieron cinco minutos para que los estudiantes se relacionaran con el diagrama y los jugadores.

La mayoría de estudiantes nombraron el diagrama como de conjuntos; la docente formalizó aclarando que se denomina: Diagrama de Venn y efectivamente se utilizaba generalmente para graficar conjuntos. Así que se procedió a verificar si todos los estudiantes entendían el diagrama.

A la información representada, se denominó “Los europeos los más suertudos” y las primeras preguntas que se realizaron, correspondían a la determinación de cantidades e interpretación del diagrama de Venn:

Profesora: ¿qué cantidad de goles se pueden catalogar como chiripazo?

Estudiante: ocho.

Profesora: ¿qué cantidad de goles se pueden catalogar como sublimes?

Estudiante: nueve.

Al ver que los estudiantes respondían simultáneamente; se detectó algunos estudiantes que daban respuesta porque se guiaban de los demás compañeros; así que se preguntó puntualmente.

Profesora: Milagros, ¿cuál es el número de goles que se pueden clasificar como chiripazos y sublimes?

Milagros: cinco

Profesora: revisa bien

Milagros: no, no entiendo

Profesora: ¿cuántos conjuntos hay?

Milagros: tres

Profesora: están delimitados por la circunferencia, pero ¿ves que hay algunos jugadores que los alcanza a encerrar alguno de ellos?

Milagros: si

Profesora: dime los jugadores que pueden estar en inesperado y chiripazo

Milagros: Rooney, Godin y Cahill estaría en los tres.

Se hicieron dos preguntas más, cerciorándose que todos entendieran el diagrama.

Se procedió a ubicar la nacionalidad de cada jugador, los estudiantes le ponían una etiqueta al jugador en el diagrama; comenzaron ubicando los que para ellos eran conocidos y luego se completaban los restantes. En general el diagrama quedó ilustrado de la siguiente manera:



Gráfico 10: Ubicación de nacionalidad en el Diagrama de Venn

En este momento, se da por entendido que todos los estudiantes entienden el diagrama y la información expuesta en él. Para así responder a las preguntas frente al cálculo de probabilidades.

Para esta sesión se contemplan las siguientes categorías emergentes:

CATEGORÍAS EMERGENTES

CATEGORÍAS EMERGENTES	SUB- CATEGORÍAS EMERGENTES		
Recuento de cantidades relativa al conjunto (Chiripazo, P1)	No realiza el conteo de la cantidad de goles que se podría catalogar como chiripazo [PR0]	Efectúa la partición implícitamente generada o simplemente a los eventos (los conjuntos), pero el resultado no es correcto [PR1]	Realiza correctamente la partición implícitamente generada o simplemente a los eventos (los conjuntos). [PR2]
Recuento de cantidades relativas a las intersecciones (Chiripazo y Sublime, P2)	No efectúa la partición implícitamente generada o simplemente a los eventos (las intersecciones) [PRi0]	Efectúa correctamente las particiones implícitamente generada o simplemente a los eventos (las intersecciones), pero el resultado no es correcto. [PRi1]	Efectúa correctamente las particiones implícitamente generada o simplemente a los eventos (las intersecciones) [PRi2]
Cálculo de la probabilidad sobre la evidencia (el gol fue de un europeo, P3)	No realiza el cociente de las posibilidades de que el gol sea europeo [PE0]	Efectúa el cociente el cociente de las posibilidades de que el gol sea europeo,	Realiza correctamente el cociente de las posibilidades de que el gol sea europeo. [PE2]

Tabla 34: Categorías Emergentes, Actividad 3

		pero el resultado no es correcto[PE1]	
Sobre el cálculo de una probabilidad de condicional (gol europeo dado que es chiripazo, P4)	No realiza el cociente de las posibilidades de que un gol sea de un europeo sabiendo que es un chiripazo. [PC0]	Efectúa el cociente de las posibilidades de que un gol sea de un europeo sabiendo que es un chiripazo; pero el resultado no es correcto[PC1]	Realiza correctamente el cociente de las posibilidades de que un gol sea de un europeo sabiendo que es un chiripazo. [PC2]
Sobre el cálculo de la probabilidad conjunta (gol europeo y exclusivamente de chiripazo, P5)	No realiza el cociente de: que el gol sea europeo y exclusivamente de chiripazo[PC0]	Efectúa el cociente: de que el gol sea europeo y exclusivamente de chiripazo, pero el resultado no es correcto [PC1]	Realiza correctamente el cociente de el gol sea europeo y exclusivamente de chiripazo [PC2]
Sobre cálculo de la probabilidad de la verosimilitud (gol europeo, dado que es exclusivamente de chiripazo, P6)	No realiza el cociente de: Si se sabe que un gol fue exclusivamente de chiripazo, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de un europeo? [PV0]	Efectúa el cociente de: Si se sabe que un gol fue exclusivamente de chiripazo, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de un europeo?, pero el resultado no es correcto. [PV1]	Realiza correctamente el cociente de: Si se sabe que un gol fue exclusivamente de chiripazo, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de un europeo? [PV2]
Sobre el cálculo de la probabilidad revisada o a posteriori (gol exclusivamente de chiripazo dado que se sabe que fue de un europeo, P7)	No realiza correctamente el cálculo de la probabilidad a posteriori[PP0]	Efectúa el cociente de sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori, pero el resultado no es correcto. [PP1]	Responde correctamente sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori[PP2]

Desarrollo de la socialización: nuevamente se hacen preguntas de cantidad en los conjuntos, pero esta vez relacionados con las nacionalidades:

Profesora: ¿cuántos americanos pertenecen a los goles sublimes?

Estudiantes: cuatro

Profesora: ¿cuántos americanos pertenecen exclusivamente a los goles sublimes?

Estudiantes: tres

A continuación, se realizaron las preguntas planeadas para la sesión:

1. ¿Qué cantidad de goles se podría catalogar como chiripazo?

En esta pregunta no hubo mayor dificultad, pues correspondían a las preguntas iniciales que se realizaron para familiarizarse con el diagrama.

Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
-----------	-------------------------	-----------

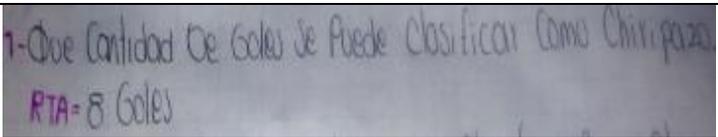
Responden correctamente a la partición implícitamente generada o simplemente a los eventos (los conjuntos). [PR2]	20 Estudiantes	
---	----------------	--

Tabla 35: Análisis sobre las particiones generadas

2. ¿Cuál es el número de goles que se clasifican como chepas y sublimes?

Igual que en la pregunta número uno, los estudiantes retomaron lo realizado cuando se familiarizaron con el diagrama.

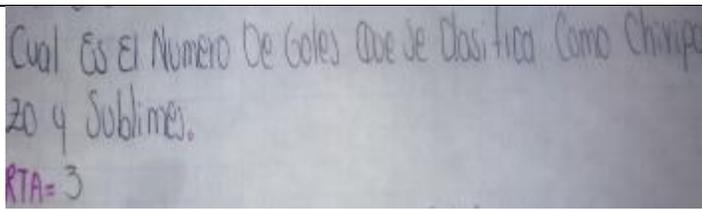
Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
Efectúa correctamente las particiones implícitamente generada o simplemente a los eventos (las intersecciones) [PRi2]	20 Estudiantes	

Tabla 36: Análisis sobre las intersecciones generadas

3. ¿Qué posibilidades hay de que el gol sea europeo?

Para este tipo de preguntas, donde se involucró la palabra posibilidad; los estudiantes retomaron la experiencia de las anteriores sesiones al referirse a la operación cociente.

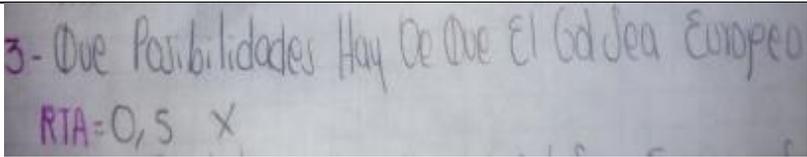
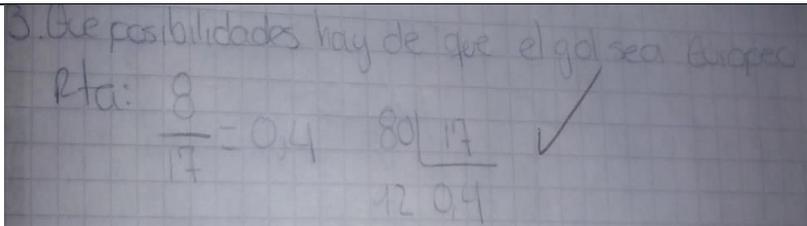
Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
No realiza el cociente de las posibilidades de que el gol sea europeo [PE0]	2 Estudiantes	
Realiza correctamente el cociente de las posibilidades de que el gol sea europeo. [PE2]	18 Estudiantes	

Tabla 37: Análisis sobre el cálculo de la evidencia

4. ¿Qué posibilidad hay de que el gol sea europeo sabiendo que es un chirripazo?

En este ítem los estudiantes interpretaron la pregunta como: De todos los europeos ¿Cuántos se encuentran en el conjunto de chiripazo? no se evidenció mayor dificultad, la mayoría de los estudiantes calcularon la probabilidad condicional, de acuerdo a los datos de la evidencia. Las dificultades encontradas, estaban relacionadas con el tratamiento matemático más no con la utilización de la información a priori.

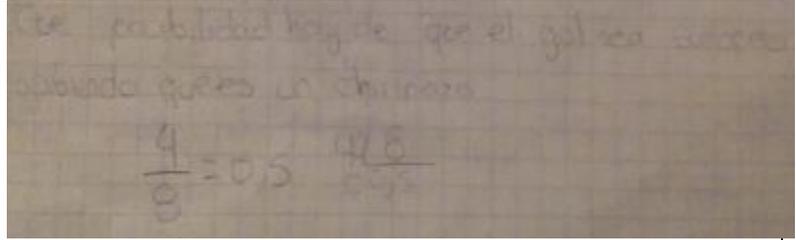
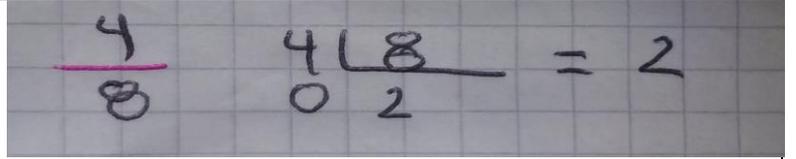
Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
Realiza correctamente el cociente de las posibilidades de que un gol sea de un europeo sabiendo que es un chiripazo. [PC2]	17 Estudiantes	
Efectúa el cociente de las posibilidades de que un gol sea de un europeo sabiendo que es un chiripazo; pero el resultado no es correcto [PC1]	3 Estudiantes	

Tabla 38: Análisis del cálculo de la condicionalidad

5. ¿Cuál es la posibilidad de que un gol sea de un europeo y sea exclusivamente de chiripazo?

En esta pregunta, que indagaba por la probabilidad conjunta, evidenció gran dificultad; ya que en su gran mayoría reconocieron el todo como los europeos y se contaron cuántos estaban exclusivamente en los chiripazos. Estableciendo así la probabilidad de $1/8 = 0,125$.

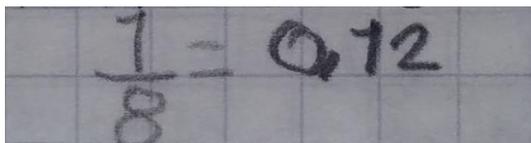


Gráfico 11: Falacia tasa base

Evidenciando que los estudiantes estaban presentando la falacia de la tasa base, pues como afirman Tversky y Kahneman, (1982) al hecho de ignorar la probabilidad a priori del suceso en la población en la toma de decisiones en problemas que involucran la probabilidad inversa.

La docente debió interrumpir la sesión; con la intención de direccionar las respuestas, realizando la pregunta:

Profesora: de todos los jugadores, ¿cuántos eran europeos que además se encontraban en los chiripazos?

Estudiantes: 1/17

Profesora: ¿por qué?

Juan Manuel: profe, eso es como una fracción, en el denominador ponemos el todo, lo grande y en el numerador la parte

Profesora: entonces ¿Aquí como sería?

Juan Manuel: todos los jugadores 17 y los que están en chiripazo y europeos 1, ósea 1/17

Profesora: bueno, registrémoslo en el portafolio.

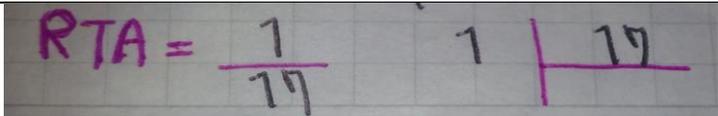
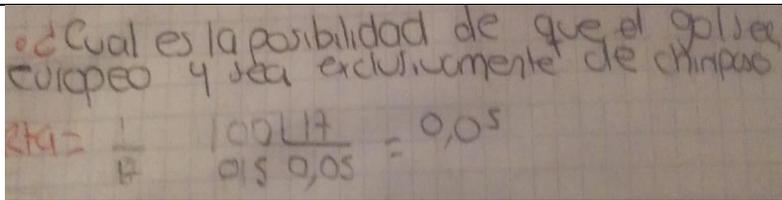
Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
Efectúa el cociente: de que el gol sea europeo y exclusivamente de chiripazo, pero el resultado no es correcto [PC1]	2 Estudiantes	
Realiza correctamente el cociente de el gol sea europeo y exclusivamente de chiripazo [PC2]	17 Estudiantes	
No responde	1 Estudiante	

Tabla 39: Análisis de la probabilidad conjunta

6. Si se sabe que un gol fue exclusivamente de chiripazo, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de un europeo?

En esta pregunta se percibió que después de la socialización de la pregunta cinco y los aportes del compañero Juan Manuel; los estudiantes relacionaban fácilmente los datos, en este caso efectuando las verosimilitudes sin mayor dificultad.

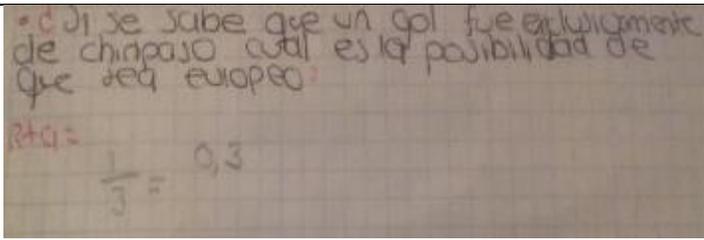
Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
Realiza correctamente el cociente de: Si se sabe que un gol fue exclusivamente de chiripazo, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de un europeo? [PV2]	17 Estudiantes	
No responde	3 Estudiantes	

Tabla 40: Análisis cálculo de la verosimilitud

7. Si se sabe que el gol fue europeo, ¿Qué posibilidades hay de que sea un gol exclusivamente de chiripazo?

Al igual que en la pregunta anterior, la mayoría de los estudiantes, efectuó la probabilidad a posteriori de acuerdo con los datos, el único inconveniente que se evidenció fue un error de tratamiento matemático al hallar el cociente

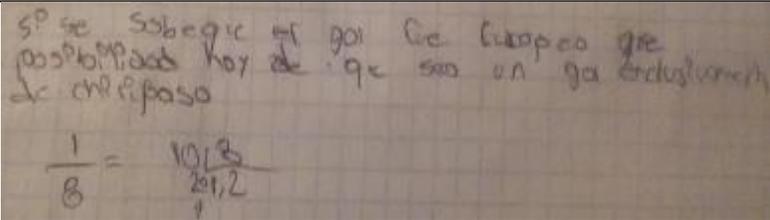
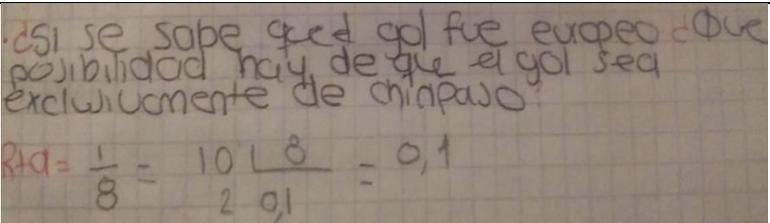
Respuesta	Cantidad de estudiantes	Evidencia
Efectúa el cociente de sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori, pero el resultado no es correcto. [PP1]	1 Estudiante	
Responde correctamente sobre el cálculo de la probabilidad a posteriori [PP2]	18 Estudiantes	
No responde	1 Estudiante	

Tabla 41: Análisis cálculo de la probabilidad a posteriori

Luego de realizar el cálculo de probabilidades, se realizaron las preguntas que pretendían ver como argumentaban e interpretaban de acuerdo a las probabilidades calculadas contrastando con la información presentada. Se interrogó, frente al título de la información presentada:

Profesora: Con la información presentada y el título de la gráfica ¿Los europeos son suertudos?

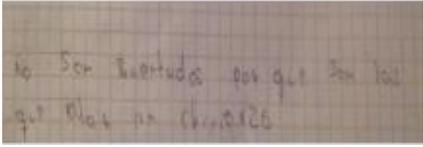
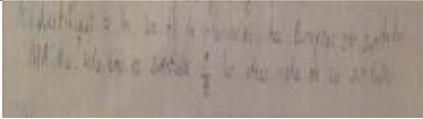
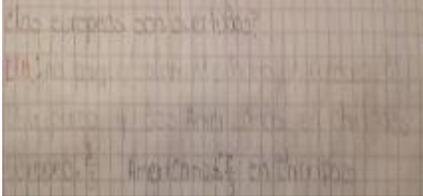
Razonamiento Bayesiano/ Cultura Estadística	Estudiantes	Evidencia
La utilización del Razonamiento Bayesiano es nulo, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le realiza a los datos/ No hay evidencia de cultura estadística	2 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori/Interpreta información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos.	15 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori condicionada a la experiencia/Comunicar los hechos respecto a información estadística/ Interpreta información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos.	0 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori adicionando argumentos respecto a los datos/ Interpreta información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos/ Opina respecto a la información estadística cuando sea relevante	2 Estudiantes	
No responde	1 Estudiante	

Tabla 42: Análisis del Razonamiento Bayesiano y Cultura Estadística (a)

Profesora: Con la información presentada ¿Qué opina de los goles europeos?

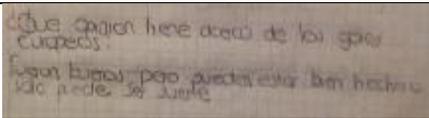
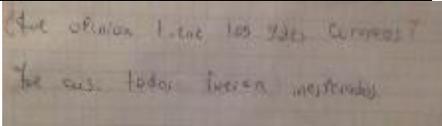
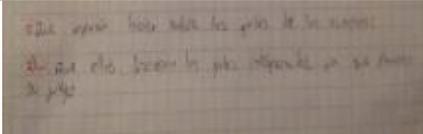
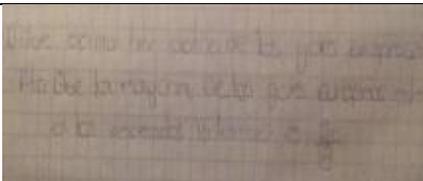
Razonamiento Bayesiano/ Cultura Estadística	Estudiantes	Evidencia
La utilización del Razonamiento Bayesiano es nulo, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le realiza a los datos/ No hay evidencia de cultura estadística	3 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori/Interpreta información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos.	7 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori condicionada a la experiencia/ Comunicar los hechos respecto a información estadística/ Interpreta información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos.	2 Estudiantes	
Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori adicionando argumentos respecto a los datos/ Interpreta información estadística apoyados en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos/ Opina respecto a la información estadística cuando sea relevante	7 Estudiantes	
No responde	1 Estudiante	

Tabla 43: Análisis del Razonamiento Bayesiano y Cultura Estadística (b)

Proceso Hipotético de aprendizaje: En esta última sesión, se evidencio que en la mayoría de los estudiantes existió un progreso del Razonamiento Bayesiano, pues sus argumentos de la información a posteriori además de estar basados en la información a priori y tratada, se justificaba acorde con los demás datos.

Las técnicas como el conteo y representaciones gráficas como el diagrama de Venn influyeron positivamente en el cálculo de las probabilidades, y para la interpretación de la información; resaltando que el tema de interés (jugadores de fútbol-goles) influyó en la motivación para resolver la actividad.

Respecto a los avances respecto a la cultura estadística, se puede afirmar que los estudiantes que asistieron de manera constante a las sesiones, en su totalidad interpretan información estadística proveniente de algún medio de comunicación o de algún contexto; unos avanzaron en comunicarla y aproximadamente 10 estudiantes opinan con información estadística para argumentar. Es difícil evidenciar si efectivamente hay evaluación crítica de la información por parte de los estudiantes; por ende, este aspecto se dejará como un aspecto a mejorar.

8 ANÁLISIS RETROSPECTIVO

Este análisis está dividido en tres partes: En primer lugar, se analizará el cómo se promovió y se da evidencia del Razonamiento Bayesiano en las tres sesiones; luego se presentará un análisis sobre el proceso de algunos estudiantes al promover el Razonamiento Bayesiano; y por último, se hará un análisis sobre la hipótesis planteada, que direccionó las actividades diseñadas y aplicadas.

De acuerdo con la pregunta de investigación y los objetivos planteados, se analizan los datos recogidos, respecto a tres aspectos fundamentales: Cultura estadística (Batanero 2002), Razonamiento Bayesiano (León 2008) y los registros de representación de los problemas bayesianos (Díaz y de la fuente 2005). Además, se tomará como referencia el proceso que hipotéticamente se consideró para cada sesión. Para ello, se utilizan las respuestas escritas de los estudiantes a las situaciones y se complementan los análisis con aspectos de las interacciones que se dieron en las socializaciones.

8.1 SOBRE EL RAZONAMIENTO BAYESIANO

Para realizar este análisis, se retoma la categoría de análisis sobre el Razonamiento Bayesiano, que contempla a su vez tres subcategorías, donde:

La utilización del Razonamiento Bayesiano es nula, pues no tiene en cuenta la información a priori disponible ni el tratamiento que se le realiza a los datos. [RBO]

Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori. [RB1]

Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori condicionada a la experiencia. [RB2]

Utiliza la información a priori disponible, la transforma con un procedimiento matemático y obtiene una información posteriori adicionando argumentos respecto a los datos. [RB3]

Este tipo de razonamiento, se evidenció en todas las sesiones cuando después de presentar la información a priori, realizaban un tratamiento matemático y obtenían una información a

posteriori, se verifica la información bajo los argumentos verbales o escritos en los ítems ya sean de justificación u opinión que en las tres sesiones se presentaron en al finalizar cada actividad.

Se categorizan los resultados frente al razonamiento, de acuerdo a las categorías establecidas en la herramienta analítica (Tabla 12) En la primera sesión se sintetiza la información en la siguiente tabla:

Nota: Para todos los casos **No**, se refiere a no responde.

ESTUDIANTE	PREGUNTA 1	PREGUNTA a	PREGUNTA b	PREGUNTA c	Justificación
E1	[RP3]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB3] [CEI] [CEC]
E2	[RP3]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB3] [CEI] [CEC]
E23	[RP2]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB2] [CEI] [CEC]
E3	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E4	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E5	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E6	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E7	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E8	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E9	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E10	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E12	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E13	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E14	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E15	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E16	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E18	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E19	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E20	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E24	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E26	[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1] [CEI]
E11	[RP0]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB0]
E25	[RP0]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB0]

Tabla 44: Categorización Herramienta Analítica, Actividad 1

De la segunda sesión, se genera el siguiente consolidado:

ESTUDIANTE	P. A	P. B	RT	P.1	P.2	P.3	P.4	J. A	J.B
E1	[RP3]	[RP3]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E19	[RP3]	[RP2]	[RT2]	[CP1]	[CM1]	[CM1]	[CPp1]	No	No
E10	[RP3]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E11	[RP3]	[RP0]	[RT2]	[CP1]	[CM1]	[CM1]	[CPp1]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E12	[RP3]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	No
E2	[RP2]	[RP2]	[RT2]	[CP1]	[CM1]	[CM1]	[CPp1]	[RB0]	[RB0]
E3	[RP2]	[RP2]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]

E8	[RP2]	[RP2]	[RT0]	[CP0]	[CM0]	[CM0]	[CPp0]	No	No
E26	[RP2]	[RP2]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E6	[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB0]
E9	[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E13	[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP1]	[CM1]	[CM1]	[CPp1]	[RB0]	[RB1] [CEI]
E14	[RP2]	[RP0]	[RT1]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E17	[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM1]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E21	[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E22	[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E5	[RP0]	[RP2]	[RT2]	[CP1]	[CM1]	[CM1]	[CPp1]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E7	[RP0]	[RP2]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E4	[RP0]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]

Tabla 45: Categorización Herramienta Analítica, Actividad 2

Respecto a la tercera sesión, se genera la siguiente tabla:

ESTUDIANTE	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	J1	J2
E1	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB3] [CEI] [CED]	[RB3] [CEI] [CED]
E2	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB3] [CEI] [CED]	[RB1] [CEI] [CEC]
E3	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E4	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	No
E5	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E6	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB0]	[RB1] [CEI]
E7	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB3] [CEI] [CED]
E8	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E9	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB2] [CEI] [CEC]
E13	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB0]
E15	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB3] [CEI] [CED]
E16	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB3] [CEI] [CED]
E26	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E11	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC1]	[PV2]	[PP1]	[RB1] [CEI]	[RB2] [CEI] [CEC]
E14	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC1]	[PC2]	No	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
E17	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC1]	[PC2]	[PV2]	No	[RB1] [CEI]	[RB3] [CEI] [CED]
E18	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC1]	[PC2]	[PV2]	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB0]

E20	[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC1]	[PC1]	[PV1]	[PP2]	[RB0]	[RB0]
E10	[PR2]	[PRi2]	[PE1]	[PC2]	No	[PV2]	No	No	[RB1] [CEI]
E12	[PR2]	[PRi2]	[PE1]	[PC2]	[PC2]	No	[PP2]	[RB1] [CEI]	[RB3] [CEI] [CED]

Tabla 46: Categorización Herramienta Analítica, Actividad 3

Compilando y promediando la información de las anteriores tablas, enfocándose en los ítems de Razonamiento Bayesiano, se presenta la tabla 47 e Gráfico 11, donde se evidencia que desde la primera sesión se promovió este razonamiento, pues la mayoría de los estudiantes utilizaban la información que trataban y argumentaban concordando con los datos presentados, esperando que en el transcurso de las actividades el nivel aumentara llegando a un nivel RB3, es decir que además de argumentar bajo los datos adicionara información relacionada con los datos trabajados.

Razonamiento/Sesiones	RBO	RB1	RB2	RB3
Sesión1	0,08	0,78	0,04347826	0,08695652
Sesión2	0,12121212	0,87878788	0,00	0
Sesión3	0,13157895	0,60526316	0,05263158	0,21052632

Tabla 47: Compilado Razonamiento Bayesiano en las tres sesiones

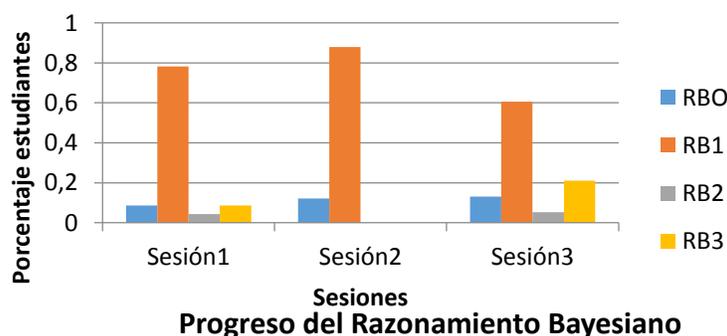


Gráfico 12: Desempeño de los estudiantes frente al Razonamiento Bayesiano

Es evidente, que en las diferentes sesiones existieron variaciones respecto al desempeño de los estudiantes, esto debido a las actividades desarrolladas en cada sesión. De allí, se deriva un análisis particular sobre lo que promovió o no el Razonamiento Bayesiano en los estudiantes en cada actividad.

Actividad 1: En esta actividad se evidencia que la mayoría de los estudiantes utilizan el Razonamiento Bayesiano en un nivel 1, es decir, que aunque es un nivel básico se logra promover el razonamiento, posiblemente debido a lo que afirma Gigerenzer y Hoffrage

(1995), Lonjedo y Huerta (2005) y Yañez, et all (2012) frente a la naturaleza de los datos, ya que los datos en los problemas de probabilidad pueden tener mayor facilidad en la solución, si se presenta en forma de frecuencias, razones o probabilidades. Esto debido a que los estudiantes tuvieron un acercamiento directo con los datos, vivenciaron la situación, esto llevó posiblemente llevó a que los estudiantes no recurrieran a ningún registro de representación.

Actividad 2: Esta actividad fue la de mayor dificultad para los estudiantes, dado que en primer lugar, se evidencia que sin importar que sea un juego, cuando la situación es impuesta, los resultados no fluyen con naturalidad, con agrado y posiblemente no es llevada a cabo; en segundo lugar, se evidenció gran dificultad en los estudiantes para organizar y agrupar gran cantidad de datos; y en tercer lugar, el no haber sido posible utilizar un software que dinamizara la situación para los estudiantes, afectó directamente la posibilidad de enriquecer la experiencia, pues de antemano se contaba con la simulación propia de la actividad como recurso para el aula.

Sin embargo, dada las circunstancias anteriormente descritas, se expone nuevamente que se promueve el Razonamiento Bayesiano bajo los fundamentos conceptuales del Teorema de Bayes, en este caso para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Aunque en la actividad no se evidenció niveles superiores a [RB1], el hecho de impulsar el registro tabular propició en la mayoría de estudiantes una estrategia para efectuar las probabilidades de una manera más visual; resaltando que se debe tener cierto dominio con la interpretación de tablas, lo cual según el nivel conceptual de los estudiantes fue de gran dificultad y llevó a la docente a que la actividad fuera más guiada.

Actividad 3: En esta actividad, se verifica que una situación contextualizada y de acuerdo a los intereses de los estudiantes, modifica la actitud y el interés por resolver la actividad propuesta. El tema escogido, el fútbol, fue una noticia publicada en internet, sobre los goles del pasado mundial del 2014. Aunque la información estaba representada en un diagrama de Venn y los estudiantes no tenían mayor conocimiento sobre esta representación, la mayoría de estos interpretaron fácilmente la información proporcionada en dicha gráfica.

Respecto al Razonamiento Bayesiano se puede evidenciar que el nivel de estudiantes en [RB3] aumentó al igual que el nivel [RB2], aun así, encontrándose estudiantes en [RB]; con lo cual se puede afirmar que se promovió este razonamiento, ya que tanto el cálculo de las

probabilidades como la argumentación verbal y/o escrita sobre los datos, se identifica que los estudiantes no solo realizan un tratamiento matemático con los datos a priori, sino que verifican la información a posteriori comunicando, opinando o argumentando utilizando los datos proporcionados. La representación gráfica del diagrama de Venn, se puede considerar una estrategia visual para los estudiantes, ya que estos podían recurrir fácilmente al conteo de frecuencias naturales y validar lo que se proponía en la actividad.

8.2 PROCESO DE LOS ESTUDIANTES

Una de las dificultades presentadas del experimento en el aula, fue la asistencia constante de los estudiantes, pues como se menciona en el análisis preliminar, en la primera sesión, asistieron 23 estudiantes, en la segunda, 19 y en la última sesión 20 estudiantes; considerando que esta inasistencia afecta directamente los resultados presentados; es por ello, que se hace necesario presentar tres casos puntuales, tres estudiantes caracterizados por la asistencia total a las sesiones, intermitencia y aquel estudiante que solo asiste a una única sesión.

Según las etiquetas dada a los estudiantes en el análisis preliminar, se seleccionan los siguientes estudiantes:

E11: Este es el caso de un estudiante que asistió de manera constante a las sesiones; y allí se puede evidenciar el progreso no solo en el Razonamiento Bayesiano, sino también en la utilización de la información a priori, que influyó directamente sobre el cálculo de las probabilidades y a su vez en suscitar la cultura estadística, dado que, en una primera actividad se evidencia que al no estar presente el Razonamiento Bayesiano, no se evidencia la cultura estadística; es así como al mejorar el razonamiento comienza hacerse evidente la cultura estadística, logrando avanzar de un nivel nulo a interpretar y comunicar información estadística proveniente de un medio de comunicación.

Sesión 1:

[RP0]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB0]
-------	-------	-------	-------	-------

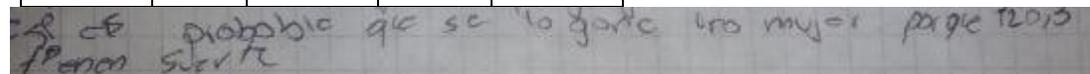


Gráfico 13: Razonamiento Bayesiano E11, Actividad 1

Sesión 2:

[RP3]	[RP0]	[RT2]	[CP1]	[CM1]	[CM1]	[CPp1]	[RB1]	[CEI]	[RB1]	[CEI]
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	-------	-------	-------	-------

3º porque pedia dar un número más alto a algunas monedas no a tener punto
 * No no había segundo lanzamiento porque es un punto alto

Gráfico 14: Razonamiento Bayesiano E11, Actividad 2

Sesión 3:

[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC2]	[PC1]	[PV2]	[PP1]	[RB1]	[CEI]	[RB2]	[CEI]	[CEC]
-------	--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

no son sweateras porque solo hay un gol en los chippasos

Gráfico 15: Razonamiento Bayesiano E11, Actividad 3

E20: En este caso, se evidencia un estudiante que asiste a la primera y última sesión, presentando cierto retroceso en la utilización de indicadores que reflejan Razonamiento Bayesiano, cultura estadística y habilidad para el cálculo de probabilidades. Se puede afirmar que, aunque la actividad dos presento ciertas dificultades, de cierta manera promovió algunas habilidades como: reconocer los datos, organizar datos, calcular probabilidades utilizando el registro de representación tabular, y a razonar bayesianamente propiciando la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Posiblemente fomentar dichas habilidades promueve que al enfrentarse a este tipo de situaciones se haga conciencia de utilizar la información previa disponible, se efectúe un tratamiento matemático coherente con los datos proporcionados y se pueda verificar la información posteriori, para así argumentar y/o opinar sobre información estadística.

Sesión 1:

[RP1]	[CR2]	[CR2]	[CP2]	[RB1]	[CEI]
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Rta no por que hay más hombres que mujeres

Gráfico 16: Razonamiento Bayesiano E20, Actividad 1

Sesión 3:

[PR2]	[PRi2]	[PE2]	[PC1]	[PC1]	[PVG1]	[PP2]	[RB0]	[RB0]
-------	--------	-------	-------	-------	--------	-------	-------	-------

B) los europeos son sweateras por que tiene goles de chippasos

que opinion tiene de los goles europeos = que son muy malos y de chippasos

Gráfico 17: Razonamiento Bayesiano E20, Actividad 3

E22:El caso donde solo se asiste a una sesión, deja entrever dos aspectos; el primero de ellos corresponde a que no se evidencia un proceso sobre los aspectos antes mencionados fundamentales del Teorema de Bayes, como lo es, por ejemplo, la importancia de la utilización de la información a priori que influye directamente en el tratamiento y en el Razonamiento Bayesiano; es allí donde es posible afirmar que utilizar todos los fundamentos de la concepción bayesiana posibilita una mayor conciencia al argumentar y/o opinar con los datos trabajados. Como segundo aspecto, se observa que al dar evidencia que hay un nivel uno en el Razonamiento Bayesiano, da pie para afirmar que las actividades en general (en este caso la número dos) promueven este razonamiento y posiblemente que la representación tabular se puede considerar como una estrategia favorable para enfrentar el tipo de situaciones de índole bayesiano.

Sesión 2:

[RP2]	[RP0]	[RT2]	[CP2]	[CM2]	[CM2]	[CPp2]	[RB1] [CEI]	[RB1] [CEI]
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	-------------	-------------

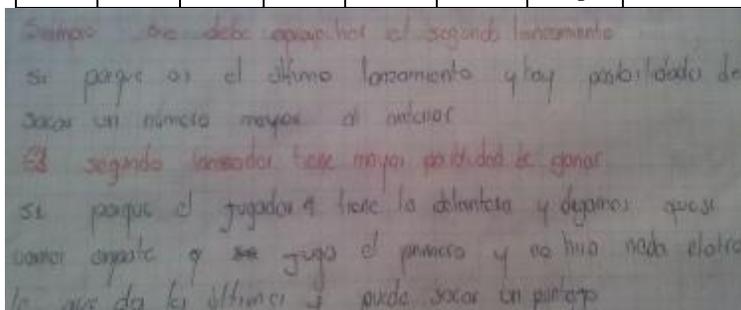


Gráfico 18: Razonamiento Bayesiano E22, Actividad 2

8.3 HIPÓTESIS DE APRENDIZAJE

En este apartado se pretende hacer un análisis frente a la hipótesis planteada para este experimento de enseñanza que correspondía a suponer que los estudiantes de grado séptimo del grupo 7E9 pueden enfrentarse asertivamente a situaciones de incertidumbre cuando utilizan el Razonamiento Bayesiano y este promueve los registros de representación como estrategia óptima para la solución.

Para ello se retoma los avances del proceso de aprendizajes evidenciados en cada sesión; donde en consenso se puede afirmar que: se hacen específicas y necesarias las sugerencias de Gigerenzer y Hoffrage (1995), Lonjedo y Huerta (2005) y Yañez, et all (2012), al presentar la información sin la palabra probabilidad sino en términos de frecuencias naturales facilitan abordar la pregunta formulada y propiciar que los estudiantes puedan abordar diferentes

estrategias para la solución, determinando distintas actuaciones en los estudiantes, permitiendo un acercamiento natural a la situación.

Se puede concluir y afirma que según los planteamientos de León (2008) los estudiantes se desarrollaron en situaciones donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condiciona las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá de tomarse decisiones, en esencia utilizaron el Razonamiento Bayesiano...” (p. 215) En la mayoría de estudiantes se evidenció que no responden por intuición, si no que utilizaron en lo posible la información a priori contrastándola con los datos que obtuvieron en el tratamiento de la información.

Se debe reconocer la importancia y utilidad de realizar simulaciones y transposiciones del teorema a un lenguaje coherente y propicio del nivel de los estudiantes, ya que se podía llegar a predecir algunos resultados y a su vez contribuya al docente/investigador sobre las decisiones en la gestión, por ejemplo, al formular las preguntas referentes a la actividad.

Las técnicas como el conteo y representaciones gráficas como el diagrama de Venn influyeron positivamente en el cálculo de las probabilidades, y para la interpretación de la información; resaltando que los temas de interés (jugadores de fútbol-goles) influyó en la motivación para resolver las actividades (en este caso la primera y última).

Respecto a los avances respecto a la cultura estadística, se puede afirmar que los estudiantes que asistieron de manera constante a las sesiones, en su totalidad interpretan información estadística proveniente de algún medio de comunicación o de algún contexto; unos avanzaron en comunicarla y una mayoría de estudiantes opinan con información estadística para argumentar. Es difícil evidenciar si efectivamente hay evaluación crítica de la información por parte de los estudiantes; por ende, este aspecto se dejará como un aspecto a mejorar.

CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo se organizan en tres partes. En primer lugar, se hace referencia a los objetivos trazados en este trabajo, que incluye todos los factores que influyeron en la tarea de promover el Razonamiento Bayesiano, con los estudiantes de grado séptimo. En segundo lugar, se presentan consideraciones acerca de la metodología de experimentos de enseñanza vinculada con la propuesta de intervención y los análisis realizados. En tercer lugar, se exponen algunas conclusiones, reflexiones y/o propuestas relacionadas con la propuesta aplicada y la posibilidad de futuras investigaciones relacionadas con el tema del trabajo.

El primer objetivo específico, perseguía consolidar una postura conceptual que describiera los fundamentos para elaborar una propuesta de enseñanza que atendiera a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad desde una perspectiva bayesiana. Al respecto, se logra evidenciar dos aspectos fundamentales. El primero de ellos, es la corroboración de la complejidad de abordar asuntos de enseñanza y aprendizaje subyacentes al estudio y aplicación del Teorema de Bayes en un nivel de escolar. En efecto, si bien se ratifican algunas de las dificultades reportadas en investigaciones realizadas previamente y referidas en los antecedentes, también se realiza un aporte en el sentido de presentar una opción que ejemplifica posibilidades para la enseñanza de este tema desde una postura conceptual que se valora como accesible a estudiantes de básica secundaria. En particular, se considera que es necesario y conveniente realizar una doble transposición del conocimiento para el profesor y finalmente para el estudiante de los contextos o problemas que se deseen incorporar en la enseñanza.

En dicha transposición se identificaron algunos aspectos relevantes e importantes que este tema contempla y que influyen directamente en la solución de las situaciones probabilísticas de índole bayesiano; separando dichos aspectos, entre los que son necesarios para el profesor y los que atañen al estudiante. En la transposición realizada para el profesor, es ineludible reconocer las particiones asociadas al espacio muestral que se generan, dependiendo de cada situación, para así mismo establecer de manera conveniente las probabilidades a priori, la evidencia y las verosimilitudes; hecho que permite visibilizar y realizar el tratamiento

matemático que está detrás del Teorema de Bayes. Una de las estrategias de solución que utilizaron tanto la docente como el asesor, en el proceso de comprensión del Teorema, pensando tanto en la accesibilidad del tema para los estudiantes, como en el comportamiento que podría llegar a tener la replicación reiterada del juego (simulación física o no computarizada) cuando lo abordaran los estudiantes, fue la simulación de las actividades en el programa de Excel. Dicha simulación y el recurrir a la representación tabular, para propiciar, desde la perspectiva de la docente y el asesor, la comprensión didáctica de dicho teorema, se constituyó en un punto conveniente de partida para la formulación de las preguntas y la discusión de la secuenciación de las actividades a proponer a los estudiantes.

Respecto a la trasposición para el estudiante, se puede afirmar que a diferencia de lo que pensaban la docente y el asesor, respecto a la facilidad de incorporación de la representación tabular, para facilitar la comprensión de este tipo de situaciones probabilísticas de índole bayesiano, para los estudiantes no fue así. En realidad, como se reporta en los análisis preliminares y retrospectivos de la actividad 2, la complejidad del juego influyó en el desempeño de los estudiantes y más bien la función de la representación tabular, más que contribuir a la comprensión, facilitaba la organización de información, que de por sí era muy abundante. Por tanto, se considera que en el acceso a la comprensión de lo bayesiano para un grupo estudiantil que tiene escasas bases tanto en razonamiento estadístico, como en el probabilístico, influye en primera medida la contextualización de las situaciones, donde se evidencia, como en otros casos, que entre más cercana esté la situación a los intereses, gustos y realidad de los datos para los estudiantes, más asertivamente se conectan ellos a la actividad propuesta.

En segunda medida, se confirma que la utilización de un lenguaje entendible para los estudiantes, es un punto central para dicha accesibilidad, ya que como se evidenció, además de tener presentes las sugerencias de Gigerenzer y Hoffrage (1995) y Yañez et al. (2012), al no utilizar la palabra probabilidad dentro de la información, si no presentarla en frecuencias naturales, y al no utilizar lenguaje propio de la disciplina, se promovió en los estudiantes resolver adecuadamente la mayoría de las situaciones propuestas, sin la necesidad de conocer de antemano la conceptualización y formalismo de los elementos del Teorema de Bayes. En este sentido se aporta a la recomendación de no utilizar el algoritmo como la estrategia de

solución más recurrida (Cardona y Arias 2008). Se afirma entonces, que un aporte fundamental para la educación estadística que genera este trabajo investigativo, corresponde a reconocer que no necesariamente los requisitos o conceptos previos que se estipulan para poder abarcar los problemas bayesianos sean ineludibles, a diferencia de lo reportado en investigaciones anteriores frente a los innumerables requerimientos y el alto nivel estocástico, que rodea su enseñanza, y que invita muchas veces a que se quiera evadir este tema de la probabilidad. En otras palabras, se presenta una opción de contemplar que no es necesaria tanta rigurosidad en dicho proceso, y que además este tema puede acercar a los estudiantes por primera vez a situaciones probabilísticas, sin el formalismo de la conceptualización, si lo que se desea es promover el Razonamiento Bayesiano.

No obstante, cabe aclarar y considerar un aspecto a mejorar, que se relaciona con lo mencionado anteriormente y que se evidencia en el trabajo. Este tiene que ver con el hecho de que fue la primera oportunidad al que el grupo de estudiantes se acercó a situaciones probabilísticas, donde es necesario reconocer que los estudiantes posiblemente se llevaron una idea muy informal sobre las definiciones de la probabilidad; por ejemplo, puede ser no apropiada la aproximación instruccional, relativa la concepción generada sobre probabilidad como el cálculo de un cociente, en vez de favorecer la comparación de razones. Posiblemente se pueden haber generado dificultades asociadas a las situaciones en detrimento de lo sustancial de una situación probabilística. Otro aspecto, de posible discusión y a la vez como recomendación, es el uso de la palabra “posibilidad”, si bien, desde la literatura se tienen significados diferentes con la de probabilidad, fue una pericia asumida por la docente y el asesor para atender a las sugerencias de Yañez, et al. (2012) para que el lenguaje utilizado no fuera desconocido, ni riguroso para el estudiante.

Una de los avances que se presentan en el razonamiento por parte de los estudiantes, se evidencia en su progreso desde la actividad uno, hasta la tercera, donde de una manera que evade formalismos pero contempla los elementos conceptuales de la probabilidad Bayesiana, ellos se desenvuelven en situaciones de incertidumbre y cercanas a sus intereses, dando respuestas coherentes a la situación, y utilizando fundamentos esenciales como tener presente la importancia de la información a priori disponible, que facilita el no caer en sesgos detectados en este tema (Díaz y de la Fuente 2007). En cuanto al tratamiento matemático

necesario para realizar el cálculo de probabilidades, se evidencia que el lenguaje y la instrucción dada, fomenta que las técnicas como el conteo de frecuencias sean usadas como estrategias que facilitan dicho procedimiento. Respecto al manejo de registros de representación, el registro tabular propició una herramienta para la organización de información, que a su vez posibilitó que las intersecciones de eventos fueran visibles y propias para el tratamiento matemático que se realizó; una de las dificultades encontradas allí independientemente de la cantidad de datos, como se mencionó en el análisis, corresponde a la baja interpretación de tablas, es decir, se reconoce que los estudiantes en su clase regular de matemáticas poco trabajan con este registro, y por ende la dificultad para organizar e interpretar datos. El otro registro trabajado fue el diagrama de Venn, en el cual se puede afirmar que las ayudas visuales enriquecen el trabajo, y aunque los estudiantes no tuvieran conocimiento previo del mismo, el conjugar su uso con las acciones anteriormente descritas posibilitó en los estudiantes promover el Razonamiento Bayesiano y permitió acercarse asertivamente a situaciones probabilísticas condicionadas. Lo cual no significa que se deban ensayar otras estrategias, como el uso de tecnologías dirigidas al Razonamiento Bayesiano en donde los resultados puedan ser también pertinentes.

Ante las evidencias de este estudio se dejan algunos elementos para la reflexión, como, por ejemplo: ¿Cuáles son las concepciones y creencias de los estudiantes respecto a la probabilidad y cómo éstas afectan su aprendizaje? ¿Será pertinente el inicio del estudio de la probabilidad a posteriori desde niveles anteriores de una manera intuitiva para evitar el choque que se le presenta al estudiante cuando debe abordarla formalmente? ¿Es necesario abordar esta temática de una manera formal? ¿Cuáles estrategias y recursos de enseñanza pueden llevar a mejores resultados que los obtenidos en este trabajo? ¿Es necesario consolidar bases de índole matemático, para evidenciarse la utilización de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza-aprendizaje en las situaciones probabilísticas? Cada una de estas interrogantes invita a continuar la indagación en este tema de gran relevancia en los tiempos actuales.

En segundo lugar, enmarcado hacia la metodología, se puede afirmar que el Experimento de Enseñanza permitió que este estudio se valiera de un proceso cíclico al requerir que el diseño, puesta en práctica y análisis fuera revisado de forma reiterativa, conjugando de forma cíclica

el análisis del proceso de aprendizaje y el análisis de los elementos del diseño instruccional (Molina, et al, 2011). Frente al diseño, la secuencia de tareas a proponer debe estar enfocada a que el estudiante, en cada una de las situaciones presentadas, debían potencializar y promover el Razonamiento Bayesiano desde los fundamentos conceptuales de dicha concepción de la probabilidad. Así mismo, la secuencia debe ser pensada en pro de que las dificultades sean abordadas de manera paulatina y al mismo tiempo de forma acumulativa.

Frente al diseño de cada tarea que compone la secuencia, es importante reconocer el papel fundamental de la transposición, del formalismo estadístico al lenguaje accesible para los estudiantes. El fomentar el uso de los registros de representación, proporciona para los estudiantes posibles herramientas para que sean utilizadas como estrategias de solución. Estas tareas no sólo dejaron entrever las categorías de análisis previstas desde la herramienta analítica, sino que debieron considerar categorías emergentes que van surgiendo a medida que se avanza en la implementación de tareas propuestas a los estudiantes. Una de las dificultades reportadas para el diseño de dichas tareas, que influía directamente en la construcción de las categorías, corresponde de cierta manera a que desde la literatura reportada sobre la comprensión del Teorema de Bayes, se centra en las dificultades o errores que se presentan al resolverlos, quizás puntualizando en la parte algorítmica o muy formal; razón por la cual, al no ser el foco de este trabajo, las categorías presentadas frente a la jerarquización del Razonamiento Bayesiano, fueron diseñadas y construidas por el grupo de investigación.

En la implementación de la secuencia, se reconoce que la intervención del docente que dirige las tareas cobra importancia al orientar la puesta en común, pues puede direccionar los aportes y acciones de los estudiantes en términos de reflexiones con lo que conllevaba razonar bayesianamente. Estos se consolidan al cuestionar a los estudiantes sobre los elementos presentes en cada estudio estadístico, la pertinencia de el uso de representaciones gráficas y de frecuencias naturales y reconocer la posibilidad de fortalecer dicha secuencia de tareas con apoyo tecnológico. Se considera entonces, que las tareas no son autosuficientes ya que la intervención y dirección del docente se constituye como elemento fundamental en procura de promover el Razonamiento Bayesiano que aporta a su vez a desarrollar la cultura

estadística, ya que como se evidenció los estudiantes comunicaban y opinaban frente a la información estadística presentada.

Por otro lado, el análisis preliminar sesión a sesión de las intervenciones desarrolladas durante el experimento en el aula, permite que el diseño realizado en la fase de preparación sea enriquecido a través del contraste entre los supuestos previstos en la revisión de la teoría y los resultados de la prueba diagnóstica (utilizada como fuente empírica para consolidar el planteamiento del problema), con las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de las tareas; de esta forma, se complementa y define la trayectoria hipotética de aprendizaje en términos de las expectativas y limitaciones, las consignas para tomar decisiones en las sesiones siguientes

En el análisis retrospectivo del experimento, que tuvo en consideración las actuaciones de los estudiantes en términos de las acciones registradas tanto verbales como escritas, y evidenciadas por la docente, se muestra que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un nivel [RB1] el cual se puede considerar básico donde comunican información estadística utilizando información a priori disponible, transformándola con un procedimiento matemático y obteniendo una información posteriori. Presentándose un avance en algunos estudiantes de nivel [RB3] donde además de realizar lo anteriormente descrito, en sus opiniones o argumentos adicionan información de acuerdo a los datos con los que se trabajaron (información a priori y posteriori).

En tercer lugar, a nivel de reflexión personal, considero que al apropiarse de esta temática que corrobora su dificultad, limitaciones, pero también importante para la toma de decisiones en situaciones probabilísticas condicionales. Lleva a consolidar que se planteó una vía de aprendizaje con algunos elementos importantes para su enseñanza, como se ha mencionado sobre la transposición, pero que es susceptible de mejorar, como podría ser el prolongar el tiempo de aplicación, reforzar los registros de representación, utilizar algún software que facilite que genere más accesibilidad a los fundamentos teóricos de la probabilidad Bayesiana; o lo surgido frente a la concepciones de la probabilidad que no era un objetivo en la investigación, pero que de manera indirecta estuvieron presentes y se trató de evidenciar que la probabilidad Bayesiana puede ser trabajada bajo las tres concepciones; es decir, en la sesión 1 se puede observar una concepción clásica, al revisar en frecuencias la proporción de

mujeres y hombres que se conocían de antemano, para revisar dada la evidencia esta como cambia. En la sesión 2 bajo una concepción frecuentista en un juego de dados; y en la sesión 3, bajo una concepción clásica relacionada con la subjetividad de acuerdo a lo evidenciado sobre el conocimiento de los estudiantes frente a los jugadores.

Aun así, se da evidencia de la posibilidad de incluir el proceso Bayesiano en nivel escolar y centrándolo en la población donde se aplicó este experimento de enseñanza, como proyección, se pretende presentar un informe detallado del proyecto a las directivas del colegio, donde se contemplen las ventajas, dificultades y oportunidades que se tiene para poder plantear una electiva de probabilidad para los estudiantes que asisten a la contrajornada.

Los aportes de este estudio descritos anteriormente pueden ser útiles tanto para la enseñanza como para la investigación en Educación Estocástica, en términos de que la secuencia de tareas, la descripción, objetivos de aprendizaje, capacidades, dificultades y errores, sobre el Razonamiento Bayesiano, constituye información relevante para el formador en Educación Estocástica.

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, D. y Tubau, E. (2002). Inferencias bayesianas: una revisión. *Anuario de Psicología*, vol. 33, no 1.25-47. Universidad de Barcelona. Recuperado 25 de Octubre 2015, En: www.raco.cat/index.php/AnuarioPsicologia/article/download/.../96253
- Antequera, y Espinel. (2011). Resolución de juegos cotidianos con árboles de decisión: aportaciones de una experiencia con alumnos de secundaria, *Educación matemática* 23, 33–63
- Álvarez, I. y Montoya D. (2011) *Ambientes de Aprendizaje y Cultura Estadística a través de un Experimento de Enseñanza para estudiantes de grado noveno. (Tesis Maestría)* Universidad Pedagógica Nacional, Maestría en Docencia de la Matemática. Bogotá Colombia.pp. 25-27
- Ávila, R., (2001). *Hacia una apropiación operatoria de la estocástica: El caso de la probabilidad condicional.* Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.
- Batanero, C. (2001). ¿Hacia dónde va la Educación Estadística? Recuperado el 19 de Febrero de 2015, En: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.htm>
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires, Argentina. Conferencia inaugural. Recuperado el 19 de Febrero de 2015, En: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf>
- Bennet, D. J. (1998). *Randomness.* New York: Cambridge University Press.
- Blanco, H. (2006). Una aplicación de Bayes en la toma de decisiones. In *ELME* (pp. 169–172). Buenos Aires, Argentina. Recuperado 8 Febrero 2015, En: <http://funes.uniandes.edu.co/5357/1/BlancoUnaaplicacionAlme2006.pdf>
- Bonilla, E. (2005). *Mas allá del dilema de los métodos: la investigación en ciencias sociales.* Bogotá: Grupo Editorial Norma.
- Cardona, J. y Arias, J. (2008). Didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional. *Entre Ciencia e Ingeniería*,2(3), 125–140. Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería Universidad Católica de Pereira. Recuperado 8 Febrero 2015, En <http://biblioteca.ucp.edu.co/OJS/index.php/entrecei/article/view/526/468>
- Colegio Grancolombiano. (2015). *Plan de estudios por ciclos.* [PEC-CG] Bogotá, Colombia
- Contreras, J. (2009). *Recursos en internet para la enseñanza de la Probabilidad Condicionada.* Trabajo de investigación Tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado: 25 de Julio 2015, En: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Trabajocontrera.pdf>
- Contreras, J. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica

- de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado: 25 de Julio 2015, En: <http://www.ugr.es/~batanero/documentos/contreras.pdf>
- Contreras, J., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2011) La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Epsilon - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(2), nº 78. Recuperado 30 Noviembre 2016, En: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Paradoja_Bertrand.pdf
- Contreras, J., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). Investigación en Educación Matemática (17), (pp. 237-244). Bilbao: Argitaipen Zerbitzua Servicio Editorial. Recuperado: 2 Febrero 2016, En: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/17SEIEM-contreras.pdf>
- Cotton, T. (1998). Towards a mathematics education for social justice (tesis doctoral no publicada). Nottingham: University of Nottingham
- Cosmides, L. y Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, 58, 1-73
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Recursos para la enseñanza del razonamiento bayesiano en internet, Congreso Internacional: El Profesorado ante el reto de las Nuevas Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento. Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada. Granada, Marzo 2005.
- Díaz, C., y Batanero, C. (2006) ¿Cómo puede el Método Bayesiano Contribuir a la Investigación en Psicología y Educación? Recuperado: 10 Marzo del 2015, En: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512006000200003
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4. CD ROM
- Díaz, C., Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2007). Dificultades de los estudiantes de Psicología en el cálculo de probabilidades inversas mediante el teorema de Bayes. *Publicaciones*, 37, 141-156.
- Díaz, C. (2007). Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
- Dupuis C., y Rousset-Bert, S., (1996). Arbres et tableaux de probabilité: analyse en termes de registres de représentation. *Repères-IREM*, N0. 22, 51-72.
- Evans, J., Handley, S. y Perham, N., Over D. y Thompson, V. (2000). Frequency versus probability formats in statistical word problems. *Cognition* 77, 197-203
- Fishburn, P. (1986). The Axioms of Subjective Probability. *Statistical Science*, Vol. 1, No. 3, 3:35-358

- Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency format. *Psychological Review*, 102, 684-704
- Giroto, V., y Gonzalez, M. (2002). Chances and frequencies in probabilistic reasoning: rejoinder to Hoffrage, Gigerenzer, Krauss, and Martignon. *Cognition*, 84, 353-359
- Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S. y Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition*, 84, 343-352.
- Krauss, S., Bruckmaier, G. y Martignon, L. (2010). Teaching young grownups how to use Bayesian networks. *ICOTS*, 8, 6.
- León, N. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al teorema de Bayes un caso con futuros profesores de matemática. *Scielo*, XXIX, 187-219. Revisado: 22 de Mayo del 2015, En:http://www.scielo.org/ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512008000200011&lng=es&tlng=es
- Lewis, C. y Keren, G. (1999). On the Difficulties Underlying Bayesian Reasoning: A Comment on Gigerenzer and Hoffrage. *Psychological Review*, 106, 411-416.
- Lindley, D. (1993). *The analysis of experimental data: The appreciation of tea and wine*. s.l.
- Lopes, J. M. (2013). Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución problemas. 600-608.
- Lonjedo, M.A. y Huerta, P. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. En M. Bosch (Ed.). *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíssols: CERME. CD ROM. ISBN 84-611-3282-3.
- Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching Decision Making and Statistical Thinking With Natural Frequencies. VI International Conference on Teaching Statistics. En B. Phillips (Ed.). Ciudad del Cabo, Sur África, p. 1-4.
- Mayer, R.E. (1992a). Cognition and instruction: Their historic meeting within educational psychology. *Journal of Educational Psychology*, 84, 405-412.
- Mellers, B. y McGraw, P. (1999). How to Improve Bayesian Reasoning: Comment on Gigerenzer and Hoffrage (1995). *Psychological Review*, 106, 417-422.
- Méndez, M. y Valero, N. (2014). Experimento de enseñanza para la superación de algunas dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición. (Tesis Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Maestría en docencia de la Matemática. Bogotá, Colombia.
- Miles, M., y Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook* (2 ed.). Thousand Oaks: Sage Publications
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

- Molina, J., Castro, E., Molina, M. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75–88. Recuperado: 28 Octubre 2015, En: <http://funes.uniandes.edu.co/1568/>
- Morgado N, y Yáñez, G. (2013) El cambio en el Razonamiento Bayesiano de estudiantes universitarios durante un semestre académico. *Revista Científica y tecnológica*. ISSN 0124 2253. Edición especial. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- Paulos, A. J. (1998). *Érase una vez un número* (Vol. 60). Madrid: Metatemas
- Parzysz, B. (1990). Un outil sous-estimé: l'arbre probabiliste. *APMEP*, 69 (372), 47-54.
- Parra V. y Torres K. (2013) Elementos del razonamiento estadístico en el aprendizaje de la probabilidad bayesiana en la educación básica primaria. *Revista Científica y tecnológica*. ISSN 0124 2253. Edición especial. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- Rocha, P. (2007). *Educación estocástica didáctica de la probabilidad y la estadística*. (Grupo de investigación Crisálida). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Shaughnessy, J. M., (2002). Investigación en Probabilidad y Estadística: Reflexiones y orientaciones. Publicaciones CINVESTAV-IPN, México. Traducido por Ávila, R., Yáñez, G., del original Shaughnessy, J. M., (1992), *Research in probability and statistics: reflections and directions*. En Grows, D. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, NCTM, 465-494
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26
- Tversky, A, y Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. In D. Kahneman P.Slovic& A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153-160). New York: Cambridge University Press.
- Yáñez, G. (2001). El álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. En Gómez, P., y Rico, L. Granada, España, p. 355-37
- Yáñez, G., Rátiva, A., y Lozano, D. (2012). Efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas al resolver un problema binario de probabilidad condicional. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*. (pp. 31 – 56). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, 2013. ISBN: 978-980-00-2744-8 Recuperado: 22 de mayo de 2015, En: http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/livros/Educacion.pdf
- Zapata, L., y Quintero, S. (2009). Una experiencia didáctica en la enseñanza del teorema de Bayes. En *10 Encuentro Colombiano de matemática educativa* (pp. 1–13). Colombia. Recuperado: 15 Mayo 2015, En: <http://funes.uniandes.edu.co/735/>
- Zapata-Ros, M. (2012). Teorías y modelos sobre el aprendizaje en entornos conectados y ubicuos. Bases para un nuevo modelo teórico a partir de una visión crítica del “conectivismo”. Blog de la Cátedra UNESCO de Educación a Distancia (CUED).

ANEXOS
ANEXO 1. (PEC-GC)

Cuadro S3-1.3: EJE DE FORMACIÓN CIENTÍFICO-TÉCNICO

AREA	PROPÓSITO DE FORMACIÓN	ASIGNATURAS/ PROPÓSITO	SISTEMA, COMPONENTE O DIMENSIÓN	CONTENIDOS POR GRADO		
				QUINTO	SEXTO	SÉPTIMO
MATEMÁTICA	Construir en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos matemáticos y la habilidad para aplicarlos en el análisis y solución de problemas de su entorno y de las diferentes áreas del conocimiento, fomentando una actitud favorable hacia el estudio de las matemáticas y usando el lenguaje apropiado, en un ambiente de respeto hacia los derechos humanos	<p>MATEMÁTICA II Desarrolla en los estudiantes capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, lógicos, analíticos, de conjuntos, de operaciones y de relaciones, así como su utilización en la interpretación y solución de problemas de la ciencia y de la vida cotidiana</p>	<p>PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción e interpretación de tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas circulares). • Medidas de tendencia central: moda y noción de promedio en un conjunto pequeño de datos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Frecuencias absolutas. • Frecuencias relativas (porcentuales) • Construcción e interpretación de tablas y gráficas. (Medidas de tendencia central: moda y media. 	<p>Tablas de frecuencia.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Análisis e interpretación de gráficas. • Medidas de Tendencia Central: Moda, mediana, media. Nociones básicas de probabilidad
		<p>GEOMETRÍA I Desarrollar en los estudiantes el pensamiento espacial y métrico a través del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico que le permitan usarlos en la solución de problemas de ubicación, orientación, distribución de</p>	<p>PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMETRICOS</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción y medición de segmentos y ángulos • Plano Cartesiano. • Polígonos: Concepto, clasificación según el número de lados. Polígonos regulares. • Circulo y circunferencia • Cuerpos geométricos: prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Recta, semirrecta, plano, espacio • Ángulos: Construcción, clasificación • Paralelismo y Perpendicularidad • Polígonos: Clasificación • Círculo, circunferencia, líneas notables • Poliedros regulares. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ángulos según su medida, posición y suma. • Construcciones con regla y compás. • Teorema de Pitágoras • Ubicación de figuras en el plano cartesiano. • Transformaciones en el plano: traslaciones, rotaciones, homotecias y simetrías.

	objetos del espacio del espacio y sus relaciones y transformaciones	PENSAMIENTO METRICO Y SISTEMAS DE MEDIDA	<ul style="list-style-type: none"> • Metro lineal y cuadrado conversiones simples. • Perímetro, área y nociones de volumen. • Simetrías. 	<ul style="list-style-type: none"> • Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros. • Unidades de longitud y unidades de área. 	<ul style="list-style-type: none"> • Área de los diferentes polígonos. Cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas. • Historia de la medición. • Sistema Métrico Decimal.
--	---	---	---	---	---

Cuadro S4-1.2: EJE DE FORMACIÓN CIENTÍFICO-TÉCNICO

AREA	PROPÓSITO DE FORMACIÓN	ASIGNATURAS/ PROPÓSITO	SISTEMA, COMPONENTE O DIMENSIÓN	CONTENIDOS POR GRADO	
				OCTAVO	NOVENO
MATEMÁTICA	Construir en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos matemáticos y la habilidad para aplicarlos en el análisis y solución	MATEMÁTICA III	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	<ul style="list-style-type: none"> • Medición, muestreo, disposición y representación de datos. • Medidas de tendencia central. • Conceptos básicos de probabilidad: espacio muestral, evento, independencia... 	<ul style="list-style-type: none"> • Medidas de tendencia central: moda, media, mediana, cuartiles, deciles y percentiles • Probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
	de problemas de su entorno y de las diferentes áreas del	GEOMETRÍA II	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMETRICOS	<ul style="list-style-type: none"> • Ángulos entre paralelas cortadas por una secante y propiedades. • Triángulos y su clasificación. • Líneas notables del triángulo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Thales • Semejanza y Congruencia de Triángulos. • Círculo y Circunferencia. Prismas, pirámides, cilindros y conos.
	conocimiento, fomentando una actitud favorable hacia el estudio de las matemáticas y usando el lenguaje apropiado, en un ambiente de respeto hacia los derechos humanos.		PENSAMIENTO METRICO Y SISTEMAS DE MEDIDA	<ul style="list-style-type: none"> • Medida de Perímetro y área de figuras geométricas. • Área de la región sombreada 	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción de las fórmulas de volumen de diferentes poliedros y cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.
Contribuir al desarrollo de un pensamiento tecnológico en los estudiantes que les permita identificar y resolver problemas del contexto, solucionables utilizando la información,		TECNOLOGÍA III Desarrollar en los estudiantes la capacidad de observación, diferenciación, comparación, descripción e inferencia simple,	ENERGÍA DISEÑO	<ul style="list-style-type: none"> • Principios físicos de la electricidad. 	<ul style="list-style-type: none"> • Generadores de corriente directa y alterna. • Especificaciones para la instalación de equipos informáticos.

TECNOLOGÍA E INFORMÁTICA	herramientas y equipos disponibles, mediante la construcción de competencias que los hagan propositivos en su entorno y en la generación de microempresas	a la vez que reconocen principios, instrumentos y medidas que les permitan diseñar mecanismos simples aplicables a la solución de un problema de su entorno	MOVIMIENTO Y CONTROL TIC'S	<ul style="list-style-type: none"> • Materiales plásticos, polímeros, cerámicos, adhesivos. • Diseño de dispositivos sencillos electromecánicos- 	<ul style="list-style-type: none"> • Sistemas hidráulicos y neumáticos. Introducción a la electrónica
---------------------------------	---	---	-----------------------------------	--	--

Cuadro S5-1.2: EJE DE FORMACIÓN CIENTÍFICO-TÉCNICO

AREA	PROPÓSITO DE FORMACIÓN	ASIGNATURAS/ PROPÓSITO	SISTEMA, COMPONENTE O DIMENSIÓN	CONTENIDOS POR GRADO	
				DÉCIMO-SEMESTRE 1	DÉCIMO- SEESTRE 2
MATEMÁTICA		MATEMÁTICA III - IV	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMETRICOS PENSAMIENTO METRICO	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Medición de ángulos, triángulos y Teorema de Pitágoras 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ La línea recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.
		ESTADÍSTICA I	PENSAMEINTO ALEATORIO Y VARIACIONAL		
	Contribuir al desarrollo de un pensamiento tecnológico en los estudiantes que les permita identificar y resolver problemas del contexto, solucionables utilizando la información, herramientas y equipos disponibles, y	INFORMÁTICA IV Continuar el proceso de construcción de la competencia en el manejo de la información, utilizando tecnología de	CONCEPTUAL DE HABILIDAD EN EL MANEJO	<ul style="list-style-type: none"> • Introducción a la programación. Diagramas de flujo. • Software para diagramas de flujo • Elaboración de diagramas de flujo 	<ul style="list-style-type: none"> • Introducción a las bases de datos- • ACCES.

TECNOLOGÍA E INFORMÁTICA	contribuyendo a su calidad humana mediante la construcción de competencias que los hagan propositivos en su entorno y en la generación de microempresas	información y comunicación de acuerdo al nivel	DE APLICACIONES. TIC'S	. <ul style="list-style-type: none"> • INTERNET. Blogs 	
-------------------------------------	---	--	---	--	--

ANEXO 2
ANÁLISIS DE LAS FUENTES EMPÍRICAS
PRUEBA DÁGNOSTICA ESTUDIANTES GRUPO 7E9

La prueba diagnóstica tenía como objetivo, identificar el nivel de apropiamiento y de conceptualización de temas de probabilidad y representaciones gráficas de los estudiantes del grupo 7e9; se realizó la prueba a 21 estudiantes del Colegio Grancolombiano.

Para la categorización de la información obtenida, es necesaria la creación de categorías que permitan realizar un análisis de los datos, centrándose en el objeto de estudio, en el caso particular para cada tipo de pregunta presentada. Para ello se hace uso de la categorización inductiva como lo dice Bonilla (2005, págs. 252-254) "...cuando las categorías "emergen" totalmente de los datos con base en el examen de los patrones y recurrencias presente en ellos."

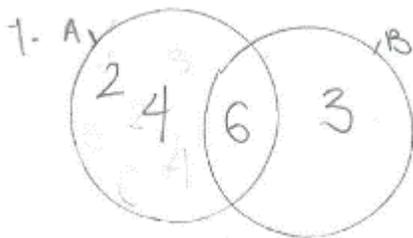
1. Represente por medio de un diagrama de Venn, el siguiente suceso:

Experimento: Lanzar un dado = {1, 2, 3, 4, 5, 6} siendo A= salir par {2, 4, 6 } y B = salir n° múltiplos de 3={3, 6}

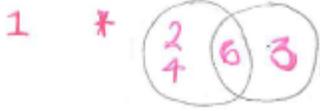
CATEGORIAS	FRECUENCIA
No realiza el diagrama de Venn	1
No nombra los conjuntos, faltan elementos del conjunto inicial	3
Realiza un diagrama, pero no contempla todos los elementos del conjunto inicial	17
Realiza un diagrama de Venn con todos los elementos del conjunto	0

EVIDENCIAS:

La mayoría de estudiantes no contemplan los números 1 y 5 que no pertenecen al conjunto A Y B.



No contempla los elementos de un Diagrama de Venn (Nombrar los conjuntos)



2. Construya una tabla de frecuencias, donde organice las siguientes edades de 20 personas: 10, 13, 4, 7, 8, 11 10, 16, 18, 12, 3, 6, 9, 9, 4, 13, 20, 7, 5, 10

CATEGORIAS	FRECUENCIA
No organiza los datos en una tabla de frecuencia	1
Realiza una tabla sin variables ni frecuencia.	2
Realiza una tabla, ubicando alguna variable, pero no ubica la frecuencia absoluta	11
Realiza una tabla, identifica las variables, pero algunas frecuencias no corresponden a los datos presentados	1
Realiza una tabla de frecuencias con los elementos: variable y frecuencia absoluta	6

EVIDENCIAS:

No organiza los datos.

2.

10	13	4	7	8
11	10	16	18	12
3	6	9	9	4
13	20	7	5	10

Realiza una tabla; nombra las variables, pero presenta dificultades con la frecuencia absoluta

Edades	f _{rel}	f _{rel}	f _{rel}
3			
4		4	
5			
6			
7		7	
8			
9		9	
10			10
11			
12			
13		13	
16			
18			
20			

Realiza una tabla de frecuencia, utilizando los elementos variable y frecuencia absoluta

Edades.	
1	3
2	4
1	5
1	6
2	7
1	8
2	9
0	10
1	11
1	12
2	13
1	16
1	18
1	20

3. Gráfico la siguiente situación:

Tengo en una urna 5 balotas negras y 4 balotas rojas

- Al extraer una primera balota ¿Qué opciones tengo?
- Si saco una balota roja, al volver a extraer una balota ¿Qué opciones tengo?
- Así sucesivamente ...

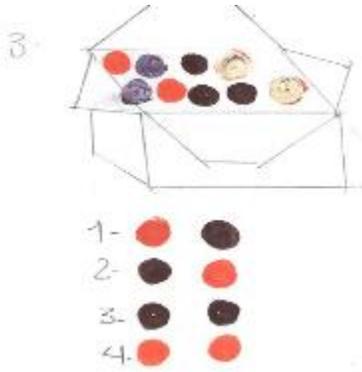
CATEGORIAS	FRECUENCIA
No realiza algún diagrama	0
El estudiante no comprende la posibilidad de, varias opciones en un experimento aleatorio, por ende, no realiza la estructura de diagrama de árbol	14
El estudiante contempla la opción de que pueden salir las dos opciones (negra o roja) pero no la realiza en un diagrama de árbol	4
Realiza una estructura de diagrama de árbol contemplando algunas de las diferentes opciones del experimento	3
Realiza un diagrama de árbol contemplando todas las opciones posibles del experimento	0

NOTA: Los estudiantes presentaron bastante dificultad para interpretar el enunciado, se hicieron varios ejemplos para su comprensión

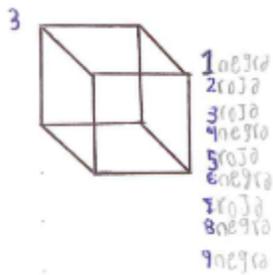
En su gran mayoría, los estudiantes no contemplan las diferentes posibilidades de un experimento aleatorio; por ejemplo, si al extraer una balota, este es negra la siguiente opción debe ser una roja.

EVIDENCIAS:

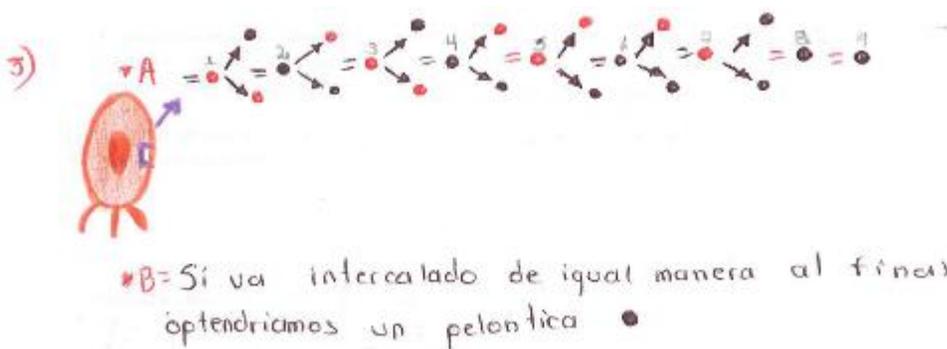
El estudiante contempla la opción de que pueden salir las dos opciones (negra o roja) pero no la realiza en un diagrama de árbol



El estudiante no comprende la posibilidad de varias opciones en un experimento aleatorio, por ende, no realiza la estructura de diagrama de árbol



Realiza una estructura de diagrama de árbol contemplando algunas de las diferentes opciones del experimento



4. Este punto presento bastante confusión, debido a la interpretación sobre las afirmaciones; cuatro estudiantes no realizaron el punto, los 17 restantes en una generalidad escribieron que no entendían las situaciones por palabras como: probable; por los porcentajes relacionados y otros especificaron el no entender el 2/6 (fracción) en el punto d; en un caso confundiéndola con un porcentaje.

EVIDENCIAS:

4. a. no es probable

B. no entiendo por los %

C. No entiendo por los números

D. no entiendo por los números.

1 es posible porque se tiene varios lanzamientos

2 no entiendo porque nose que es un probabilidad

3 que el 80% de 10 mujeres tienen color de pelo

4 no entiendo por el $\frac{2}{6}$

5. Los estudiantes no se relacionaron con este tipo de representación, aunque se hicieron varias aclaraciones, nuevamente ninguno (21 estudiantes) creo una situación donde se observaran las diferentes opciones del diagrama.

ANEXO 3.

ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA AL DOCENTE (Líder área matemáticas)

El docente encargado este año de la jefatura de matemáticas que pertenece a la institución hace cinco años, efectivamente evidencia la ausencia del pensamiento aleatorio y sistemas de datos hasta el ciclo tres; en ciclo cuatro se comienza a trabajar en el proyecto de contrajornada y según él, en ciclo cinco existe una hora oficial a la semana donde les enseñan algunas temáticas de estadística entorno a la preparación de las saber 11.

Un dato interesante de la entrevista, está referido a la formación profesional, pues una justificación del no contemplarse explícitamente el pensamiento aleatorio es porque este según acuerdos del ciclo se debe trabajar transversal a los demás pensamientos, siendo este una herramienta de trabajo que no puntualiza en cada concepto; pero posiblemente algunos profesores no lo realizan, esto debido a su formación pues en el ciclo tres pertenecen ocho profesores de matemáticas de los cuales: 3 son Licenciados en básica primaria, 3 son Ingenieros de sistemas y solo 2 son Licenciados en matemáticas; de allí cada uno tiene su prioridad en los temas a trabajar y su experiencia lo lleva observar que son más algorítmicos.

Como conclusión, si se considera importante la implementación del pensamiento aleatorio, no solo en los cursos que presentan algún tipo de prueba, siendo pertinente trabajarlo en la contra jornada (proyecto 40X40) pues esto ayudaría con el factor tiempo de la jornada normal y los estudiantes tendrían bases más sólidas en los grados superiores.

EVIDENCIAS:

Justificando el trabajo estadístico, al no plantearlo en el PE:

No está explícito, pero cuando realizan el abordaje de otro pensamiento involucran o deben involucrar el pensamiento aleatorio. (no se puntualiza)

Afirmación a una consecuencia de no abordar temas de estadística de manera constante:

5. Según los resultados de la prueba saber 2013 mostrados el día E ¿Observa alguna relación importante entre el no abordar temas fundamentales de estadística y los resultados obtenidos en el área de matemáticas?

Si, porque en ese tipo de pruebas (en las diferentes asignaturas) se necesita de temáticas de estadística.

6. ¿Considera importante abordar temas del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, no solo en los cursos que presentan algún tipo de prueba?

Si, utilizándolo con una herramienta transversal, que lo involucre para ellos capacitando

Formación de los docentes de matemáticas del ciclo tres del CG

Nota: Los profesores de régimen son licenciados en básica primaria, que posiblemente no están capacitados en estadística.

→ Actividades introductorias.

5, 6, 7 → 8 profesores.

3 Ingenieros Ed básica Primaria
3 Licenciados Ed básica Primaria
2 Licenciada en Matemáticas