EVALUACIÓN DE ARGUMENTOS VISUALES: UNA ESTRATEGIA PARA FORTALECER LAS PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS

ANGIE MILENA MARTÍNEZ COBOS
YULY YESSENIA PARRA ALDANA
JENNY MARCELA UMAÑA GÓMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2016

EVALUACIÓN DE ARGUMENTOS VISUALES: UNA ESTRATEGIA PARA FORTALECER LAS PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS

ANGIE MILENA MARTÍNEZ COBOS
YULY YESSENIA PARRA ALDANA
JENNY MARCELA UMAÑA GÓMEZ

Trabajo de grado asociado a la modalidad de profundización para optar por el título de magister en docencia de la matemática

Asesora:
MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ
Profesora del departamento de matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2016

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Evaluación de argumentos visuales: una estrategia para fortalecer las prácticas argumentativas***, presentado por las estudiantes:

Angie Milena Martínez Cobos, Cód. 2014185011, CC. 1024490666
Yuly Yessenia Parra Aldana, Cód. 2014185018, CC. 1014204956
Jenny Marcela Umaña Gómez, Cód. 2014185022, CC. 1026563208

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por las estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado,** con 48 puntos.

Observaciones: Los jurados recomiendan distinción meritoria.

En constancia se firma a los 15 días del mes de junio de 2016.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesora: María Nubia Soler
MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Jurados:

Profesora: *MÓNICA TORRES (México)*

Profesor: *WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ (UPN)*

A Dios, nuestros hijos, esposo, padres y hermanos.

AGRADECIMIENTOS

Primero a Dios por acompañarnos todos los días, por darnos esperanza, alegría y tranquilidad en nuestras vidas, por sus infinitas bendiciones y por otorgarnos muestras de su existencia para superar los tropiezos durante este tiempo. A nuestros hijos Alejandro Bohórquez Martínez, Alejandra Vela Parra y esposo Enrique Granados, por ser nuestra razón más importante de amar, por su paciencia, compañía e inmenso amor durante todo este proceso, además de ser las personas a quienes les dedicamos este trabajo como un tributo por todas las horas que nos prestaron, y que les pertenecían.

A nuestros padres Gilberto Martínez, Beatríz Cobos, Rosalba Gómez, Álvaro Umaña y Marcos Parra por su humildad, amor, comprensión e infinitas fuerzas para hacer nuestros sueños realidad, por su infinita confianza y apoyo incondicional.

Gracias a nuestra asesora María Nubia Soler, por su inmensa paciencia, apoyo y comprensión en nuestros momentos difíciles, por escucharnos, aconsejarnos y darnos ánimo para poder salir adelante a pesar de nuestras dificultades. A los profesores quienes orientaron seminarios durante el proceso académico en la maestría, ya que nos acompañaron en el camino transcurrido brindándonos herramientas tecnológicas, referentes teóricos y apoyo escritural, lo cual contribuyo significativamente al enriquecimiento del trabajo desarrollado.

Al colegio de la Salle Bogotá y la Universidad Pedagógica Nacional por permitirnos la implementación de las actividades, de igual forma a los estudiantes quienes fueron receptivos y estuvieron atentos a colaborar en lo relacionado con las actividades.

Finalmente a nuestros compañeros y amigos Jojhan Jiménez, Cindy Indaburo y Claudia Sarmiento por su compañía incondicional, su amistad, y sus consejos profesionales que fortalecieron el desarrollo del trabajo.

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 7-12-2012	

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Evaluación de argumentos visuales: Una estrategia para fortalecer las prácticas argumentativas.
Autor(es)	Martínez Cobos, Angie Milena; Parra Aldana, Yuly Yessenia; Umaña Gómez, Jenny Marcela.
Director	Soler Álvarez, María Nubia
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 234 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Argumentación, Visualización, Prueba Visual, Evaluación de Argumentos, Garantes, Conclusiones, Modelo de Toulmin, Justificación, Explicación, Generalización, Validación

2.Descripción

Este trabajo de grado buscó determinar si los procesos de argumentación en estudiantes de básica secundaria y primer semestre de educación superior se pudieron potenciar a través de la implementación de actividades asociadas a contextos geométricos y centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico. Para lograr este objetivo se aplicaron dos actividades en dos poblaciones diferentes, estudiantes de grado 9° del Colegio de la Salle y estudiantes de primer semestre de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se identificaron los diferentes tipos de argumentos y acciones desarrolladas por los estudiantes con y así determinar los elementos que enriquecieron el proceso de argumentación.

3.Fuentes

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler-Alvarez, N. (2014). Actividades Matemáticas :

Conjeturar y Argumentar. *Números*, *85*, 75–90. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación Matemática en el aula. *Premisa*, *7*(24), 23–29.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria*. Universidad Autónoma de Barcelona.

Eemeren, F. H. van, & Garssen, B. (2009). *Pondering on problems of argumentation*. University of Amsterdam, The Netherlands: Springer.

Gutierrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In *Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 44–59). Valencia.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 73–78. http://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

Ibañes, M., & Ortega, T. (1998). Visual proofs in trigonometry. *AULA: Revista de Pedagogía de La Universidad de Salamanca*, (1996), 105–118.

Inglis, M., & Mejía, J. P. (2008). On the Persuasiveness of Visual Arguments in Mathematics. *Foundations of Science*, *14*(1-2), 97–110. http://doi.org/10.1007/s10699-008-9149-4

León, O., & Calderón, D. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *4*(1), 5–21. Retrieved from http://www.clame.org.mx/relime/200101a.pdf

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. (E. Península, Ed.) (Traducción).

4.Contenidos

El presente trabajo de grado, evidencia el proceso realizado con estudiantes de grado 9° del Colegio de La Salle Bogotá y estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en la solución de dos actividades asociadas a contextos geométricos. En estas tareas se buscó que los estudiantes evaluaran garantes de tipo gráfico, para determinar si este tipo de actividades favorecen el fortalecimiento de los procesos argumentativos de los estudiantes en mención.

En este sentido, se delimitó la temática de estudio a través de: la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos, y por último, algunas investigaciones de autores con objetos de estudio similares, los cuales orientaron y complementaron el desarrollo del presente trabajo. A continuación, se presentó la justificación, donde se describieron tres aspectos: i) Normatividad Nacional, ii) Estudios asociados al trabajo de argumentación y visualización en clase de matemáticas, e iii) intuiciones del ejercicio profesional; estos soportaron la pertinencia del desarrollo de esta investigación. En el capítulo del marco teórico se expusieron los conceptos teóricos y características que sustentaron la elaboración de esta investigación, algunos de estos fueron: el proceso argumentativo, de visualización y las pruebas visuales.

Posteriormente, se presentó el capítulo de la metodología, el cual se estructuró en tres apartados: Perspectiva de investigación, Descripción del estudio y las Fases de la investigación. En el capítulo de análisis de resultados, se reportaron algunos ejemplos de los procesos de argumentación de los estudiantes evidenciados en la resolución de las actividades, el impacto de la visualización en la construcción de dichos argumentos y algunos comentarios de los estudiantes respecto a los aprendizajes derivados de la solución a la actividad. Finalmente se presentaron las conclusiones generales resultantes de este estudio, en las cuales se evidenció el cumplimiento de los objetivos propuestos y la solución que se dio sobre la pregunta de investigación planteada.

5.Metodología

Esta investigación está enmarcada en un enfoque cualitativo, debido a que se estudió lo que hacen y dicen los estudiantes, para así caracterizar o describir lo sucedido y dirimir algunas conclusiones de ello. En este sentido, la propuesta se enmarca en el paradigma interpretativo, pues se conduce a un conocimiento práctico que surge de la interpretación de los discursos de los estudiantes. En particular se interpretaron las producciones orales y escritas de los estudiantes en relación con la implementación de una secuencia de actividades diseñadas para promover el proceso de argumentación en el aula.

Se estructuraron tres apartados: i) perspectiva de investigación: se describe los lineamientos principales del enfoque metodológico y la perspectiva en el que se inscribe; ii) descripción del estudio: se enuncian las características relevantes de la propuesta como quiénes son los participantes, el rol que desempeña cada uno en la investigación y las técnicas de recolección de la información; iii) fases de la investigación: diseño del instrumento, implementación del diseño y análisis.

La secuencia de actividades fue diseñada para estudiantes de dos poblaciones diferentes, el criterio de selección de los participantes se debió a que dichas poblaciones son estudiantes de las investigadoras de esta propuesta y presentan niveles de escolaridad diferentes, unos son estudiantes de básica secundaria y los otros son estudiantes de licenciatura en matemáticas.

6. Conclusiones

El estudio que presentamos correspondió a nuestro interés por mejorar el ejercicio profesional docente. Iniciábamos este trabajo con una situación que origino el problema de investigación y como se ha manifestado a lo largo del documento nuestro objetivo era evidenciar si es posible fortalecer el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico.

La experimentación llevada a cabo permitió identificar una serie de conclusiones respecto a diferentes cuestiones abarcadas en el transcurso del estudio pero que se relacionan para dar respuesta a la pregunta de investigación.

El instrumento que se aplicó a las dos poblaciones permitió evaluar argumentos dada una afirmación, lo que hace de su diseño algo innovador, ya que como se afirmó durante el planteamiento del problema es una estrategia poco usual empleada en las investigaciones relacionadas con argumentación. De igual manera plantear una falacia permitió que los estudiantes dudaran de los argumentos que se propusieron durante la actividad y afirmaran que no siempre es posible generalizar y que antes de dar validez a un argumento se deben explorar todas las opciones de solución posibles.

Así mismo se evidenció la importancia que tiene para los estudiantes concebir diferentes puntos de vista de sus compañeros, es decir, se hizo énfasis en la argumentación como función social, puesto que algunos expusieron que el escuchar las opiniones de sus pares les permitió apoyar o refutar ideas y así entre todos llegar a un consenso sobre lo que se estaba realizando, en ello jugo un papel fundamental la interacción entre compañeros y entender que no todos usan los mismos procedimientos para abordar o socializar una actividad.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 7-12-2012	

Elaborado por:	Martínez Cobos, Angie Milena; Parra Aldana, Yuly Yessenia; Umaña Gómez, Jenny Marcela.
Revisado por:	Soler Álvarez, María Nubia

Fecha de elaboración del Resumen:	10	05	2016

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

Este estudio busco evidenciar si es posible fortalecer el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico, para lograr este objetivo se aplicaron dos actividades en dos poblaciones diferentes, estudiantes de grado 9° del Colegio de la Salle y estudiantes de primer semestre de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se identificaron los diferentes tipos de argumentos y acciones desarrolladas por los estudiantes con el fin de determinar los elementos que enriquecieron el proceso de argumentación.

PALABRAS CLAVE: Argumentación, Visualización, Prueba Visual, Evaluación de Argumentos, Garantes, Conclusiones, Modelo de Toulmin, Justificación, Explicación, Generalización, Validación

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento muestra el trabajo realizado al implementar dos actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico en dos poblaciones diferentes; una corresponde a estudiantes de grado 9° del Colegio de La Salle Bogotá y la otra a estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Cuyo objetivo fue evidenciar si es posible fortalecer los procesos argumentativos de las poblaciones mencionadas.

Es de aclarar que, como se mostrará en la presentación del asunto de estudio, el punto para dar inicio al trabajo de grado fue una actividad previa implementada en un Colegio de Bogotá, con el cual se presentó un anteproyecto con la propuesta que se pensaba implementar, cuyo nombre era "La visualización y la argumentación en la clase de matemáticas". Durante el desarrollo del trabajo se realizaron modificaciones a éste, debido a: la indagación de referentes teóricos, orientaciones de expertos en el tema, direccionamiento de la asesora, el diseño del instrumento y la implementación de la tarea, debido a lo anterior se optó por cambiar el título inicial de la propuesta, sin cambiar el fondo de esta, a: "Evaluación de argumentos visuales: Una estrategia para fortalecer las prácticas argumentativas".

En este sentido, se delimitó la temática de estudio a través de: la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos, y por último, algunas investigaciones de autores con objetos de estudio similares, los cuales orientaron y complementaron el desarrollo del presente trabajo. Luego se presentó la justificación, donde se describen tres aspectos: i) normatividad Nacional, ii) estudios asociados al trabajo de argumentación y visualización en clase de matemáticas, e iii) intuiciones del ejercicio profesional; estos soportaron la pertinencia del desarrollo de esta investigación. En el capítulo del marco teórico se expusieron los conceptos teóricos y características que sustentaron la elaboración de esta investigación, algunos de estos fueron: el proceso argumentativo, de visualización y las pruebas visuales.

Después se describe la metodología usada, para ello se estructuran tres apartados: perspectiva de investigación, descripción del estudio y las fases de la investigación. En el análisis de los resultados se reportan los procesos de argumentación evidenciados y cómo la visualización aporto en el trabajo, para ello se van mostrando ejemplos tomados de las evidencias recolectadas durante la ejecución de las actividades y cómo se intuye que esto fortaleció las prácticas argumentativas. Finalmente se presentan las conclusiones generales obtenidas donde se evidencia el cumplimiento de los objetivos propuestos y la solución que se dio sobre la pregunta de investigación planteada.

2. PRESENTACIÓN DEL ASUNTO DE ESTUDIO

En este capítulo se expone el asunto de estudio que se desarrolló en esta propuesta de investigación, inicialmente se presenta el planteamiento del problema, en el cual se describe el análisis de una actividad realizada en una clase de matemáticas previa a este estudio, de donde se identificaron algunos aspectos relacionados con el proceso de argumentación y visualización que permitieron establecer un asunto inicial de estudio, luego se reportaron algunas investigaciones relacionadas con los aspectos anteriormente mencionados, estos orientaron y determinaron como objeto de investigación el proceso de argumentación mediada por pruebas visuales. Finalmente se presentó la pregunta de investigación que sintetiza el problema que se desea abordar y los objetivos generales y específicos que dieron cuenta de las acciones a desarrollar y las metas que se trazaron para desarrollar la propuesta.

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La problemática a estudiar en este trabajo de grado empezó a construirse a partir de la observación de las respuestas que dieron estudiantes de décimo grado a un problema de generalización de triángulos semejantes para la clase de trigonometría, de la revisión de las respuestas se generaron algunos interrogantes que pueden ser desarrollados a través de ejercicios de investigación, estas inquietudes iniciales fueron ampliándose en la medida en que se fue consultada literatura relacionada con el proceso de argumentación, de visualización y prueba visual.

Actividad previa

Con la intención de indagar el actuar de los estudiantes en clase de matemáticas en relación con los procesos de argumentación y prueba, se propuso una tarea para estudiantes de grado décimo en el curso de trigonometría que permitió la observación y exploración de características en triángulos semejantes, para ello se propusieron tres grupos de triángulos rectángulos (G_1-G_2-G_3[1]) que comparten dos tipos de características: G_1 y G_2 son grupos de triángulos semejantes y G_3 son 3 subgrupos (S_1, S_2, S_3) de triángulos semejantes de diferente medida angular como se muestra continuación:

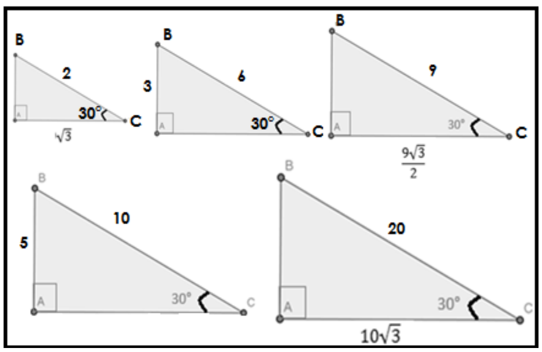


Figura 1. G1 (60°- 90° -30°)

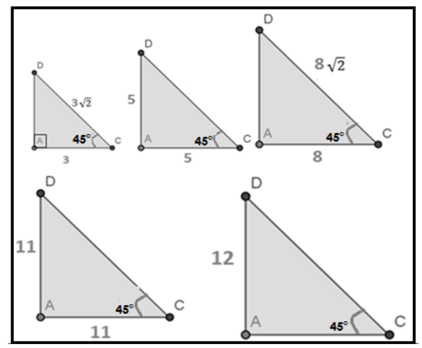


Figura 2. G2 (45° - 90° - 45°)

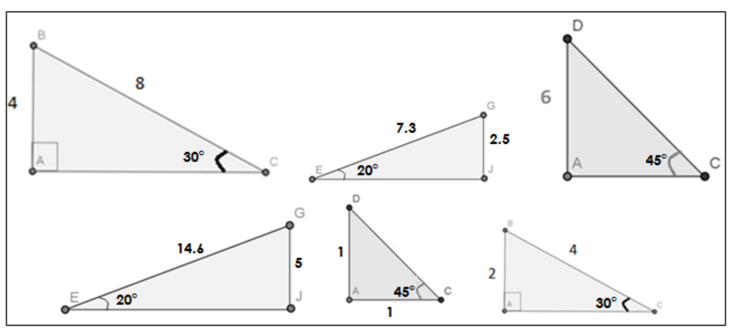


Figura 3. G3 (S1 30°-90°-60°, S2 45°-90°-45°, S3 20°-90°-70°)

Para desarrollar este taller se conformaron grupos de tres estudiantes, éstos se enumeraron del 1 al 10 con la intención de distinguir las participaciones. La actividad se dividió en dos momentos, en el primero se resolvió el taller por grupos

[1] Se utilizará la notación G_1-G_2-G_3 para hacer referencia a los tres grupos de triángulos de la tarea.

y en el segundo se socializaron las respuestas dadas, de esta socialización algunos estudiantes elaboraron documentos a manera de relatorías de lo discutido en clase para reportar lo sucedido y algunas observaciones de la profesora que guío la actividad, quien hace parte del equipo de investigación que realizó este trabajo de grado. Para este análisis se tomó una relatoría de cada curso (10A - 10B). Al revisar lo desarrollado en la actividad, se identificaron situaciones que dieron origen a posibles preguntas de investigación las cuales se mostrarán a continuación:

Primera relación

Los estudiantes hacían uso de la gráfica para determinar las longitudes de los lados a partir de las relaciones que identificaron en la Figura 1, estas se cumplían debido a que los triángulos se dibujaron a escala. Ejemplos de estas afirmaciones son:

(1) La medida de la hipotenusa es el doble de la altura.
(2) Los ángulos de los triángulos son los mismos.
(3) Los triángulos son semejantes.

En este caso se entrevé que la imagen influyó en las afirmaciones que los estudiantes plantearon de lo observado, lo que llevo a cuestionar *el papel cumplen las imágenes en la solución de una tarea.*

Segunda relación

En el segundo punto de la actividad se solicitó que observaran y caracterizaran cada uno de los grupos de triángulos, por tanto los estudiantes establecieron las siguientes características (Tabla 1):

Relaciones estudiantes	**Gráfica de dónde obtienen la relación**

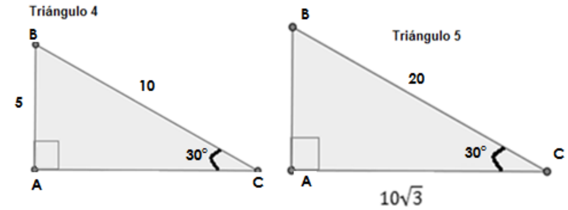
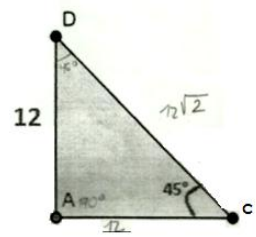
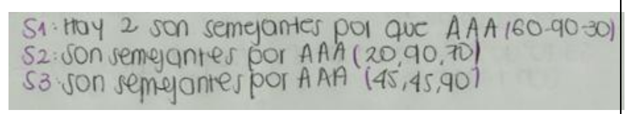
G_1: tienen ángulos de igual medida (30º-60º-90º), como se puede ver (Figura 4) el triangulo 5 es el doble del 4.	 Figura 4. G1 del taller
G_2: tienen dos catetos iguales y la hipotenusa no, ángulos iguales (45º-45º-90º) Figura 5.	 Figura 5. G2 del taller
G_3: Se encuentran triángulos del G_1 y G_2 (Figura 3), por tanto se establecen tres subgrupos.	 Figura 6. Respuestas de un grupo de estudiantes

Tabla 1. Relaciones grupos de triángulos

De lo anterior se pudo ver que los estudiantes hacían uso de las imágenes para inferir información o plantear conjeturas, esto se asocia como un razonamiento de tipo Abductivo (Álvarez, Ángel, Carranza, & Soler-Alvarez, 2014) pues a partir de la observación de unos datos se extrae una conclusión; por tanto surgió la siguiente pregunta: *¿Cómo influyen las representaciones en el proceso de conjeturación y argumentación?.*

Tercera relación

En el punto 3 de la actividad se pidió que *describieran qué varía o no, de cada uno de los grupos de triángulos,* entre las relaciones que encontraron, un estudiante afirmó que para cualquier triángulo del G_2 la hipotenusa es $a\sqrt{2}$, donde *a* es la medida de los dos catetos; la docente les pidió a los estudiantes que demostraran la afirmación, para ello una de las estudiantes propuso lo siguiente:

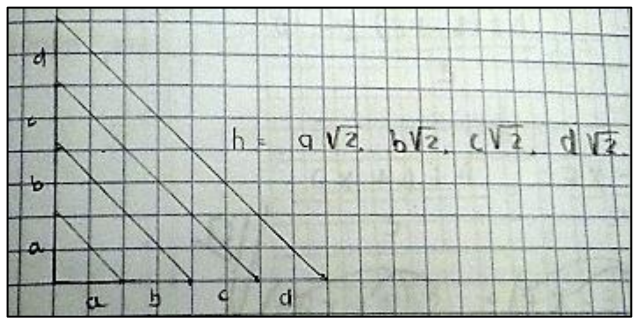


Figura 7. Planteamiento de un estudiante

En este caso la estudiante planteó su demostración de forma gráfica, en la cual mostró varios triángulos con las características de G_2 y verificó que se cumple la relación, por ello afirmó de forma general que esto se cumple; lo cual se asocia como un razonamiento Inductivo[2] (Álvarez et al., 2014), pues experimentó para tratar de verificar si su conjetura es verdadera. Sin embargo, otro estudiante propuso que la relación se cumple si se piensa en un triángulo rectángulo con dos lados de medida *x*, para que al aplicar el teorema de Pitágoras se determine la medida de la hipotensa y así concluir que mide $\sqrt{2}x$.

[2] Razonamientos planteados por Peirce: **Razonamiento Abductivo:** Se relaciona con la capacidad de crear, observar, encontrar relaciones, hacer analogías y establecer conjeturas. **Razonamiento Inductivo:** Se relaciona con la experimentación, con la revisión en detalle de las conjeturas propuestas, la cual permite ajustarlas o reevaluarlas según cada caso. **Razonamiento Deductivo**: Garantiza conclusiones necesarias, conclusiones que son difíciles de refutar.

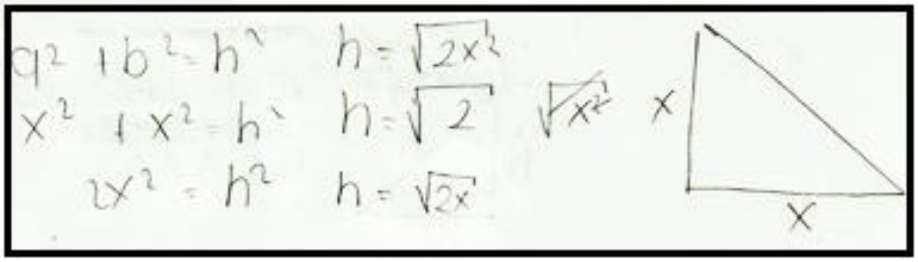


Figura 8. Planteamiento estudiante 2

En este caso el estudiante propuso una demostración para cualquier triángulo de este grupo, al concluir que la hipotenusa es de medida $x\sqrt{2}$, esto se asocia como un razonamiento de tipo Deductivo (Álvarez et al., 2014) pues se deduce una conclusión que debe ser verdadera.

De lo anterior se puede ver que los estudiantes para dar soporte a sus afirmaciones, hacían uso de definiciones, imágenes, ejemplos y representaban gráficamente las generalidades que observaban, de aquí se presentan interrogantes como estos: *¿Qué tipo de argumentos genera un estudiante para verificar una conjetura propuesta?, ¿Cómo validan o refutan los estudiantes a partir de afirmaciones que dan por medio de la visualización?* y *¿Es posible que una imagen pueda ser considerada como una prueba?.*

Las cuestiones que surgieron en la actividad de triángulos implementada dio origen a una propuesta inicial a estudiar, la cual se socializó a compañeros de la línea de investigación *Argumentación y Prueba* y dos profesores de la universidad de México, con el fin de presentar los avances desarrollados, la justificación y las acciones ejecutadas. De acuerdo a lo expuesto, uno de los docentes resaltó que el tema a abordar se relacionaba con pruebas visuales y por ende recomendó literatura relacionada con argumentos de tipo visual.

Uno de los documentos sugeridos fue *Pruebas visuales en trigonometría* de Ibañes & Ortega (1998), en este se evidencia la importancia de la visualización en procesos de prueba y se ejemplifica si una prueba visual puede ser considerada como una demostración, teniendo en cuenta las funciones de las representaciones gráficas y de la demostración. Esta clasificación permite evidenciar la percepción que se tiene por un grupo de estudiantes en relación con la imagen como prueba y elementos teóricos que contribuyen al marco de referencia.

Otro documento sugerido fue *On the Persuasiveness of Visual Arguments in Mathematics* de Inglis & Mejía Ramos (2008), de este se destaca la estrategia a trabajar con los argumentos visuales a través de la evaluación de los mismos y así observar el nivel de persuasión que estos generan, en este sentido, consideramos como proceso fundamental la evaluación de argumentos como una estrategia para promover su desarrollo, de tal forma que sea el estudiante quien determine el valor de verdad y la fuerza de un garante. Debido a que de estos documentos se resaltan algunos asuntos que permitieron orientar nuestra propuesta se presenta en detalle cada uno de ellos.

Estudios relacionados con la prueba visual

En el estudio desarrollado por Ibañes & Ortega (1998) se investigó sí las imágenes ayudan a probar afirmaciones, considerándose como pruebas visuales o si sólo facilitan su comprensión. También se resaltó la utilidad de la visualización en el razonamiento matemático, por tanto, se consideró fundamental desarrollar capacidades de visualización en los estudiantes a través de la práctica. Para el caso de las pruebas visuales surgió como cuestionamiento ¿cuál es su papel en el aprendizaje de las matemáticas? Para ello, en el documento se presentan varias funciones de las representaciones gráficas en el proceso de resolución de problemas:

- Ilustrar el enunciado del problema.
- Resumir informaciones (la representación gráfica de una función, la «figura» de un problema de Geometría).

- Estructurar el pensamiento (esquemas conjuntistas, tablas de doble entrada, diagramas en árbol).
- Ayudar a conjeturar (dibujos geométricos).
- Ayudar a probar (contra-ejemplos, dibujos geométricos...).

La actividad que propuso el autor fue implementada con estudiantes entre los 16 y 17 años en una escuela de Valladolid, esta se desarrolló en tres fases, para dos de ellas hace uso del Software Cabri Geometry y la tarea escogida se fundamentó en el Teorema de Napoleón: *Si ABC es un triángulo cualquiera, entonces el triángulo O1O2O3, cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del inicial, es un triángulo equilátero (Figura 9*).

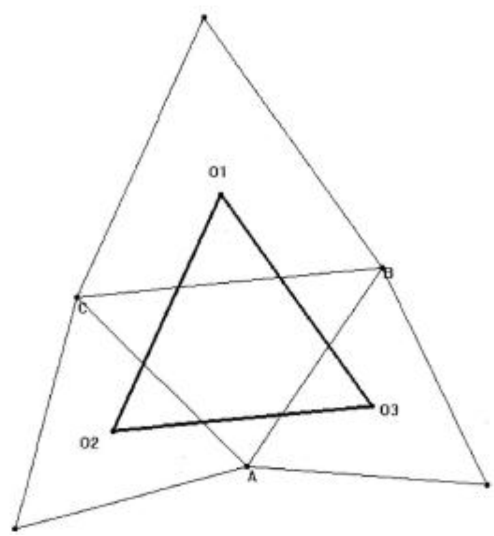


Figura 9. Triángulo de Napoleón

- FASE 1 demostración: El profesor en 50 minutos mostró la demostración del teorema a los estudiantes por métodos trigonométricos (ley de coseno).

- FASE 2 visualización I: El profesor presentó en Cabri la construcción a sus estudiantes y les solicitó utilizar la herramienta de arrastre y centrar la atención en el triángulo O1O2O3.

– FASE 3 visualización II: El profesor orientó a sus estudiantes para que realizaran la construcción en Cabri desde el comienzo y les solicitó utilizar la herramienta Distancia y Longitud después de cada desplazamiento de los vértices, para medir los lados del triángulo O1O2O3.

Luego los estudiantes calificaron de 0 a 3 puntos la incidencia de las distintas funciones de la demostración, tanto en la fase de demostración como en las de visualización (Figura 10).

	Demostración	Visualización I	Visualización II
Comprobar	2,51	2,22	2,84
Convencer	2,11	2,35	2,86
Explicar	2,46	1,65	2,19
Relacionar	1,89	1,56	2,27
Descubrir	2,19	1,41	2,05
Transmitir	2,41	1,89	2,08

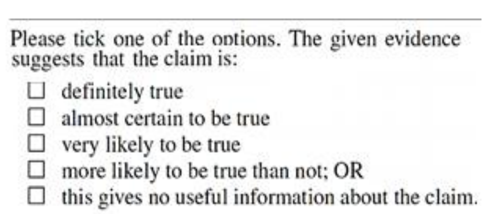
Figura 10. Fines de la demostración y la visualización. Ibañes, et al 1998

Con la información recolectada, los autores infirieron las siguientes conclusiones: (i) La demostración comprueba, explica, relaciona y transmite conocimiento, pero no convence tanto; (ii) la visualización convence, pero no explica ni relaciona tanto. Algunas conclusiones de este estudio aluden a las diferencias entre el esquema de prueba expuesto (fase 1) y los esquemas de prueba observados (fases 2 y 3) como se muestra a continuación: (i) En el convencimiento del resultado es donde se presenta la mayor diferencia favorable a la visualización porque ellos son capaces de entender mejor este proceso. (ii) Los comentarios que hacen los alumnos sobre la finalidad explicativa son más ricos en la visualización que en la demostración, aunque varios piensan que la visualización no bastaría por sí misma. (iii) Hay un manifiesto claro sobre la riqueza didáctica de las «pruebas visuales» por parte de los estudiantes, ya que, según ellos, éstas ayudan a aprender, amplían los conocimientos y se pueden aplicar en situaciones similares. (iv) El pensamiento visual proporciona un proceso de razonamiento deductivo, y para los alumnos estas pruebas cumplen los mismos fines que las demostraciones. Por tanto, las pruebas visuales deben ser consideradas como instrumentos didácticos integrados en el aula de matemáticas, y pueden ser utilizadas para mejorar los fines de la demostración matemática.

La investigación anterior permitió ejemplificar estudios de pruebas visuales en el aula, a través de la relación de las funciones de la demostración y la implementación de las diferentes fases de la actividad, amplió la visión de la representaciones visuales a partir de sus fines y la estrategia empleada es la solución de problemas asociados a geometría, teniendo en cuenta que esta es un área propicia para la visualización.

Otro estudio más reciente que resalta la importancia de las imágenes en el proceso de prueba es el realizado por Inglis & Mejía (2008), este consistió en la aplicación de dos experimentos que pretendían estudiar si una imagen podría ser considerada como una prueba a una afirmación y la influencia de un texto descriptivo para esta prueba. Teniendo en cuenta que cada integrante debía participar en un único experimento, se realizó una convocatoria en línea a dos poblaciones: estudiantes de pregrado de matemáticas y matemáticos activos en investigaciones.

Para cada experimento se presentó un enunciado con su respectiva prueba visual y una matriz de evaluación (Figura 11) que permitió calificar el valor de verdad y aceptación de las afirmaciones en relación con la prueba visual es decir, si puede ser el garante considerado como una demostración.


Please tick one of the options. The given evidence suggests that the claim is:

- ☐ definitely true
- ☐ almost certain to be true
- ☐ very likely to be true
- ☐ more likely to be true than not; OR
- ☐ this gives no useful information about the claim.

Figura 11. Tabla de calificación de evidencias

Adicionalmente se destinó un espacio en el cuestionario para comentar o ampliar su respuesta. Teniendo en cuenta uno de los objetivos de investigación, las evidencias presentadas en cada experimento eran de dos tipos: (*i*) Imagen acompañada de texto descriptivo e (*ii*) Imagen con flechas que destacan características sobresalientes de la afirmación, ejemplo de estos tipos de experimentos se muestran en la Figura 12.

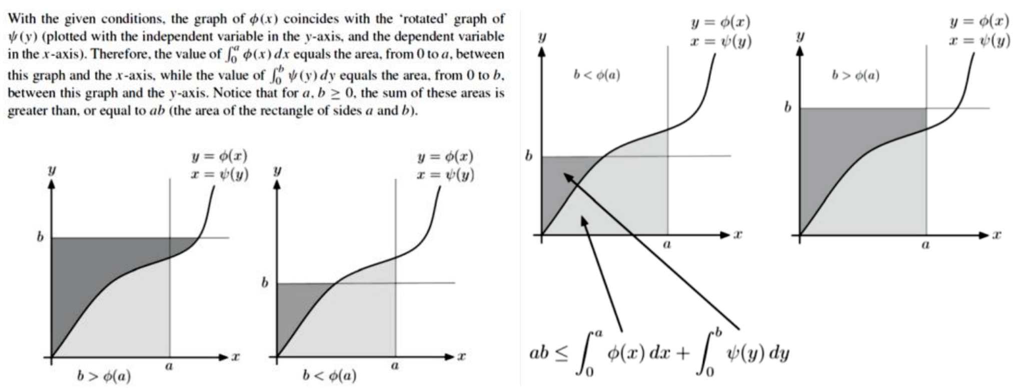


Figura 12. Evidencia experimento 1 y experimento 2

Entre los resultados recolectados se encontraron grandes diferencias individuales en las respuestas de los participantes, en algunas de ellas se manifestó que la prueba la percibían agradable, pero no los convencía para un caso general, entre otras; sin embargo, se concluyó que el experimento 1 demostró que los argumentos visuales pueden ser percibidos como más persuasivos cuando están acompañados de un texto descriptivo que cuando se dejan sin una descripción como en el experimento 2.

De este segundo documento consideramos como innovador y poco usual la propuesta de evaluar pruebas visuales como una estrategia que permite medir el nivel de persuasión de argumentos de este tipo, cabe resaltar que a partir de este momento asumiremos que la prueba visual es un garante que permite deducir una conclusión en el proceso de argumentación. En este sentido cuestionamos ¿cómo se trabaja usualmente la argumentación en el aula? y se propuso entonces, revisar literatura que se relacione con el trabajo de argumentación en la clase de matemáticas.

En esta búsqueda se encontró que la mayoría de documentos hacían énfasis en los procesos de demostración, justificación y validación, del cual se esperaba que los estudiantes *propusieran argumentos* que le permitieran concluir el valor de verdad de una afirmación *cuando se resuelven problemas de tipo matemático en el aula,* algunos ejemplos de investigaciones asociadas al proceso de argumentación en clase de matemáticas son: León & Calderón (2001) quienes propusieron una tarea en la cual los estudiantes debían solucionar un problema abierto, de acuerdo a los argumentos dados para justificar y validar las autoras establecieron los diferentes recursos argumentativos que se evidenciaron en las diferentes fases del estudio. En la investigación de Boero et al., (2010) se planteó a algunos estudiantes un problema abierto de geometría el cual debían solucionar y de los argumentos presentes en dicha solución se centró la atención en la integración del modelo de Toulmin y el de Habermas para describir el comportamiento racional de la prueba; para el caso de Ding & Jones, (2009) se buscó identificar diferentes estrategias presentes en la clase de matemáticas que permitieran promover la enseñanza y el aprendizaje de la prueba a través del proceso de descubrimiento, para ello se implementaron actividades de la resolución de problemas de Polya con el fin de analizar las estrategias de enseñanza que son utilizadas por un profesor; en lo que sigue se describe en detalle lo que dichos autores plantean en relación con el trabajo de la argumentación en el aula.

Estudios relacionados con la argumentación en el aula

León & Calderón (2001) enfocan su estudio en identificar recursos argumentativos que posibilitan la validación de soluciones a problemas matemáticos. Para ello, se entregó a 12 estudiantes de primer semestre de pregrado y 12 estudiantes de primer semestre de posgrado en Educación Matemática, el siguiente problema, el cual debían resolver de forma individual y en parejas:

> *"Se llena una tabla compuesta por P filas y Q columnas con los números naturales de 1 hasta PQ. Los números se escriben en orden ascendente, de izquierda a derecha, a lo largo de la primera fila, luego a lo largo de la segunda fila, etc. El número 20 se encuentra en la tercera fila, el 41 en la quinta y el 103 en la última. Hallar P + Q." (Tomado de Olimpiadas matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 1993).*

Para identificar recursos argumentativos de validación, se tomaron los diferentes tipos de argumentos evidenciados en las tres fases: 1) presentación de soluciones individuales, en donde se elaboraron los argumentos iniciales, 2) estudio de soluciones, estos se consideran como argumentos de transición y 3) conclusiones, en las que se establecieron los argumentos finales obtenidos por la pareja y estos fueron los que se discutieron en la plenaria general.

Argumentos iniciales de validación

Tipo de recurso	Caracterización de recurso
Matemático por influencia externa	**Ritual procedimental:** La validez de la solución se apoya en una fórmula y procedimientos matemáticos, pero desconectados de las relaciones derivadas del problema.
Matemático por influencia Interna	**Empírico 1 Perceptual:** La solución se basa en el uso de imágenes mentales rudimentarias en las cuales no está presente la habilidad para anticipar, predecir resultados. **Empírico 2:** Se basa en imágenes mentales relacionadas con conceptos matemáticos que se asocian a las relaciones numéricas encontradas, pero aún no está presente la habilidad de anticipar o predecir. **Empírico 3:** Se basa en imágenes mentales relacionadas con conceptos matemáticos que se asocian a las relaciones numéricas encontradas, pero se intenta acomodar tales relaciones a fórmulas con el fin de ganar un tipo de expresión considerado más matemático.
Discursivo	Este se desarrolla como un proceso de reconstrucción de procesos elaborados correspondientes con la actividad matemática realizada. **Descriptivo:** Presenta los pasos y procedimientos que se siguen para la solución del problema.

Tabla 2. Argumentos iniciales

Argumentos de transición en la validación

Tipo de recurso	Caracterización de recurso
Matemático por influencia externa	**Autoridad:** El carácter de verdad se sustenta en razones externas al proceso (afirmaciones del profesor, libros, etc.)
Matemático por influencia interna	**Empírico 4 inductivo:** La verdad de un resultado se afirma después de verificarla para algunos casos. **Enumeración de ambigüedades:** Identificar en una pluralidad de interpretaciones las contradicciones que se puedan dar. **Ejemplificación:** Identificar ejemplos para reconocer la aplicabilidad del saco con miras a la generalización.
Discursivo	**Ejemplo:** Como ilustración permite sostener una regularidad y como modelo incitará a la imitación. **Explicativo:** Analizar la solución que se presenta como argumento para hacer comprensible al interlocutor. **Comparativo:** Establecer semejanzas o diferencias entre procesos, objetos o situaciones. **Autoridad:** Emplear los juicios de otro como medio de prueba. **Incompatibilidad:** Establecer incongruencias en el sistema argumentativo entre dos aserciones.

Tabla 3. Argumentos de transición

Argumentos finales en la validación

Tipo de recurso identificado	Caracterización de recurso
Matemático por influencia interna	Empírico tipo 1 perceptual
Discursivo	Descriptivo y Explicativo

Tabla 4. Argumentos finales

Se identificaron tres conclusiones las cuales se encontraron influenciadas por lo cognitivo y lo discursivo: 1) *Acerca de la concepción y resolución del problema:* los estudiantes se limitaron a responder preguntas sin que se pudiera observar con claridad el proceso de validación desarrollado; 2) *Acerca de la relación argumentación-validación* (con auditorio presente): la argumentación se ve como un proceso complementario a la validación, además se observó que si bien los recursos iniciales en su mayoría fueron empíricos y de influencia externa, el trabajo de parejas permitió modificarlos, en busca de mayores niveles de elaboración matemática, permitiendo la existencia de recursos de tipo analítico, y 3) *Acerca de la relación argumentación-validación* (sin auditorio presente): se asocia como la argumentación para uno mismo, es decir que la validación se constituye en un paso previo a la elaboración escrita de argumentos, además se identificó que el mostrar o explicar, ya se consideraba como un proceso suficiente para convencer.

Otra investigación es la de Boero et al., (2010), quienes destacaron que existe una continuidad entre la argumentación como proceso de producción de una conjetura y la construcción de su prueba, es decir, durante el proceso de resolución de problemas, la argumentación es usualmente requerida en la elaboración de una conjetura la cual puede ser aprovechada en una construcción de prueba mediante la organización de los argumentos anteriormente producidos en una cadena lógica, dicha continuidad es llamada unidad cognitiva.

Los autores para desarrollar su propuesta describieron el proceso de resolución de un problema abierto de geometría (Figura 13), en un curso tradicional de 12 y 13 grado en Francia e Italia y para cuyo análisis se tomó el modelo de Toulmin como referencia. Para evidenciar el modelo de Habermas, se propuso a estudiantes de primer y tercer año de matemáticas y a estudiantes de tercer año que se preparan para ser maestros de primaria que resolvieran el siguiente problema: ¿Qué se puede decir acerca de los divisores de dos números consecutivos?

Problem: ABC is a triangle. Three exterior squares are constructed along the triangle's sides. The free points of the squares are connected, defining three more triangles. Compare the areas of these triangles with the area of triangle ABC.

Figura 13. Problema de geometría propuesto en la investigación

La investigación realizada por Ding & Jones (2009), indagó sobre las estrategias que utilizó un profesor de matemáticas para potenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba deductiva en sus estudiantes de grado octavo, a través de actividades del descubrimiento. Para ello se implementaron actividades de la resolución de problemas de Polya con estudiantes, como se muestra a continuación:

> *"Proof problem Given: Triangle ABC and AED are equilateral triangles; CD=BF. Prove: Quadrilateral CDEF is a parallelogram. Teacher Lily, in the second of a sequence of lessons on developing her students' understanding of this multi-step proof problem (Figura 14.1), first guided her students to consider a related problem that they had learned before (Figura 14.2)".*

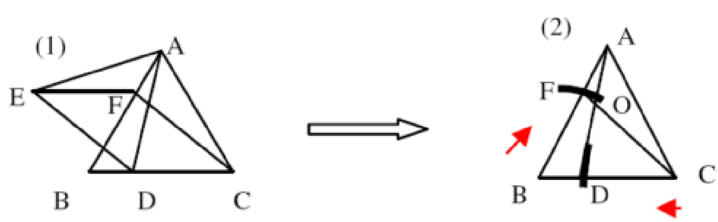


Figura 14. Problema planteado en la investigación

Para el desarrollo del problema la docente propuso una serie de instrucciones, algunas de estas fueron: (i) dibujar triángulo en el tablero y explicar la importancia de la información dada, (ii) realizar preguntas que permitieron orientar al estudiante a descubrir relaciones implícitas en la figura a partir de la exploración, (iii) relacionar la información dada con lo que se desea encontrar. En las conclusiones se identificaron dos estrategias, la primera se relaciona con el planteamiento de diferentes problemas que permitieron la experimentación y la segunda es la formulación de diversas preguntas que cuestionaron y orientaron el proceso de verificación y prueba de los estudiantes. Otra de las conclusiones encontradas mostró que el uso de estas estrategias puede ayudar a los estudiantes a construir pruebas más elaboradas. De este estudio se resalta el uso diferentes situaciones pedagógicas que impliquen la dinámica de experimentación encaminada a la producción de pruebas más sólidas.

De estas investigaciones se destacan cuatro asuntos que contribuyen al desarrollo del presente trabajo, 1) la argumentación es objeto de investigación en el aula y por esto se hace relevante profundizar en el tema, 2) los tipos de tareas que promueven la argumentación se encuentran mediadas por los procesos de justificación, validación y demostración, 3) los estudios se han centrado en la producción de argumentos por parte de los estudiantes cuando estos resuelven un problema matemático y no se evidencia trabajo con la ejemplificación de argumentos que permitan enriquecer la concepción del estudiante respecto al proceso de argumentación, y 4) es posible que los estudiantes mejoren en la elaboración de argumentos a través de diferentes procesos de experimentación.

Teniendo en cuenta los interrogantes planteados al analizar la implementación de la actividad de triángulos semejantes, los estudios que evidencian el trabajo asociado a la argumentación por medio de la producción de argumentos que permitan la validación y la demostración, y la tendencia de evaluar argumentos visuales para relacionarlos con la prueba matemática, se plantea como pregunta de investigación:

¿Cuestionar la validez de los argumentos visuales usados para sustentar una afirmación, cómo fortalece los procesos de argumentación en la clase de matemáticas?

2.2. OBJETIVOS

Luego de establecer la problemática de estudio, se presenta como objetivo principal:

Evidenciar cómo se fortalece el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico.

Para lograr este objetivo se establecieron y articularon una secuencia de tareas que dan cuenta de los siguientes objetivos específicos:

- Comprender y fundamentar los diferentes elementos que componen la prueba visual, los procesos de argumentación y visualización en la clase de matemáticas, ya que estos constituyen los tres ejes principales a trabajar en esta propuesta.
- Diseñar tareas asociadas a pruebas visuales en matemáticas que permitan a los estudiantes evaluar de argumentos.
- Identificar los diferentes tipos de argumentos presentes en la evaluación de garantes de tipo gráfico.
- Caracterizar los procesos de visualización, argumentación y evaluación en las diferentes etapas que se desarrollaron para la solución de las actividades con el fin de evidenciar los avances del proceso argumentativo.

2.3. JUSTIFICACIÓN

Teniendo en cuenta que la modalidad de la presente propuesta de estudio es de profundización y su finalidad es fortalecer el ejercicio profesional del docente consideramos tres elementos que permiten dar cuenta de la importancia del desarrollo de esta investigación: (i) Normatividad Nacional, la cual orienta las prácticas del docente y los ejes temáticos a desarrollar, (ii) algunos estudios desarrollados por la comunidad de educadores asociados al trabajo de argumentación y visualización en clase de matemáticas, e (iii) intuiciones determinadas a partir de nuestro ejercicio profesional.

Normatividad nacional

Considerar la argumentación como herramienta para la construcción y validación del conocimiento matemático, ha permitido identificarla como un proceso fundamental para el aula, tanto así, que para el caso del currículo Colombiano se establece los Estándares Básicos de Competencias en los cuales se afirma que para ser un ciudadano competente en matemáticas, uno de los procesos generales que debe desarrollar es la formulación de argumentos que justifiquen análisis, procedimientos y la validez de las soluciones propuestas al resolver un problema, para que de este modo sea posible "*Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración*" (MEN, 2006, p. 51), de tal forma que la argumentación hace parte de las orientaciones nacionales a nivel curricular para el desarrollo de las Matemáticas escolares.

Así mismo, en el currículo colombiano se considera que el proceso de visualización debe desarrollarse en las aulas, por tanto hace parte de los lineamientos y estándares básicos de competencias que orientan los procesos y contenidos escolares. En los estándares el MEN (2006), lo asocia a los pensamientos geométrico y variacional estableciendo que las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras (MEN, 2006, pag 67).

Dado que el MEN es la institución gubernamental que regula los procesos de educación colombianos e indica la importancia del desarrollo de la argumentación y visualización en la clase de matemáticas, este trabajo de grado centró su atención en los procesos de argumentación mediados por la visualización en tareas de evaluación de garantes de tipo gráfico. Por otra parte los diferentes estudios de investigación desarrollados por la comunidad de educadores matemáticos asociados a los procesos de argumentación y visualización también indican la importancia de trabajarlos en el aula; a continuación se describirán algunas investigaciones que trataron alguno de estos procesos.

Estudios asociados al trabajo con la argumentación en clase de matemáticas

Considerar las matemáticas como un constructo social, implica concebirla como una actividad culturalmente desarrollada, es decir, como producto del pensamiento humano el cual se consolida y se convierte en un conocimiento aceptado y validado por una comunidad. De esta manera se ha dado origen a teorías, axiomas, reglas, teoremas, definiciones, propiedades, representaciones, entre otros; que por lo general emergen de situaciones problema y características de fenómenos estudiados y descritos por el hombre.

Estos hechos han conllevado a considerar las Matemáticas como una herramienta fundamental para el desarrollo humano, siendo así un conocimiento que debe ser transmitido. Con la idea de comunicar las matemáticas se propone la enseñanza de estas en la escuela y en busca de su mejora se extiende el interés de diferentes personas por su estudio. En este sentido el aula se convierte en un espacio propicio socialmente para construir, significar y comunicar saberes matemáticos, además de promover el desarrollo de procesos y habilidades.

Es posible considerar entonces, que en el aula “habrán de desarrollarse experiencias matemáticas que permitan al estudiante pasar de sus creencias personales a las concepciones aceptadas como válidas en el contexto de la disciplina” (León & Calderón, 2001). Además, Perelman et al. (1988 citado por León & Calderón, 2001) afirma que el proceso de argumentación busca convencer o persuadir en forma razonada al otro de afirmaciones que se suponen como ciertas, es decir, que la argumentación se establece como el proceso de comunicar y probar argumentos generados, de tal forma que estos sean poco refutables y lo suficientemente convincentes para ser aceptados.

Una investigación que resalta la importancia de la argumentación y demostración, a partir de algunas concepciones que tienen los docentes y los estudiantes del profesorado de matemática, es la desarrollada por Crespo (2005), en donde se presentó una encuesta que buscaba indagar sobre el uso de las argumentaciones y demostraciones en el aula, en el caso de los docentes en ejercicio se reportaron algunas dificultades para realizar este proceso en clase, sin embargo, reconocieron que aunque no es tarea fácil, es más familiar para los estudiantes el proceso de justificación que el de demostración; para el caso de los profesores en formación exaltaron como importante trabajar la demostración en el aula y aunque no conocen los métodos para llevarlo a cabo, consideraron que la práctica les brindó las herramientas necesarias para hacerlo.

Teniendo en cuenta que el interés de este estudio es evidenciar si es posible fortalecer la capacidad argumentativa de los estudiantes a través de la evaluación de garantes de tipo gráfico, un proceso fundamental para lograr este objetivo es el proceso de visualización, el cual es reconocido como “la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, de nuestras mentes ya sea en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de comunicar información, pensar y desarrollar ideas desconocidas y avanzar los entendimientos" (Arcavi, 1999).

Un estudio que describe algunos aspectos importantes de la función de visualización en el aprendizaje de las matemáticas y el papel de la visualización como facilitador o cómo obstáculo en el aprendizaje es el realizado por Rösken & Rolka (2006). Este consistió en la solución de varios problemas de cálculo integral los cuales se centraron en interpretaciones visuales, así lo que se buscó en la investigación fue observar las imágenes visuales que ellos utilizaban para trabajar en los problemas matemáticos y como se enfrentaban con visualizaciones ya dadas en estos. En esta investigación se encontró que la visualización demostró ser una herramienta útil para trabajar en los problemas, algunos estudiantes aunque no hicieron representaciones en papel fueron capaces de resolver el problema, lo cual evidenció la importancia de las imágenes que ellos forman en sus mentes. Además se encontró que la visualización debe ir acompañada siempre de un pensamiento reflexivo para evitar que ésta sea un obstáculo en el aprendizaje.

Ejercicio profesional

Nuestra práctica como docentes, guiada por lo propuesto en el currículo, ha permitido evidenciar el potencial que tienen las representaciones visuales al solucionar un problema, al justificar, evaluar, validar y/o demostrar. Una muestra de estas experiencias es la actividad de triángulos semejantes implementada (2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA) la cual dio origen a este estudio, por tanto esperamos continuar con la formulación de actividades que potencien el proceso de visualización y argumentación en el aula.

Cabe resaltar que en nuestro ejercicio profesional previo a este estudio trabajábamos la argumentación en el aula de forma intuitiva, sin embargo el trabajo que se desarrolló en esta propuesta requirió de la lectura rigurosa de documentación, reflexiones sobre las clases de matemáticas, pilotajes con personas ajenas y cercanas al campo de la matemática con el fin de refinar las tareas desarrolladas, sistematización de las experiencias recolectadas e identificación de acciones de mejora, entre otras, para así fortalecer nuestras prácticas profesionales en la clase de matemáticas.

3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describe el marco teórico presente en esta investigación, para ello se estructuran tres ejes en los cuales está basado el problema. El primero corresponde a la argumentación: se consideran algunas definiciones, características, elementos y finalidades; el segundo trata de la prueba visual: en dónde se especifica la definición y categorización de ésta; finalmente el tercer eje se basa en la visualización: en el que se especifican definiciones, tipos y procesos que hacen parte de esta. En cada apartado se tomaran las decisiones necesarias para asumir una postura coherente con el trabajo de grado.

3.1. ARGUMENTACIÓN

En este apartado se presentan distintas formas de conceptualizar la argumentación de manera global y en particular la argumentación vista en el campo de las matemáticas. Esto con el fin de llegar a una postura particular que permita avanzar con el presente trabajo.

Sardà (2003, citado por De Gamboa, Planas, & Edo, 2010) plantea la argumentación en su noción más amplia como una “Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida.” De esta manera, la argumentación aparece ligada al concepto de justificación y explicación y por ello se establece la relación entre argumentación y estos dos términos. De Gamboa (2009) en términos de Jorba (1998) define justificar como:

> Producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los contenidos objeto de la tesis.

De esta manera argumentar es parte de la justificación y va dirigida no sólo cuando se producen argumentos sino cuando se pueden someter a un examen de aceptabilidad. Duval (1999), citado por Gamboa et al. (2010), afirma que se usan los criterios de pertinencia y fuerza para decidir sobre la aceptabilidad de un argumento. La pertinencia es la relación entre el contenido de la afirmación y el argumento que lo justifica. La fuerza del argumento depende de la resistencia que presente contra argumentos, es decir, que no tenga réplica y que no se contradiga fácilmente.

De la misma manera Ribas (2003) citado por De Gamboa (2009), define explicar como: "*organizar la información a partir de unas relaciones lógicas entre las unidades que la constituyen, de manera que aparece como un razonamiento que conduce de una premisa a una conclusión."* De aquí que sea posible afirmar que la argumentación se relaciona con la explicación cuando hay un paso razonado de una premisa a una conclusión, sin embargo, de ello se considera que la explicación es el germen de la argumentación, donde las características de las razones entre el paso de la premisa a la conclusión son las que generan la argumentación.

Teniendo en cuenta lo que es una argumentación, se define ésta en el campo de las matemáticas, según De Gamboa, Planas, & Edo, (2010) como aquel tipo de argumentación que se desarrolla dentro de la actividad matemática y en la que la ley de paso se apoya en elementos del conocimiento matemático, requiriéndose la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones que sean de naturaleza deductiva.

Homero (2007, p. 71 citado en De Gamboa et al., 2010) define la práctica argumentativa en matemáticas como: "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo utiliza para justificar o explicar un resultado o, para validar una conjetura generada durante el proceso de resolución de un problema." Así, las prácticas argumentativas no siempre van acompañadas de argumentaciones, sino que éstas son las prácticas que se analizan para establecer la presencia o ausencia de argumentaciones, ejemplos de éstos son las justificaciones, explicaciones u otros tipos de razonamientos.

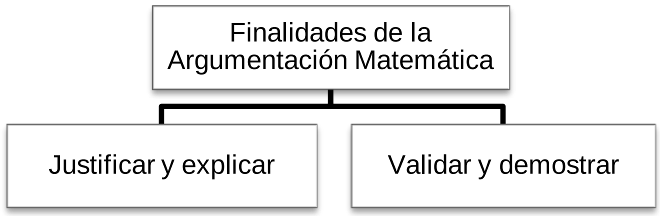


Figura 15. Finalidades de la argumentación

Ahora, si se consideran argumentos que no siempre van a ser válidos o que no conducen a afirmaciones verdaderas se haría referencia a las falacias, que en términos de Hamblin (1970, citado en Eemeren & Grootendorst (1992) son argumentos *que parecen ser válidos, pero no lo son*. En algunos casos el argumento en cuestión no es en absoluto inválido, sino que presenta algunos garantes que no justifican para todos los casos la afirmación. Ahora, para estudiar una propuesta de la teoría de las falacias, Eemeren & Grootendorst (1992), plantean tres pasos a proceder para el análisis de las falacias: primero, el enunciado debe ser interpretado como un acto de habla específico; segundo, debe ser reconocido como una violación de una norma general y, finalmente, se debe establecer si realmente la situación en que ocurre el enunciado está dentro del alcance de esta norma.

En particular y debido al objetivo de la investigación se hará uso de las falacias como parte de la argumentación y la definición que se ajustará es la planteada por Gamboa, Planas& Edo, (2010) en términos de Jorba (1998, p. 48), ya que ellos se enfocan en el proceso de justificar a partir de afirmaciones que permiten examinar el valor de aceptabilidad o refutación, teniendo en cuenta el conocimiento y los contenidos de estas.

3.1.1. Caracterización de una argumentación

Fiallo (2010) en su tesis doctoral trabaja en torno a la argumentación en matemáticas como la necesidad de caracterizar los procesos no demostrativos en la solución de problemas, esto debido a que los procesos de justificación no surgen únicamente de una demostración, puesto que para convencer es necesario dar a comprender, y para convencer es necesario dar explicaciones, las cuales están estrechamente relacionadas con el razonamiento.

Para caracterizar la argumentación, Fiallo(2010), retoma el análisis de las características funcionales y estructurales de la argumentación en matemáticas realizado por Pedemonte (2002). Esta autora afirma que la argumentación posee unas características funcionales, las cuales establecen su finalidad, su utilidad y su papel dentro de un discurso. Entre estas se encuentran:

I. La argumentación es una justificación racional: esta es visible en el razonamiento[3] (Duval 1995, citado en Fiallo 2010).
II. La argumentación trata de convencer: desde lo epistemológico, la argumentación en matemáticas se desarrolla cuando alguien quiere convencer acerca de la verdad de una afirmación.
III. La argumentación se dirige a una audiencia universal: en el proceso de convencimiento, la audiencia debe defender o dar conocer sus opiniones con respecto a un argumento inicial, con la intención de generar discusión. En aula de matemáticas la audiencia estaría conformada por el profesor y los estudiantes.
IV. La argumentación en matemáticas pertenece a un “campo”: de acuerdo al contexto la argumentación puede variar, cada campo genera los criterios de validez.

[3]El razonamiento es la inferencia explícita que concluye una proposición de una o más proposiciones dadas.

3.1.2. Elementos que intervienen en un proceso de argumentación

Al revisar el documento “Argumentaciones gestuales y visuales en escenarios escolares: su aprovechamiento en la construcción del conocimiento matemático” de Lerman (2011), se propone que en una situación comunicativa de argumentación intervienen siempre un *agente argumentador* y el *destinatario de esa argumentación*. Así mismo se establece que toda argumentación trata sobre un tema o *asunto problemático* y tiene una finalidad, función u objetivo de justificación, *persuasión o convencimiento* del destinatario a la tesis o conclusión. En ella se utilizan *argumentos* que defienden el punto de vista mediante *hechos, pruebas y datos* consistentes entre sí que articulan el razonamiento. Finalmente se incluye una conclusión o cierre que coincida con lo afirmado en la tesis.

Con respecto a este tema, Peirce (1974) percibe que es tarea de la lógica crítica analizar los componentes de los argumentos y sus taxonomías. Que la inferencia es la característica fundamental de cualquier argumento y que la relación fundamental de cualquier inferencia es la relación de inclusión. Cada argumento puede ser analizado en las partes siguientes: principio principal, premisas, vínculo, inclusión y conclusión.

Esta investigación muestra que las acciones de explicar y argumentar son diferentes, puesto que exponer o explicar tiene como objetivo informar, mientras que argumentar tiene como fin justificar o convencer. Lerman (2011) afirma que aunque explicar y argumentar por parte de alumnos y docentes, tengan objetivos y estructuras diferentes, ambas se encuentran presentes en el aula de matemática al momento de establecer una situación comunicativa de intercambio, validación, evaluación o producción de conocimiento.

3.1.3. Modelo de Toulmin

El esquematizar los argumentos permite establecer e identificar la fuente de validez que determinará su aceptabilidad e inaceptabilidad, estos esquemas pueden presentarse de diferentes formas, es decir, en algunos se evidenciarán de modo más explícito si el argumento es válido o no, dejando ver cuáles son las razones en que se apoyan y su peso en las conclusiones. El objetivo de dichos esquemas no consiste en reforzar la base sobre la que hemos elaborado el argumento, sino en mostrar cómo a partir de los datos se llega a la conclusión y que este paso es apropiado y legítimo.

Los elementos que componen los esquemas del modelo (Toulmin, 2007) son:

- (D) son los datos o elementos justificatorios que se tienen como base de la afirmación realizada.
- (C) es la conclusión a la que se pretende llegar.
- (G) las garantías son aquellas reglas, propiedades, enunciados, entre otros, que permiten incidir, explicar y justificar la conclusión, estos son considerados como información adicional.

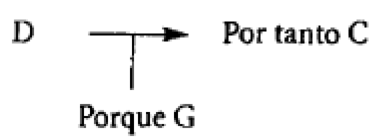


Figura 16. Modelo de Toulmin

El segundo modelo que se presentará a continuación es una adaptación al modelo de Toulmin señalado anteriormente (De Gamboa, Planas, & Edo, 2010), las premisas son los hechos que se invocan para justificar y validar la afirmación y la tesis; la conclusión es la tesis que se establece; la ley de paso son las razones que se proponen para justificar las conexiones entre datos y conclusión; la garantía es el conocimiento básico que segura la justificación; los calificadores modales son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación, aportando un comentario implícito de la justificación; y la refutación son las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas.

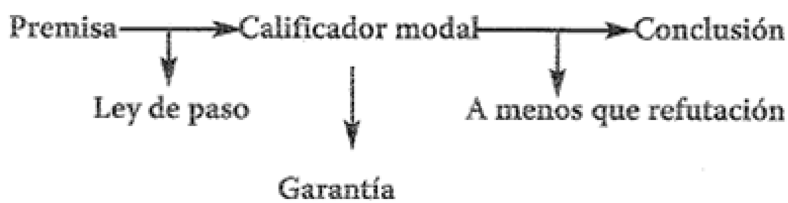


Figura 17. Adaptación del esquema argumentativo de Toulmin

Así se entiende como argumentación todo discurso que se pueda analizar en términos de la Figura 17, siendo el esquema mínimo argumentativo el presentado en la Figura 16.

3.2. PRUEBAS VISUALES

Eemeren & Garssen (2009) manifiestan que un argumento visual es aquel que se expresa a través de medios visuales y no verbalmente, en la literatura se reconocen los argumentos visuales como un ingrediente fundamental en el discurso público y el debate. Es de tener en cuenta que algunos argumentos acompañados de imágenes no se consideran como un argumento visual cuando dichas imágenes tienen sólo la función de llamar la atención o simplemente de realizar una mejora estética, ejemplos de este caso son: dibujos animados, logotipos, imágenes de cine, entre otros. En muchos casos los argumentos visuales se combinan entre elementos visuales y verbales, buscando combinar los puntos fuertes de los modos verbales y de la comunicación visual.

Hanna & Sidoli (2007), realizan un breve estudio de las formas en que la visualización y la prueba se discuten en la filosofía de las matemáticas, teniendo en cuenta que las representaciones visuales han comenzado a ser consideradas como sustitutos de la prueba tradicional, desde hace dos décadas numerosos investigadores están trabajando activamente en el tema. De acuerdo a lo anterior se propone una categorización de las pruebas visuales en:

- Las representaciones visuales como *complemento de la prueba*: Las representaciones visuales han permitido complementar y facilitar el proceso de demostración, sin embargo, esto no debe dejar de lado la necesidad de rigor en la verificación, así mismo algunos investigadores han llegado a la conclusión que las representaciones visuales puede mostrar directamente el camino a una prueba rigurosa pero no pueden ser aceptadas como pruebas legitimas por sí mismas.

- Las representaciones visuales como una *parte integral de la prueba*: para esta categoría, algunos investigadores afirman que las figuras y las representaciones visuales pueden ser un componente esencial de la prueba, es decir, usar un diagrama u otro tipo de representación visual para transmitir una idea matemática, explicar o convencer. En síntesis, una representación visual se constituye como una imagen estática y que aunque pueden contener la misma información, en la prueba visual no se mostraría la ruta explicita para llegar a ella y por lo tanto se dejaría al espectador establecer qué es lo importante o no en esta. Por ello, este tipo de pruebas tienden a ser limitadas en su alcance y generalización.

- Las representaciones visuales *como pruebas*. Diversos autores buscaron maneras de formalizar el razonamiento con diagramas y lo relacionan con el razonamiento deductivo, así mismo reconocen la noción de prueba visual como una derivación, es decir, consiste en una secuencia de pasos que conducen a una conclusión a partir de premisas y de un razonamiento válido, sin embargo, la idea de construir argumentos rigurosos con tales representaciones visuales para algunos autores, no encaja en el modelo tradicional inferencial; además, se ha realizado poco al respecto.

Finalmente de este documento se concluye que aún no existe un consenso sobre todas las posibles funciones de visualización en la matemática y su papel en la prueba, aunque se considera universalmente aceptada como una ayuda importante para la comprensión matemática. Particularmente para este estudio se asumieron las representaciones visuales como pruebas debido a que se presentaron conclusiones cuyo garante era de tipo gráfico.

3.3. VISUALIZACIÓN

3.3.1. Definiciones

La visualización en matemáticas ha sido un tema de investigación durante las últimas dos décadas, la literatura muestra los diferentes estudios sobre ésta y el papel que juega en el aprendizaje de las matemáticas; para ello se proponen algunas definiciones de este término. En este apartado se intentará presentar algunas de ellas, para finalmente escoger la que más se ajusta al presente trabajo.

Para iniciar se muestra la postura de Presmeg (2006) citado por Acuña (2012, p. 40) relacionada con la visualización, concebida para incluir procesos de construcción y transformación tanto visual, que se refiere al uso directo del sentido de la vista, como el proceso del que se espera que funcione en ausencia del objetivo de estudio, habiendo estado este en otro momento en el pensamiento. En este acercamiento la visualización se entiende como una transformación entre la información disponible y externa al sujeto y aquella idea o imagen que se forma en el individuo a partir de la primera. Se presenta una dicotomía entre lo percibido y lo pensado, ya que esta definición no establece una diferencia clara entre esta dualidad.

Una definición mucho más estructurada y que amplía la idea de visualización más allá de considerarla como la habilidad de percibir visualmente es la que Arcavi (1999) parafrasea de las definiciones dadas por Zimmermann y Cunningham (1991, p.3) y Hershkowitz et al. (1989,p.75), como “la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, de nuestras mentes ya sea en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de comunicar información, pensar y desarrollar ideas desconocidas y avanzar los entendimientos".

También Gutiérrez (1996, p. 9) citado por Acuña (2012) proporciona una definición que difiere de la anterior en la puntualización del objetivo y el establecimiento de los componentes, aunque no en el sustento, su parecer al respecto es:" yo considero por lo tanto, que la visualización en matemáticas es un tipo de razonamiento activamente basado en el uso de elementos visuales o espaciales, ya sean mentales o físicos, usados para resolver problemas o propiedades. La visualización está integrada por cuatro elementos fundamentales: imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización".

Algunos autores como Zimmermann y Cunningham (1991) citados por Acuña (2012) y Gúzman (1996) diferencian entre la visualización en psicología y en el aprendizaje de la matemática. Para los primeros la visualización en psicología se interesa en la formación de las imágenes mentales y las habilidades del individuo para manejarlas y lo que le interesa a la educación matemática es la habilidad de los estudiantes para dibujar un diagrama apropiado para representar el concepto o un problema matemático y usar el diagrama para lograr entendimiento como ayuda en la resolución de problemas.

Por otro lado, Gúzman (1996) afirma que para la corriente psicológica la visualización es una técnica, que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos. Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.

Teniendo en cuenta el papel de la visualización matemática, se toma como referente Duval (2003) quien afirma que los únicos objetos que la visualización matemática hace ver son las organizaciones de relaciones, es decir las unidades figúrales (los puntos, los rasgos, los contornos cerrados, los planos, las posiciones indicadas por pares de números, etc.) diferentes de los objetos, donde su identificación puede variar.

3.3.2. Tipos de imágenes

Presmeg (1986), citada por Gutierrez(1991), ha encontrado diversos tipos de imágenes y los señala como elementos básicos centrales para las representaciones mentales de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc. los cuales se presentan a continuación:

- Imágenes concretas pictóricas. Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos, por ejemplo, al decir paralelepípedo una persona podría asociar una imagen de un ladrillo, si dicen cono podría imaginar un helado.
- Imágenes de fórmulas. Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería, por ejemplo $(a+b)^2$.
- Imágenes de patrones. Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado. Por ejemplo, al tener la expresión $y = mx + b$, esta se asocia a la representación de una recta en el plano cartesiano.
- Imágenes cinéticas. Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de

manos, cabeza, etc. Por ejemplo, cuando al describir una circunferencia, con la mano se hace la propiedad de la curvatura.

- Imágenes dinámicas. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan. Por ejemplo, el movimiento de rotación de la tierra.

3.3.3. Procesos

Para la manipulación de las imágenes visuales (físicas o mentales), Bishop (1989, citado por Gutiérrez, 1991)**,**la propone a través de dos tipos de procesos:

- Procesamiento Visual (VP): Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Por ejemplo, cuando se pasa de una figura abstracta a identificar alguna figura más sencilla dentro de ella.

- Interpretación de información figurativa (IFI). Este es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior. Por ejemplo, en un mapa se debe identificar y extraer información.

3.3.4. Habilidades

Del Grande (1990), citado por Gutiérrez (1991), propone una clasificación del tipo de habilidades para la creación y procesamiento de imágenes visuales, entre las cuales se encuentran:

- Coordinación motriz de los ojos. Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz. Por ejemplo, en un partido de tenis, puesto que de la agilidad de los ojos depende la visualización correcta.

- Identificación visual. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Por ejemplo, en algunas figuras donde hay que contar el número de triángulos y en esta hay triángulos superpuestos y unos dentro de los otros.

- Conservación de la percepción. Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado. Cuando un cubo o una caja se gira o se muestra por una solo posición, esta no pierde la forma.

- Reconocimiento de posiciones en el espacio. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia. Por ejemplo, cuando se propone revisar cuantos objetos hay en una fila bien alineada a dos estudiantes, uno ve la fila de frente, así que solo ve un objeto, el otro estudiante ve la fila de lado así que la ve completa.

- Reconocimiento de las relaciones espaciales. Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc., se puede evidenciar cuando un plano de una casa es llevado a la vida real.

- Discriminación visual. Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el juego de las 7 diferencias.

- Memoria visual. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición. Por ejemplo, cuando se quiere recordar los rasgos característicos de una persona.

4. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología usada en la presente investigación, para ello se estructuran tres apartados: i) perspectiva de investigación: se describe los lineamientos principales del enfoque metodológico y la perspectiva en el que se inscribe; ii) descripción del estudio: se enuncian las características relevantes de la propuesta como quiénes son los participantes, el rol que desempeña cada uno en la investigación y las técnicas de recolección de la información; iii) fases de la investigación: diseño del instrumento, en el que se describe como fue elaborado y las diferentes versiones que se modificaron de acuerdo a implementaciones, documentos, puntos de vista de investigadores relacionados con el campo, implementación del diseño, se describen las diferentes acciones desarrolladas por parte de los docentes y de los estudiantes para la implementación, la metodología de clase empleada en cada una de las poblaciones, especificando las sesiones efectuadas y finalmente en la fase del análisis se especifican las diferentes acciones para el procesamiento, clasificación, observación y análisis de la información recolectada.

4.1. PERSPECTIVA DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación se estructuró en un enfoque cualitativo, debido a que se estudió lo que hicieron y dijeron los estudiantes, para así caracterizar o describir lo sucedido y dirimir algunas conclusiones de ello. En este sentido, la propuesta se enmarcó en el paradigma interpretativo, pues se conduce a un conocimiento práctico que surge de la interpretación de los discursos de los estudiantes. En particular se interpretaron las producciones orales y escritas de los estudiantes en relación con la implementación de una secuencia de actividades diseñadas para promover el proceso de argumentación en el aula.

En concordancia con lo anterior, para el desarrollo del presente trabajo se tomaron elementos de la metodología de *experimento de enseñanza*, la cual surge de la Investigación en diseño y es de gran importancia en el campo de la didáctica de las ciencias. Este modelo pretende comprender y mejorar la realidad educativa por medio de la consideración de contextos naturales y complejos como el aula, y análisis de diseños instruccionales asociados al proceso de Enseñanza-Aprendizaje.

Cabe resaltar que aunque el fin de la metodología experimento de enseñanza es la elaboración de una secuencia de actividades, nuestro énfasis se realizó en el diseño de una propuesta con el fin de mejorar las prácticas argumentativas de los estudiantes, la implementación de una tarea que permite la evaluación de argumentos, particularmente visuales y la interpretación de las producciones realizadas por los estudiantes al trabajar con dichas actividades.

4.2. DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

De acuerdo con el objetivo de investigación, se asumió como hipótesis que las prácticas argumentativas en el aula se podían mejorar a través de la estrategia de evaluación de argumentos, particularmente aquellos de tipo visual. En consecuencia, se diseñó una propuesta para dicho fin, de la cual se esperaba identificar diferentes tipos de argumentos y caracterizar los procesos de visualización, argumentación y evaluación para evidenciar los avances del proceso argumentativo.

La secuencia de actividades es diseñada para estudiantes de dos poblaciones diferentes, el criterio de selección de los participantes se debió a que dichas poblaciones son estudiantes de las investigadoras de esta propuesta y presentan niveles de escolaridad diferentes, unos son estudiantes de básica secundaria y los otros son estudiantes de licenciatura en matemáticas, lo que permitirá una visión más amplia de la información. Es de aclarar que los resultados de las poblaciones no se van a comparar, sino que se van a observar para buscar respuestas a la pregunta de investigación. A continuación se presenta una caracterización de los grupos participantes:

Universidad Pedagógica Nacional (U.P.N.): Institución educativa de carácter público para la formación inicial y continuada de profesores, en este caso particular se contó con la participación de 24 estudiantes de primer semestre de la cohorte 2015-II de la Licenciatura en Matemáticas, pertenecientes al curso de Pre cálculo jornada mañana, orientado por la docente Nubia Soler quien hace parte del equipo de investigación en su rol de asesora. Se desarrollaron 3 sesiones de 2 horas reloj, correspondientes a un total de 6 horas de trabajo para la implementación de la propuesta. Cabe resaltar que esta población cuenta con formación específica en matemáticas y geometría, lo cual aumenta su experiencia y conocimientos de estas áreas.

Colegio De La Salle Bogotá: Institución privada mixta de carácter religioso con formación en valores. Académicamente el área de matemáticas cuenta con tres cursos de formación: algebra, geometría y estadística, para el estudio se contó con la participación de 33 estudiantes de grado 901 en el ambiente de la clase de geometría con la docente Angie Martínez, quien hizo parte del equipo de investigación y dirigió la actividad en dicha institución. Se desarrollaron 2 sesiones presenciales de 2 horas clase (45 min), lo que correspondió a un total de 3 horas de trabajo para la implementación de la propuesta.

El equipo de investigación estuvo conformado por tres profesoras licenciadas en matemáticas y su asesora, dos de ellas dirigieron la actividad y recolectaron la información en cada una de sus poblaciones, las otras dos participaron como observadoras, lo cual distingue dos papeles diferentes en la implementación, en seguida se puntualiza el rol que desempeña cada uno de los participantes.

Rol del Investigador - docente: Profesor titular del área de Matemáticas en una institución educativa y miembro del equipo de investigación que desarrolló esta propuesta, además fue quien dirigió e implementó la actividad con la totalidad de sus estudiantes, orientó y fomentó las discusiones académicas a través de la formulación de preguntas que conllevaron al estudiante a cuestionar y generar argumentos de acuerdo al objetivo del estudio, también fue observador de lo que hicieron y dijeron sus estudiantes; fue veedor del diseño y trayectoria de la actividad conforme a las características de su población.

Rol del Investigador - observador: no desempeñó un papel activo en el momento de la implementación ya que no orientó la actividad. Sus acciones fueron dirigidas a la observación de lo que hicieron los estudiantes participantes en el estudio, además contribuyó a la toma de decisiones en la fases de análisis de la información.

Rol de los estudiantes: fueron la población de estudio, desempeñaron un papel activo en la implementación, realizaron la actividad y brindaron la información a analizar de acuerdo a los fines de la investigación, participaron de forma oral y escrita, individualmente o en grupos de trabajo. De acuerdo a sus producciones se determinaron las conclusiones respecto al propósito del estudio y su proceso de aprendizaje.

Como técnicas utilizadas en la fase de recolección de la información se encontraron: grabaciones de audio y video las cuales fueron transcritas para facilitar el análisis y codificación, las producciones escritas de los estudiantes al desarrollar la actividad. Se esperó que las diferentes técnicas de recolección fueran complementarias o confirmatorias, para así abarcar al máximo lo que se hizo y dijo con respecto la secuencia de actividades diseñada. En relación con los instrumentos utilizados se encontraron: cámaras de video y audio y secuencia de actividades diseñadas.

4.3. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo de esta propuesta se identificaron tres momentos que representaron la trayectoria del desarrollo de la investigación. En la primera fase, se muestra la construcción del instrumento de recolección el cual consistió en una actividad asociada a contextos geométricos; en la segunda fase se describe el proceso de implementación que se llevó a cabo en la clase de matemáticas de las dos instituciones consideradas en este estudio; finalmente en la tercera se evidencia el procesamiento de la información recolectada, las diferentes matrices de clasificación que permitieron organizar, filtrar e identificar, de las producciones de los estudiantes, los aspectos que se relacionan con el objeto de estudio.

4.3.1. FASE I: Diseño del instrumento

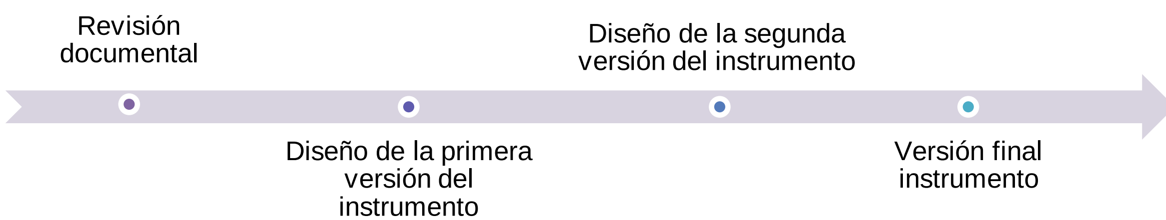


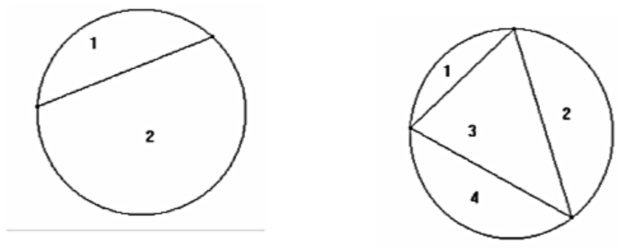
Figura 18. Acciones desarrolladas para el diseño del instrumento

Teniendo en cuenta la pregunta de investigación: *¿Cuestionar la validez de los argumentos visuales usados para sustentar una afirmación, cómo fortalece los procesos de argumentación en la clase de matemáticas?* se escogió el campo de la geometría como el contexto propicio para la construcción de la actividad, debido a que en este campo se pueden identificar relaciones que permiten la elaboración de garantes de tipo visual.

Como nuestro objetivo se centró en el cuestionamiento de argumentos de tipo visual, fue necesario buscar actividades que condujeran a falacias, con el fin de que los estudiantes evaluaran el valor de verdad de las afirmaciones y sus respectivos garantes. En dicha búsqueda se encontró una tarea en el libro

Elementos de Geometría (Samper, Molina, & Echeverry, 2011) que cumplía con estas características, ver figura 19:

Si se escoge un conjunto de puntos sobre la circunferencia y se dibujan todos los segmentos posibles entre ellos, el círculo queda dividido en varias regiones. Realizando diagramas como los que aparecen a continuación, complete la tabla indicada.



Número de puntos	Cantidad máxima de regiones	Número de regiones expresado como potencia de 2
2		
3		
4		
5		

¿En cuántas regiones quedará separado el círculo si se toman 6 o 7 puntos? Compruebe su respuesta. Elabore una conjetura.

Figura 19. Actividad de libro

De igual manera se buscaron actividades que, por el contrario a la tarea anterior, condujeran a una generalización, así que siguiendo con la idea de polígonos se propuso una actividad relacionada con la cantidad de diagonales de un polígono. En cada versión de la actividad se propusieron argumentos visuales con el objetivo de que los estudiantes cuestionaran dichos argumentos y así pudieran fortalecer su proceso de argumentación, de igual forma se esperaba que no sólo se limitaran a evaluarlos sino que también conocieran e interpretaran otras posibilidades de garantes como los visuales.

De acuerdo a lo anterior, en una primera versión de la actividad se presentó una tabla inicial con cinco ejemplos de la secuencia del número de regiones que se pueden encontrar en la circunferencia y la cantidad de diagonales de los polígonos (Figura 20).

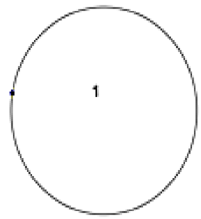
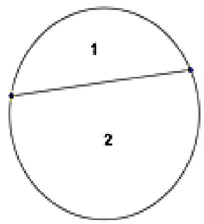
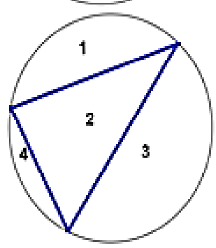
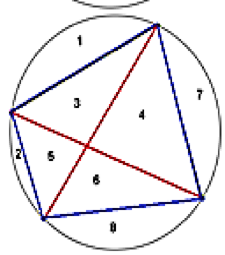
FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS	CANTIDAD DE REGIONES	CANTIDAD DE DIAGONALES EN EL POLÍGONO INSCRITO
	1	$1= 2^0$	No hay polígono
	2	$2=2^1=2$	No hay polígono
	3	$4=2^2=2x2$	$0 = \frac{3(3-3)}{2}$
	4	$8=2^3=2x2x2$	$2=\frac{4(4-3)}{2}$

Figura 20. Tabla inicial propuesta

Luego se propusieron dos tareas distintas, la primera relacionada con la falacia, en la que se presentaron a maneras de tablas, dos afirmaciones cada una con tres justificaciones diferentes y un espacio para el estudiante, en el cual se debía escoger una opción y justificar el porqué de esa decisión (dichas opciones se tomaron de la propuesta de Inglis & Mejía, 2008), ver Figura 21. En la segunda tarea se dio una información y se propusieron tres afirmaciones diferentes con el fin de que los estudiantes realizaran la justificación a estas, el ejemplo de esta tarea se muestra en la Figura 22.

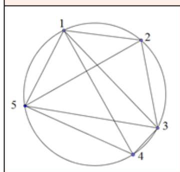
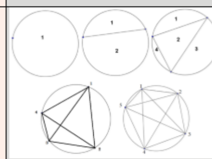
1 *AFIRMACIÓN: Con 5 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^4 regiones.*		1 *AFIRMACIÓN: Con 5 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^4 regiones.*		1 *AFIRMACIÓN: Con 5 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^4 regiones.*	
JUSTIFICACIÓN 1	**Espacio para el estudiante**	**JUSTIFICACIÓN 2**	**Espacio para el estudiante**	**JUSTIFICACIÓN 3**	**Espacio para el estudiante**
	☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**		☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**	**Número de Puntos** / **Número De Regiones** 1 / $1= 2^0$ 2 / $2=2^1=2$ 3 / $4=2^2=2x2$ 4 / $8=2^3=2x2x2$ 5 / $16=2^4=2x2x2x2$	☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

Figura 21. Ejemplo de la actividad propuesta 1.1

En un polígono la cantidad de diagonales está dada por la expresión $\frac{n(n-3)}{2}$	
AFIRMACIONES	JUSTIFICACIÓN
Con 7 lados, hay 14 diagonales.	
Con 8 lados, hay 20 diagonales.	
De un polígono de n lados, cada vértice es extremo de *n-3* diagonales.	

Figura 22. Ejemplo de la actividad propuesta 1.2

Esta versión (ANEXO A) se sometió a revisión, en relación con los objetivos del estudio y se determinó que en la primera tarea, las tablas de opciones no corresponden a lo que se quería plantear ya que no se evidenciaba el trabajo de argumentación de los estudiantes, además que la segunda no planteaba una relación con evaluación de argumentos, por tanto se pensó que debíamos modificar la actividad, sin quitar el fondo de esta, para que por medio de ella se pudiera evidenciar el trabajo de los estudiantes al momento de evaluar los argumentos.

En la segunda versión se propusieron las mismas dos tareas. Para iniciar se presentaron dos tablas antes de cada tarea, la primera contenía cinco ejemplos de la cantidad de regiones que se pueden encontrar en la circunferencia (Figura 23); la segunda tabla presentaba cuatro ejemplos de la cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono (Figura 24).

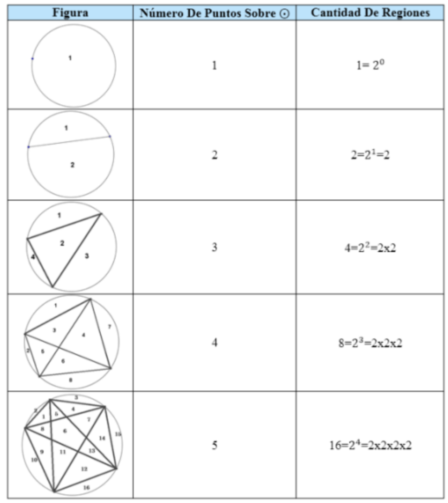
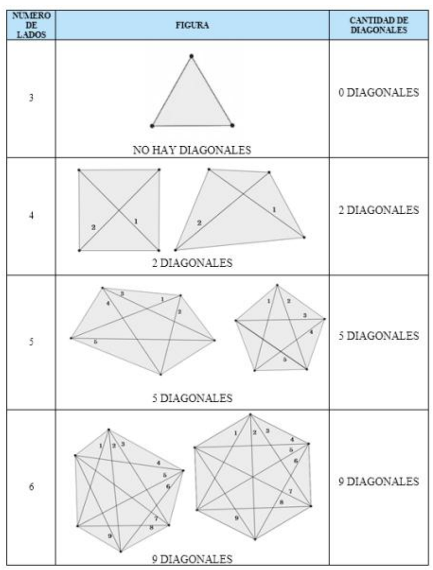


Figura	Número De Puntos Sobre ⊙	Cantidad De Regiones
	1	$1=2^0$
	2	$2=2^1=2$
	3	$4=2^2=2x2$
	4	$8=2^3=2x2x2$
	5	$16=2^4=2x2x2x2$

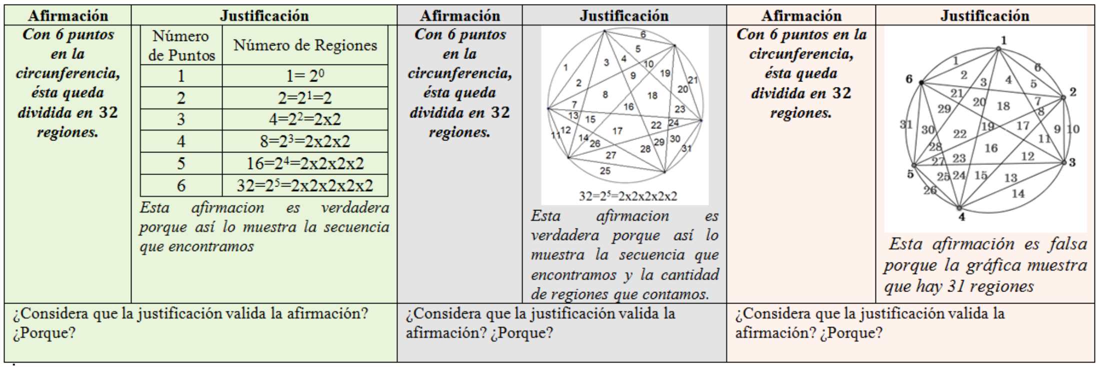
Figura 23. Tabla para la primera tarea



NUMERO DE LADOS	FIGURA	CANTIDAD DE DIAGONALES
3	NO HAY DIAGONALES	0 DIAGONALES
4	2 DIAGONALES	2 DIAGONALES
5	5 DIAGONALES	5 DIAGONALES
6	9 DIAGONALES	9 DIAGONALES

Figura 24. Tabla para la segunda tarea

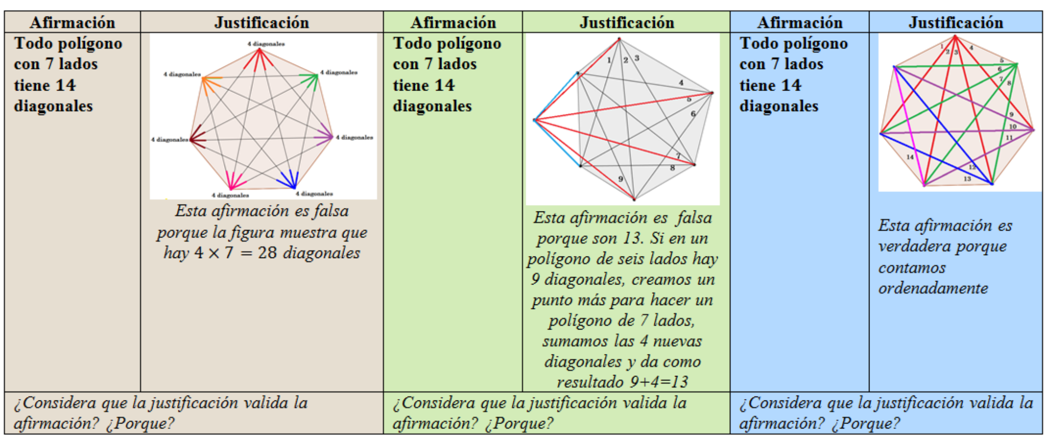
De la misma manera, en la primera tarea (la cual se denominará actividad 1.1, 1.2 y 1.3), se presentaron tres garantes a una afirmación lo cual conduce a una conclusión, dicha afirmación es falsa, un garante es falso y los otros dos son verdaderos y las conclusiones siempre son falsas (Figura 25).



Afirmación	Justificación	Afirmación	Justificación	Afirmación	Justificación
Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 32 regiones.	Número de Puntos / Número de Regiones 1 / 1= 2^0 2 / 2=2^1=2 3 / 4=2^2=2x2 4 / 8=2^3=2x2x2 5 / 16=2^4=2x2x2x2 6 / 32=2^5=2x2x2x2x2 *Esta afirmacion es verdadera porque así lo muestra la secuencia que encontramos*	***Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 32 regiones.***	32=2^5=2x2x2x2x2 *Esta afirmacion es verdadera porque así lo muestra la secuencia que encontramos y la cantidad de regiones que contamos.*	***Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 32 regiones.***	*Esta afirmación es falsa porque la gráfica muestra que hay 31 regiones*
¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?		¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?		¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?	

Figura 25. Ejemplo de la actividad propuesta 2.1

En la segunda tarea (se denominará actividad 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5), la estructura era similar, se presentaron cinco garantes a una afirmación y esto condujo a alguna conclusión, sin embargo, en este caso los garantes y las conclusiones pueden ser falsos o verdaderos (Figura 26).



Afirmación	Justificación	Afirmación	Justificación	Afirmación	Justificación
Todo polígono con 7 lados tiene 14 diagonales	*Esta afirmación es falsa porque la figura muestra que hay 4 × 7 = 28 diagonales*	**Todo polígono con 7 lados tiene 14 diagonales**	*Esta afirmación es falsa porque son 13. Si en un polígono de seis lados hay 9 diagonales, creamos un punto más para hacer un polígono de 7 lados, sumamos las 4 nuevas diagonales y da como resultado 9+4=13*	**Todo polígono con 7 lados tiene 14 diagonales**	*Esta afirmación es verdadera porque contamos ordenadamente*
¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?		*¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?*		*¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?*	

Figura 26. Ejemplo de la actividad propuesta 2.2

Finalmente en la Figura 27 y la Tabla 5, se presenta la estructura de diseño para cada uno de los argumentos presentados en la actividad, se evidencia el valor de verdad para la afirmación, el garante o garantía y la conclusión, teniendo en cuenta el modelo de Toulmin.

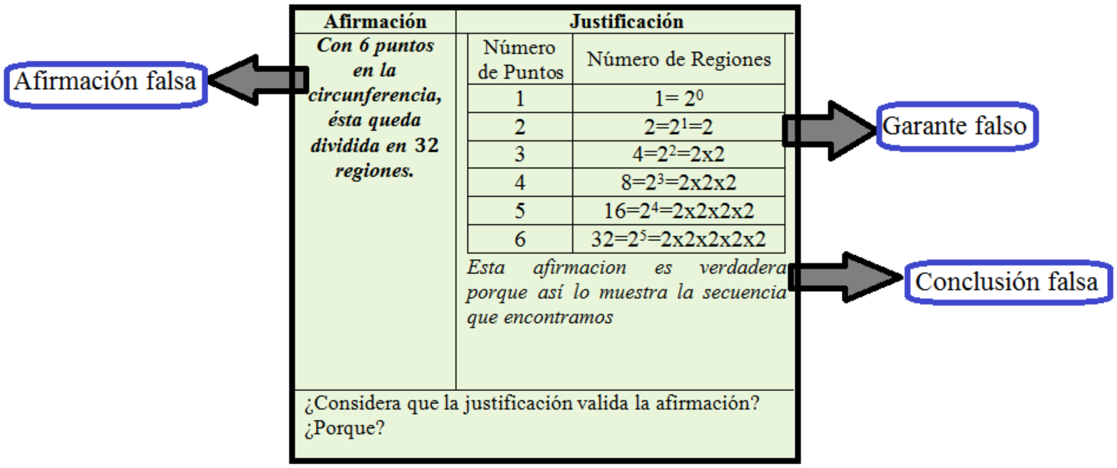


Figura 27. Ejemplo de argumento, garante y conclusión

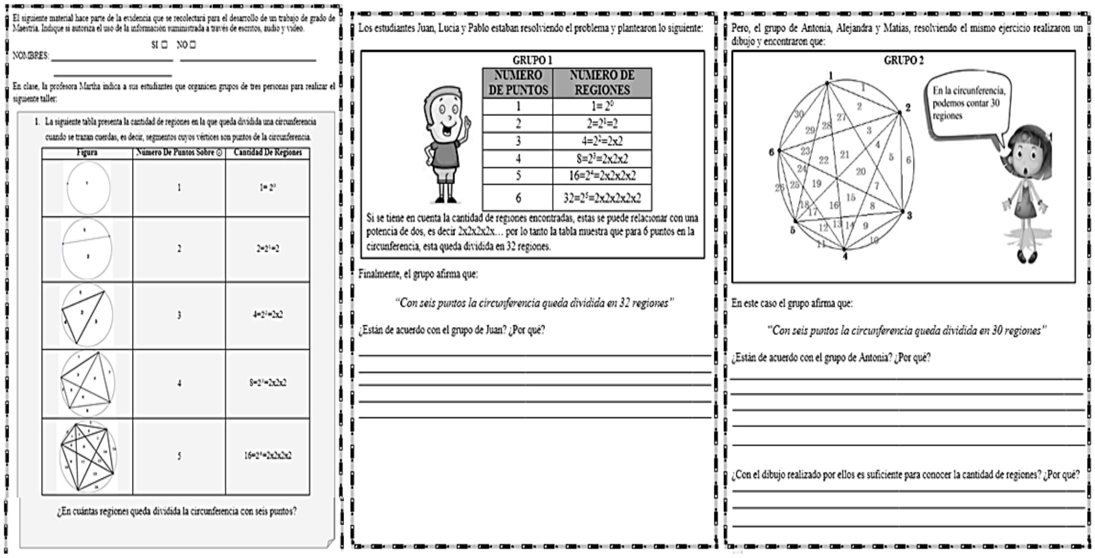
ACTIVIDAD \ ARGUMENTO	ESTRUCTURA
1.1	Afirmación (falsa) → conclusión (falsa); Garantia (falsa)
1.2 – 1.3	Afirmación (falsa) → conclusión (falsa); Garantia (verdadera)
2.1 – 2.2	Afirmación (verdadera) → conclusión (falsa); Garantia (falsa)
2.3 – 2.4 – 2.5	Afirmación (verdadera) → conclusión (verdadera); Garantia (verdadera)

Tabla 5. Estructura argumentos versión 2 del instrumento

Una vez elaborada la segunda versión del instrumento (ANEXO B) se realizaron pilotajes con tres profesionales licenciados de distintos campos para así determinar si la actividad era clara y cumplía con los objetivos para la cual fue diseñada. De acuerdo a las soluciones obtenidas y a los cuestionamientos realizados por los tres profesionales, se analizaron los aportes que estos brindaron y se tomó la decisión de reformular algunos elementos del diseño como: redacción de los enunciados, las preguntas a resolver y la forma en que se presentó la información.

Así mismo, después de la aplicación de estos pilotajes, se organizó un encuentro con dos profesores del departamento de filosofía de la Universidad Pedagógica Nacional, particularmente una docente experta en argumentación. La finalidad de este encuentro fue ampliar el marco de referencia y el instrumento de acuerdo a los objetivos planteados para el estudio. Algunos aportes fueron: sugerencia de literatura para fortalecer el marco teórico y cuestionamiento a la presentación de los argumentos, no se evidenciaba un contexto cercano a los estudiantes.

Estas indicaciones permitieron reformular la presentación y reducir el número de actividades, eliminando los argumentos que pudieron generar confusiones y atendiendo a los tiempos de la clase. Estos últimos ajustes consolidaron la versión final del instrumento (ver anexo 3), el cual constaba de dos actividades, en la primera se presentó la tabla de relaciones entre el número de regiones que se forman y el número de puntos sobre una circunferencia, en la actividad 1.1 el garante que se propuso fue una tabla que presenta una secuencia numérica y en la actividad 1.2 se proporcionó un garante gráfico de una circunferencia que mostraba el número de regiones que se generan al trazar cuerdas cuyos extremos son seis puntos sobre la circunferencia (Figura 28).


El siguiente material hace parte de la evidencia que se recolectará para el desarrollo de un trabajo de grado de Maestría. Indique si autoriza el uso de la información suministrada a través de escritos, audio y video.

SI ☐ NO ☐

NOMBRES: ____________________ ____________________ ____________________

En clase, la profesora Martha indica a sus estudiantes que organicen grupos de tres personas para realizar el siguiente taller:

1. La siguiente tabla presenta la cantidad de regiones en la que queda dividida una circunferencia cuando se trazan cuerdas, es decir, segmentos cuyos vértices son puntos de la circunferencia.

Figura	Número De Puntos Sobre ⊙	Cantidad De Regiones
	1	$1=2^0$
	2	$2=2^1=2$
	3	$4=2^2=2x2$
	4	$8=2^3=2x2x2$
	5	$16=2^4=2x2x2x2$

¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos?

Los estudiantes Juan, Lucia y Pablo estaban resolviendo el problema y plantearon lo siguiente:

GRUPO 1

NUMERO DE PUNTOS	NUMERO DE REGIONES
1	$1=2^0$
2	$2=2^1=2$
3	$4=2^2=2x2$
4	$8=2^3=2x2x2$
5	$16=2^4=2x2x2x2$
6	$32=2^5=2x2x2x2x2$

Si se tiene en cuenta la cantidad de regiones encontradas, estas se puede relacionar con una potencia de dos, es decir 2x2x2x2x… por lo tanto la tabla muestra que para 6 puntos en la circunferencia, esta queda dividida en 32 regiones.

Finalmente, el grupo afirma que:

"Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 32 regiones"

¿Están de acuerdo con el grupo de Juan? ¿Por qué?

Pero, el grupo de Antonia, Alejandra y Matias, resolviendo el mismo ejercicio realizaron un dibujo y encontraron que:

GRUPO 2

En este caso el grupo afirma que:

"Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 30 regiones"

¿Están de acuerdo con el grupo de Antonia? ¿Por qué?

¿Con el dibujo realizado por ellos es suficiente para conocer la cantidad de regiones? ¿Por qué?

Figura 28. Tabla de relaciones - Actividad 1.1 y 1.2

En la segunda actividad se planteó una tabla que relaciona el número de diagonales y el número de vértices de cuatro polígonos, en la actividad 2.1 el garante que se presentó era falso y correspondía a una gráfica de un polígono de siete lados en donde se cuentan las diagonales posibles por vértice, sin importar que se repitieran; para la actividad 2.2 el garante que se mostró era falso y correspondía a la gráfica de un polígono de siete lados que se construye a partir de un hexágono colocando un punto afuera y trazando los nuevos lados; finalmente para la actividad 2.3 el garante que se presentó fue verdadero y correspondía a un polígono de siete lados cuyas diagonales se contaron de forma ordenada y sin repetición (Figura 29).

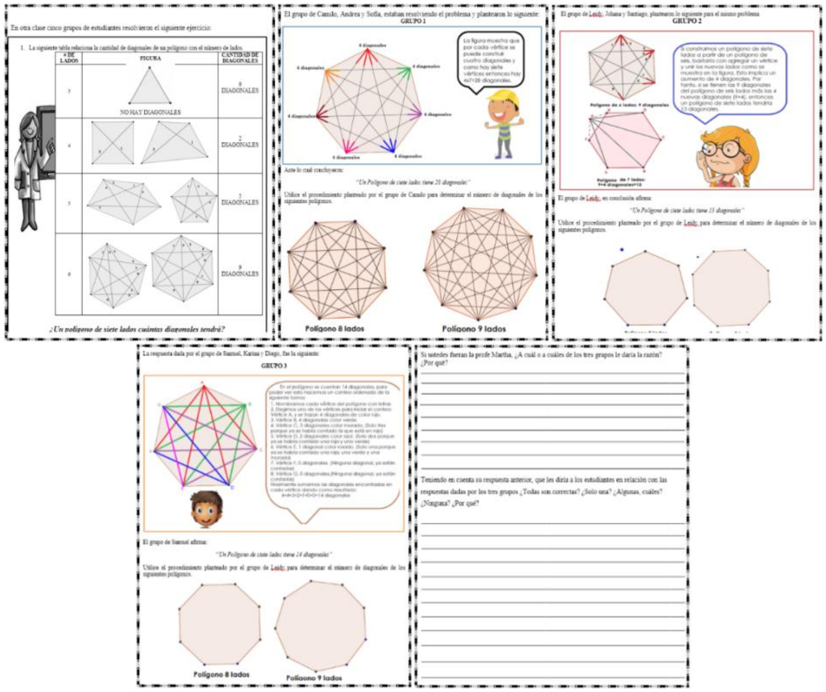


Figura 29. Tabla relaciones diagonales - Actividad 2.1, 2.2 y 2.3

En la Tabla 6 se evidencia la estructura de los argumentos de la actividad, la cual se aplicó a las dos poblaciones que participaron de la investigación.

ARGUMENTO / ACTIVIDAD	ESTRUCTURA
1.1	Datos → conclusión (falsa); Garante (falso)
1.2	Datos → conclusión (Verdadera); Garante (Verdadero)
2.1 – 2.2	Datos → conclusión (falsa); Garante (falso)
2.3	Datos → conclusión (Verdadera); Garante (Verdadero)

Tabla 6. Estructura argumentos versión final

4.3.2. FASE II: Implementación del instrumento

A continuación se presentan las diferentes acciones desarrolladas para la implementación del instrumento y la metodología de clase empleada en cada una de las poblaciones, especificando las sesiones efectuadas.

Implementación estudiantes Pre-cálculo Universidad Pedagógica Nacional: Para iniciar, se informó a los estudiantes que ellos fueron escogidos para realizar algunas actividades correspondientes a un trabajo de grado para optar al título de Magister y se presentó el objetivo de la implementación de la actividad. Así mismo, se dieron las indicaciones pertinentes en cuanto a organización de la actividad y se les solicitó autorización para recoger grabaciones audiovisuales y los escritos que ellos desarrollarían en el transcurso de la actividad.

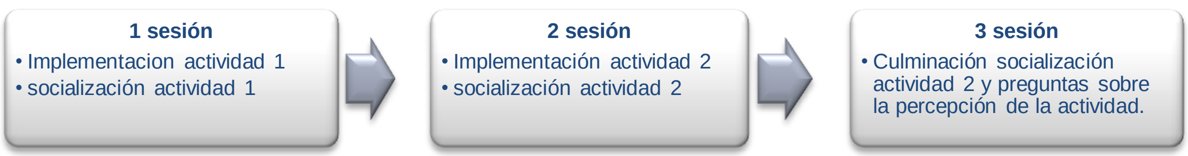


Figura 30. Sesiones implementación Universidad Pedagógica Nacional

Luego, se organizaron grupos de tres estudiantes y se escogió uno de estos para grabarlo y recoger las evidencias sobre lo que estaban realizando, teniendo como criterio de selección los estudiantes que participaban constantemente en la clase. Una vez estuvieron los grupos organizados se les entregó la tabla de relaciones entre el número de regiones que se forman y el número de puntos sobre una circunferencia, particularmente en el grupo grabado los estudiantes la leyeron e identificaron la información relevante.

Después se dio la actividad 1.1 la cual leyeron y decidieron dibujar en una hoja anexa un hexágono regular y uno irregular para trazar las cuerdas posibles en una circunferencia con seis puntos, encontraron como resultado 30 y 31 regiones respectivamente, estos valores son diferentes al indicado en el garante de 1.1, por tanto compararon las dos construcciones y se dieron cuenta que en el caso del polígono regular hay tres cuerdas que concurren ocultando una región. La profesora le preguntó al grupo si estaban de acuerdo o no con el grupo 1.1 y los estudiantes manifestaron que aún no saben si es verdadero el garante de 1.1 (tabla).

Enseguida se entregó la actividad 1.2, los estudiantes del grupo la leyeron e identificaron que el garante correspondía a una de las representaciones gráficas realizada por ellos, por tanto hicieron simulaciones de movimiento de uno de los puntos sobre la circunferencia del garante de 1.2 y las cuerdas que se trazarían para observar si el número de regiones podía variar, adicionalmente tomaron de referencia la gráfica con 5 puntos presentada en la tabla de relaciones para observar si era posible tener cuerdas que se intersecaran, en consecuencia los estudiantes afirmaron que el garante de 1.2 es falso porque existen tres cuerdas concurrentes y se pierde una región posible.

Después, se procedió a la socialización en la cual participaron todos los estudiantes del curso y la docente que dirigió la actividad, la dinámica de esta por lo general consistió en que la docente planteaba preguntas para cuestionar las afirmaciones de los estudiantes o buscar que justificaran sus respuestas. Un integrante de cada grupo dio a conocer su respuesta respecto a la validez del argumento presentado en 1.1 y 1.2, la totalidad de los estudiantes indicaron que 1.1 es falso a pesar de que representa una secuencia algebraica la cual no se corresponde con las diferentes construcciones gráficas realizadas por ellos, para 1.2 establecieron que sería verdadero, pero que no representa la única solución posible, ya que habían construcciones en donde el número de regiones eran 31. Teniendo en cuenta que se produjo incertidumbre en sus estudiantes, debido a que el número de regiones variaba entre 30 y 31 la docente les pregunta ¿Qué pasaría para una circunferencia con 7 puntos? ¿Con 8?

Por consiguiente los estudiantes realizaron las diferentes construcciones en cada uno de los grupos y exploraron con diferentes gráficas para analizar los posibles casos, luego dieron a conocer sus resultados y se concluyó que el número de regiones dependía de la posición de los puntos, ya que es posible que se oculten cuando existen cuerdas concurrentes, entendiendo estas últimas como la intersección de tres rectas pasan por el mismo punto.

En la siguiente sesión se desarrollaron las actividades 2.1, 2.2 y 2.3 siguiendo una metodología similar a la sesión 1. En donde el grupo filmado continúo siendo el mismo. Primero se les entregó la tabla que relaciona el número de diagonales y el número de vértices para cuatro polígonos, la cual fue leída y comprendida para continuar con el análisis de los garantes.

En la actividad 2.1 los estudiantes determinaron que el garante que se presentó es falso, debido a que se cuentan las diagonales posibles por vértice sin importar que se repitan obteniéndose así el doble de las que en realidad serían, sin embargo los estudiantes afirmaron que este método de conteo podría ser verdadero si se agrega la condición de dividir el resultado entre dos.

En la actividad 2.2 el garante que se mostró es falso ya que se deja de contar una diagonal la cual correspondía a un lado del polígono inicial, puesto que la cantidad de diagonales se determinó a partir de la construcción del polígono anterior o inicial colocando un punto fuera de este y trazando los nuevos lados, no obstante los estudiantes manifestaron que esta técnica podría ser verdadera si se sumaba uno al número de diagonales encontradas con dicha construcción.

Finalmente para la actividad 2.3 los estudiantes afirmaron que el garante que se presentó es verdadero y corresponde a un polígono de siete lados cuyas diagonales se cuentan de forma ordenada y sin repetición, identificando con color diferente cada una de las diagonales por vértice, para este caso los estudiantes determinaron que el número de diagonales está dado por la cantidad de vértices menos tres, ya que no se cuentan tres de éstos puntos por ser un extremo de la diagonal y los vértices consecutivos porque serían lados del polígono, esto se multiplica por el número de vértices y se divide en dos.

Una vez resuelta la segunda actividad se dio paso a la socialización, en la cual se discutió acerca de cuándo se trataba de un garante falso o verdadero y si estos conducían a conclusiones verdaderas o por el contrario los llevaba a falacias; en consenso con el grupo se acordó que el primero y segundo garante de la actividad son falsos y el tercero verdadero, sin embargo, manifestaron que éstos se podían reformular agregando la condición faltante en el caso de la actividad 2.1 y 2.2, para que estos fueran verdaderos y así conducir a una misma conclusión a través de las diferentes formas de conteo. La tercera sesión tuvo como objetivo finalizar la discusión y establecer la equivalencia entre los tres planteamientos algebraicos establecidos por los estudiantes a partir de los garantes presentados en las actividades 2.1, 2.2 y 2.3. Para terminar se plantearon tres preguntas con el fin de recoger sus impresiones respecto al desarrollo de las dos tareas, con la primera ¿qué aprendiste al desarrollar las actividades? se evidenció la apreciación de los estudiantes respecto de la tarea, con la segunda ¿Cuáles diferencias encuentras entre la actividad 1 y 2?, se muestran aportes respecto a las diferencias que tenían las dos tareas, lo cual se corresponde con las finalidades para lo cual fueron diseñadas. Con la última ¿Qué dificultades consideras que se presentaron al desarrollar las actividades?, los estudiantes manifestaron lo que fue en su momento difícil para ellos y en dónde debieron hacer preguntas para comprender lo que se solicitaba.

Implementación estudiantes 901 Colegio La Salle Bogotá: Una segunda implementación se realizó con los estudiantes de grado 901, del Colegio De La Salle Bogotá, en clase de geometría, asignatura que estuvo dirigida por la docente Angie Martínez. Para esta implementación se emplearon dos sesiones de clase Figura 31.

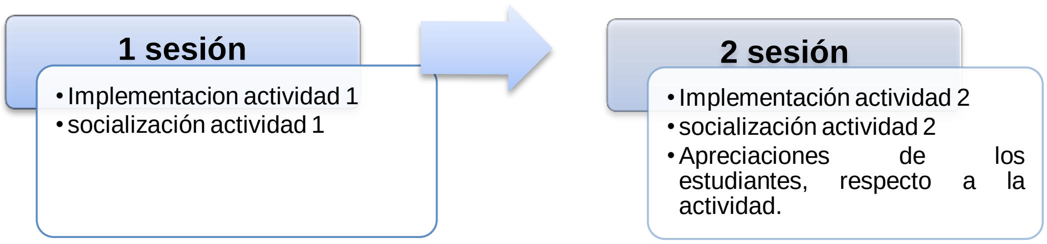


Figura 31. Sesiones implementación Colegio De La Salle

De manera análoga a la implementación anterior se explicó en qué consistía este trabajo y el objetivo de aplicarlo, se envió con anterioridad una circular a los padres de familia para que permitieran la participación de sus hijos en la actividad y se pudiera grabarlos, teniendo en cuenta que esta población es menor de 18 años. En la aplicación, se organizaron en grupos de tres estudiantes y se tomó uno de ellos para realizar la grabación del trabajo grupal, el criterio de selección de este, fue en relación con la participación en clase y sus habilidades comunicativas.

Se entregó la tabla de posibles relaciones entre la cantidad de puntos y las potencias de 2, la cual leyeron y comprendieron, luego se les paso la actividad 1.1, observaron el planteamiento realizado en ésta, para dar respuesta a la pregunta realizan la gráfica a mano alzada encontrando 31 regiones y afirman que 1.1 es verdadera debido a que se obtuvieron 31 regiones y este es un valor cercano al 32 presentado en la tabla. Luego se entregó la 1.2, la cual revisan y se dan cuenta que tiene 30 regiones, un valor diferente al que les dio cuando realizaron la gráfica, por ello deciden hacer otra con mayor precisión, encontrando de nuevo 31 regiones, al comparar esta nueva representación con el garante de 1.2 determinan que son diferentes porque encuentran que en este garante hay tres cuerdas que se intersecan en un punto ocultando una región. Sin embargo afirman que 1.2 es falso ya que no cumple con la relación de la tabla, además expresan que la imagen no es suficiente para obtener la cantidad de regiones ya que se debería probar para todos los casos.

Una vez se culminó con las dos actividades se realizó la socialización, para ello la docente preguntó quién considera que el garante de 1.1 es verdadero, el grupo de estudiantes filmado afirmó que es cierto puesto que es una relación matemática y como es numérica es verdadera, sin embargo otro grupo de estudiantes dice que es falso dado que al hacer la circunferencia y dividirla en los 6 puntos, se encuentran 30 regiones si los lados paralelos del hexágono son congruentes o 31 si los lados paralelos no son congruentes, teniendo en cuenta las intervenciones de los estudiantes se evidencia una división de dos posturas en diferentes grupos, algunos consideran que el garante presentado para 1.1 es verdadero y otros que es falso, por ello la docente solicitó a sus estudiantes que determinaran la cantidad de regiones en una circunferencia con siete puntos, para así cuestionarlos y persuadirlos respecto al valor de verdad del garante de 1.1, en conclusión se dan cuenta que la cantidad de regiones no coincide con el resultado de la tabla, por tanto es un argumento falso.

Para continuar con la discusión la docente les preguntó a sus estudiantes cuál de los argumentos es verdadero 1.1 o 1.2, en general los grupos afirmaron que el garante presentado en 1.2 es parcialmente verdadero ya que en este se revisa los resultados de las posibles regiones, sin embargo este valor dependerá de si el hexágono es regular o irregular, puesto que el número a tener serán de 30 o 31 regiones.

Se inició la segunda sesión de clase entregando la tabla que relaciona el número de diagonales con el número de vértices, los estudiantes primero centraron la atención en responder la pregunta ¿Un polígono de siete lados cuántas diagonales tendrá?, para esto realizaron una gráfica y dedujeron una fórmula general. Enseguida se les dio la actividad 2.1 la cual revisaron y determinaron que era falsa puesto que no está teniendo en cuenta que algunas diagonales se repiten y las cuentan dos veces.

Para la actividad 2.2 afirmaron que es falsa porque no se tuvo en cuenta la diagonal que se formó al eliminar un lado del hexágono para poder construir el heptágono. Finalmente al analizar la actividad 2.3 ellos determinaron el número de diagonales por medio de la fórmula recordada en la actividad 1.1, como un resultado preliminar, luego realizaron el procedimiento para los polígonos solicitados siguiendo el método de conteo de la actividad propuesta, así compararon que el resultado numérico era el mismo que el obtenido en la representación y por ende concluyeron que el garante era verdadero.

Se realizó la socialización para la actividad dos, de lo que se resalta que los estudiantes probaron cada método para verificar cada uno de los tres argumentos presentados, en general se llegó a un consenso. Para la actividad 2.1 se estableció que era falso porque se cuenta dos veces cada diagonal, además se identificó que el resultado en este método se obtenía de multiplicar el número de lados que tiene el polígono por el número de diagonales que sale desde un vértice, en cuanto a la actividad 2.2 afirmaron que el garante presentado era falso dado que al armar el polígono solo agregando un vértice, no tenían en cuenta que un lado del polígono anterior se convertía en una diagonal. Para terminar la discusión en la actividad 2.3 se afirmó que el garante presentado era verdadero, puesto que este método permitió contar con colores las diagonales sin repetirlas. En esta población no se necesitó realizar una tercera sesión debido a que se culminó la actividad en dos clases. Al finalizar con la socialización la docente realizo preguntas en torno a las apreciaciones que ellos tuvieron de las actividades desarrolladas, para así con ello conocer lo que los estudiantes les agrado, se les facilito o dificulto de lo que realizaron.

4.3.3. FASE III: Análisis

En esta fase se especifican las diferentes acciones que se desarrollaron para el procesamiento, clasificación, observación y análisis de la información recolectada. El método utilizado fue la elaboración de seis matrices las cuales se construyeron en diferentes momentos del análisis, ya que cada una de ellas se modificó a partir de una inicial, con la finalidad de refinar el proceso de observación de las diferentes relaciones que se asocian con el objeto de estudio del presente trabajo, a continuación se muestra en detalle cada una de ellas y se especifica sus fortalezas y debilidades las cuales dan origen a la siguiente versión.

Tabla de resumen de información recolectada

Para iniciar con el análisis de la información recolectada en las implementaciones tanto en la Universidad Pedagógica como en el colegio de la Salle, se elaboró una primera tabla denominada “tabla de resumen de información recolectada” (ANEXO D), en esta se presentaron los videos grabados, la duración de cada uno de ellos, la actividad realizada de forma sucinta y las imágenes de las hojas de trabajo que se impartieron a los estudiantes, con el fin de tener una idea de lo que ellos están observando y analizando en el video, finalmente se escribieron algunos comentarios que permitieron mostrar la población que interviene y las acciones que se realizaron en cada una de las sesiones. La finalidad de esta tabla fue tener un esquema general de toda la información recogida, permitiendo así identificar qué actividades se realizaron en cada uno de los videos, cabe resaltar que esta tabla se asocia a una tabla de contenido de las filmaciones, ver Figura 32.

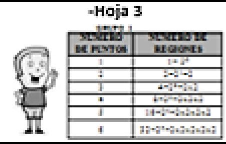
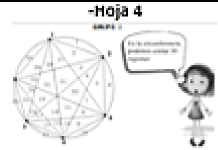
	Implementación Colegio La Salle Bogotá				
	Videos recolectados	Duración	Actividad realizada	Registro escrito	Observaciones
Sesión 1	Video 1. MVI_0195	23:45 min	Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de2.	- Hojas 1 -2 	Población grabada: Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
			Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucia y Pablo.	-Hoja 3 	Población grabada: Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
			Revisión de **1.2** Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	-Hoja 4 	Población grabada: Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo

Figura 32. Tabla de resumen de información recolectada

Tabla de visualización y argumentación

Luego se creó una matriz que permitiera evidenciar, de la información recogida, lo observado en cuanto a visualización y argumentación, teniendo en cuenta cada una de las actividades presentadas en la tabla de resumen (ANEXO E). Esta fue una primera aproximación para depurar la información. Se propuso una columna en la cual se podían escribir comentarios o cuestiones que no eran de argumentación o de visualización pero que eran importantes para el objetivo de la investigación. Sin embargo, una debilidad que se encontró en esta tabla fue que no se podía identificar temporalmente las acciones desarrolladas, pues no discriminaba el tiempo y esto dificultó la lectura de los hechos que sucedieron en la clase. Ejemplo de esta tabla se presenta en la Figura 33.

Información recogida	Observado sobre visualización.	Observado sobre argumentación	Comentarios y citas
Actividad 1.1	Se dejaron guiar por la secuencia dada y dijeron que era $2^5 = 32$.	Se cuestionan y dicen que van a dibujar la circunferencia para comprobar lo dicho. Al dibujar se dan cuenta que dan 31 regiones.	Al observar que no da el número 32, ellos dicen "bueno pero se aproxima"
Actividad 1.2	Observan la figura propuesta por el grupo y cuentan las 30 regiones.		No estamos de acuerdo porque al hacerlo matemáticamente no da.

Figura 33. Tabla de visualización y argumentación

Tabla de visualización, argumentación y evaluación

Al continuar con el proceso de análisis se optó por depurar y evidenciar los detalles de lo sucedido en la clase. Por tanto se decidió ampliar la matriz anterior con las siguientes columnas: en la primera se coloca la información recogida, la cual tiene que ver con la actividad que se desarrolló en el video, la imagen de la hoja de trabajo, la población grabada y la descripción que da cuenta de lo desarrollado en el video. En la segunda se escribieron las afirmaciones de los videos tales como información textual de los estudiantes o las pausas que se evidenciaron en el discurso, lo que se expone en esta columna muestra la información que se analizó para determinar el proceso de visualización, argumentación o la evaluación de argumentos. En la tercera se expone lo referente a visualización atendiendo a dos procesos específicos el de IFI que se refiere a la comprensión e interpretación de las representaciones visuales para extraer la información que contienen, y el VP que hace referencia al proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras, atendiendo a estos procesos se escribió una inferencia respecto a estos y luego se dio la justificación del porque se tomaba como IFI o VP según correspondiera.

En la cuarta columna se realizaron inferencias en torno a lo observado sobre argumentación, en ello se debieron especificar los datos, garantes y conclusión de los argumentos que se identificaron. En la quinta se especificó lo relacionado con evaluación de argumentos, para ello se tuvo en cuenta cuando un estudiante cuestionaba la validez de un argumento. Se presentó con mayor énfasis en el proceso de socialización, dado que las intervenciones de los estudiantes se daban dependiente de los argumentos evidenciados en las actividades. Finalmente en la columna sexta se establecieron las observaciones que se encontraron como asuntos relevantes en el transcurso del video pero que no estaban directamente relacionados con la visualización, argumentación o evaluación. Ejemplo de esta tabla se presenta en la Figura 34.

Esta tabla (ANEXO F) se creó con el fin de organizar la información de los videos de forma clara y sistemática, además el hecho de reportar los minutos permitió encontrar fácilmente los fragmentos que se deseaban volver a analizar para complementar o ampliar alguna información. De igual forma el clasificar las intervenciones de los estudiantes atendiendo a visualización, argumentación o evaluación permitió ir perfilando los resultados hacia la pregunta de investigación.

SESIÓN 1					
Información recogida	**Afirmación del video** “ ” información textual … pausa en el discurso	**Observado sobre visualización.** -Procesamiento Visual (VP) -Interpretación de información figurativa (IFI)	**Observado sobre argumentación** -Datos, garantes y conclusión	**Evaluación de argumentos**	**Observación**
Vídeo 1 M2U00008 **Actividad:** Tabla de relaciones - actividad 1 **Registro escrito:** Hojas 1 -2 **Actividad:** Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucía y Pablo. **Registro escrito:** Hoja 3 **Descripción:** Revisión de 1.1 Juan, Lucía y Pablo. Leen la información presentada en la actividad y luego responden la pregunta: ¿Están de acuerdo con el grupo de Juan?, ¿Por qué?	Los estudiantes leen la información de 1.1 en busca de dar respuesta a la pregunta planteada, para ello se apoyan de la tabla de relaciones planteada. 00:17 “¿Están de acuerdo con el grupo de Juan? ¿Por qué? Pues sí claro, porque cuánto es 32, cada cuerda forma dos, por eso va el 2, potencias de 2, (piensan y dicen según lo presentado en la tabla cuanto daría para 4, 5 y 10 puntos)” 01:29 Wilson: “si la dibujamos, o sea la veracidad que debemos poner para decir si estamos de acuerdo con Juan por esto, esto y esto o no estamos de acuerdo por tal, tal y tal”	**Inferencia:** *Los estudiantes infieren información que le permite comprender un posible comportamiento algebraico con la secuencia gráfica, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Los estudiantes revisan la tabla y buscan posibles relaciones entre la cantidad de puntos y las potencias de 2, con ello intentan establecer un comportamiento algebraico, sin embargo no llegan a una respuesta definitiva, porque al revisar la gráfica*	**Inferencia:** *Inferencia: se plantea un argumento para justificar y dar respuesta a la pregunta ¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia?* ***Justificación:*** *Ivan plantea que para seis puntos se obtienen 32 regiones, lo cual lo deduce de la secuencia algebraica que se les presenta en 1.1, de ello el garante que en ese momento tiene para afirmar lo anterior es la tabla 1.1*	**Inferencia:** Los estudiantes dudan del garante algebraico. Ellos concluyen inicialmente que el número de regiones era 32 ***Justificación:*** *Ellos intentan concluir que el número de regiones es 32 y lo validan en la secuencia algebraica presentada, pero a su vez realizan la representación gráfica y esto les genera duda respecto de lo que están afirmando.*	existe una indecisión sobre cuál de los garantes es el verdadero. Los estudiantes inicialmente realizan un proceso de visualización asociado al proceso IFI, para establecer un posible comportamiento algebraico, luego generan un argumento basado en dicho comportamiento, pero finalmente dudan de esto, puesto que realizan las representaciones gráficas y obtienen un resultado diferente, de lo anterior se concluye que en este apartado

Figura 34. Tabla de visualización, argumentación y evaluación

Tabla de análisis horizontal y vertical

De la tabla de visualización, argumentación y evaluación (ANEXO G) y de acuerdo al marco teórico se propuso depurar un poco más la información, teniendo como referencia para la visualización los procesos de interpretación de la información figurativa (IFI) y procesamiento visual (VP). Para la argumentación se tuvieron en cuenta los fines de esta (explicar, generalizar, justificar, entre otros) y finalmente en la columna de evaluación, se determinó el objeto de evaluación y algunas frases que evidenciaban este proceso.

Una vez la tabla estuvo completa, se realizaron dos tipos de análisis, uno horizontal y otro vertical, en el horizontal se buscaron relaciones entre los tres diferentes procesos para intentar hallar regularidades entre estos. En el segundo análisis se intentó buscar cuáles actividades promovían cada tipo de proceso (visualizar, argumentar y evaluar), que era lo que más se repetía en cada proceso y llegar a algunas conclusiones al respecto. Ejemplo de esta tabla se presenta en la Figura 35.

Implementación Colegio La Salle Bogotá						
Videos recolectados	Duración	Actividad realizada	Visualización IFI- VP	Argumentación Fines (explicar- generalizar- justificar...)	Evaluación objeto que se evalua (argumento de estudiantes, actividad, afirmaciones de la socialización)	Análisis
Video 1. MVI_0195	23:45 min	Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de2.	IFI	Se plantea un argumento para justificar		
		Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo.			El garante presentado en 1.1 es muy persuasivo, por ello prefieren ajustar la representación gráfica de ellos para que de lo de la tabla. El garante de 1.2 produce duda respecto del de 1.1, además la representación gráfica realizada por ellos	
		Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	IFI		Se genera un argumento que busca validar el garante gráfico de la actividad 1.2	

Figura 35. Tabla de análisis horizontal y vertical

Tabla de 1 y 2 nivel de argumentación

Aunque la matriz de relaciones horizontales y verticales no permitió llegar a conclusiones concretas, si se logró encontrar dos posibles formas de analizar la información recolectada teniendo en cuenta la clasificación en las tres categorías. En la columna de argumentación y evaluación se evidenciaron argumentos de dos tipos, el primero el cual se llamará argumentos de primer nivel en la próxima matriz de análisis (ANEXO H), consiste en los argumentos que se generaron para dar solución a una actividad y se corresponden con los presentados en la columna de argumentación, su finalidad puede variar entre: justificación, validación, explicación, entre otras. La siguiente tipología se llamará argumentos de segundo nivel, estos hacen referencia al valor de verdad o falsedad de un argumento y se corresponden con la columna de evaluación, se consideran como una doble argumentación ya que se generaron a partir del cuestionamiento de un garante presentado en la actividad, ver Figura 36.

Implementación Colegio La Salle Bogotá		
Actividad	**Argumentos de primer nivel**	**Argumentos de segundo nivel**
Actividad 1.2	**Datos:** dos representaciones gráficas, una con 30 regiones y otra con 31 **Conclusión**: la gráfica con 31 regiones realizada por ellos es falsa y la presentada en 1.2 es verdadera. **Garante:** De la gráfica 1.2 con 30 regiones los estudiantes determinan que cuando hay varios segmentos (cuerdas) que se cortan se esconde una región que sí aparece en la gráfica realizada por ellos.	*Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos. **Conclusión:** Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 30 regiones. **Garante:** Representación gráfica actividad 1.2 *I. Acciones de los estudiantes* Evalúa de nuevo el valor de la secuencia presentada en la tabla para 2^5 y Responden la pregunta de la actividad 1.2 *Argumento estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos y evaluación del argumento 1.1. **Conclusión:** el garante presentado en 1.2 es falso (gráfica con 30 regiones) **Garante:** Utilizando la relación de potencias (garante 1.1) el resultado es 32.

Figura 36. Tabla de 1 y 2 nivel de argumentación

Tabla etapas identificadas en el proceso de argumentación

La otra forma de abordar la información que brindaba la matriz de relaciones horizontales, correspondió a los diferentes procesos y acciones desarrolladas por los estudiantes para responder cada actividad, es decir, se identificó que para la construcción de argumentos que atendieron a las tipologías de primer y segundo nivel fue necesario desarrollar una serie de etapas, los cuales se corresponden con los diferentes procesos (visualización, argumentación y evaluación) ANEXO I. Ejemplo de esta tabla se presenta en la Figura 37.

Descripción de los procesos evidenciados en las diferentes etapas de la actividad

Implementación Colegio La Salle Bogotá		
Actividad	**Procesos**	**Descripción de las etapas evidenciadas en cada actividad**
Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de 2. Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo.	IFI - Argumento para justificar - Evaluación de argumento presentado en la actividad 1.1	Los estudiantes observaron e identificaron información que les permite comprender el comportamiento algebraico de la secuencia presentada en la tabla de relaciones y el garante presentado en 1.1 [IFI], ellos para responder en cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos, afirman que "con 6 puntos el número de regiones serán 32", debido a que la relación planteada "cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente,es decir que 2^5=32" [argumento para justificar su respuesta - primer nivel], Luego al escribir la respuesta indican que eso se puede ver gráficamente, sin embargo se dan cuenta que aún no han construido ninguna gráfica, por tanto realizan una primera construcción en donde el número de regiones que se obtiene son 31, al ser 31 un número muy cercano a 32, ellos afirman que aproximadamente si son 32 regiones. [Argumento que evalúa 1.1 - Segundo nivel]

Figura 37. Tabla etapas identificadas en el proceso de argumentación

La finalidad de las últimas dos matrices fue mostrar los avances que se identificaron en el proceso de argumentación de los estudiantes, debido a que nuestro interés de estudio era evidenciar si es posible fortalecer el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico.

Elaboradas las tablas que permitieron agrupar los argumentos de acuerdo a los niveles determinados para el proceso de argumentación y las etapas que evidenciaron la transición de la actividad a la generación de dichos argumentos, se procedió al análisis de la información recolectada. Para ello se retomó la cuestión a desarrollar en este estudio y se clarificaron algunos aspectos para su comprensión. Luego se describieron los diferentes aspectos que permitieron evidenciar que se cumplió con el objetivo de la investigación, entre estos se consideraron: i) las percepciones de los estudiantes: solución a la pregunta ¿Qué aprendiste al desarrollar las actividades? para así dar cuenta de lo que los estudiantes consideran que les aporto el desarrollo de la actividad; ii) finalidades de la tarea: se muestran los objetivos con los cuales se pensaron las actividades y si estos se cumplieron al desarrollar las tareas, iii) clasificación de argumentos y definición de las categorías: se exponen las categorías con las cuales se realizó el análisis de la información recolectada, finalmente la iv) el papel de la visualización en la producción de argumentos de nivel 1 y 2: se evidencia la importancia del proceso de visualización en la validación de garantes de tipo gráfico para obtener argumentos de 1 y 2 nivel.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El presente capitulo tiene como finalidad realizar un informe de los resultados encontrados a lo largo del desarrollo del trabajo de grado y en particular de las aplicaciones de las actividades, enfocados principalmente a la diversidad de argumentos encontrados al evaluar argumentos visuales dados a una afirmación, lo cual se apoya en la problemática de estudio, la pregunta y los objetivos de la investigación. De aquí que sea importante recordar la pregunta planteada al inicio del documento: *¿Cuestionar la validez de los argumentos visuales usados para sustentar una afirmación, cómo fortalece los procesos de argumentación en la clase de matemáticas?,* para la cual se estableció como objetivo principal evidenciar si es posible fortalecer el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico.

De esta manera se pretende mostrar cómo fortalecen los estudiantes sus prácticas argumentativas, entendido "fortalecer" como la capacidad de producir diversos argumentos que permitan justificar, validar, explicar y generalizar la solución de un problema o evaluar otros argumentos que le sean presentados. Esto se logró a través de la exploración, manipulación y validación de variedad de garantes de tipo gráfico, unos verdaderos y otros falsos, que hacían parte de una secuencia de actividades diseñadas para este fin. Es de notar que no es muy común, en investigación en educación matemática, que se presenten a los estudiantes argumentos ya elaborados, por el contrario lo que se busca es que ellos los generen, tal vez sin experiencias que les permitan conocer diferentes tipos de argumentos y cómo elaborarlos.

En lo que sigue se evidencian cuatro apartados que corresponden al cuerpo del análisis del trabajo de grado los dos primeros hacen referencia a lo percibido por los estudiantes respecto al desarrollo de la actividad y los otros dos a los argumentos encontrados durante la implementación de la misma: i) apreciaciones de los estudiantes: en este se presenta lo que los estudiantes dijeron al finalizar la implementación y sus observaciones en términos de lo aprendido durante la actividad; ii) finalidades de la tarea: se muestran los objetivos con los cuales se pensaron las actividades y si estos se cumplieron al desarrollar las tareas; iii) clasificación de argumentos y definición de las categorías: se exponen las categorías con las cuales se realizó el análisis de la información recolectada; iv) el papel de la visualización en la producción de argumentos de nivel 1 y 2: se evidencia la importancia del proceso de visualización en la validación de garantes de tipo gráfico para obtener argumentos de 1 y 2 nivel.

Apreciaciones de los estudiantes

Al analizar la información recolectada en las preguntas de cierre propuestas a los estudiantes de la U.P.N. y las preguntas generadas por la docente a los estudiantes de la Salle (

ANEXO **J**), se observaron dos tendencias:

1. Duda y validación: Algunos estudiantes manifestaron que no se debe quedar con una sola respuesta, sino explorar diferentes posibilidades o caminos para abordar la situación que se plantee, tampoco se debe aceptar lo que los demás dicen sin cuestionar o validar para estar seguros de lo que se está afirmando. A continuación se presentan algunos ejemplos de esta categoría:

   Que no debemos quedar en una sola idea, sino que debemos hacer las suficientes pruebas para llegar a la respuesta correcta (Natalia – U.P.N.).

   No todo lo que me dicen es cierto (Maikol - Colegio De La Salle).

   Es necesario probar varias veces antes de llegar a una conclusión apresurada (María Paula – U.P.N.).

A explorar distintos métodos antes de conjeturar, a no suponer sin estar completamente seguro de que es 100% correcto, a visualizar un panorama más extenso para encontrar los posibles errores (Sebastián – U.P.N.).

Aprendí a considerar las diferentes posibilidades de llegar a la solución de una situación presentada a indagar, analizar y comprender el porqué de una solución, además de dudar de los métodos conocidos y buscar métodos distintos que lleguen al mismo fin (Esteban – U.P.N.).

Extraño porque veía como una fórmula por un lado, un punto de vista y luego otro que no… quede como confundido (Carlos – Colegio De La Salle).

Es bueno porque esto demuestra que no todos los resultados son absolutos depende de ciertos factores (Juan Esteban – Colegio De La Salle).

2. Diferentes puntos de vista (argumentación como función social): Se evidenció cómo los estudiantes escucharon las opiniones de sus compañeros para apoyar sus ideas, o para cuestionarlas, con el fin de llegar a un consenso sobre lo que se estaba realizando, también se observó la relevancia que tiene escuchar al otro y atender a las sugerencias realizadas y comprender que los demás tienen diferentes formas de abordar una misma situación tanto para solucionarla como para socializarla. A continuación se colocan algunos ejemplos de esta categoría:

   Observar otros métodos o diferentes puntos de vista para llegar a una misma solución (Yenny – U.P.N.).

   Se aprende a comprender y a entender más a fondo el problema y que cada uno tiene perspectivas diferentes a cada situación (Cristian – U.P.N.).

   Aprendí que hay distintas maneras de ver y socializar un problema a partir del saber de cada uno (Oscar – U.P.N.).

Haciendo una comparación entre las distintas respuestas, y se mira que grupo tiene la mejor razón o se busca un error que no tenga otro grupo y con eso se sabe quién tiene la razón (Daniel – Colegio De La Salle).

Finalidad de las tareas

Para continuar con el análisis de la información se presentaran los objetivos cada una de las actividades implementadas, con el fin de evidenciar las estrategias utilizadas para la construcción del instrumento, las cuales se pensaron con el objetivo de fortalecer las prácticas argumentativas. En la primera actividad se buscaba generar incertidumbre, lo cual se corresponde con la tendencia anteriormente descrita en las apreciaciones de los estudiantes como *Dudas y validación*. En la segunda actividad se esperaba que los estudiantes percibieran diferentes técnicas de conteo para una misma situación, con el fin de evaluar su validez y reformular algunos de los garantes, lo cual se relaciona con la segunda tendencia identificada como *Diferentes puntos de vista*. Para ampliar y ejemplificar la finalidad de las dos tareas, se describe en detalle cada una de estas.

En la primera parte del instrumento se propuso una falacia que permitiera mostrar a los estudiantes un problema geométrico no generalizable. La actividad 1.1 planteó un garante persuasivo, una secuencia numérica que parece ser cierta y luego en la 1.2 se presentó un argumento de tipo gráfico el cual es verdadero pero no parece ser lo suficientemente fuerte, entendido este último como difícil de refutar, para convencer a los estudiantes que 1.1 era falso. Esta actividad pretendía que los estudiantes exploraran el problema y se dieran cuenta que no siempre lo que se presenta en una actividad y lo que parece general es cierto, además de generar duda cuando se les volviera a presentar un argumento. Los esquemas argumentativos de la actividad se presentan en la Figura 38 y Figura 39.

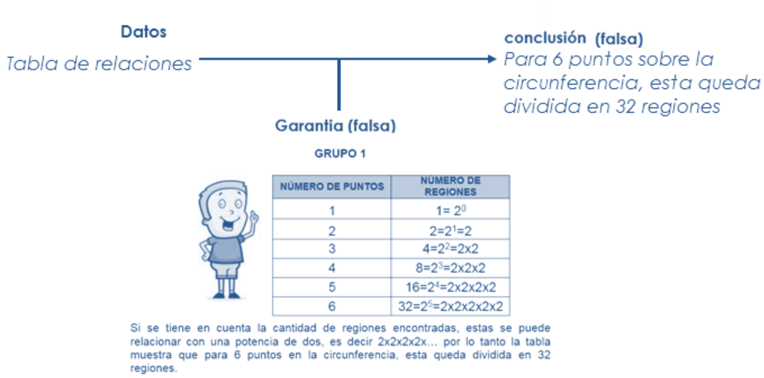


Figura 38. Esquema argumentativo actividad 1.1

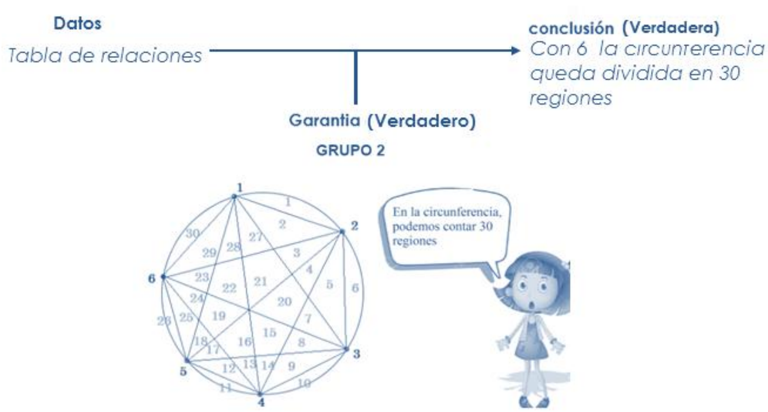


Figura 39. Esquema argumentativo actividad 1.2

Al realizar la comparación entre la finalidad de esta primera parte del instrumento con lo dicho por los estudiantes de las dos poblaciones, se puede afirmar que los objetivos se cumplieron, como se puede evidenciar en los siguientes fragmentos:

En la primera actividad no había una verdad absoluta, pero permite a los estudiantes aprender que aunque una respuesta parece obvia no siempre es así… (William – U.P.N.).

Esto demuestra que no todos los resultados son absolutos depende de ciertos factores (Juan Esteban- Colegio De La Salle).

No todo lo que me dicen es cierto (Maikol - Colegio De La Salle).

En la actividad 2.1, 2.2 y 2.3 se planteó una relación geométrica usual en el aula que es generalizable, en la cual se presentaron garantes que se asocian a técnicas de conteo, dos de ellas erróneas, lo que hacen que el argumento sea falso. Se pide que los estudiantes identifiquen el error, den razones porque son falsos y que sean capaces de reformular la estrategia. Se pretendía que evidenciaran distintos tipos de argumentos para un mismo problema, que evaluaran cada uno de los garantes y propusieran una estrategia para hacer un conteo valido. Los esquemas argumentativos de esta parte del instrumento se presentan en la Figura 40, Figura 41 y Figura 42.

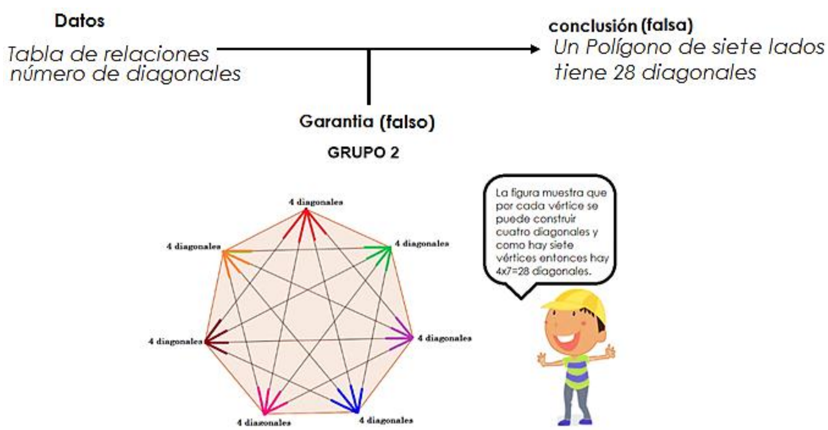


Figura 40. Esquema argumentativo actividad 2.1

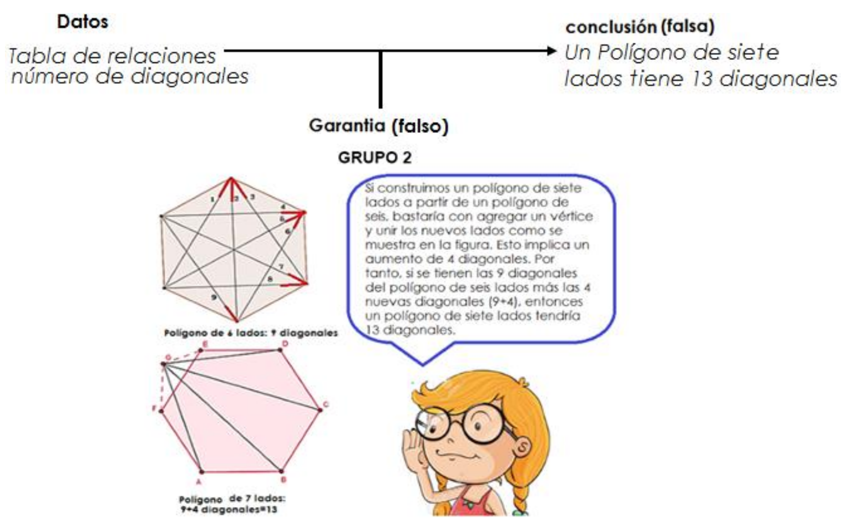


Figura 41. Esquema argumentativo actividad 2.2

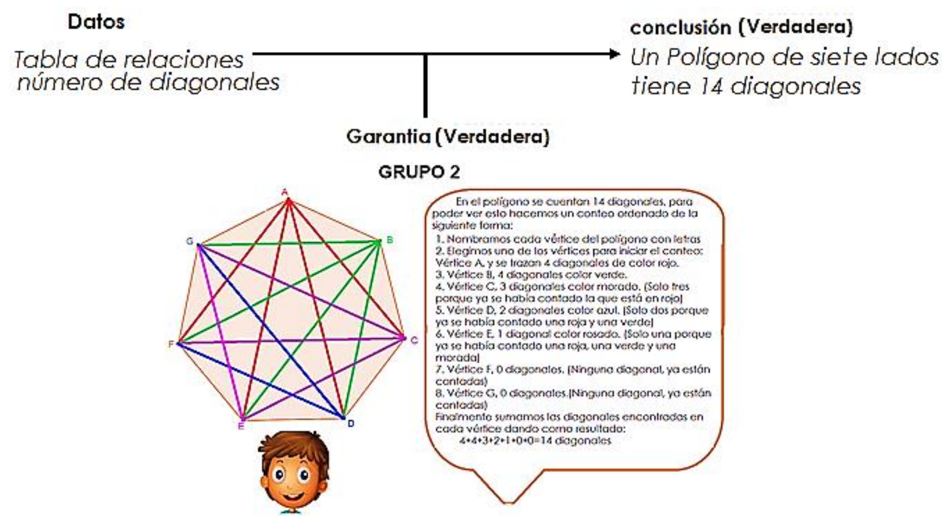


Figura 42. Esquema argumentativo actividad 2.3

Los objetivos de la actividad se cumplieron en términos de los estudiantes quienes afirmaron que:

En la primera actividad considero que visualizar es una manera de organizar las imágenes abstractas y de esta manera cuestionar ¿cómo sería si…? ¿Sería de otra manera? y en la segunda considero que a partir de la información visual, afirmarlo numéricamente es más complejo que decirla (Oscar – U.P.N.).

…La segunda actividad permite ver varias formas de resolver un problema (William – U.P.N.).

Si yo quiero probar algo lo hago gráficamente (Carlos - Colegio De La Salle).

Si yo quiero justificar algo puedo aplicar cada procedimiento en distintos polígonos y luego de hacer una comparación (Juan Esteban - Colegio la Salle).

Con respecto a la solución de las dos actividades, se observó que para los estudiantes fue más fácil desarrollar la segunda actividad que la primera, ya que algunos conocían la fórmula que generalizaba la situación, otros veían errores en los procedimientos y los podían corregir para que fuera verdadero. Sin embargo la primera actividad presentaba un razonamiento que no era lógico para los estudiantes, cada método mostraba una respuesta diferente que podía ser verdadera pero que al final y al comparar con las gráficas hechas por ellos no coincidían.

Clasificación de argumentos y definición de categorías

Al revisar la información reportada en la Tabla de visualización, argumentación y evaluación se identificó que los estudiantes plantearon diferentes argumentos de acuerdo a las acciones que desarrollaron para solucionar las actividades, entre estos se encontraron, argumentos para justificar, explicar, generalizar y conjeturar. Adicionalmente a estos, se observaron otra clase de argumentos cuando los estudiantes evaluaron cada una de las actividades, estos se caracterizaron por determinar el valor de verdad, verdadero o falso, del garante y conclusión presentada en 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 y 2.3.

Teniendo en cuenta las clases de argumentos que se generaron, se propusieron como categorías de análisis para el proceso de argumentación dos niveles, los cuales, permitieron clasificar los tipos de argumentos y las finalidades que cumplieron en el desarrollo de cada actividad; es de aclarar que estos no implican un orden del proceso de la argumentación, es decir que siempre que se produzcan argumentos de segundo nivel debió haber existido uno de primer nivel, por el contrario, estos surgen de acuerdo a las acciones que desarrollaron los estudiantes y se pueden presentar en cualquier momento de la actividad. A continuación se define cada uno de los niveles de argumentación y se ejemplifican con las producciones de los estudiantes.

Argumentos de primer nivel

En esta categoría se agruparon los argumentos que propusieron los estudiantes para dar solución a una actividad o realizar afirmaciones de lo observado. Estos cumplen con la finalidad de justificar, validar, explicar, generalizar y conjeturar.

Además se corresponden con las acciones que por lo general se desarrollan al trabajar la argumentación en clase de matemáticas, esto se identificó al estudiar algunos documentos (*Boero et al., (2010); León & Calderón (2001) y Ding & Jones (2009)*), pues las tareas que se propusieron en esos se centraron en la producción de argumentos para solucionar problemas.

Particularmente, en este estudio se denominaron y definieron los siguientes tipos de argumentos: *i) para conjeturar:* fueron aquellos argumentos cuya conclusión era una conjetura y su garante era de tipo gráfico; *ii) para explicar:* surgieron cuando el estudiante debía comunicar una idea a sus compañeros y su garante fue de tipo gráfico; *iii) para generalizar:* su conclusión es una afirmación que involucra a todos los casos posibles, su garante fue la interpretación de la técnica de conteo presentada en la segunda actividad; *iv) para justificar:* se produjo cuando se examinó la aceptabilidad de una relación observada y se intentaba persuadir a quien se comunicaba; y *v) para validar:* se generaron cuando los estudiantes daban un valor de verdad de relaciones observadas o gráficas construidas. En la Figura 43 se presenta un ejemplo de cada uno de los argumentos definidos anteriormente.

Figura 43. Ejemplos de argumentos de primer nivel

Argumentos de segundo nivel

La siguiente tipología se denominó argumentos de segundo nivel, debido a que las acciones que desarrollaron los estudiantes no son una estrategia usual para el trabajo de la argumentación en la clase de matemáticas. En esta clasificación se agruparon aquellos argumentos en donde los estudiantes evaluaron los garantes y conclusiones presentados en la actividad (1.1-1.2-2.1-2.2-2.3), y la conclusión de dicha valoración correspondía al valor de verdad, verdadero o falso; por lo general el garante correspondía a los mismos garantes presentados en la actividad o a la creación y observación de otras representaciones gráficas.

Estos se consideraron como una doble argumentación dado que se presentaba un argumento el cual debió ser evaluado y la valoración es otro argumento que justifica su respuesta. Es de resaltar que en el trabajo por grupos los datos que correspondían a la tabla de relaciones, los garantes y conclusiones del argumento de cada actividad y en la socialización se tenían los mismos datos del trabajo grupal y adicional a estos se tenían las diferentes participaciones de los otros compañeros que permitían reafirmar o contradecir el valor de verdad asignado por uno de los grupos. Algunos ejemplos de estos argumentos se presentan en la Figura 44.

TRABAJO POR GRUPOS

Argumento presentado en la actividad

Datos: Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos y argumento presentado en 1.1.
Conclusión: Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 32 regiones.
Garante: Tabla de las potencias de dos.

Acciones de los estudiantes Colegio la Salle

Inicialmente los estudiantes evalúan 1.1 por medio de la construcción de dos representaciones gráficas y responden que la conclusión planteada en la actividad sí es verdadera, aunque el número de regiones encontrados en sus representaciones hayan obteniendo 31 regiones.

Argumento de los estudiantes Colegio la Salle

Datos: Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos.
Conclusión: El argumento 1.1 es verdadero.
Garante: en las representaciones gráficas encontraron 31 regiones, pero como es un valor muy cercano a 32, afirman que el número de regiones es 32.

Acciones de los estudiantes UPN

Dibujan circunferencia con seis puntos y trazan cuerdas posibles.

Argumento de los estudiantes UPN

Datos: Tabla de relaciones, argumento presentado en 1.1 y circunferencia con seis puntos.
Conclusión: el garante de 1.1 puede ser falso
Garante: Realizan gráfica y obtienen 31 regiones y el resultado no se corresponde con el de la tabla de 1.1

SOCIALIZACIÓN ACTIVIDAD 1.1

Acciones de los estudiantes Colegio la Salle

Después de la respuesta del grupo de Carlos continúan con las intervenciones de otros compañeros, quienes parecen contradecir lo afirmado por la participación del primer grupo.

Argumento de estudiantes Colegio la Salle

Datos: Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por ellos, evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2, afirmación realizada por el grupo de Carlos

Conclusión: El argumento 1.1 es falso

Garante: "al hacer la circunferencia y dividirla en 6 puntos, se encuentran 30 regiones si los lados paralelos del hexágono son congruentes pero si los lados paralelos no son congruentes, hay 31 regiones" Garante de tipo gráfico.

Acciones de los estudiantes UPN

Realizan afirmaciones con el fin de emitir argumentos con dos fines, el primero es responder a preguntas y el segundo para afianzar o contraargumentar las afirmaciones de un compañero.

Argumento de estudiantes UPN

Datos: Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por el grupo.

Conclusión:El garante presentado en 1.1 y en 1.2 es verdadero

Garante: la secuencia 1.1 corresponde correctamente a los valores de las potencias de dos y para 1.2 se realizan representaciones gráficas de otras circunferencias y se obtienen 31 regiones, la cantidad de regiones depende de donde estén los puntos sobre la circunferencia

Figura 44. Ejemplos de argumentos de segundo nivel

A partir de los argumentos agrupados en cada una de las categorías establecidas, se puede evidenciar la riqueza argumentativa que se presentó tanto en el trabajo grupal como en la discusión de los resultados desarrollada en la socialización, de la forma que los dos niveles de argumentación se convierten en experiencias vividas por los estudiantes en actividades asociadas al proceso de argumentación que le aumentarán su conocimiento práctico para la producción de argumentos.

Papel de la visualización en la producción de argumentos nivel 1 y 2

Teniendo en cuenta los procesos de visualización descritos en el marco teórico, procesamiento Visual (VP), el cual básicamente hace referencia al proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y el de interpretación de información figurativa (IFI), en donde se realiza un proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen, los estudiantes hicieron uso de éstos dado que las actividades estuvieron centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico, de ello la importancia del proceso de visualización para interpretar y extraer información de las imágenes para generar argumentos de nivel 1 y 2.

En la implementación de las actividades con los estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional las cuales se reportan en la tabla de etapas identificadas en el proceso de argumentación, se observa como dichos procesos permitieron el paso para generar argumentos de nivel 1 y 2, un ejemplo de ello se presenta en la figura 45:

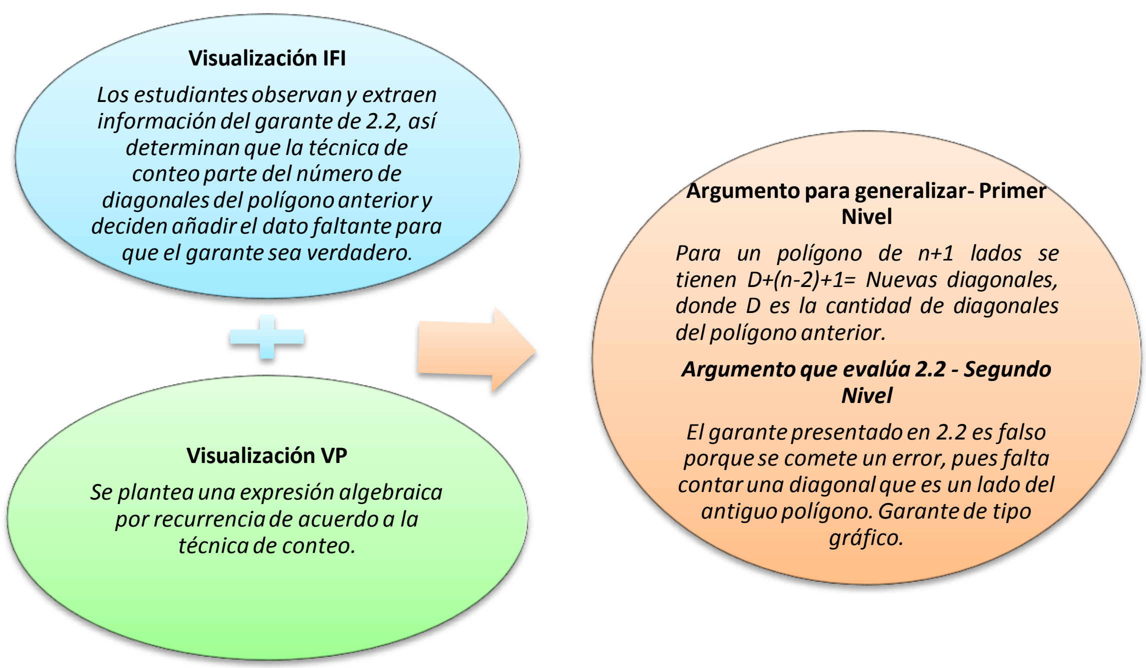


Figura 45. Argumentación nivel 1 y 2 U.P.N.

En la Figura 46 se observa el resumen de los procesos utilizados por los estudiantes de la U.P.N. para generar los argumentos, en ello se hace énfasis en la importancia de los procesos IFI y VP utilizados al validar los garantes de tipo gráfico.

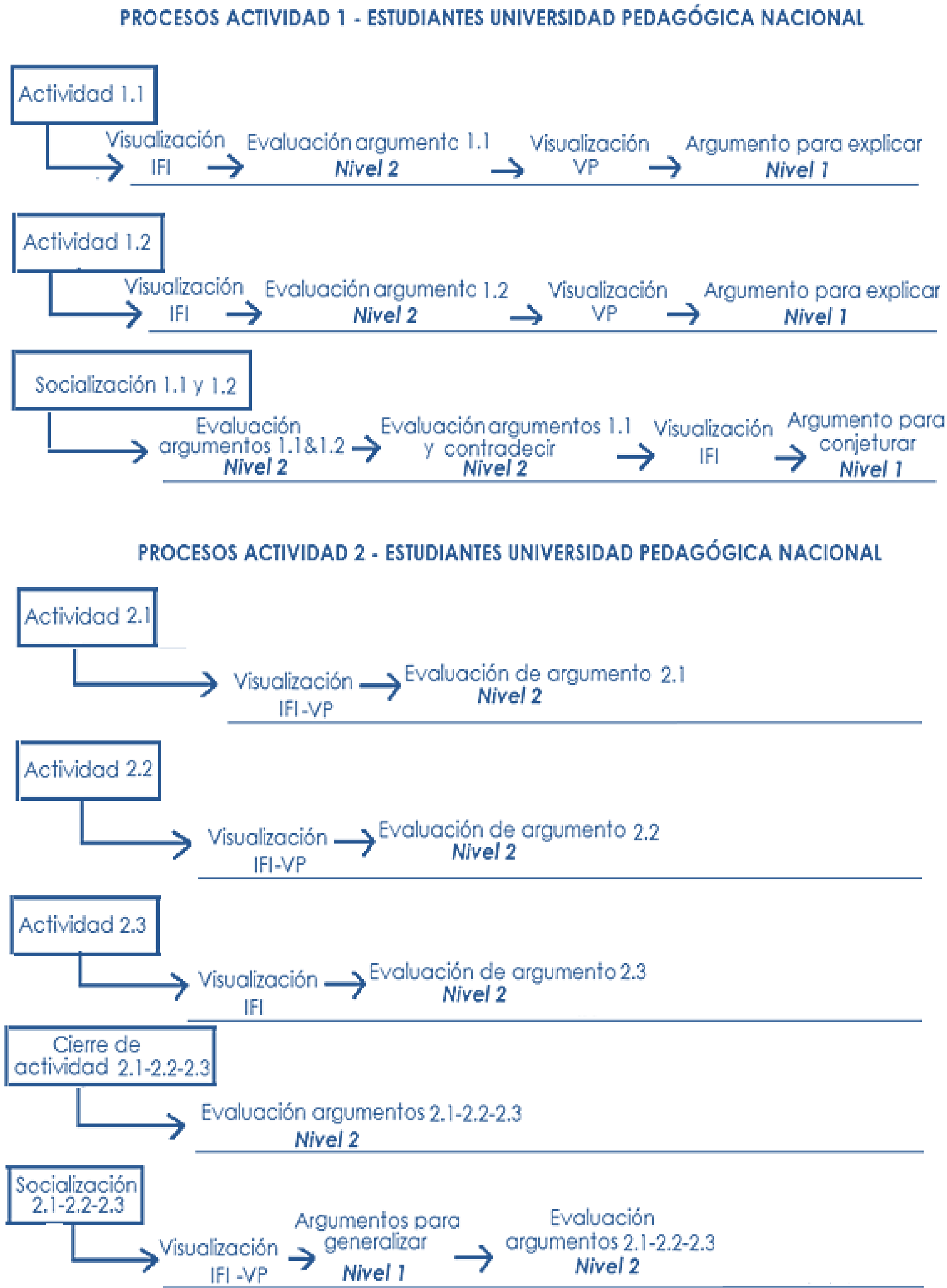


Figura 46. Procesos actividad 1 y 2 U.P.N.

En la implementación realizada en el colegio de la Salle también se evidenció el papel de la visualización para generar los argumentos de nivel 1 y 2, un ejemplo donde se verifica lo dicho fue:

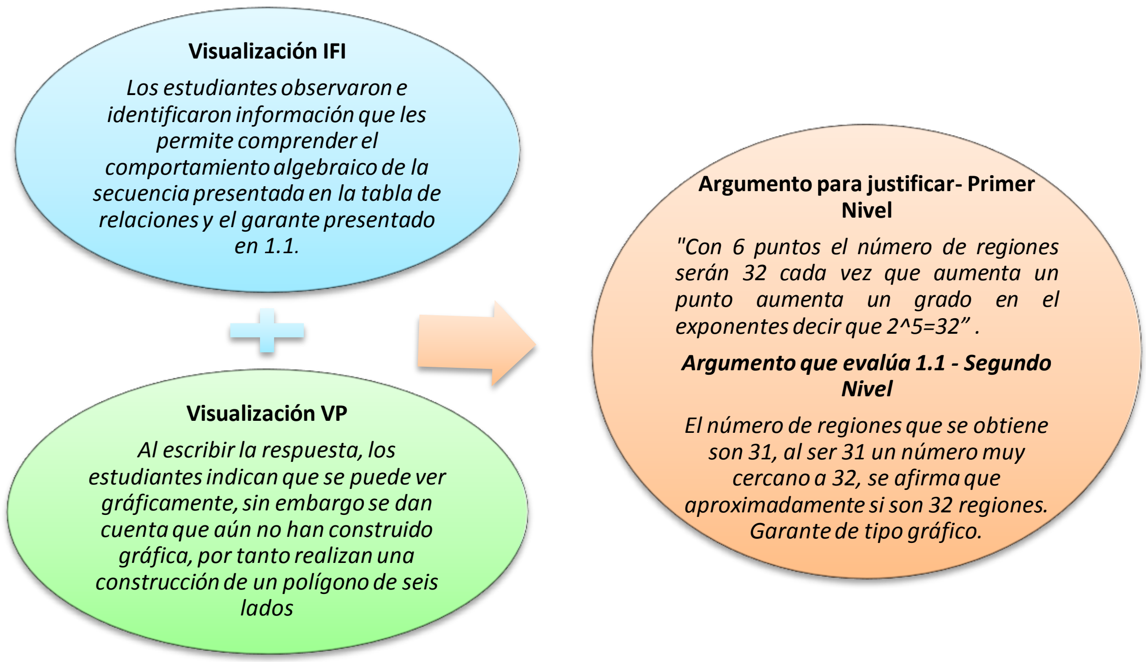


Figura 47. Argumentos nivel tipo 1 y 2 Colegio De La Salle

De igual forma en la Figura 48 se observa el resumen de los procesos generados por los estudiantes al resolver las actividades planteadas.

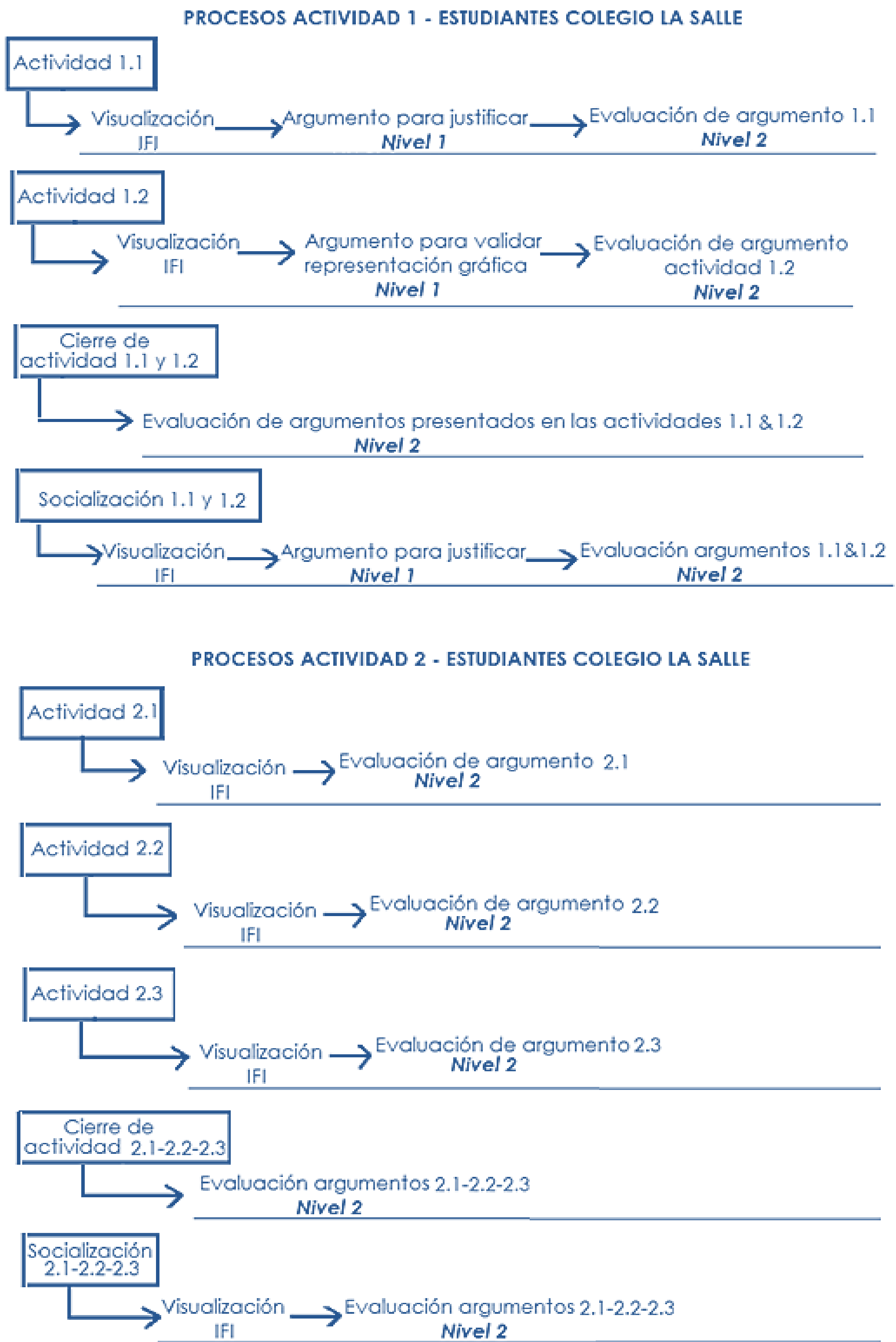


Figura 48. Procesos actividad 1 y 2 Colegio De La Salle

De acuerdo a los esquemas presentados se observa que en el procesamiento de la información se hizo evidente el proceso de visualización, particularmente los procesos IFI y VP los cuales surgieron a medida que se proponían argumentos de nivel 1 y 2 señalados anteriormente, dado a que las actividades estuvieron centradas en garantes de tipo gráfico.

Además, se reconocen algunas de las habilidades de la visualización planteadas por Del Grande (1990), citado por Gutiérrez (1991) en los estudiantes al procesar las imágenes y en la generación argumentos, entre estas se resaltan: la identificación visual, la discriminación visual y la memoria visual, algunos ejemplos de estos se presentan en la figura 49

IDENTIFICACIÓN VISUAL

- En la actividad 2.2 se propone como garante una imagen que presenta como técnica de conteo el número de diagonales a partir del poligono anterior, en este caso el estudiante identificaba cual es el polígono anterior con sus respectivas diagonales, luego se construye el nuevo lado y se trazan las diagonales adicionales. De la comprensión del garante se generó como argumento de segundo nivel: *Estudiantes Col. La Salle-* **Datos:** Polígono de 7 lados con sus diagonales. **Conclusión:** el garante presentado en 2.2 es falso **Garante:** Los estudiantes afirman que de acuerdo a la gráfica no se están teniendo en cuenta la diagonal que se forma al eliminar un lado del hexágono.

DISCRIMINACIÓN VISUAL

- En la actividad 1.1 y 1.2 los estudiantes comparan una representación gráfica propuesta por ellos y la presentada en el garante 2.2, al hacerlo observaron que en una de ellas concurren tres cuerdas que ocultan una región, por tanto se generó como argumento de primer nivel: E*studiantes UPN-* **Datos:** Tabla de relaciones, argumento presentado en 1.1 y circunferencia con seis puntos. **Conclusión:** si tres cuerdas son concurrentes hay una región menos, la cual se oculta en la mitad. **Garante:** simulación de movimientos de puntos sobre la circunferencia en donde observan que una región se oculta si tres cuerdas son concurrentes, es decir un garante de tipo gráfico.

MEMORIA VISUAL

- Al comenzar con la actividad 2.1 los estudiantes del Col. La Salle identificaron que se trataba del número de diagonales de un polígono, esto lo habían trabajado en cursos anteriores y recordaron la fórmula y generaron como argumento: *Estudiantes Col La Salle -* **Datos:** Argumentos presentados en actividad 2.1, 2.2 y 2.3 y el argumento generado por ellos sobre la validez de los garantes. **Conclusión:** Solo el tercer método es correcto. **Garante:** Formas de conteo evidenciadas en los métodos de 2.1, 2.2 2.3. Los estudiantes afirman que: "solo una porque Samuel fue el que acertó ya que tuvo el mismo resultado que la fórmula de cómo calcular las diagonales de un polígono que es: donde n es el número de lados del polígono"

Figura 49. Habilidades asociadas al proceso de visualización en la producción de argumentos

6. CONCLUSIONES

El estudio que presentamos correspondió a nuestro interés por mejorar el ejercicio profesional docente. Iniciamos este trabajo con una situación que originó el problema de investigación y como se manifestó a lo largo del documento nuestro objetivo era evidenciar si es posible fortalecer el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de actividades centradas en la evaluación de garantes de tipo gráfico. La experimentación llevada a cabo permitió identificar varias consideraciones que se relacionan con la pregunta de investigación y están encaminadas a mostrar diferentes conclusiones de los aspectos estudiados a lo largo del documento.

El instrumento que se aplicó a las dos poblaciones permitió evaluar argumentos, lo que hace de su diseño algo novedoso, ya que como se afirmó durante el planteamiento del problema es una estrategia poco usual empleada en las investigaciones relacionadas con argumentación. De igual manera plantear una falacia permitió que los estudiantes dudaran de los argumentos que se propusieron durante la actividad y afirmaran que no siempre es posible generalizar y que antes de dar validez a un argumento se deben explorar todas las opciones de solución posibles.

Así mismo se evidenció la importancia que tiene para los estudiantes concebir diferentes puntos de vista de sus compañeros, es decir, se hizo énfasis en la argumentación como función social, puesto que algunos expusieron que el escuchar las opiniones de sus pares les permitió apoyar o refutar ideas y así entre todos llegar a un consenso sobre lo que se estaba realizando, en ello jugó un papel fundamental la interacción entre compañeros y así aceptar que no todos usan los mismos procedimientos para abordar un problema o socializar una actividad.

Es importante también realizar una reflexión respecto al desarrollo de la actividad, puesto que en la evaluación de finalización los estudiantes manifestaron mayor dificultad en la primera actividad (1.1 y 1.2) que en la segunda (2.1 – 2.2 - 2.3), dado que para esta última algunos conocían la fórmula que generalizaba la situación, otros veían errores en los procedimientos y los podían corregir para que fueran verdaderos. Mientras que en la primera se presentaba un razonamiento que no era lógico para ellos, ya que se mostraban como garantes representaciones gráficas que podían ser verdaderas, pero que al compararlas con las diferentes gráficas hechas por ellos no coincidían, lo cual les causo incertidumbre de no obtener una única solución.

Al realizar el análisis se identificaron dos niveles de argumentación, lo que permitió agrupar los diferentes argumentos generados en la actividad y así evidenciar que a través de la manipulación y experimentación de argumentos dados se puede enriquecer el conocimiento práctico que el estudiante tiene respecto a dicho proceso.

Otra forma de evidenciar la influencia que tiene el desarrollo de los dos niveles de argumentación en la clase de matemáticas, es la observación de los argumentos dados para evaluar en el momento del trabajo grupal y los presentados en la socialización, ya que los primeros se construyeron con el fin de entender y evaluar el argumento presentado en la actividad, pero en la discusión de los resultados dichos argumentos debían reafirmar o contradecir lo determinado por los otros grupos de estudiantes, de tal forma que estos argumentos de segundo nivel se convirtieron de nuevo en otros que debían ser evaluados y aceptados por la comunidad de la clase.

Cuando los estudiantes generaban argumentos de nivel 1 y 2, se resaltó la importancia de la visualización en la producción de estos, debido a que los estudiantes hicieron uso de sus habilidades como visualizadores, particularmente la de identificación, discriminación y memoria visual, las cuales permitieron reconocer los procesos de visualización IFI y VP en la interpretación, extracción de la información y producción de imágenes, esto se evidenció en los esquemas planteados para el procesamiento de la información.

Finalmente es posible afirmar que la pregunta de investigación tiene una respuesta afirmativa, ya que los estudiantes produjeron diferentes tipos de argumentos que permitieron justificar, validar, explicar y generalizar la solución de un problema o evaluar otros argumentos que le sean presentados, pues como ya se aclaró en el desarrollo del trabajo, fortalecer las prácticas argumentativas hace referencia a la producción de diversidad de argumentos.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler-Alvarez, N. (2014). Actividades Matemáticas : Conjeturar y Argumentar. *Números*, *85*, 75–90. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf

Arcavi, A. (1999). The Role of visual Representations in the Learning of Mathematics. In S. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21 st North American PME Conference* (pp. 55 – 80). Cuernavaca, Mexico.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–30). Belo Horizonte, Brazil.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación Matemática en el aula. *Premisa*, *7*(24), 23–29.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria*. Universidad Autónoma de Barcelona.

De Gamboa, G., Edo, M., & Planas, N. (2010). Argumentación matemática: Prácticas escritas argumentativas e interpretación. *SUMA*, (64), 35 – 44.

Ding, L., & Jones, K. (2009). Instructional strategies in explicating the discovery function of proof for lower secondary school students. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference : Proof and Proving in Mathematics Education Volume 1* (pp. 136 – 141). Taipei, Taiwan.

Eemeren, F. H. van, & Garssen, B. (2009). *Pondering on problems of* *argumentation*. University of Amsterdam, The Netherlands: Springer.

Eemeren, F. H. van, & Grootendorst, R. (1992). *Argumentación, comunicación y falacias. Una perspectiva pragma dialéctica* (Primera). New Jersey Hove and London: LEA Lawrence Erlbaum Associates.

Fiallo, J. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Universitat de Valéncia.

Gutierrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In *Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 44–59). Valencia.

Gúzman, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra*. Retrieved from http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/Documentos_2008/Visualizacion_Miguel_de_Guzman.pdf

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 73–78. http://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

Ibañes, M., & Ortega, T. (1998). Visual proofs in trigonometry. *AULA: Revista de Pedagogía de La Universidad de Salamanca*, (1996), 105–118.

Inglis, M., & Mejía, J. P. (2008). On the Persuasiveness of Visual Arguments in Mathematics. *Foundations of Science*, *14*(1-2), 97–110. http://doi.org/10.1007/s10699-008-9149-4

Inglis, M., & Mejía Ramos, J. P. (2008). On the Persuasiveness of Visual Arguments in Mathematics. *Foundations of Science*, *14*(1-2), 97–110. http://doi.org/10.1007/s10699-008-9149-4

León, O., & Calderón, D. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *4*(1), 5–21. Retrieved from http://www.clame.org.mx/relime/200101a.pdf

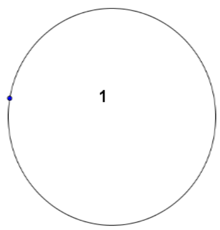
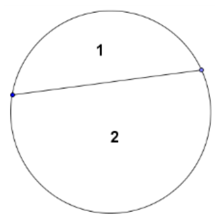
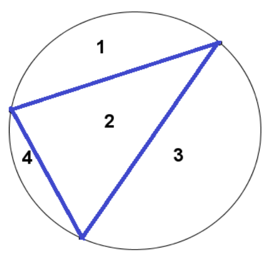
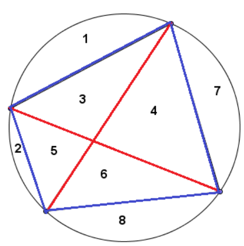
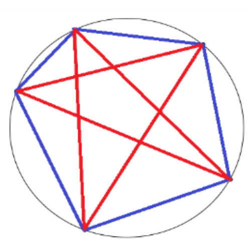
MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 word – the role of visualization in mathematics learning, *4*(1989), 457–464.

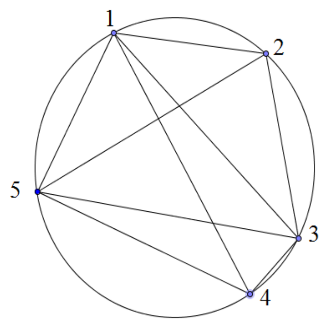
Samper, C., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. (E. Península, Ed.) (Traducción).

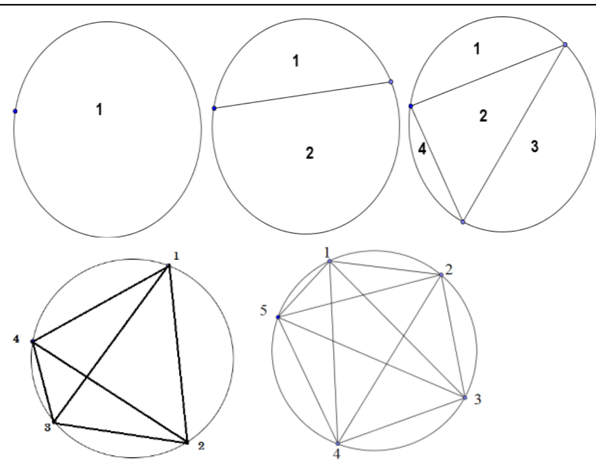
ANEXO A. Primera versión de la actividad.

FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS	CANTIDAD DE REGIONES	CANTIDAD DE DIAGONALES EN EL POLÍGONO INSCRITO
	1	$1= 2^0$	No hay polígono
	2	$2=2^1=2$	No hay polígono
	3	$4=2^2=2x2$	$0 = \frac{3(3-3)}{2}$
	4	$8=2^3=2x2x2$	$2=\frac{4(4-3)}{2}$
	5	$16=2^4=2x2x2x2$	$5=\frac{5(5-3)}{2}$

1 *AFIRMACIÓN: Con 5 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^4 regiones.*

Justificación		Espacio para el estudiante
1		☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

1 *AFIRMACIÓN: Con 5 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^4 regiones.*

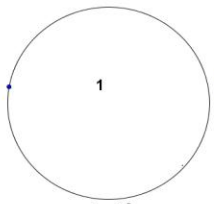
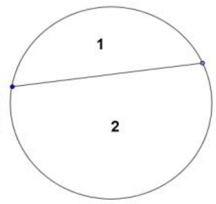
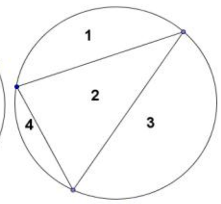
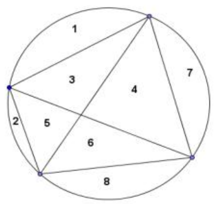
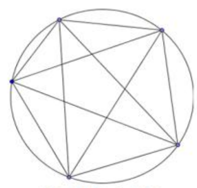
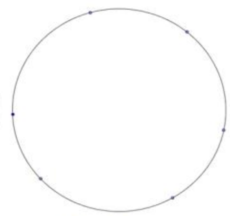
Justificación		Espacio para el estudiante
2		☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

1 *AFIRMACIÓN: Con 4 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^3 regiones.*

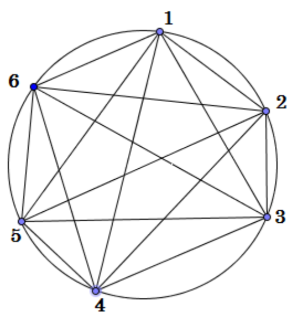
Justificación		Espacio para el estudiante
2	(tabla)	☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

NÚMERO DE PUNTOS	NÚMERO DE REGIONES
1	$1= 2^0$
2	$2=2^1=2$
3	$4=2^2=2x2$
4	$8=2^3=2x2x2$
5	$16=2^4=2x2x2x2$

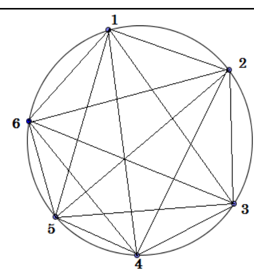
2 *AFIRMACIÓN: Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^5 regiones.*

	Justificación	**Espacio para el estudiante**
1	 $1 = 2^0$  $2=2^1=2$  $4=2^2=2x2$  $8=2^3=2x2x2$  $16=2^4=2x2x2x2$  $32=2^5=2x2x2x2x2$	☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

2 *AFIRMACIÓN: Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^5 regiones.*

	Justificación	**Espacio para el estudiante**
2		☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

2 *AFIRMACIÓN: Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 2^5 regiones.*

	Justificación	**Espacio para el estudiante**
3		☐ La justificación es definitivamente verdadera. ☐ La justificación es probable que sea cierta. ☐ La justificación presentada es falsa. **¿POR QUÉ?:**

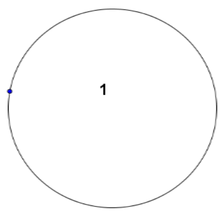
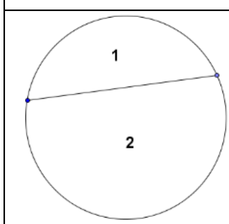
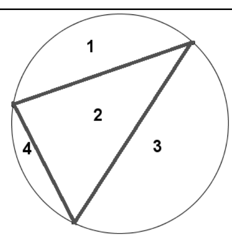
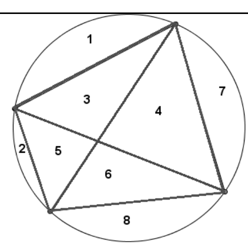
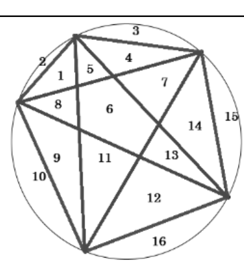
2. AFIRMACIÓN: En un polígono la cantidad de diagonales está dada por la expresión $\frac{n(n-3)}{2}$

AFIRMACIONES	JUSTIFICACIÓN
Con 7 lados, hay 14 diagonales.	
Con 8 lados, hay 20 diagonales.	
De un polígono de n lados, cada vértice es extremo de *n-3* diagonales.	

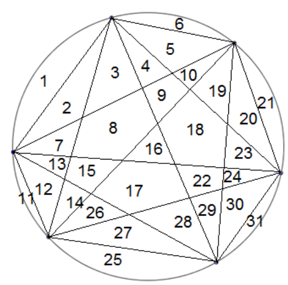
ANEXO B. Segunda versión de la actividad.

A continuación se presentaran una serie de afirmaciones relacionadas con una información, de cada una de ellas se presenta una justificación. Responda de la manera más clara posible a los interrogantes presentados.

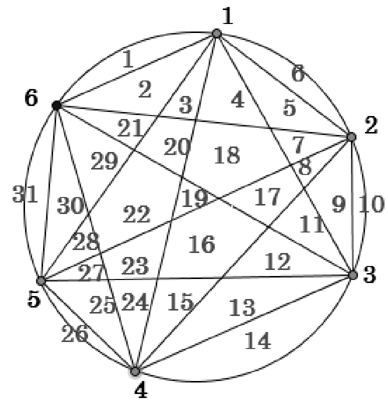
1. La siguiente tabla presenta la cantidad de regiones en la que queda dividida una circunferencia, cuando se trazan cuerdas con distintos puntos sobre ella

Figura	**Número De Puntos Sobre ⊙**	**Cantidad De Regiones**
	1	$1 = 2^0$
	2	$2=2^1=2$
	3	$4=2^2=2x2$
	4	$8=2^3=2x2x2$
	5	$16=2^4=2x2x2x2$

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Con 6 puntos en la circunferencia esta queda dividida en 32 regiones</td><td>
<table>
<tr><th>NÚMERO DE PUNTOS</th><th>NÚMERO DE REGIONES</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$1= 2^0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2=2^1=2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$4=2^2=2x2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$8=2^3=2x2x2$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$16=2^4=2x2x2x2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$32=2^5=2x2x2x2x2$</td></tr>
</table>
Si se tiene en cuenta la cantidad de regiones encontradas se puede relacionar con una potencia de dos, por lo tanto la tabla muestra que para 6 puntos en la circunferencia, esta queda dividida en 32 regiones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué relación existe entre la afirmación y la justificación presentada?</td></tr>
</table>

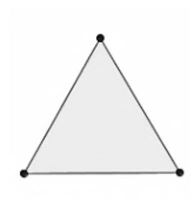
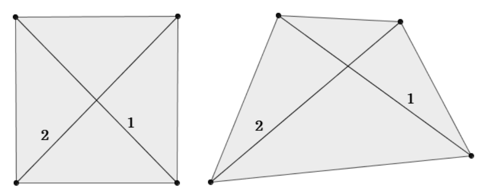
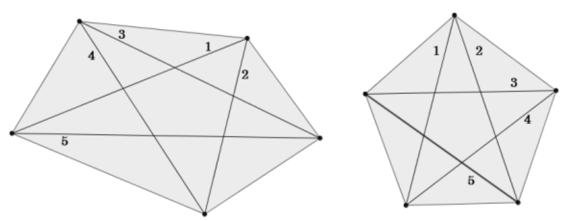
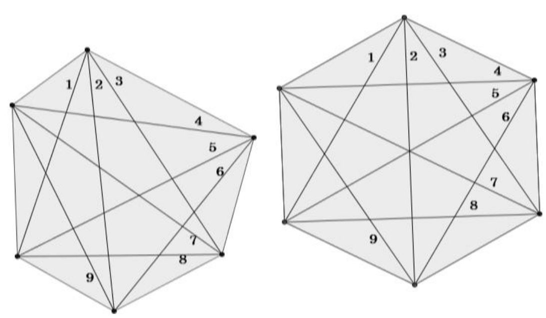
<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 32 regiones.</td><td>


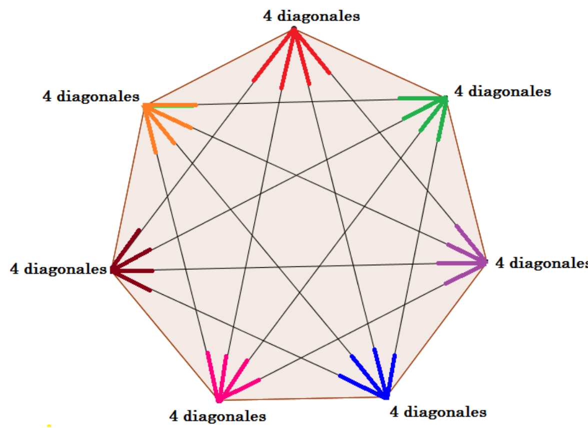
$32=2^5=2x2x2x2x2$
Esta afirmacion es verdadera porque así lo muestra la secuencia que encontramos y la cantidad de regiones que contamos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Considera que la justificación valida la afirmación? ¿Porque?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Con 6 puntos en la circunferencia, ésta queda dividida en 32 regiones.</td><td>

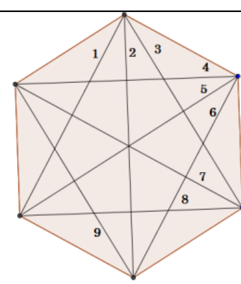
Esta afirmación es falsa porque la gráfica muestra que hay 31 regiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué relación existe entre la afirmación y la justificación presentada?</td></tr>
</table>

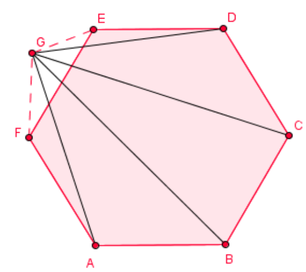
2. La siguiente tabla relaciona la cantidad de diagonales de un polígono

NÚMERO DE LADOS	FIGURA	CANTIDAD DE DIAGONALES
3	 NO HAY DIAGONALES	0 DIAGONALES
4	 2 DIAGONALES	2 DIAGONALES
5	 5 DIAGONALES	5 DIAGONALES
6	 9 DIAGONALES	9 DIAGONALES

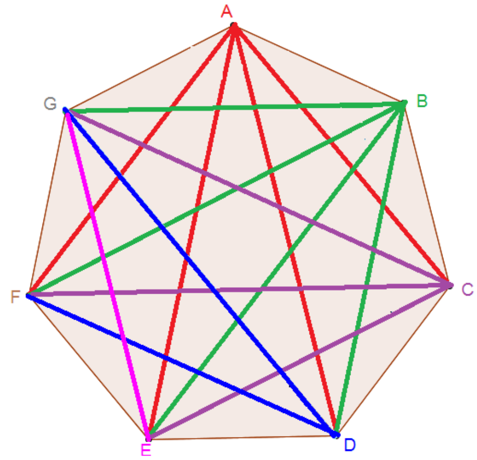
<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Todo polígono con 7 lados tiene 14 diagonales</td><td>

La figura muestra que por cada vértice se puede construir cuatro diagonales y como hay siete vértices entonces hay $4 \times 7 = 28$ diagonales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué relación existe entre la afirmación y la justificación presentada?</td></tr>
</table>

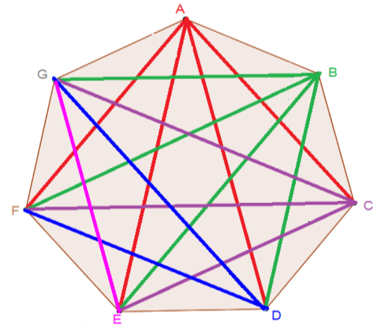
<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Todo polígono con 7 lados tiene 14 diagonales</td><td>

Polígono de 6 lados: 9 diagonales


Si construimos un polígono de siete lados a partir de un polígono de seis, bastaría con agregar un vértice y unir los nuevos lados como se muestra en la figura. Esto implica un aumento de 4 diagonales. Por tanto, si se tienen las 9 diagonales del polígono de seis lados más las 4 nuevas diagonales (9+4), entonces un polígono de siete lados tendría 13 diagonales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué relación existe entre la afirmación y la justificación presentada?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Todo polígono con 7 lados tiene 14 diagonales</td><td>

La cantidad de diagonales del polígono son 14, para poder ver esto hacemos un conteo ordenado de la siguiente forma:
1. Nombramos cada vértice del polígono con letras de diferentes colores.
2. Elegimos uno de los vértices para iniciar el conteo: Vértice A, y se trazan 4 diagonales de color rojo.
3. Vértice B, 4 diagonales color verde.
4. Vértice C, 3 diagonales color morado. (solo tres porque ya se había contado la que está en rojo)
5. Vértice D, 2 diagonales color azul. (solo dos porque ya se había contado una roja y una verde)
6. Vértice E, 1 diagonal color rosado. (solo una porque ya se había contado una roja, una verde y una morada)
7. Vértice F, 0 diagonales. (ninguna diagonal porque ya se habían contado todas)
8. Vértice G, 0 diagonales. (ninguna diagonal porque ya se habían contado todas)
9. Finalmente sumamos las diagonales encontradas en cada vértice dando como resultado: 4+4+3+2+1+0+0=14 diagonales</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué relación existe entre la afirmación y la justificación presentada?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Todo polígono con 8 lados tiene 20 diagonales</td><td>


<table>
<tr><th>Diagonales</th><th># de diagonales repetidas por vertice</th></tr>
<tr><td>rojas</td><td>0</td></tr>
<tr><td>verdes</td><td>0</td></tr>
<tr><td>moradas</td><td>1</td></tr>
<tr><td>azufes</td><td>2</td></tr>
<tr><td>rosadas</td><td>3</td></tr>
<tr><td>cafes</td><td>4</td></tr>
<tr><td>grises</td><td>4</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>14</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué relación existe entre la afirmación y la justificación presentada?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>Todo polígono con 8 lados tiene 20 diagonales</td><td>
<table>
<tr><th>Número de lados</th><th>Número de diagonales por conteo</th></tr>
<tr><td>3</td><td>0 +0+0= 0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1+1+0+0 =2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2+2+1+0+0 =5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3+3+2+1+0+0 =9</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4+4+3+2+1+0+0 = 14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5+5+4+3+2+1+0+0 = 20</td></tr>
</table>
Teniendo en cuenta el número de diagonales por vértice del polígono, siempre se tiene que:

Dos vértices tienen el número máximo de diagonales (ver números de rojo), para cada caso es el número de lados del polígono menos tres, ejemplo: polígono 4 lados, el número máximo de diagonales es 4 – 3 = 1
Dos vértices tienen 0 diagonales (ver números de azul)
El resto de vértices tienen como como número de diagonales la suma de los números naturales (ver números de negro).

Por tanto en un polígono de 8 lados se pueden encontrar 20 diagonales.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Consideras que la justificación presentada garantiza que la afirmación sea verdadera? ¿Por qué?</td></tr>
</table>

ANEXO C. Versión final del instrumento.

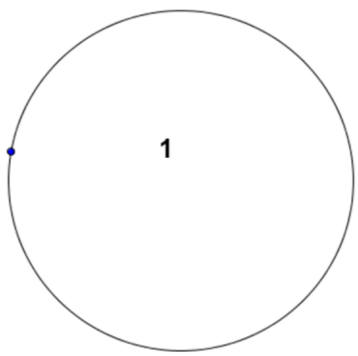
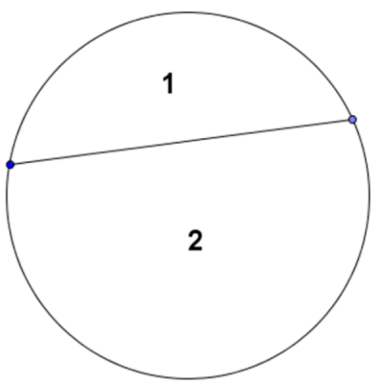
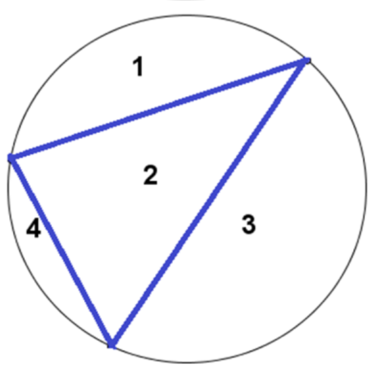
El siguiente material hace parte de la evidencia que se recolectará para el desarrollo de un trabajo de grado de Maestría. Indique si autoriza el uso de la información suministrada a través de escritos, audio y video.

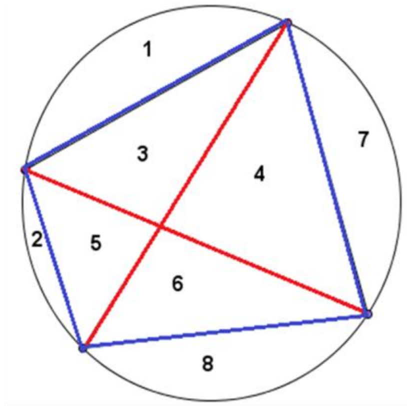
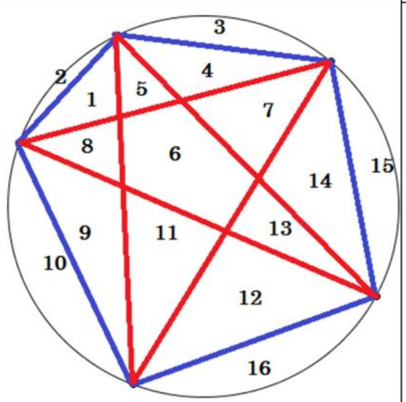
SI □ NO □

NOMBRES: ________________________________

En clase, la profesora Martha indica a sus estudiantes que organicen grupos de tres personas para realizar el siguiente taller:

1. La siguiente tabla presenta la cantidad de regiones en la que queda dividida una circunferencia cuando se trazan cuerdas, es decir, segmentos cuyos vértices son puntos de la circunferencia.

FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS SOBRE ⊙	CANTIDAD DE REGIONES
	1	$1= 2^0$
	2	$2=2^1=2$
	3	$4=2^2=2x2$

	4	$8=2^3=2x2x2$
	5	$16=2^4=2x2x2x2$

¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos?

A continuación se presentan algunas de las respuestas que dieron los grupos de trabajo

Los estudiantes Juan, Lucia y Pablo estaban resolviendo el problema y plantearon lo siguiente:

GRUPO 1

NÚMERO DE PUNTOS	NÚMERO DE REGIONES
1	$1= 2^0$
2	$2=2^1=2$
3	$4=2^2=2x2$
4	$8=2^3=2x2x2$
5	$16=2^4=2x2x2x2$
6	$32=2^5=2x2x2x2x2$

Si se tiene en cuenta la cantidad de regiones encontradas, estas se puede relacionar con una potencia de dos, es decir 2x2x2x2x… por lo tanto la tabla muestra que para 6 puntos en la circunferencia, esta queda dividida en 32 regiones.

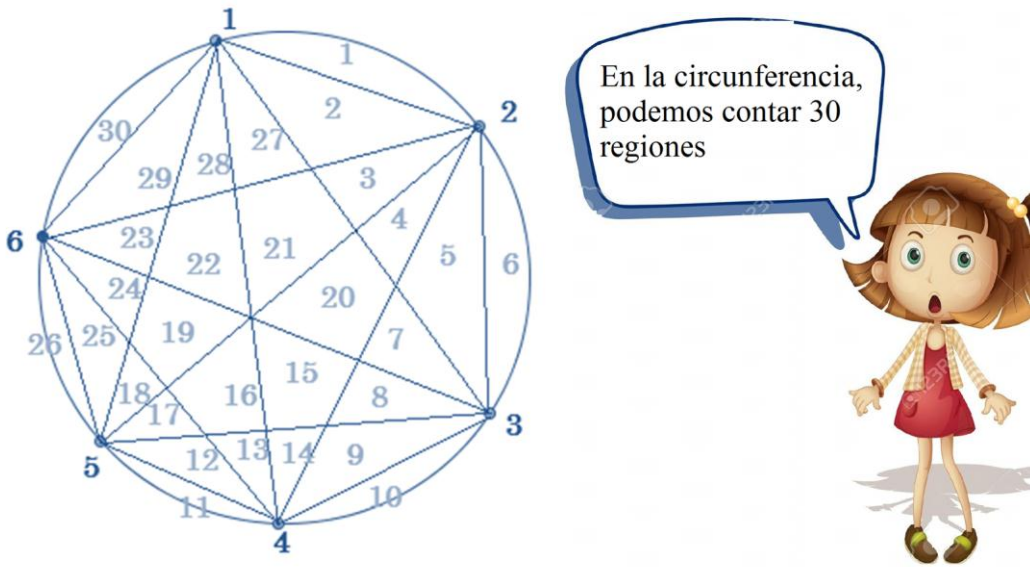
Finalmente, el grupo afirma que:

"Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 32 regiones"

¿Están de acuerdo con el grupo de Juan? ¿Por qué?

Pero, el grupo de Antonia, Alejandra y Matías, resolviendo el mismo ejercicio realizaron un dibujo y encontraron que:

GRUPO 2



En este caso el grupo afirma que:

"*Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 30 regiones"*

¿Están de acuerdo con el grupo de Antonia? ¿Por qué?

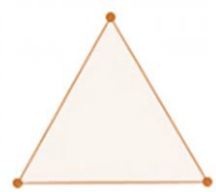
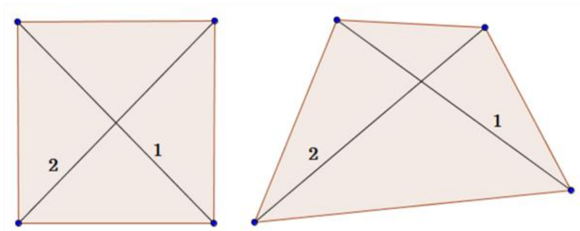
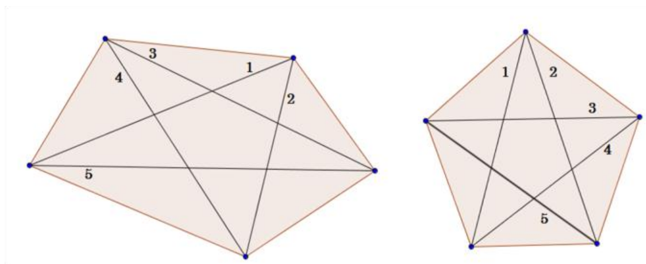
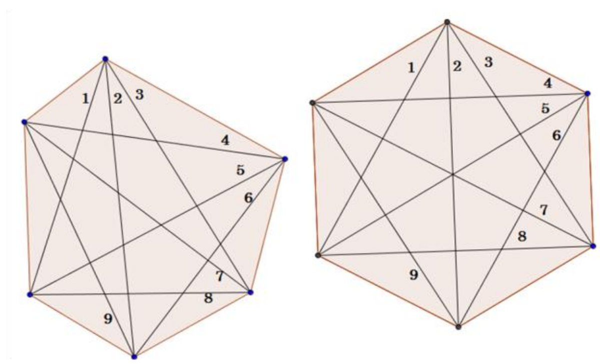
¿Con el dibujo realizado por ellos es suficiente para conocer la cantidad de regiones? ¿Por qué?

Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál de los dos grupos le daría la razón? ¿Por qué?

Teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas ¿ambas son correctas? ¿Solo una? ¿Ninguna? ¿Por qué?

En otra clase cinco grupos de estudiantes resolvieron el siguiente ejercicio:

1. La siguiente tabla relaciona la cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados.

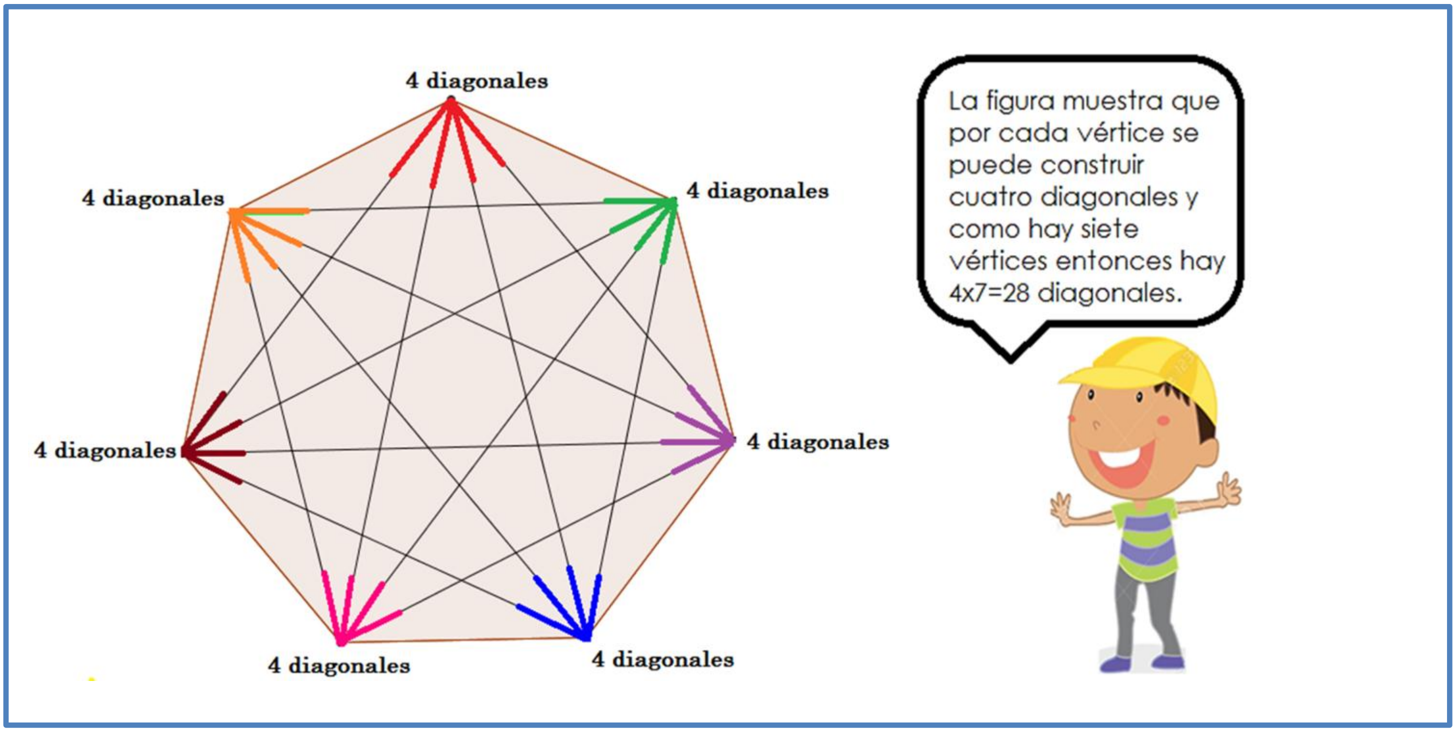
# DE LADOS	FIGURA	CANTIDAD DE DIAGONALES
3	 NO HAY DIAGONALES	0 DIAGONALES
4		2 DIAGONALES
5		5 DIAGONALES
6		9 DIAGONALES

¿Un polígono de siete lados cuántas diagonales tendrá?

A continuación se presentan algunas de las respuestas que dieron los grupos de trabajo

El grupo de Camilo, Andrea y Sofía, estaban resolviendo el problema y plantearon lo siguiente:

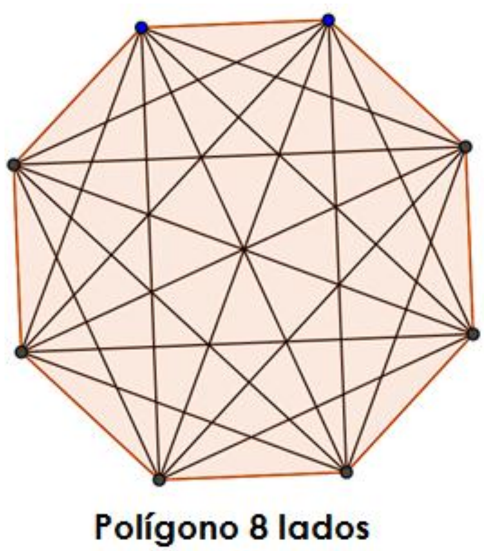
Grupo 1

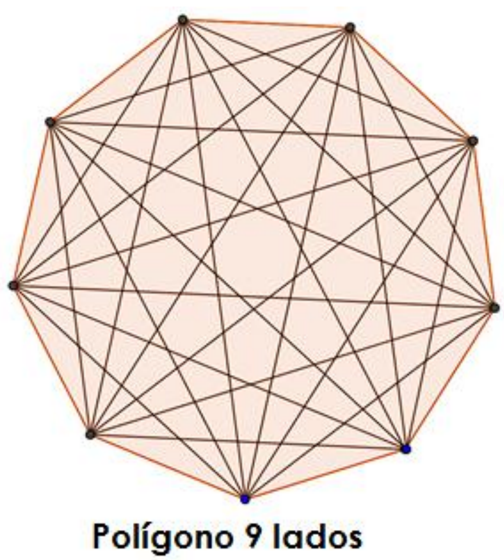


Ante lo cual concluyeron:

"*Un Polígono de siete lados tiene 28 diagonales"*

Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Camilo para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos.





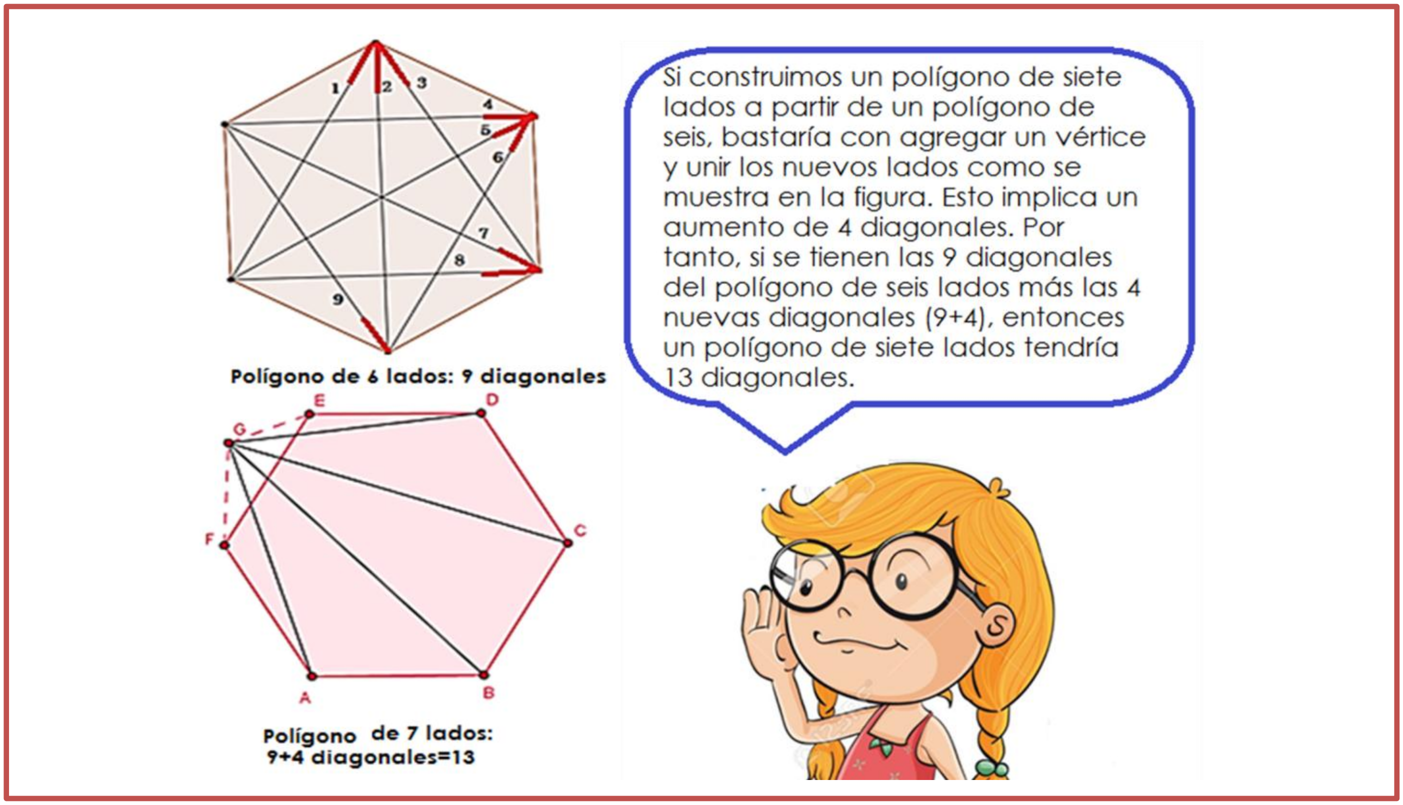
¿Están de acuerdo con el grupo de Camilo? ¿Por qué?

¿Están de acuerdo con el grupo de Leidy? ¿Por qué?

¿Están de acuerdo con el grupo de Samuel? ¿Por qué?

El grupo de Leidy, Johana y Santiago, plantearon lo siguiente para el mismo problema

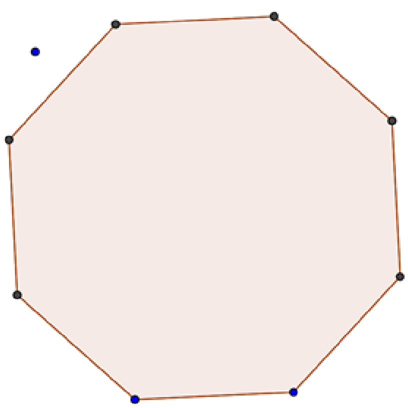
GRUPO 2



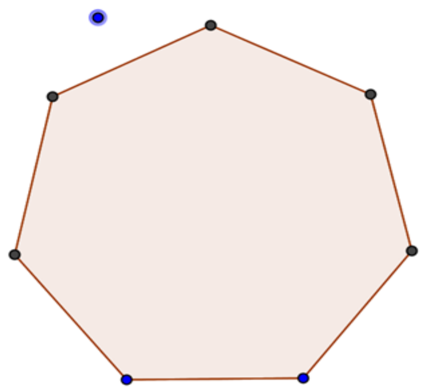
El grupo de Leidy, en conclusión afirma:

“*Un Polígono de siete lados tiene 13 diagonales”*

Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Leidy para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos.



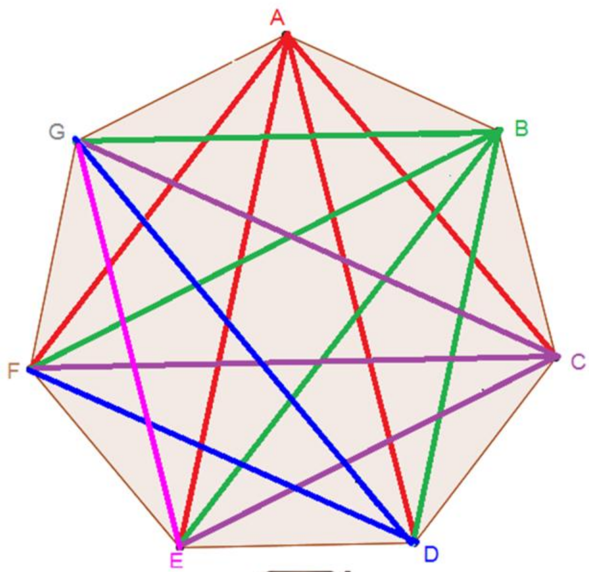
Polígono 9 lados



Polígono 8 lados

La respuesta dada por el grupo de Samuel, Karina y Diego, fue la siguiente:

GRUPO 3



En el polígono se cuentan 14 diagonales, para poder ver esto hacemos un conteo ordenado de la siguiente forma:

1. Nombramos cada vértice del polígono con letras
2. Elegimos uno de los vértices para iniciar el conteo: Vértice A, y se trazan 4 diagonales de color rojo.
3. Vértice B, 4 diagonales color verde.
4. Vértice C, 3 diagonales color morado. (Solo tres porque ya se había contado la que está en rojo)
5. Vértice D, 2 diagonales color azul. (Solo dos porque ya se había contado una roja y una verde)
6. Vértice E, 1 diagonal color rosado. (Solo una porque ya se había contado una roja, una verde y una morada)
7. Vértice F, 0 diagonales. (Ninguna diagonal, ya están contadas)
8. Vértice G, 0 diagonales.(Ninguna diagonal, ya están contadas)

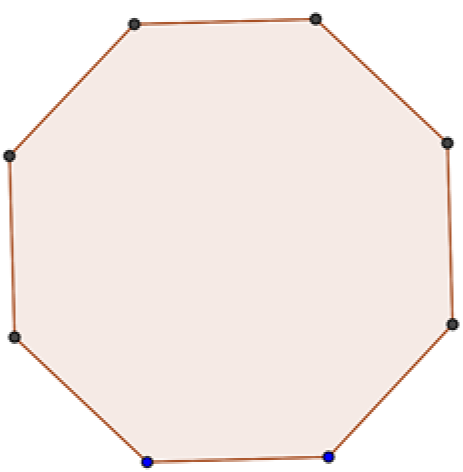
Finalmente sumamos las diagonales encontradas en cada vértice dando como resultado:

4+4+3+2+1+0+0=14 diagonales

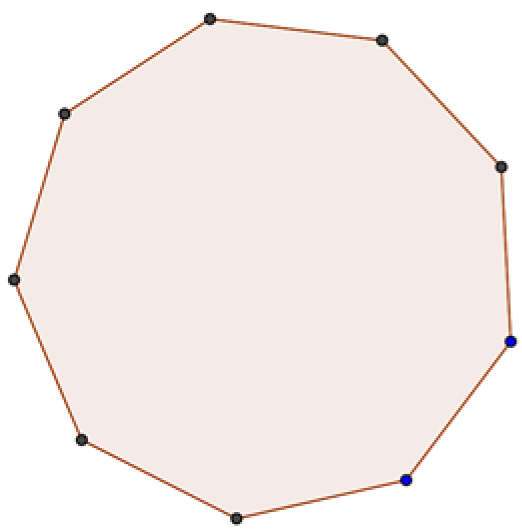
El grupo de Samuel afirma:

"*Un Polígono de siete lados tiene 14 diagonales"*

Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Samuel para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos.



Polígono 8 lados

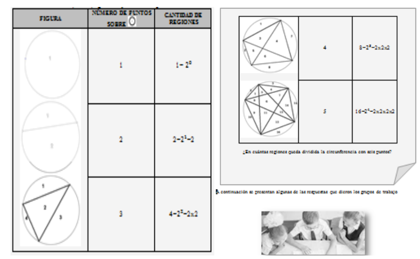
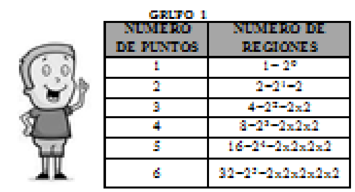
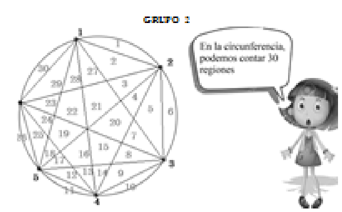


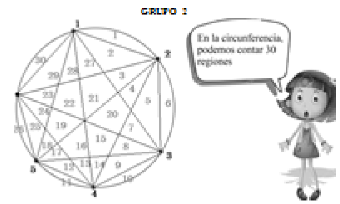
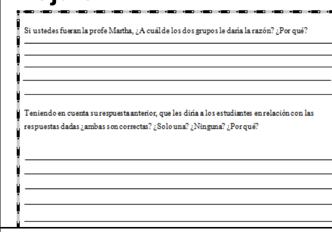
Polígono 9 lados

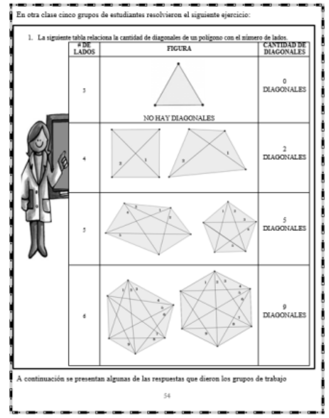
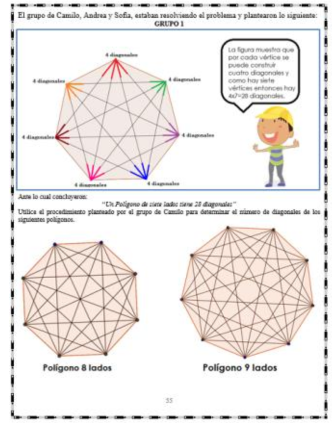
Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué?

Teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué?

ANEXO D. Tabla de resumen de la información recolectada.

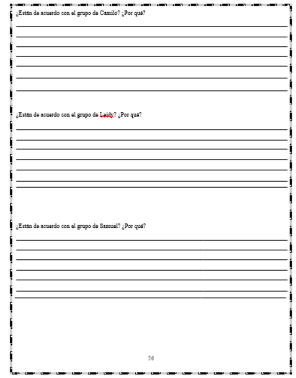
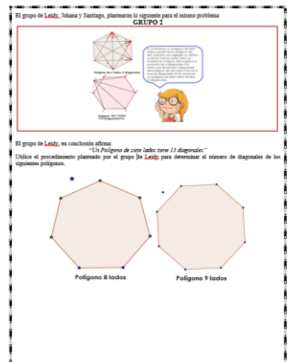
	Implementación Colegio La Salle Bogotá				
	Videos recolectados	**Duración**	**Actividad realizada**	**Registro escrito**	**Observaciones**
Sesión 1	Video 1. MVI_0195	23:45 min	Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de 2.	- **Hojas 1 -2** 	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
			Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucía y Pablo.	**-Hoja 3**  GRUPO 1 NUMERO DE PUNTOS / NUMERO DE REGIONES 1 / $1=2^0$ 2 / $2=2^1=2$ 3 / $4=2^2=2x2$ 4 / $8=2^3=2x2x2$ 5 / $16=2^4=2x2x2x2$ 6 / $32=2^5=2x2x2x2x2$	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
			Revisión de **1.2** Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	**-Hoja 4**  	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo

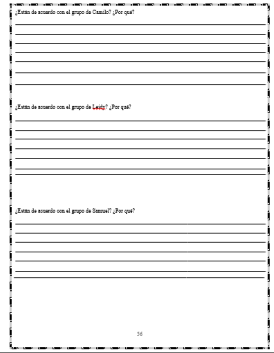
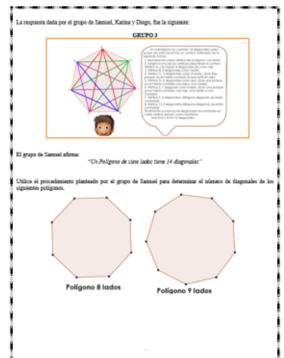
	Video 2. MVI_0196	11:32 min	Respuesta **1.2** Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	**Hoja 4** 	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
			Cierre de actividad 1 (1.1 y 1.2)	**Hoja 5**  Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál de los dos grupos le daría la razón? ¿Por qué? Teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas ¿ambas son correctas? ¿Solo una? ¿Ninguna? ¿Por qué?	
	Video 3. MVI_0197	14:38 min	Socialización actividad 1 (1.1 y 1.2)	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 4. MVI_0198	4:21 min	Finalización de socialización actividad 1.	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
Sesión 2	Video 5. MVI_0201	23:45 min	Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados.	**Registro escrito:** Hoja 6	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo

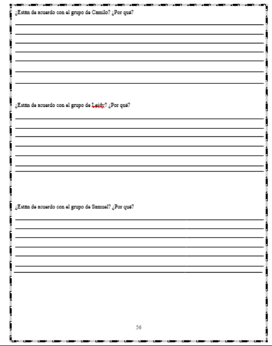
<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td>
En otra clase cinco grupos de estudiantes resolvieron el siguiente ejercicio:
1. La siguiente tabla relaciona la cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados.
<table><tr><th># DE LADOS</th><th>FIGURA</th><th>CANTIDAD DE DIAGONALES</th></tr><tr><td>3</td><td>NO HAY DIAGONALES</td><td>0 DIAGONALES</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>2 DIAGONALES</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>5 DIAGONALES</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>9 DIAGONALES</td></tr></table>A continuación se presentan algunas de las respuestas que dieron los grupos de trabajo
54</td><td></td></tr>
<tr><td>Actividad: 2.1 Grupo de Camilo, Andrea y Sofía</td><td>Registro escrito: Hoja 7

El grupo de Camilo, Andrea y Sofía, estaban resolviendo el problema y plantearon lo siguiente:
GRUPO 1

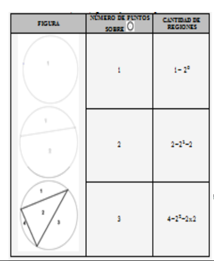
Ante lo cual concluyeron:
"Un Polígono de siete lados tiene 28 diagonales"
Utilica el procedimiento planteado por el grupo de Camilo para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos.

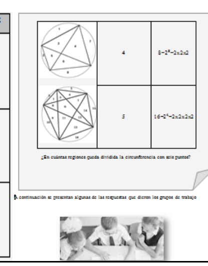
55</td><td>Población grabada:
Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo</td></tr>
<tr><td>Pregunta Final actividad 2.1</td><td>Registro escrito: Hoja 8 (respuesta a primera pregunta)</td><td>Población grabada:
Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo</td></tr>
</table>

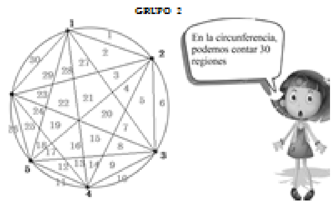
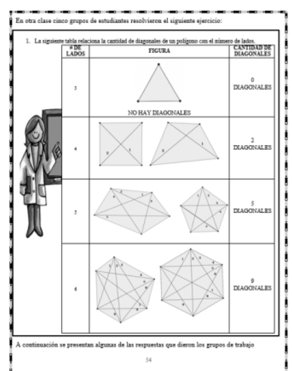
				 ¿Están de acuerdo con el grupo de Camilo? ¿Por qué? ¿Están de acuerdo con el grupo de Leidy? ¿Por qué? ¿Están de acuerdo con el grupo de Samuel? ¿Por qué? 56	
			Actividad: 2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago	**Registro escrito:** Hoja 9  El grupo de Leidy, Johana y Santiago, plantearon lo siguiente para el mismo problema GRUPO 2 El grupo de Leidy, en conclusión afirma: *"Un Polígono de siete lados tiene 13 diagonales"* Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Leidy para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos. Polígono 8 lados Polígono 9 lados	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
			Actividad: Pregunta Final actividad 2.2	**Registro escrito**: Hoja 8	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo

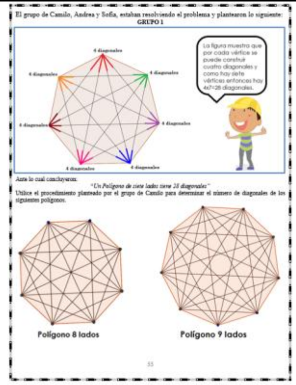
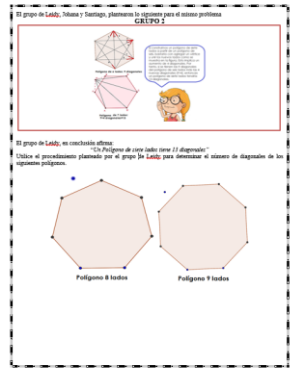
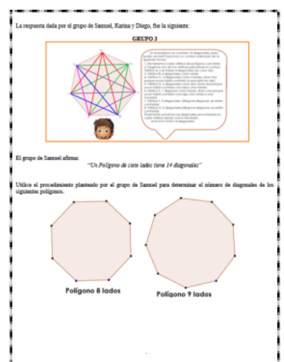
				 ¿Están de acuerdo con el grupo de Camilo? ¿Por qué? ¿Están de acuerdo con el grupo de Leidy? ¿Por qué? ¿Están de acuerdo con el grupo de Samuel? ¿Por qué?	
			Actividad: 2.3 Grupo de Samuel, Karina y Diego	**Registro escrito**: Hoja 10  La respuesta dada por el grupo de Samuel, Karina y Diego, fue la siguiente: GRUPO 3 El grupo de Samuel afirma: *"Un Polígono de siete lados tiene 14 diagonales"* Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Samuel para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos. 	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo
	Video 6. MVI_0202	7:47 min	**Actividad**: Pregunta final actividad 2.3	**Registro escrito**: Hoja 8	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo

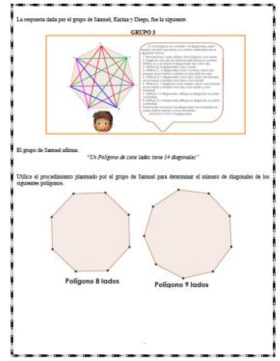
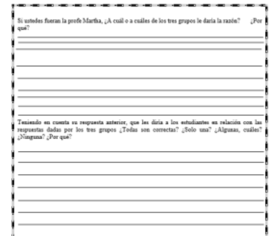
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Actividad: Preguntas cierre de actividades 2.1, 2.2 y 2.3</td><td>Registro escrito: Hoja 11

</td><td>Población grabada:
Trabajo grupal entre Carlos, Juan Diego y Camilo</td></tr>
<tr><td></td><td>Video 7. MVI_0205</td><td>7:30 min</td><td>Socialización actividad 2</td><td>Reportes de los estudiantes</td><td>Socialización</td></tr>
<tr><td colspan="6">IMPLEMENTACIÓN UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</td></tr>
<tr><td></td><td>Video 1. M2U00008</td><td>7:07 min</td><td>Tabla de relaciones - actividad 1</td><td>


</td><td>Población grabada:
Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés</td></tr>
</table>

	Video 2. M2U00009	8:02 min	Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo. Elaboración de representación gráfica para evaluar el valor de verdad de 1.1		**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés
	Video 3. M2U00010	7:33 min	Culminación de actividad 1.1 y Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.		**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés
	Video 4. M2U00011	9:43 min	Socialización actividad 1.1 y 1.2 con todos los estudiantes del curso.	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 5. M2U00012	1:53 min	Actividad propuesta en la socialización evaluación de gráficas de polígonos de 7 y 8 lados.	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 6. M2U00013	7:10 min	Continuación análisis de la actividad propuesta por la profesora en el video anterior.	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 7. M2U00014	2:34 min	Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados y evaluación de 2.1		**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés

				 El grupo de Camilo, Andrea y Sofía, estaban resolviendo el problema y plantearon lo siguiente: **GRUPO 1** Ante lo cual concluyeron: *"Un Polígono de siete lados tiene 28 diagonales"* Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Camilo para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos. 55	
	Video 8. M2U00015	23:38 min	2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago	 El grupo de Leidy, Johana y Santiago, plantearon lo siguiente para el mismo problema **GRUPO 2** El grupo de Leidy, en conclusión afirma: *"Un Polígono de siete lados tiene 13 diagonales"* Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Leidy para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos. 	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés
	Video 9. M2U00016	2:28 min	Lectura de 2.3	 La respuesta dada por el grupo de Samuel, Karina y Diego, fue la siguiente: **GRUPO 3** El grupo de Samuel afirma: *"Un Polígono de siete lados tiene 14 diagonales"* Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Samuel para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos. 	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés

	Video 10.M2U00017	5:23 min	Evaluación de garante 2.3	 La respuesta dada por el grupo de Samuel, Karina y Diego, fue la siguiente: GRUPO 3 El grupo de Samuel afirma: *"Un Polígono de siete lados tiene 14 diagonales"* Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Samuel para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos. Polígono 8 lados Polígono 9 lados	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés
	Video 11.M2U00018	16:13 min	Finalización actividad 2	 Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué?	**Población grabada:** Trabajo grupal entre Iván, Wilson y Andrés
	Video 12.M2U00019	1:00 min	Inicio de socialización actividad 2	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 13.M2U00020	38:38 min	Socialización actividades 2.1, 2.2 y 2.3	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 14.M2U00021	16:25 min	Socialización actividades 2.1, 2.2 y 2.3	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 15.M2U00022	0:44 min	Socialización actividad 2,3	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 16.M2U00042	10:41 min	Continuación socialización actividad 2.3- Análisis de fórmulas	Reportes de los estudiantes	**Socialización**
	Video 17.M2U00043	13:57 min	Socialización de las tres fórmulas encontradas para los procesos asociados a los garantes 2.1 - 2.2 - 2.3	Reportes de los estudiantes	**Socialización**

ANEXO E. Tabla de visualización y argumentación.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES VISUALIZACIÓN	OBSERVACIONES ARGUMENTACIÓN	ANOTACIONES Y COMENTARIOS
1.1 video 1 - 08	Búsqueda de explicaciones y relaciones 1. Est 1.como una cuerda está formada por dos puntos entonces, de ahí vienen las potencias de dos. 2. Est.1 "pensemos cuantas cuerdas aumenta un solo punto… una cuerda aumenta dos, ósea las potencias de dos"		-El est 1. Intenta centrar la atención en el número de cuerdas que se forman de acuerdo a la cantidad de puntos. "con cuatro puntos hay 6 cuerdas" *Búsqueda de garante.* - Los estudiantes a partir de la gráfica con cinco puntos grafican el sexto punto y trazan las cuerdas, cuentan las regiones y se dan cuenta que los valores de la tabla y la cantidad de regiones no son los mismos (sensación de desconcierto al comparar)
1.1 video 2-09		Conclusión: si las cuerdas diagonales no concurren, entonces aparece una región de más en la circunferencia. Datos: circunferencia con puntos inscritos y regiones formadas entre las cuerdas, para el caso de seis puntos sobre la circunferencia, con un posible dato de 32 regiones. Garante: representación gráfica que permite comparar cuando las cuerdas diagonales concurren con otra cuerda en la que esto no ocurre y aparece una nueva región.	EL est 1. Grafica la circunferencia con seis puntos te tal forma que se forme un polígono regular inscrito, sin embargo observa que las cuerdas diagonales concurren en un mismo punto, y que si uno de estos se moviera aparece una región oculta en el centro de la gráfica. "si los puntos no son concurrentes. - La docente Nubia se acerca al grupo para indicarles que continúen con la actividad, sin embargo el est 1 indica que aún está probando por un método grafico la actividad 1.1
1.2 video 3-10	La grafica no es suficiente para conocer la cantidad de regiones, porque cuando hay cuerdas concurrentes no es posible ver todas las regiones existentes. Por tanto cuando tres cuerdas concurren en un mismo punto, existe una región solapada.		
Socialización			
S1 video 4 - 11		Un grupo dice que la afirmación 1.1 y 1.2 son falsas, que depende, ya que su respuesta puede ser relativa. El grupo del Est 1. Afirma que 1.1 y 1.2	La docente al ver que sus estudiantes empiezan a centrar la atención en la afirmación del grupo 1 respecto las

		no son verdaderas pues la tabla no se corresponde con la cantidad de regiones que se cuentan, además informan que el número de regiones varia y depende si tres de sus cuerdas diagonales concurren o no, pues puede haber una región escondida.	regiones ocultas por los puntos concurrentes, les solicita que dibujen más puntos sobre la circunferencia (7,8,9) para así intentar encontrar una relación entre la cantidad de puntos concurrentes y el número de regiones
S1 video 5-12	El est 1. Toma el caso de cuatro rectas, con tres concurrentes se perdería dos espacios, para ello realiza una gráfica y "mueve" una de las cuerdas para mostrar que su afirmación se cumple. - Primero el observa los posibles casos de concurrencia	- Intenta explicar y mostrar que su afirmación es cierta por medio de una representación.	Teniendo en cuenta que están realizando circunferencias con7 y 8 puntos, ya no se centra la atención en relacionar la tabla con los gráficos, sino en justificar por qué se obtienen resultados diferentes en las gráficas. - Se observa que en este caso el estudiante observa y describe una posible regularidad (visualización) y luego para "mostrar- demostrar-justificar-explicar" hace uso de otro grafico generado por el estudiante (prueba visual- propia)
S1 video 6 - 13			- Grupo 1 retoma la idea de que la cantidad de regiones puede estar dada por las potencias de 2, es decir que miraran si se cumple el 2^7
2.1 video 7 - 14	Est 2. (expansión-pelo corto)"Siempre hay tres puntos que no se cuentan para trazar las diagonales, el vértice y los dos puntos de los lados"		- Los estudiantes del grupo 1 observan la tabla inicial del punto dos y la actividad 2.1, sin embargo centran la atención en el número de diagonales que se pueden obtener por punto.
2.1 y 2.2 video 8 - 15	- Analizan que de cada dos vértices se pueden trazar diagonales, a excepción de los dos vértices contiguos, ya que estos segmentos serian lados y no diagonales, por tanto habrán tres puntos que no se cuentan para trazar diagonales. - De la afirmación 1.1, los estudiantes identifican la forma de contar el número de diagonales agregando un nuevo vértice y para ello proponen una conjetura para la cantidad de diagonales de acuerdo su forma de conteo.	-El grupo 1 no está de acuerdo con la afirmación realizada para la actividad 2.1, ya que ellos aseveran que el conteo se está mal realizando, porque están contando dos veces las mismas diagonales, entonces para que quedaran bien contadas sería necesario dividir la cantidad de diagonales contadas por *camilo* en dos. - De la afirmación 2.2, los estudiantes del Grupo 1 indican que es falsa, ya que el procedimiento de contar agregando un vértice puede llegar a ser correcto, le hace falta contar el lado del anterior polígono, que ahora será diagonal, para ello hacen uso de la representación gráfica que ellos dibujan y la comparan con la del ejercicio.	- Se observan dos fines de la visualización: I) conjeturar y II) justificar o contra-argumentar una de las afirmaciones dadas para el ejercicio.

2.3 video 9-16			Los estudiantes del grupo 1, hacen lectura de la afirmación y del garante presentado a esta, comienzan a trazar las diagonales de acuerdo a la técnica de conteo.
2.3 video 10 - 17	- El est 2. Observa una regularidad en la forma de contar el número de diagonales y propone una expresión que permite calcular el número de diagonales, el afirma " ahora vamos a validarla para el de nueve lados" traza las diagonales, prueba su conjetura para 9 lados "listo, si se cumple" - De la actividad 2.2 reconocen algunos elementos importantes para poder calcular el número de diagonales, el primero es que se necesita del polígono anterior para poder calcular el número de diagonales del nuevo polígono y la segunda hace referencia al lado de se convierte en diagonal y no se cuenta.	-El est 1. Afirma que está de acuerdo con el garante presentado, ya que es un método efectivo para contar las diagonales una por una de una forma organizada y sin repetir. Además destaca el uso de los colores para distinguir la cantidad de diagonales que se pueden trazar de cada vértice, ya que facilita su observación. - Para justificar por qué la afirmación de la actividad 2.1 estaría incorrecta o "incompleta" los estudiantes afirman que les falto dividir en dos, porque (garante) una diagonal está formada por dos puntos como extremos y en el ejercicio se estaría contando la misma diagonal por cada extremo, es decir dos veces.	- En este caso se presentan de nuevo las dos funciones de la visualización, para generar conjeturas y en este caso validarla por medio de ejemplos gráficos, y la visualización para argumentar y apoyar el garante presentado para el ejercicio 2.3. - Cuando empiezan a comparar las actividades 2.1, 2.2, 2.3 los estudiantes afirman que solo la 2.3 es correcta, a la 2.1 y 2.2 no son totalmente incorrectas, sino que " les falta algo" - El est 1. Hace uso de la definición de segmento para justificar por qué la afirmación 2.1 sería incorrecta
socialización			
2 video 10 - 19			- Estudiantes de diferentes grupos pasan al tablero y dibujan diferentes polígonos para comenzar con la socialización.

ANEXO F. Tabla de visualización, argumentación y evaluación.

SESIÓN 1 U.P.N.					
Información recogida	**Afirmación del video “ ” información textual … pausa en el discurso**	**visualización (VP) - (IFI)**	**Argumentación -Datos, garantes y conclusión**	**Evaluación de argumentos**	**Observación**
Vídeo 1 M2U00008 **Actividad:** Tabla de relaciones - actividad 1 **Registro escrito:** Hojas 1 -2 **Actividad:** Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucía y Pablo. **Registro escrito:** Hoja 3 **Descripción:** Revisión de 1.1 Juan, Lucía y Pablo. Leen la información presentada en la actividad y luego responden la pregunta: ¿Están de acuerdo con el grupo de Juan?, ¿Por qué?	Los estudiantes leen la información de 1.1 en busca de dar respuesta a la pregunta planteada, para ello se apoyan de la tabla de relaciones planteada. 00:17 “¿Están de acuerdo con el grupo de Juan? ¿Por qué? Pues sí claro, porque cuánto es 32, cada cuerda forma dos, por eso va el 2, potencias de 2, (piensan y dicen según lo presentado en la tabla cuanto daría para 4, 5 y 10 puntos)” 01:29 Wilson: “si la dibujamos, o sea la veracidad que debemos poner para decir si estamos de acuerdo con Juan por esto, esto y esto o no estamos de acuerdo por tal, tal y tal” 01:49 “cada dos puntos hay una cuerda y cada cuerda determina dos regiones, entonces por cada punto que usted le sume de más va formar otro plano… (Siguen observando, para ello recurren a la tabla de relaciones presentada)…Un punto cuántas cuerdas aumentan,… el número de puntos más uno y una cuerda aumenta de a dos, ósea potencias de dos, bueno listo ahora si respondamos, ¿están de acuerdo con el grupo de Juan?, serían 32?” 03:40 “Iván dice, (observan la imagen presentada para 5 puntos, pero le agregaron un punto más y	**Inferencia:** *Los estudiantes infieren información que le permite comprender un posible comportamiento algebraico con la secuencia gráfica, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Los estudiantes revisan la tabla y buscan posibles relaciones entre la cantidad de puntos y las potencias de 2, con ello intentan establecer un comportamiento algebraico, sin embargo no llegan a una respuesta definitiva, porque al revisar la gráfica dudan de lo que están haciendo*	**Inferencia:** *Inferencia: se plantea un argumento para justificar y dar respuesta a la pregunta ¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia?* ***Justificación:*** *Iván plantea que para seis puntos se obtienen 32 regiones, lo cual lo deduce de la secuencia algebraica que se les presenta en 1.1, de ello el garante que en ese momento tiene para afirmar lo anterior es la tabla 1.1*	**Inferencia**: Los estudiantes dudan del garante algebraico. Ellos concluyen inicialmente que el número de regiones era 32 ***Justificación:*** ***Ell****os intentan concluir que el número de regiones es 32 y lo validan en la secuencia algebraica presentada, pero a su vez realizan la representación gráfica y esto les genera duda respecto de lo que están afirmando.*	Existe una indecisión sobre cuál de los garantes es el verdadero. Los estudiantes inicialmente realizan un proceso de visualización asociado al proceso IFI, para establecer un posible comportamiento algebraico, luego generan un argumento basado en dicho comportamiento, pero finalmente dudan de esto, puesto que realizan las representaciones gráficas y obtienen un resultado diferente, de lo anterior se concluye que en este apartado no establecen una conclusión final.

	en ella están dibujando la de seis puntos) vea lo que está pasando, cada semiplano lo está dividiendo en 2 otra vez, cada semiplano no sino cada pedacito, (siguen revisando la gráfica)" 06:10 Iván "Pero si yo estoy de acuerdo porque la sucesión algebraica es así, Andrés dice: pues argumentemos haber" 06:44 "Me dio 31, ¿31? Iván dice: contemos como los estoy contando yo haber, yo organice por secciones…"				
Video 2. M2U00009 **Actividad:** Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucía y Pablo. **Registro escrito:** Hoja 3 **Actividad:** Elaboración de representación gráfica para evaluar el valor de verdad de 1.1 **Registro escrito:** Anexo realizado por el grupo de estudiantes para 1.1 **Población grabada:** Iván, Wilson y Andrés **Descripción:** Los estudiantes dibujan en una hoja anexa las cuerdas posibles en una circunferencia con seis puntos, para ello trazan un	Uno de los estudiantes está graficando con regla y compás las posibles cuerdas en una circunferencia con seis puntos sobre ella, sus otros dos compañeros observan este procedimiento. Iván 1:54 "O sea que por cada dos puntos sale una cuerda" El estudiante termina de contar las regiones de la gráfica realizada por ellos y realiza el siguiente comentario Wilson: 3:09 "ahí ya, es que aquí no va por esta parte (señala la gráfica de la Hoja 1 donde habían tenían 31 regiones)" Iván "yo también creo lo mismo" Wilson: "ésta nos quedó mal, porque son 30" Iván "qué pasa si este punto de acá usted lo hace más hacia allá (el estudiante simula mover el punto con el lápiz, luego traza con color verde la nueva cuerda) es que quiero que vean esto (…) si usted traza está así, esto del medio (indica la región escondida en el punto de intersección de las cuerdas) ya no se va" Wilson: "o sea que si son concurrentes hay un espacio en la	***Inferencia:*** *se observa que el estudiante determina características a partir de la gráfica, esto se asocia a IFI* ***Justificación:*** *Al trazar las cuerdas de la circunferencia los estudiantes observan que por cada dos puntos se obtiene una cuerda, esto hace parte de una de las características que se infieren a partir de la observación de la gráfica.* _________________ _ **2** ***Inferencia:*** *Se observa un proceso Vp, debido a que un estudiante le comunica a sus compañeros una idea que tiene a través de*	***Inferencia:*** *se establece un argumento que permite explicar la diferencia entre dos representaciones, el garante es son dos representaciones gráficas realizadas por los estudiantes.* ***Justificación:*** *los estudiantes concluyen que* "si son concurrentes hay un espacio en la mitad (oculta)" el garante corresponde a la representación gráfica inicial y la gráfica resultante de la transformación al mover el punto, la cual había sido simulada antes con movimientos.		**Al realizar las diferentes representaciones y encontrar distintos resultados no les produce certeza ninguna de los tres resultados (tabla 1,1 =32 regiones - Gráfica de circunferencia con hexágono regular inscrito = 30 regiones - Gráfica de circunferencia con polígono no regular inscrito = 31 regiones)**

hexágono regular. En esta gráfica ellos cuentan 30 regiones, un valor distinto al obtenido en la circunferencia trazada en el taller. Al compararlas se dan cuenta que el caso del polígono regular hay tres cuerdas que concurren, lo cual escondería una región más, por tanto deciden mover uno de los puntos y trazar con color verde las posibles cuerdas, al contarlas de nuevo, corroboran que se encuentran 31 regiones como lo habían predecido anteriormente. La profesora se acerca al grupo a preguntar si estaban de acuerdo o no con el grupo 1.1 y los estudiantes manifiestan que aún no lo saben, ella les sugiere escribir esto en su respuesta e indicar el porqué.	mitad (…) Entonces este punto varía" El estudiante termina de trazar con color las cuerdas que se obtienen con el nuevo punto que graficaron y borran las que se tenían en el polígono regular.	*movimientos en el plano con lápiz, con el fin de mostrar una transformación de la gráfica inicial.* ***Justificación:*** *Cuando los estudiantes comparan la gráfica encuentran en una de ellas se intersecan tres cuerdas en un mismo punto (aunque los estudiantes no lo dicen textualmente esto se puede ver cuando lo señalan en las gráficas), por tanto predicen que si el punto se moviera aparecería la región de diferencia entre las dos gráficas, lo cual los lleva a representar esta idea y trazan las nuevas cuerdas con color verde.*			
	La profesora se acerca al grupo y les pregunta 6:00 ¿entonces están de acuerdo o en desacuerdo? Iván: "todavía no sabemos, creo que en desacuerdo" Profesora: ¿por qué? Wilson: :porque nos falta un espacio Profesora: "De una vez les voy a decir qué pasó en otro grupo (entrega hoja de 1,2), pero deberían responder las preguntas de cada hoja. ¿Están o no, de acuerdo con el grupo de juan (1.1)? Iván: Estamos probando a ver si es verdad o no.			***Inferencia:*** *se Explicita que no tienen certeza de la validez del garante 1.1* ***Justificación:*** *los estudiantes manifiestan que aún no tienen certeza sobre el argumento porque se encuentran evaluando gráficamente y obtienen resultados diferentes, particularmente entre*	

	Profesora: ¿cómo lo están probando? Iván: Por método gráfico Registro escrito hoja 3: "En este momento, no tenemos la certeza para confirmar lo que dice el grupo de Juan, lo validamos de manera gráfica sin un resultado.			*las dos representaciones gráficas realizadas, ya que les "falta una".*	
Video 3. M2U00010 **Actividad:** Culminación de actividad 1.1 y Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. **Registro escrito:** Hoja 4 **Población grabada:** Iván, Wilson y Andrés **Descripción:** Los estudiantes terminan de responder las preguntas de 1.1, sin embargo continúan estudiando la relación encontrada anteriormente "al intersecarse tres cuerdas se encuentra una región oculta", luego leen la afirmación presentada en 1.2 e identifican que el garante que se muestra corresponde a una de las representaciones gráficas realizada por ellos, por tanto dan respuesta a la pregunta de acuerdo a lo observado.	Los estudiantes están terminando de responder las preguntas para 1.1 Iván: 0:00 "si hay tres concurrentes y usted mueve este punto acá, ya no habrían tres concurrentes y no se van a abrir más espacios si se coloca el punto en diferente posición, porque solo se pueden tener tres concurrentes en donde se omite un espacio, ahora miremos por ejemplo la de 5, acá no hay tres concurrentes, entonces los espacios si están bien" Wilson: "Básicamente la verde es esta misma (señala la gráfica con cinco puntos en el taller)" Iván: "sí, y ahí está el espacio de la mitad que nos faltó acá (señala la gráfica en donde obtuvieron 30 regiones) para que nos hubiera dado 31" Andrés 1:26 lee la actividad 1.2 y dice: " ahhh ahí está el de 30 regiones, lo que hicimos" En la pregunta de si están de acuerdo, ellos manifiestan que si son concurrentes, si estarían de acuerdo. Iván: pero entonces no siempre va a ser 30 y siempre tampoco va a ser 31 ¿siempre?, depende, si hay tres rectas concurrentes nos omite una región que podría existir" Los estudiantes simulan con un lápiz en la gráfica qué pasaría si se mueven algunos puntos sobre la circunferencia con el fin de mirar las diferentes tres líneas concurrentes	***Inferencia:*** *se observa que los estudiantes simulan algunos movimientos en el gráfico con el fin de representar otros posibles hexágonos en donde no se intersectan tres cuerdas, este proceso se asocia a VP* ***Justificación:*** *Hay una nueva idea, la cual busca utilizar la simulación de movimientos para identificar si hay más regiones ocultas*	***Inferencia:*** *se establece un argumento con el fin justificar la existencia de dos posibles resultados en el número de regiones, la conclusión que se obtiene es que "solo se pueden tener tres concurrentes en donde se omite un espacio" el garante correspondiente son las diferentes simulaciones que permiten explorar la gráfica, además hacen uso de la circunferencia de 6 puntos y con la de 5 puntos.* **Justificación:** *los estudiantes simulan diferentes posibilidades de ubicación de los puntos y en los ensayos determinan que para ese caso solo es posible intersecar una sola vez tres cuerdas, las cuales ocultaban una región. Al revisar la circunferencia con 5*	***Inferencia:*** *Los estudiantes evalúan el garante presentado en 1.2 a partir de las representaciones gráficas realizadas para 1.1* ***Justificación:*** *están respondiendo a las preguntas y las preguntas apuntan a la validación del garante.*	**Los estudiantes hacen uso de la simulación de diferentes puntos para contemplar más casos posibles, esto les permite tener mayor certeza de sus afirmaciones. Además se observa un cambio de perspectiva con respecto a la respuesta dada para 1.1, esto debido a que se han realizado diferentes "pruebas" a partir de las simulaciones que le permiten contemplar más casos en donde se cumple la conclusión.**

Además realizan simulaciones de movimiento de uno de los puntos sobre la circunferencia y las cuerdas que se trazarían para observar si esta relación siempre se cumple, adicionalmente toman de referencia la gráfica con 5 puntos para observar si es posible tener cuerdas que se intersequen. Al finalizar el video se observa que los estudiantes tienen más seguridad de sus respuestas por tanto intentan cambiar la respuesta dada a las preguntas de 1.1, pero no alcanzan a realizarlo en este video.	que pueden haber y por tanto las posibles regiones ocultas. Andrés lee de nuevo el enunciado de 1.2 ¿están de acuerdo con la afirmación de Antonia? Iván responde: "yo no", entonces Andrés escribe como respuesta "No porque si existen tres cuerdas concurrentes se pierde una región posible", luego lee la segunda pregunta ¿con el dibujo realizado por ellos es suficiente para determinar la cantidad de regiones? "no, por lo mismo, la región perdida, otra vez, porque no hay tres rectas concurrentes (...) no hay regiones escondidas" Los tres estudiantes redactan la respuesta de la siguiente manera "si no hay tres rectas concurrentes es posible ver todas las regiones existentes" luego toman de nuevo a 1.1 con el fin de cambiar su opinión, sin embargo en este video solo se alcanza a ver la intención de hacerlo.		*lados se dan cuenta que en esta figura no es posible que se intersequen tres cuerdas por tanto el número de cuerdas no varía, caso diferente al de 6 puntos.* *Argumento 2: Ellos asumen una posición de que 30 no es porque no se contempla la posibilidad que se oculte un espacio. Garante es la gráfica.* *Argumento 3: Se*		
Video 4. M2U00011 **Actividad:** Socialización actividad 1.1 y 1.2 con todos los estudiantes del curso. **Registro escrito:** Hojas 1 -2 - 3 - 4 **Población grabada:** Totalidad de los estudiantes y la docente **Descripción:** La profesora inicia la socialización	La docente les pregunta a los estudiantes ¿Qué quieren contarnos? a lo cual una estudiante responde EST1 0:05 "profe nosotros estamos de acuerdo con ambos, porque si seguimos la secuencia del primer grupo pues da correcto, pero ya el segundo también. Nosotros hicimos una secuencia con otras circunferencias y ya nos da 31 regiones, entonces depende de donde estén los puntos sobre la circunferencia" profesora: "O sea, si es relativa la respuesta a esa pregunta" la mayoría de los	***Inferencia:*** *Enuncian la cantidad de regiones que podrían estar ocultas en la intersección de cuerdas, esta surge de la observación de ejemplos gráficos, esto se asocia a una visualización de tipo IFI.* ***Justificación:*** *cuando Iván indica que la expresión solo se cumple hasta 5*	***Inferencia:*** *Se establecen argumentos con dos finalidades, la primera es responder a una pregunta y en la segunda para afianzar un argumento de un compañero o contra argumentar en la discusión.* ***Justificación:*** *(1) una estudiante afirma que está de acuerdo con*	***Inferencia:*** *En el proceso de socialización existe una evaluación de argumentos y afirmaciones constantemente, por lo general es la docente quien cuestiona y los estudiantes quienes responden o justifican sus afirmaciones.* ***Justificación:*** *Se realizan preguntas como ¿están de*	**Teniendo en cuenta la discusión de 1.1 y 1.2 se aclara y establece que el garante presentado en 1.1 no es suficientemente fuerte para hacer que la afirmación sea verdadera, independientemente que sea una sucesión verdadera no se corresponde necesariamente con la situación "el hecho**

preguntando a los estudiantes qué querían contar de la actividad, en la mayoría de las intervenciones por parte de los estudiantes, la docente establece una conclusión de la discusión o plantea preguntas con el fin de cuestionar las afirmaciones de los estudiantes o para buscar que ellos justifiquen su respuesta, luego les pregunta qué pasaría para una circunferencia con 7 puntos, para lo cual los estudiantes comienzan a realizar la gráfica para dicho caso, sin embargo el estudiante Iván propone una predicción respecto al número de grupos de cuerdas que podrán intersecarse para dos casos más.	estudiantes responden que sí. 0:42 Iván: "es que solo funciona hasta 5 puntos" profesora: "entonces, ¿no es cierto que todos tengan la razón? 1:25 Wilson: levanta la hoja y dice "el dibujito ayuda (...) tenemos las seis rectas, si son concurrentes efectivamente son 30, pero si movemos una sola recta se generaría una nueva región y salen las 31 por eso es que hay una que se limita a solo 30, por tanto el grupo 1 no tendría razón, para mí" profesora: "bien, ya es una posición, ¿por qué no tendría razón?" Wilson: "por lo que acabamos de decir". Interviene 2:15 Iván: es que la sucesión solo funciona hasta cuando hay 5 puntos, porque qué es lo que pasa con seis puntos, existe la posibilidad de que por cada dos puntos hay una cuerda, o sea que hay tres cuerdas relativamente, tres cuerdas que es posible que sean concurrente, cuando eso ocurre se está omitiendo una región, que sería posible de hacer si estas tres no fueran concurrentes. Profesora: "pero entonces ustedes dicen con la primera no estamos de acuerdo, no funciona ¿por qué?" otro estudiante responde 3:00 est 2: "El argumento del primer grupo no está como bien sustentado, aunque matemáticamente es verdadero, pero …" profesora: "pero ¿qué es lo verdadero en el primer enunciado? est 2: la sucesión Iván:" pero la sucesión no se cumple siempre" profesora: "porque hay una sucesión, una regularidad, ¿por eso ya la afirmación es verdadera?" est 2: "no"	*puntos sobre la circunferencia y manifiesta que para 6 puntos es diferente ya que por cada dos puntos hay una cuerda, por tanto con 6 puntos serian tres cuerdas de vértices distintos que pueden cortarse y ocultar una región, él está observando una relación entre el número de puntos y la cantidad de regiones ocultas que se pueden tener, tanto así que predice que cuando hayan 8 puntos si pueden haber cuatro cuerdas concurrentes, que generarían dos espacios de más, o menos.*	*la respuesta de 1.1 porque la secuencia es correcta y para 1.2 realizaron cuatro representaciones gráficas con ubicación diferente para los puntos obteniendo en algunos casos 30 y en otras 31 regiones. (2) Wilson explica a partir de la representación gráfica planteada por su grupo, cuándo es posible obtener 30 o 31 regiones, su garante es la gráfica. (3) Iván justifica porque en la circunferencia con 5 puntos no existirían regiones ocultas y porqué con 6 puntos si existen tres cuerdas concurrentes que ocultan la existencia de otra región más, para este caso el garante del estudiante es gráfico y le permite deducir que por cada dos puntos diferentes habrán cuerdas que se pueden intersecar.*	*acuerdo? ¿No es cierto que todos tengan razón? ¿Por qué no tendría razón?* ¿Qué es lo verdadero en el primer enunciado? ¿Por eso ya la afirmación es verdadera?, dichas preguntas son contestadas por los estudiantes validando lo dicho por ellos o por sus compañeros, con el fin de estas de acuerdo o en desacuerdo con lo expresado.	**de que haya una regularidad en la secuencia, no significa que sea la respuesta a la pregunta que se está haciendo", además se acuerda que para seis puntos es posible obtener dos respuestas, 30 o 31 regiones, esto depende de la ubicación de los puntos que posibilita la existencia de corte de tres cuerdas.**

	Iván: “es que hallamos un contraejemplo” profesora: “cuál es el contraejemplo?” Iván: “que pueden dar 30”. Profesora: “el hecho de que haya una regularidad en la secuencia, no significa que sea la respuesta a la pregunta que se está haciendo”. Otro estudiante interviene Est 3: “precisamente cuando son más de cinco puntos se puede llegar a que se lleve a una concurrencia.” profesora: “Ahora la pregunta es ¿se obtienen 30 regiones o 31 regiones?” 5:15 Iván: “las dos pueden ser posibles”. La docente pregunta a otro grupo “¿qué opina de lo que dijo Iván?” Est 4: “para mi depende de la ubicación de los puntos, porque nosotros hicimos cuatro circunferencias y en la última hicimos tres puntos más seguidos y en otra diferente, en una obtuvimos las 30 regiones y en otra 31” profesora: “¿ambas son verdaderas?” Iván: “depende si son concurrentes”. Profesora: “lo único que si es claro es que ninguna de las dos se ajusta a la secuencia que se viene desarrollando” Iván: “exactamente” profesora: “¿podríamos hacer una predicción para 7 puntos? ¿Cuántas regiones tendríamos?” Iván: “pues habría que mirar, porque solo se podrían haber tres rectas concurrentes, cuando hayan 8 puntos si pueden haber cuatro cuerdas concurrentes, que generarían dos espacios de más, o menos”. Profesora: “se podría generar una regularidad para los siguientes casos, de acuerdo al número de puntos”. Algunos estudiantes				

	consideran la posibilidad que varían de acuerdo a la cantidad de puntos, si son pares o impares, por tanto comienzan a trazar las gráficas.				
Video 5. M2U00012 **Actividad:** Actividad propuesta en la socialización evaluación de gráficas polígono de 7 y 8 lados **Descripción:** Para analizar con más detalle la actividad, se propone a los grupos que realicen gráficos y evidencian cuántas rectas concurrentes hay para 7 y 8 puntos.	Los estudiantes dibujan una circunferencia con 8 puntos, utilizando regla y compás. 00:47 La profesora dice: "La pregunta es ¿cuántas posibilidades de respuestas hay para 7, considerando el hecho de que pueden haber rectas concurrentes?" Los estudiantes filmados siguen observando para 8 puntos cuantas regiones da, analizan las rectas concurrentes, para ello recurren a representaciones gráficas. 01:11 Iván dice "Parce pero es que pueden existir entre esas 4, tres concurrentes entonces se perderían 2 espacios y si las 4 son concurrentes se perderían 4 espacios, pille y verá…" (Iván realiza la gráfica para intentar explicar lo dicho, sus compañeros no entienden lo propuesto, entonces realizan gráficas para tratar de entender la propuesta)	***Inferencia:*** *Los estudiantes exploran la tarea propuesta, infieren información a partir de las gráficas dibujadas para intentar responder la pregunta planteada. Este proceso se asocia a IFI.* *Justificación: Al realizar las gráficas, Iván propone una idea sobre la cantidad de regiones que se ocultan dependiendo de la concurrencia de las cuerdas, esta información se obtiene a partir de la visualización que hacen de las gráficas realizadas.*			**Los estudiantes exploran la actividad indicada por la profesora Nubia para tratar de encontrar una generalidad respecto de la influencia de rectas concurrentes, dentro del video no se evidencia una discusión relacionada con la afirmación propuesta.**
Video 6. M2U00013 **Actividad:** Continuación análisis de la actividad propuesta por la profesora en el video anterior. **Población grabada:** Wilson, Andrés, Iván **Descripción:** Los estudiantes exploran las diferentes gráfica para analizar los diferentes	Los estudiantes exploran con diferentes gráficas, para ello analizan casos. 00:20 William: "Pueden haber varias opciones, que ninguna sea concurrente,..," Iván dice: "es que sólo van a haber 4 rectas que atraviesan de lado a lado (se refiere a cuerdas que pasan por el centro de la circunferencia), porque en la del seis son sólo 6 cuerdas que atraviesan de lado a lado, (observan el dibujo)…mmm no pero está ésta que también atraviesa de lado a	***Inferencia:*** *Los estudiantes extraen información al analizar cómo influyen las rectas concurrentes para determinar las regiones en circunferencias con 7 y 8 puntos. Este proceso se asocia a IFI* *Justificación: La docente encargada*	***Inferencia:*** *Los estudiantes generan un argumento que permite dar una respuesta a la pregunta que realizó la profesora* *Justificación: Iván luego de analizar la información que le dan las gráficas, argumenta que las concurrencias entre cuerdas afectan*		**Los estudiantes realizan un trabajo de exploración para intentar encontrar cómo influyen las rectas concurrentes al determinar el número de regiones en que queda dividido un polígono dependiente el número de puntos sobre la circunferencia.**

posibilidades de grupos de tres cuerdas concurrentes.	lado… hagámoslo pero sólo dibujemos las que van en la mitad.” Luego de esto se da inicio a la socialización. 02:16 Profesora: “¿Qué posibles respuestas hay con 7?” Estudiante: 56. Profesora: “56 una respuesta ¿están de acuerdo?” Iván: “Todavía no lo hemos hecho”. La estudiante verifica y dice: “55”. (Siguen analizando y contando). Otro grupo dice “56”. Iván: “pueden ser 56 o 57.” (La profesora pregunta las respuestas a los demás grupos, los cuales algunos dicen 56 otros 57). Iván pregunta: “¿Cuánto es?” 06:25 Profesora: “entonces dependiendo de las concurrencias daría la respuesta... ¿qué es una concurrencia?.. Es importante a veces definir cosas. Una concurrencia es cuando tres rectas pasan por el mismo punto, bueno también pueden haber dos puntos de concurrencia, bueno digamos que esto se puede seguir explorando y pueden ustedes tratar de encontrar regularidades, pero pues este no es el objetivo del trabajo de grado de Yuly, Angie y Jenny. Ahora les vamos a pasar la segunda parte del trabajo”	*de orientar la discusión al plantearles la actividad buscó que los estudiantes detallaron sobre la importancia de las rectas concurrentes en el ejercicio abordado, para ello los estudiantes exploraron dibujando varias gráficas.*	*directamente en la cantidad de regiones.*		
Video 7 M2U00014 **Actividad:** Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados y evaluación de 2.1. **Registro escrito:** Hoja 6	Los estudiantes analizan la información presentada en la tabla, a su vez revisan la actividad del grupo 2.1, para ello se apoyan en la tabla presentada y así poder llegar a alguna conclusión. 02:42 Wilson “(al observar las diagonales del polígono presentado para 9 lados) da 54, es decir el doble de lo que dice ahí (se refiere a la	***Inferencia:*** *Los estudiantes analizan el procedimiento planteado por el grupo 2.1 y a partir de esto extraen información para así determinar qué es lo que está realizando el grupo de Camilo y el*	***Inferencia:*** *Los estudiantes generan un argumento que generaliza la cantidad de diagonales encontradas en un polígono.* *Justificación: A partir de todo el análisis que hacen de las*	***Inferencia:*** *Los estudiantes a medida que van construyendo el argumento van cuestionando lo que van diciendo, a su vez la docente al acercarse al grupo les ayuda a cuestionar sobre lo que están observando y lo*	Los estudiantes por medio de la extracción de información de los ejemplos presentados y junto con una secuencia de validación entre ellos y la docente obtienen una regla general para hallar el número de

Población grabada: Iván, Wilson y Andrés **Descripción:** los estudiantes revisan la tabla presentada con el fin de comprenderla y establecer posibles relaciones, además resuelven la actividad 2.1	tabla presentada)… Iván: "cada punto comparte una diagonal con otro" Luego apoyándose en el gráfico señalan que si van a contar las diagonales que salen de un vértice no se debe tener en cuenta ni el vértice ni los dos contiguos. 03:36 Iván "ahh ahí esta… este lado cuántas diagonales tiene (señala un vértice del polígono de 8 lados) 1, 2, 3, 4, y 5 entonces sería 8 por 5 pero habría que restarle algo que son las diagonales que se repiten" Wilson dice: "Es la mitad, no sé cómo decirlo pero es la mitad, contamos 27 (señalando el polígono de 9 lados) y 9 por 6 es 54 y 27+27 es 54." Iván dice "entonces si será la mitad seguro, por ejemplo…" La docente Nubia dice: "¿están de acuerdo con Camilo?", Iván responde "no sé, ni siquiera hemos estado de acuerdo con nosotros mismos". La docente les dice "bueno pero intentemos ver qué pasa, ¿ustedes revisaron esto? (señala la tabla de relaciones)", los estudiantes responden que sí, la docente dice: "¿Qué pueden decir que pasa con Camilo?", los estudiantes dicen: "que tiene algo de razón pero está mal no dan 28 diagonales", la docente dice: "¿En qué no pensó Camilo?", Iván responde: "en restar las que se repetían." Docente: "ahh bueno, ósea no están de acuerdo con él, ¿Por qué?", Iván dice: "porque no resto las que se repetían" docente: "¿cuántas se repiten?" Iván: "la mitad, ¿Qué le dirían a Camilo?" Wilson: "que divida, Profesora: "ahh que si haga la multiplicación pero que divida."	*error que comenten en la forma de conteo. Lo anterior se asocia al proceso IFI Justificación: Analizan el ejemplo planteado por el grupo de Camilo y los dos polígonos presentados (el de 8 y 9 lados) a partir de los cuales establecen que están repitiendo diagonales y que deben dividir entre 2.*	*gráficas presentadas los estudiantes afirman que para hallar el número de diagonales de un polígono se multiplica el número de vértices por el número de vértices menos tres y luego este resultado se divide en 2. Se establece una fórmula general para hallar el número de diagonales de un polígono: n(n-3)/2, el garante de dicho argumento es gráfico (Polígonos de 7, 8 y 9 lados)*	*que está propuesto en la actividad 2.1* ***Justificación:*** *Iván, Wilson y Andrés se complementan en lo que dicen con el fin de ir detallando la conclusión respecto al número de diagonales. A su vez la docente les ayuda en este proceso para que así ellos logren el objetivo. La evaluación que aquí se presenta hace referencia a la duda de las afirmaciones propuestas por ellos mismos.*	diagonales de cualquier polígono.

	05:28 Se observa cuando ellos escriben la conclusión frente a lo analizado, (Esta respuesta se toma del registro escrito) para ello responden la pregunta: ¿Están de acuerdo con el grupo de camilo? Camilo, la fórmula que plantea no nos convence, porque está contando las diagonales que se repiten, luego debería dividir en 2. Polígono de n lados Diagonales: n(n-3)/2				
Video 8. M2U00015 **Actividad:** 2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago **Registro escrito:** Hoja 9 **Descripción:** Los estudiantes leen la información presentada en la actividad 2.2 para dar respuesta a las cuestiones planteadas.	Los estudiantes leen la información presentada en la actividad 2.2 11:01 Iván: "Mejor dicho usted tiene 6 lados, bueno digamos que 5 lados, se va aumentar uno, entonces cuántas diagonales nuevas van a haber, van a haber 1, 2 3, porque estos dos no cuentan (Iván va representando en un gráfico) entonces es el polígono menos 2 y eso lo multiplicamos por todos los puntos que hice, entonces el pentágono tiene 5 diagonales si le agrego un punto entonces serian 5 más 3…(se dan cuenta que no da y nuevamente intentan buscar su conclusión realizando nuevas gráficas) 17:00 "No estamos de acuerdo con el grupo de Leidy porque le falta contar una diagonal que es un lado del antiguo polígono." Polígono de n+1 lados D+(n-2)+1=Nuevas diagonales " (A medida que Iván va escribiendo la fórmula la va explicando a sus compañeros para un ejemplo específico)	***Inferencia**: Los estudiantes exploran el método presentado con el fin de llegar a alguna generalización. Este proceso se asocia a IFI* ***Justificación:** A través de la exploración con varios ejemplos los estudiantes deducen una fórmula general para hallar el número de diagonales siguiendo el método planteado, así mismo por medio de la visualización encuentran el error que cometió el grupo de Leidy*	***Inferencia:** Los estudiantes formulan un argumento que generaliza la cantidad de diagonales de un polígono siguiendo el procedimiento planteado por el grupo 2.2, en ello se evidencia que el garante es gráfico.* ***Justificación:** Los estudiantes por medio de la exploración del método con diversos ejemplos concluyen que para un polígono de n+1 lados se tienen D+(n-2)+1= Nuevas diagonales, teniendo en cuenta que D es la cantidad de diagonales del polígono anterior.*	***Inferencia:*** el garante presentado en 2.2 es falso. **Justificación:** "No estamos de acuerdo con el grupo de Leidy porque le falta contar una diagonal que es un lado del antiguo polígono."	

2 Sesión					
Video 9. M2U00016 **Actividad: Lectura de 2.3** **Registro escrito:** Hojas 10 **Población grabada: Wilson, Iván y Andrés** **Descripción** Los estudiantes se encuentran leyendo el enunciado de la actividad 2.3	Los estudiantes hacen lectura de la actividad 2.3 y observan las indicaciones de la parte escrita con la gráfica y toman colores con la intención de repetir el procedimiento, que se explicita en el garante.				**En este video no se observa ninguna de las categorías, debido a que realizan únicamente un proceso de lectura para comprensión del enunciado.**
Video 10. M2U00017 **Actividad: Evaluación de garante 2.3** **Registro escrito:** Hojas 10 **Población grabada: Wilson, Iván y Andrés.** **Descripción:** Los estudiantes evalúan el garante presentado en 2.3 y escriben la respuesta a la pregunta ¿Están de acuerdo con el grupo de Samuel? ¿Por qué?	Los estudiantes replican en el taller la técnica de conteo planteado en el garante gráfico de 2.3 Andrés: "¿qué va a colocar Iván?" 1:00 Iván: "es efectivo porque es posible contar las diagonales una por una sin repetir el conteo, los colores dan una excelente didáctica para ver con facilidad las diagonales y nombrar cada vértice complementa muy bien este método que es más divertido." Wilson traza con colores las diagonales en el polígono de 8 y 9 lados, siguiendo la técnica de conteo planteada en 2.3, colocan el número de diagonales que traza por color y al final determina la sumatoria.	*Inferencia: Identificación de técnica de conteo a partir de la gráfica, se asocia al proceso IFI* *Justificación: Los estudiantes identifican el proceso de conteo, esto se evidencia cuando son capaces de repetir la misma técnica en otros polígonos.*		*Inferencia: Los estudiantes realizan una evaluación de argumento 2.3.* *Justificación: Se trazan las diagonales para el polígono de 8 y 9 lados siguiendo la técnica de conteo de 2.3 haciendo uso de la estrategia de los colores para facilitar el conteo por vértice, por esta razón da como válido el garante dado.*	**Los estudiantes están en total acuerdo con la técnica de conteo presentada en 2.3 no les genera ninguna duda, de la misma manera identifican cualidades de la gráfica que favorecen la visualización.**
Video 11. M2U00018 **Actividad: Finalización actividad 2** **Registro escrito:** Hojas 11 **Población grabada: Andrés, Wilson y**	Los estudiantes leen la pregunta: Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Wilson: 00:05 "Entonces para no decir, no es que solo una está bien (....) Iván: 1:01 "pero pongamos el de Samuel" Andrés: "porque es el más		*Inferencia: Se generan tres argumentos con el fin de justificar la validez de cada uno de los garantes gráficos presentados.* *Justificación: Los*	***Inferencia:*** *Para dar la respuesta de cuál grupo tendría la razón, recordaron los métodos y justificaron las condiciones que permiten que sean verdaderos o las que*	**Los estudiantes consideran como válidos los tres garantes gráficos que representan un proceso diferente de justificación, sin embargo, para en los**

Iván **Descripción:** Los estudiantes realizan la actividad de cierre y responden las dos preguntas 1. Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Pregunta 2. Teniendo en cuenta su respuesta anterior, qué les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué?	didáctico y además efectivo porque se cuentan la totalidad de las diagonales." Wilson: "independiente que pregunten lo mismo, lo importante del proceso es a dónde lo tienen bien." Registran que la respuesta correcta la tiene Samuel Leen la pregunta: Teniendo en cuenta su respuesta anterior, qué les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué? 5:02 Wilson: "¿Decimos que si todas son correctas? no, solo una,..., yo digo que no Andrés: "pero a las otras solo que les falta algo" Wilson: "entonces, cuáles son los nombre de los grupos" Iván: "Camilo, Leidy y Samuel." Wilson: "entonces estamos de acuerdo solo con el de leído y Samuel" Iván: "pero no, porque al mano solo le hizo falta fue dividirlo por dos. Porque mire él era el que decía que se multiplicaban (...) a Leidy lo que le faltó fue contar una diagonal. "Wilson: "entonces estamos de acuerdo con todos los grupos." Andrés: "En el de Camilo, él sacaba 4 de las posibles diagonales" Iván: "Por eso, lo que había dicho Wilson, usted cómo define que hayan 4 diagonales porque estos no los cuenta" (hace referencia al vértice que contiene un extremo de la diagonal y los dos vértices contiguos que forman lados del polígono) Andrés: "por eso, pero él contó las diagonales repetidas" Iván: "Por eso es que al man le faltó dividir por dos, porque por cada dos puntos hay una diagonal, por eso se dividen en dos,		*estudiantes concluyen que los tres métodos son correctos, pero que hay dos que aún les falta realizar algún procedimiento. Samuel (2.3): Es verdadero porque el método permite contar todas las diagonales. Leidy (2.2): Sería verdadero si se contara como diagonal el lado del polígono anterior. Camilo (2.1): sería verdadero si se dividiera en dos el producto realizado, ya que se estaría contando dos veces la diagonal por cada uno de sus vértices.*	*hacen falta para que lo sea.* ***Justificación:*** *Los estudiantes consideran cada uno de los garantes presentados en 2.1 - 2.2 - 2.3 y determinan cuales son totalmente verdaderos y cuales casi lo son, ya que identifican la condición o procedimiento faltante para que lo sean.*	**que se obtienen respuestas erróneas identifican la condición que se debería tener en cuenta para considerarlos verdaderos.**

	por eso en realidad lo que él está haciendo no está mal, solo le falta eso. (...) el grupo de Leidy y el de Camilo están cerca al resultado, solo falta algo." Wilson: "comencemos por el de Samuel, porque el método que usa es efectivo." Iván: "al grupo de Leidy, le falta una diagonal, aunque su método es bastante largo, porque toma el polígono anterior, y cuando piense en uno de 15 lados le toca empezar de ceros y empieza a sumar de a una, una…" Wilson: "Sería efectivo si se contara la nueva diagonal que es uno de los lados del polígono." Iván: "al grupo de Camilo, el método utilizado es efectivo si el producto lo divide en dos porque cada diagonal estaría en dos vértices."				
Video 13. M2U00020 **Actividad:** Socialización actividades 2.1, 2.2 y 2.3 **Descripción:** Se realiza la socialización de las actividades 2.1, 2.2 y 2.3, para ello se dibujan en el tablero tres polígonos, la idea es que pasen tres estudiantes y expliquen el método que se abordó en cada actividad y así primero se aclare las dudas que hayan respecto de la forma de conteo que se	Se dibujan en el tablero 3 polígonos para que pasen tres estudiantes y expliquen el método abordado en cada uno de los grupos de Camilo, Leidy y Samuel y así poder aclarar las dudas que tengan los estudiantes respecto al conteo. 01:34 Profesora: "La idea es representar el método, ¿qué fue lo que hicieron ellos?, ¿Cómo fue que pensaron?..." La estudiante que socializa el método 1 realiza un polígono de 10 lados en el tablero, marca los vértices "Tomo un punto referencia, el H por ejemplo, la idea es hacer diagonales hacia los otros puntos sin incluir a los puntos cercanos ni al mismo H". Profesora: "Bueno, ¿traza las diagonales completas?", Estudiante 1: "¿cómo así completas?" Profesora: "¿Toda la	***Inferencias:*** *1. Los estudiantes replican los métodos que se presentaron en las actividades 2.1, 2.2 y 2.3 para con ello entender en qué consiste el conteo. Este proceso se asocia a IFI.* *2. Los estudiantes plantean fórmulas que generalizan las técnicas de conteo, este proceso se asocia a VP.* *Justificación:* *1. Los estudiantes extraen información de las gráficas iniciales para poder*	***Inferencia:*** *Los estudiantes junto con sus compañeros y la docente construyen argumentos que permiten generalizar la cantidad de diagonales para cualquier polígono.* *Justificación:* *Siguiendo los procedimientos de las actividades 2.1 y 2.2 los estudiantes construyen las fórmulas generales que permiten encontrar la cantidad de diagonales de un polígono, para ello se*		**Se utilizan gráficas de polígonos de 10 lados para mostrar los procedimientos seguidos en las actividades 2.1, 2.2 y 2.3, se observa cómo los estudiantes hacen uso de los procesos de la visualización (VP e IFI) para explicar y mostrar dichos procedimientos. A su vez construyen argumentos basados en garantes de tipo gráfico y además se apoyan de los cuestionamientos que realizan sus**

utilizó en cada uno. Luego de que se expliquen los tres métodos la docente pregunta si están de acuerdo con cada uno de estos, ¿Por qué sí o por qué no? Finalmente construyen fórmulas generales para hallar el número de diagonales para cualquier polígono teniendo en cuenta los métodos de las actividades 2.1 y 2.2.	línea o solo resaltó un pedazo?" Estudiante 1: "Completa pero se resaltó al inicio." Profesora: "¿cuántas serían en este caso?" Estudiante 1: "Serian 7, como dice Iván". Profesora: "¿Por qué?" Estudiante 1: "Porque él no cuenta los puntos adyacentes ni el mismo punto". Profesora: "Podrías trazarlas, pero solo un pedacito". (La estudiante traza las 7 diagonales que salen del punto H, sólo señala un pedazo de la diagonal). Profesora: "Bueno, entonces por cada diagonal contó el número de diagonales de cada punto, ¿después que hizo?". Estudiante 1: "Entonces como miro que habían 10 puntos del polígono, multiplicó el número de diagonales que saldrían de un solo punto por el número de puntos que habían, entonces seria 7 por 10 (la estudiante escribe en el tablero 7*10)" Profesora: "La pregunta que nosotros le hacíamos era que si ustedes estaban de acuerdo con el grupo de Camilo, ¿qué dijo su grupo?". Estudiante 1: "Que no estábamos de acuerdo porque es que normalmente se toma las diagonales que salen de dos puntos, pero una sola vez, porque por ejemplo (señala la gráfica del tablero) él tomaba una diagonal de H a D y también contaba como diagonal de D a H y por así decirlo, (La estudiante por solicitud de la docente dibuja las diagonales que salen del punto D, sólo un pedazo y une sólo la diagonal que Camilo está contando doble)". Profesora: "listo, ¿qué más pensaron ustedes?, ¿que pensaron que como maestros podían	*desarrollar el mismo método de conteo para un polígono con más lados.* *2. Los estudiantes convierten la información abstracta que tienen en sus mentes, respecto a la generalización de los métodos de conteo, en imágenes visuales visibles para sus compañeros (representación algebraica)*	*apoyan en garantes de tipo gráfico.*		**compañeros y la docente frente a las afirmaciones que se van planteando.**

	decirle?, Estudiante 2: "pues que lo que hicieron no estaba mal, sino lo único es que les faltaría dividir por la mitad". Profesora: "¿Por qué?" Todo el grupo: "Porque contaron el doble de diagonales" (La estudiante 1 escribe en el tablero 70/2=35) Profesora: "Ahora pasa el grupo de Jessica con el método 2" 09:02 Profesora: "Leidy, Johana y Santiago también encontraron una manera de contar, (Pasa un estudiante del grupo de Jessica, se llama Mauricio) bueno en qué consiste el método, necesitamos saber eso". Mauricio: "Bueno, ellos parten de un polígono de 6 para hallar el de 7, en este caso se debe hacer un polígono de 9 lados", Profesora: "¿Por qué de 9 y no de 8 o de 7?" Estudiante 3: "porque ella solo quiere agregar un solo vértice" (Andrés del grupo filmado le dice a Mauricio que coloque un punto fuera del polígono, porque con ese se toma para hacer el polígono de 10 lados),… Profesora: "Bueno, pero que de especial tiene el punto que está fuera" Mauricio: "Ese punto va ser el vértice del polígono de 10" (La profe señala el punto I del polígono del tablero y dice "si este fuera el punto exterior del polígono ¿Dónde se vería el otro polígono? Mauricio traza el polígono anterior, es decir el de 9 lados, teniendo que I es el punto exterior con el cual se forma el de 10 lados. Iván: "Pero ahí lo importante es que tendría que saber las diagonales que tiene el polígono de 9 para así obtener el de 10" Profesora: "¿cuántas diagonales tiene el				

	polígono de 9 lados?” Estudiante 4: “27 diagonales” (La docente escribe en el tablero D9=27) Profesora: “Porque se necesita esa información según nos dice Iván. Listo, ¿ahora qué sigue?” Mauricio traza las diagonales desde el punto I hasta los otros puntos, siguiendo el método del grupo de Leidy Profesora: “Bueno, entonces qué hace el grupo de Leidy luego” Mauricio: “Entonces tiene en cuenta las 27 diagonales más estas 7” Profesora: “Bueno entonces, ¿Ustedes están de acuerdo con este grupo?” Todos: “No”, (se escucha que alguien dice tienen parcialmente la razón) Profesora: “¿Por qué?” Mauricio: “Porque le faltó contar esta diagonal (señala el lado del polígono de 9 que ahora sería diagonal)” Profe: “Bueno entonces se les puede sugerir algo a ellos” Mauricio: “sí, que sumen uno más, es decir 27+7+1 (Escribe en el tablero 27+7+1)”16:37 Profesora: “Ahora pasa el grupo de (señala un grupo, pasa en representación una estudiante que se llamara Estudiante 5), bueno van a representar el grupo de Samuel, ¿qué hace ese grupo?” Estudiante 5: “Bueno entonces trazan las diagonales igual que el primer grupo, pero las trazan completas y no se repiten, y con colores, y van teniendo en cuenta cuántas quedan de cada vértice” (La estudiante 5 toma marcadores de colores diferentes y traza las diagonales siguiendo el método del grupo de Samuel, al lado en el tablero va escribiendo el número de diagonales que va dibujando por cada vértice, esto lo				

	realiza para 4 vértices, luego la docente le indica que solo coloque el número de diagonales que se obtienen sin dibujarlas 7+7+6+5+4+3+2+1+0+0=35) Profesora: "Bueno, ahh pero no hablamos del método 2 entonces ¿qué le dirían a ese grupo?" Iván: "Qué ese tiene un problema muy grande y es que tiene uno que saber las diagonales del anterior, y si no las sabe del anterior y si no las sabe del anterior, y si no sabe ninguna le tocaría empezar desde uno" Profesora: "Tocaría empezar desde 3" Iván: "desde 4 porque el de 3 no tiene diagonales" Profesora: "¿qué más les dirían?" Iván: "Que es un método muy largo" Andrés: "Les diría que tuvieron una buena idea, pero que les faltó contar la diagonal del anterior polígono" Profesora: "sí que esto se puede solucionar, bueno que más le dirían a ese grupo, o ¿qué observaciones tienen?,… que es novedoso cierto, ¿He escuchado grupos que dicen bueno es largo el proceso pero es novedoso, ¿qué es lo novedoso?" Estudiante 6: "rompe el esquema, modifica la figura para obtener el otro" Profesora: "bueno, respecto al tercer método que les dirían" Iván: "que es muy bueno, porque les ayuda mucho ver los colores, la didáctica del ejercicio es bastante efectiva, por decirlo así" Profesora: "que es lo que garantiza la manera cómo lo hacen" Iván: "La didáctica" Profesora:"que son organizados, los colores..." Wilson: "Aparte fue el primer grupo que marco los puntos" Profesora: "marco				

	los puntos para garantizar que estaba contando todo ¿qué más?" Wilson: "que son muy ordenados" Profesora: "Este método es eficiente, ¿qué tendría que hacer si tuviera un polígono de 285 lados?" Iván: "Primero el polígono, jajaja" Profesora: "¿Con ese método sería necesario dibujar el polígono?" Estudiante 6: "que le reste 3 y…" Profesora: "bueno pero ustedes son profes, deben explicarles bien" Mauricio y Estudiante 3: "Debes restar a 285 3, porque no se cuenta el vértice de donde salen las diagonales ni los dos adyacentes" Profesora: "Listo tengo 285 menos tres, ¿qué hago con ese número? Estudiante 4: "Que coloque 282 factorial "Profesora: "pero factorial es multiplicación, acá es suma, bueno se les dice que hagan la suma, ¿qué suman?" Estudiantes: "282 + 282 + 281 +…" Profesora: "y así desde 1 hasta 282, ¿Eso es ser eficiente?" Estudiantes: "No" Profesora: "No, No "Estudiante 5: "Para mí se debería tomar la primera opción "Profesora: "Ah bueno entonces preguntémonos por el método más eficiente" Estudiante 5: "El primero, porque se debe multiplicar el número de vértices menos tres por el número de vértices y lo divide entre dos" Profesora: "Entonces tendría que tomar el número de vértices que es 285 restarle…" Estudiante: "tres" Profesora: "Luego" Estudiante: "se multiplica por 285" Profesora: "y el resultado de la resta" Estudiante: "se divide en 2" Profesora: "Entonces como sería el método por el primer				

	para cualquier polígono” La docente pasa a un estudiante para que lo escriba en el tablero. a: Número de vértices d: Número de diagonales $$d = \frac{a(a-3)}{2}$$ Profesora: “Ese es como el método más eficiente, cierto, ¿Cómo sería para el segundo?” Pasa un estudiante, y la Profesora: “Bueno lo primero es identificar la información que se requiere” Estudiante: “Saber el número de diagonales del polígono menos un vértice, d_{a-1}las diagonales del polígono anterior” Profesora: “Eso porque representa las diagonales de un polígono con un vértice menos, más que…” Estudiante: “más las diagonales posibles del nuevo vértice” Profesora: “¿las diagonales que serían cuántas?” Estudiante: “7” Profesora: “No pero para $a-3$ porque ese $a-3$ siempre está presente” Estudiante escribe d_{a-3} Profesora: “Seguro” Estudiante borra y escribe :$d_{a-1}+a-3$ Profesora: “¿qué le falta sumarle” Estudiante escribe: $d_{a-1}+a-3+1=d_a$ La docente pasa al tablero y explica la fórmula hallada para los estudiantes que de pronto tienen dudas acerca de ésta. Profesora: “Bueno y ahora para el tercero… les doy una pista, que fue lo que descubrió Gauss, ¿Qué aprendieron en la película?” En el tablero tienen escrito 7+7+6+5+4+3+2+1+0+0=35 La docente pone a que los estudiantes recuerden e intenten encontrar la fórmula general para el				

	método 3.				
Video 14. M2U00021 **Actividad: Socialización actividad 2,3** **Descripción:** Los estudiantes realizan procedimientos para describir de forma algebraica la cantidad de diagonales de un polígono.	Un estudiante, Daniel, pasa al tablero 4:15 y escribe la siguiente fórmula: $d_a = (a-3)(\frac{a}{2})$ Otro estudiante pregunta "¿Pero eso es para los pares?" la docente afirma: 5:26 "él dice que para todos los casos funciona la función". Se hace el ejemplo con un polígono de 11 lados y el resultado les da 45. La docente interviene: "¿Esta se parece a la primera?" Algunos estudiantes afirman que sí. Un estudiante (Iván) responde: 6:44 "no porque no le da… le falta una parte… es que yo lo veo por otro lado, no se" (pasa al tablero). De esta manera empiezan a cuestionar la respuesta de Daniel. 7:00 "Es que aquí (señala el tablero, haciendo énfasis en los números escritos) digamos por ejemplo en el siete ¿sí? Acá lo que nos está diciendo son tres parejas (parejas de números), son tres parejas, ¿Por qué son tres?, porque son seis dividido en dos, ¿sí?, pero son tres parejas de siete o sea que son tres parejas de siete, o sea que aquí (señala en el tablero $(a/2)$) son tantas parejas de este (señala en el tablero $(a-3)$) y le faltaría entonces esto (Señala dos números siete que están en el tablero)" Daniel entonces afirma: 7:28 "esas son otras dos parejas, ehhhh reemplace en 10" De nuevo interviene Iván: 7:38 "O sea yo digo, digamos, hagamos cuenta, es *a* por dos ¿Cierto? y vamos a decir que *a* es igual a 10 y entonces vamos a… según esto, según esto que está acá	***Inferencia:*** *Iván encuentra la forma de plasmar una fórmula que permite evidenciar algebraicamente lo que está visualizando VP.* ***Justificación:*** *Iván hace uso de representaciones algebraicas para mostrar a sus compañeros la manera en como él visualiza el conteo de las diagonales.*	***Inferencia:*** *Iván formula un argumento para generalizar la cantidad de diagonales de un polígono con una cantidad de lados par.* ***Justificación:*** *Iván hace uso de unos datos presentados en el tablero, (los números planteados del conteo de las diagonales de un polígono de 10 lados). Luego plantea unos garantes numéricos que van dando paso a una generalización del conteo, y finalmente plantea la fórmula que permite calcular la cantidad de diagonales de cualquier polígono que tenga una cantidad de lados par. Esto lo hace con el fin de contradecir lo planteado por Daniel, ya que para Iván deben existir fórmulas diferentes para polígonos con número de lados par e impar.*	***Inferencia:*** *Los estudiantes y la docente cuestionan las afirmaciones que se van generando respecto a la fórmula que Daniel plantea inicialmente.* *Justificación:* *Se realizan preguntas como:* ¿Pero eso es para los pares?, ¿Esta se parece a la primera?, ¿Por qué son tres?, ¿Cierto?, las cuales permiten cuestionar el valor de verdad de la fórmula planteada.	**Los estudiantes hacen uso del proceso de visualización VP para construir un argumento inicial de tipo algebraico, luego por medio de preguntas lo cuestionan entre la docente y los estudiantes, luego se formula un contra argumento de tipo algebraico uno para el caso de los pares y otro para el caso de los impares.**

	(De nuevo se dirige a los números escritos en el tablero), este siete, o sea estos (Encierra los dos números siete del tablero) serían *a* menos tres dos veces (Escribe en el tablero $2(a-3)$) ¿Cierto? Ahora esto de acá, de aquí para allá (Señala el resto de números escritos, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0) es más (Continúa escribiendo su fórmula), esto que es tres, o sea tres parejas ¿Si?, qué es lo que uno dice que es *a* sobre dos (La fórmula que va escribiendo en el tablero queda $2(a-3)+$), tres parejas, pero son tres parejas… digo *a* menos tres, qué pena, menos… *a* menos 4 (La fórmula en el tablero entonces queda: $2(a-3)+\frac{a-4}{2}$)" Daniel pregunta: 8:30 "¿Por qué?" El estudiante responde entonces: 8:32 "porque es que aquí (No se evidencia a donde está haciendo referencia, sigue trabajando con lo planteado en el tablero), dijimos que son siete, ¿Si?, entonces menos una, siete menos una, son las seis que necesito acá, que va en la cola de aquí para allá (Señala los números que están en el tablero, desde el número seis y hacia su derecha), ¿Si? entonces eso es lo mismo que decir *a* menos 4 ¿Cierto? Sobre dos. Ahora, eso son, esas, o sea, supongamos que es tres, esos son tres por siete ¿sí? Tres parejas siete, pero siete es *a* menos tres (Continúa con la escritura de su fórmula: $$2(a-3)+\frac{a-4}{2}(a-3)$$ La profesora entonces interviene: 9:20 "¿Cuál es la dificultad que ustedes encuentran para aceptar el				

	método de Daniel? Hay una razón fundamental" Iván responde: 9:25 "los impares" Entonces Daniel defiende su posición: 9:31 "Pero si ustedes miran, todo impar si le restamos tres queda par y un par por 0,5 completa el siguiente, entonces si da el número"				
	Iván da su opinión con respecto a los impares: "Ahora, yo digo que para los impares, pasa algo, digamos ejemplo, voy a tomar 10 ¿Cierto? Y voy a hacer la cola de aquí para allá de 10, entonces sería 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, (Escribe estos números en el tablero) Entonces yo voy a empezar a decir las parejas que se pueden formar del 10 ¿sí?, entonces decimos que esta y esta (En el tablero realiza una línea que une al número 10 con el número cero, el número 9 con el 1 y así sucesivamente, mientras realiza estas líneas va contando la cantidad de parejas que se van formando) una, dos, tres, cuatro…) La docente interviene: "¿Eso es para un polígono de cuantos lados?" El estudiante responde: "No, aquí no estamos hablando de polígonos, es solamente como la suma, entonces una, dos tres, cuatro, y cinco (Cuenta la cantidad de líneas dibujadas para emparejar los números) y me sobra el cinco, ¿Si? Es impar ¿no?, uno, dos, tres, cuatro…. Diez, once. (Cuenta los números que escribió del 10 al 0) Es impar, entonces me falto el cinco (cinco es el número que no queda con pareja). Entonces yo digo que para los impares, simplemente haría falta sumar la mitad de ese, o				

	sea…” La profesora de nuevo interviene: “Entonces pon una fórmula para pares y otra para impares… En el ejemplo que pones ahí abajo, (hace referencia a los números que el estudiante acabo de escribir) tienes que sumarle por lo menos dos, por ejemplo once y once… súmales once y once y hallas la fórmula” Otro estudiante afirma: “pero ese sería un polígono de 14” La profesora de nuevo interviene: “es que hay que poner bien el ejemplo porque si uno va a comparar, tiene que compararlo sobre los mismo principios” El estudiante en el tablero responde: “Ahhh bueno, entonces vamos a hacer una cosa, (Borra los números que había escrito) parece que es un polígono de once lados ¿Si? Entonces once menos tres, ocho, (Y empieza a escribir en el tablero 8 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 0) , entonces bueno, esto (Señala los dos primeros números 8 y 8) ya lo dedujimos por un lado y esto (Señala los dos últimos números, 0 y 0) por otro lado ya, nos vamos a dedicar a esta parte de acá (Señala los números del 7 al 1), entonces vamos a mirar las parejas, siete y uno, ocho (De nuevo Iván traza líneas que unen los números en parejas), seis y dos, cinco y tres y me sobra el cuatro ¿Cierto? Entonces es como si tuviera esto mismo (Señala la fórmula escrita por él)… La docente interviene: “¿cuantas veces?, cuéntanos otra vez, ¿Ocho es que?” Iván responde: 13:22 “Entonces por eso, aquí son				

	tres veces ocho más la mitad de ocho (debajo de los números del 7 al 1, escribe $3(8) + 8/2$) La docente le pide a Iván que trate de adecuar lo que acaba de escribir en términos de *a* y le pregunta: "¿ocho más ocho que es arriba? (Se refiere a los dos primeros números y a la fórmula escrita por Iván)" Iván trata de responder a la profesora: "ocho más ocho… dos veces *a* menos tres más… (Iván empieza a escribir una fórmula nueva para términos impares, la fórmula escrita es: $2(a-3)+$)… *a* menos cuatro sobre dos, ahh no, *a* menos cinco sobre dos, ¿Por qué? Porque es que, digamos *a* ese par, ¿cierto? Menos otro par es par, sobre dos entonces si se puede, daría un entero, ahora si decimos acá (Señala la fórmula de los impares) que *a* esa impar, entonces impar menos un impar… es un impar… (Empieza a dudar y trata de hacer cálculos que no pronuncia, solo mueve la cabeza)" Al ver que el estudiante se confundió, la docente interviene "no, pero quién es tres en términos de *a*, tres es la mitad de quién? Iván: "Acá (señala los números del 7 al 1 que están escritos en el tablero) la mitad de seis" Profesora: "¿y seis es *a* menos que?" Iván: "*a* menos cinco (continúa escribiendo la fórmula $2(a-3)+\frac{a-5}{2}$) ...eso un impar menos otro impar… ahhh ya, por eso no puedo poner el cuatro porque si es un impar menos un par me daría un impar y un impar no tiene una divisibilidad por dos entera y necesito que sea entero, por eso le pongo el menos cinco…				

	multiplicado por *a* menos tres, que es el ocho y falta sumarle la mitad de *al* menos tres" (Finalmente la fórmula escrita en el tablero queda: $2(a-3)+\frac{a-5}{2}(a-3)+\frac{a-3}{2}$				
Video 15. M2U00022 **Actividad:** Continuación socialización actividad 2.3- Análisis de fórmulas **Descripción:** Los estudiantes analizan las fórmulas halladas siguiendo el procedimiento de la actividad 2.3 e intentan ver si son equivalentes.	La docente continúa el debate que se trae del video anterior, respecto de la fórmula general hallada siguiendo el proceso de la actividad 2.300:02 Docente: "En el primer ejercicio que hicimos ayer que nos está diciendo, que no siempre los argumentos que vemos son válidos para lo que nosotros queremos,.. cómo resolvemos éste y éste (señala la fórmula encontrada para pares e impares) respecto a éste (señala la fórmula general que planteó el estudiante, que según él esa tiene en cuenta los dos casos) Estudiante: "sabemos que tiene términos semejantes, se puede simplificar para ver a que llegamos" Docente: "Porque no hacemos esto, la mitad del curso simplifique esto y la otra mitad simplifique esto" (La docente divide el grupo para que unos tomen la fórmula de pares y otros la de impares y así ver a qué resultado se llega) **Nota:** Queda como actividad para la próxima sesión que los estudiantes simplifiquen las fórmulas e intenten encontrar si son equivalentes, ¿por qué si? o ¿por qué no?			***Inferencia:*** *Los estudiantes cuestionan y validan las fórmulas generales que hallaron sus compañeros siguiendo el procedimiento planteado en la actividad 2.3 para encontrar el número de diagonales para cualquier polígono.* *Justificación: Cada uno de los estudiantes intenta mostrar una postura frente a las tres fórmulas planteadas para ello se apoyan en procesos algebraicos y así cuestionar la veracidad y equivalencia entre éstas.*	**Se observa que los estudiantes y la docente están validando de forma algebraica si las fórmulas planteadas son equivalentes.**
3 Sesión					
Video 16. M2U00042 **Actividad:** Socialización de las tres fórmulas	La docente contextualiza la actividad realizada Profesora: El ejercicio es que una maestra organiza a sus estudiantes en grupos y los			***Inferencia:*** *Se realiza la recopilación de la evaluación realizada en la clase anterior de los*	

encontradas para los procesos asociados a los garantes 2.1 - 2.2 - 2.3 **Registro escrito:** no se tiene registro escrito. **Población grabada: La totalidad del grupo de estudiantes, pero en particular la profesora ya que es quien escribe.** **Descripción:** La docente realiza preguntas a los estudiantes para recordar los procesos realizados en la clase anterior y las ecuaciones encontradas.	estudiantes dan unas respuestas, ¿qué más? Estudiante 1: "hay que analizar las diferentes respuestas, cuál era el adecuado" Profesora: "¿cuál era el adecuado? ¿Qué era lo que se preguntaba?" Iván: "que si estábamos de acuerdo con las respuestas de los muchachos" Profesora: "y si no estábamos de acuerdo la idea era mirar que se les podría agregar para ayudarlos a que lo sean. Entonces ¿cuál era el ejercicio que debían desarrollar los estudiantes?" Estudiante 2: "era contar las diagonales de un polígono" Estudiante 3: "se planteó que los estudiantes buscarán una ecuación" Profesora: "¿la maestra les solicitó que buscarán una ecuación?" *varios estudiantes dicen que no.* Profesora: "eso lo dijimos nosotros, que cada método nos puede llevar a una ecuación, los estudiantes estaban buscando la forma de contar las diagonales, nosotros aprovechamos lo que ellos hicieron, nosotros encontramos tres de acuerdo a cada uno de los grupos." (La docente divide en tres partes el tablero para escribir lo encontrado para cada uno de los grupos) Profesora: "¿en qué consistía el primer método?" Iván: "en mirar el número de diagonales que se pueden trazar por cada vértice." La docente gráfica un polígono de 9 lados y cuenta las diagonales de un vértice, encontrando 6. Profesora: eran 6 diagonales por 9 vértices (6*9) ¿en qué fallaba este método? (varios estudiantes responden al mismo tiempo y la profesora sintetiza sus			*métodos presentados en cada garante de la actividad 2* ***Justificación:*** *Aunque las fórmulas fueron determinadas en la sesión anterior, se realizaron las gráficas que permitieron deducir de nuevo las ecuaciones asociadas a cada garante a partir del procedimiento realizado para determinar el conteo.*	

	intervenciones) en que se estaban contando dos veces la diagonal, por ello se debía dividir en dos $\frac{6*9}{2}$ y esto nos llevaba a la fórmula $Dz = \frac{(z-3)\,z}{2}$donde z-3 es el número de diagonales por vértice, multiplicado por z correspondiente al número de vértices dividido en dos, ¿cierto? esta es la primera fórmula, bueno, ¿el segundo método en qué consistía, (estudiantes murmuran) era el del punto a fuera, cierto? entonces qué se haría. Estudiante 4: Un polígono de 8 lados. La docente dibuja el polígono y pregunta cuántas diagonales tiene este polígono?, un estudiante responde 20. Profesora: ¿en qué consistía este método? (estudiantes murmuran) en colocar un punto afuera y empezamos a sacar las nuevas diagonales, estas no sirven porque serían los lados del nuevo polígono, ¿qué era lo que pasaba?, si lo miramos entonces que como ecuación se tendría $Dz = Dz-1 \quad +z-2$ donde Dz-1 es el número de diagonales del polígono anterior. La docente dibuja el tercer polígono y los estudiantes le afirman que era el de los colores, ella les indica que el uso de los colores era para contarlas de forma organizada, un estudiante dice que también es para no repetir diagonales. Profesora: ¿Cuál era la suma que se debía hacer? entonces, con uno cuántas diagonales habían , 6, con el otro vértice, otra vez 6, pero con este (tercer vértice) ya serán 5, luego 4, 3,				

	2, 1 (escribe en el tablero 6+6+5+4+3+2+1+0+0) en la clase pasada habíamos visto una regularidad y encontramos tres fórmulas, es que habíamos dicho es que para los pares y para los impares funciona de diferente manera. (escribe en el tablero) Impares Daniel: $Dz = \frac{z}{2} \quad (z-3)$ Pares: …(los estudiantes revisan los apuntes de la clase anterior)				
Video 17. M2U00043 **Actividad:** Continuación Socialización de las tres fórmulas encontradas para los procesos asociados a los garantes 2.1 - 2.2 - 2.3 **Población grabada:** **T**odos los estudiantes del curso. **Descripción:** Los estudiantes continúan recordando lo hecho en la sesión anterior, la profesora les muestra algo de lo que habían realizado anteriormente que se relaciona con hacer parejas con los números que permiten contar la cantidad de diagonales, los números aparecen según el proceso usado por 2.3. Hace un ejemplo con un	La profesora inicia la discusión con la siguiente pregunta: "De alguna manera tenemos tres ecuaciones un poco distintas, entonces la pregunta es ¿Si yo lo cuento por un método o lo cuento por el otro o por el otro siempre va a dar el mismo resultado?" Una estudiante responde: 7:07 "si, debería ser así" La docente de nuevo pregunta: 7:08 "¿pero si es así?... ¿Siempre da el mismo resultado?" Un estudiante (Iván) responde: 7:11 "si, siempre y cuando se use la correcta " La docente de nuevo le pregunta: 7:14 "O sea que tal vez haya una incorrecta" El estudiante le responde: 7:16 "Lo que pasa es que si decimos que hay diez vértices hay que usar la de impares, la que dice ahí la de impar, y si dice que hay nueve vértices hay que usar la de par" La profesora entonces le pregunta de nuevo 7:26, "o sea siempre que nos digan el número de, nos dan el polígono y el número de puntos, entonces nosotros decimos, no, buscamos cual es la mejor forma" Una estudiantes responde: "La forma es la que es"			***Inferencia:*** *Se realiza la evaluación de los garantes por medios algebraicos con el fin de determinar la equivalencia o no entre las diferentes fórmulas.* ***Justificación:*** *Los estudiantes por medio de procesos algebraicos establecen la equivalencia entre las fórmulas encontradas para el primer grupo (2.1), el segundo grupo (2.2) y las planteadas para polígonos con lados pares e impares del tercer grupo (2.3).*	La conclusión aquí establecida es la misma que se dio en el aula de clase y fue dicha por la docente 12:07 "Lo que les quería decir es, tenemos la figura, y el conteo nos representa una ecuación (señala en el tablero la primera gráfica y la primera función), tenemos otra figura con otro método y nos generó otra ecuación (señala la segunda figura y la segunda ecuación escrita) y tenemos otra figura y otra ecuaciones (función para par y para impar), pero ya para mostrar que nos lleva al mismo resultado, nos salimos de la figura ¿Cierto? O sea le quitamos el significado y empezamos a trabajar como si fueran cosas que no tiene ningún contenido por detrás"

polígono de 9 lados, con uno de 10 y uno de 11, y se llegan a dos fórmulas para encontrar la cantidad de diagonales de un polígono con número de lados par, y otra para un polígono con número de lados impar. Finalmente se plantean algunas preguntas con el fin de generar discusión entre los estudiantes.	Entonces dice la profesora: 7:45 "la que es, pero esta tiene una forma miren, zeta menos tres por zeta todo sobre dos, (señala en el tablero la fórmula escrita $\frac{(z-3)z}{2}$), esta tiene otra forma $d_z = d_{z-1} + z - 2$ y esta tiene otra forma mírala, para impares y para pares, a pesar de que se parecen para impares es zeta menos tres y a zeta lo divide entre dos (Señala en el tablero la ecuación que ella había escrito (z-3)(z/2), para pares la ecuación era $(z-3)\frac{(z-1)}{2} + \frac{z-3}{2}$)". Un estudiantes de nuevo afirma: 8:11 "Esa es la misma que está (este estudiante señala desde su puesto la última y la primera fórmula de las que se habló)" A lo que la profesora pregunta 8:14 "¿Es la misma en qué sentido?" Y el estudiante responde 8:17 "en que dan igual" De nuevo la profesora pregunta: 8:19 "¿Es el mismo método?" Varios estudiantes al tiempo responden que no, que da lo mismo pero que no es el mismo método. Entonces la docente vuelve a preguntar: 8:25 "¿Qué es lo que sí es lo mismo?" De nuevo los estudiantes afirman que la ecuación. Ante esta respuesta los estudiantes con apoyo de la profesora plantean que con propiedades algebraicas se debe probar que todas las fórmulas escritas son iguales o equivalentes.				
Video 18. M2U00044	Finalmente se pide que los estudiantes dieran sugerencias para				

	la profesora: 10:33 La actividad que les puso a los muchachos fue bueno, les permitió ver muchas cosas tras un solo ejercicio. Trate de formar nuevos equipos para que lleguen a la fórmula general. Que quería la profesora con esta actividad? Que visualizarán…. Que un problema se puede solucionar de diferentes maneras. Evidenciar que cada estudiante tiene competencias diferentes para solucionar un problema. Se reparten unas hojas para que ellos escriban sus impresiones.				
Video 19. M2U00045 **Actividad:** Cierre y reflexiones de la actividad 1- De acuerdo preguntas de encuesta. **Registro escrito:** no aplica **Población grabada:** Totalidad de los estudiantes de la clase **Descripción:** La maestra retoma las respuestas dada en la actividad 1.1 y 1.2 con el fin de determinar qué reflexiones se pueden realizar a partir de los hallazgos encontrados en cada uno de los argumentos.	La profesora retoma las relaciones encontradas para la actividad 1.1 Profesora: ¿Pero qué era lo que decíamos de la secuencia en relación con las gráficas que se hacían? Iván: que no funcionaba esa secuencia. Profesora: por qué dijimos que no funcionaba esa secuencia? varios estudiantes: por la ubicación de los puntos. Profesora: entonces que le puede decir la maestra a los niños que dieron de respuesta esta secuencia, no ustedes son unos bruticos y no sabe? Estudiante 1: no, ellos se dejaron llevar por la secuencia. Profesora: exacto, y que se les diría a los estudiantes que se dejaron llevar por la gráfica (varios estudiantes hablas y la maestra sintetiza sus intervenciones) les decimos que comprueben, que cuando tengan un resultado de algo que verifiquen, porque un resultado que se obtiene no necesariamente es válido.				

SESIÓN 1 Colegio De La Salle					
Información recogida	**Afirmación del video “ ” información textual … pausa en el discurso**	**Observado sobre visualización. VP - IFI**	**Observado sobre argumentación**	**Evaluación de argumentos**	**Observación**
Video 1 MVI_0195 **Actividad:** Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de2. **Registro escrito:** Hojas 1 -2 **Población grabada:** Carlos y sus dos compañeros **Descripción:** los estudiantes revisan la tabla presentada con el fin de comprenderla y establecer posibles relaciones y responden a la pregunta ¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos?, esto lo registran en la hoja 2.	Los estudiantes analizan la información planteada en la tabla, en busca de relaciones entre la cantidad de puntos sobre la circunferencia y las potencias de dos. 2:42 “acá hay tres puntos entonces ¿$4=2^2$? (cara de duda) 03:07 “¡ay! ya entendí cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente”	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que le permite comprender un posible comportamiento algebraico con la secuencia gráfica, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Los estudiantes revisan la tabla y buscan posibles relaciones entre la cantidad de puntos y las potencias de 2, sin embargo ellos esperaban que con 3 puntos, este número apareciera en las potencias, al ver que esto no sucedió, compararon los valores de una potencia a la otra y se dieron cuenta que la potencia para cada caso aumenta en uno su exponente.*			La información dada en la tabla les permite establecer un posible comportamiento algebraico.
	Los estudiantes intentan dar solución a la pregunta planteada: ¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos?, para ello dicen: ”En 32 - $2^5 = 32$” 03:57		*Inferencia: se plantea un argumento para justificar y dar respuesta a la pregunta* ***Justificación:*** *Los estudiantes afirman que con 6 puntos el número de regiones serán 32.* *Esto debido a la relación planteada*		Para los estudiantes el comportamiento algebraico presentado en la tabla es muy fuerte por tanto los convence para concluir la cantidad de puntos.

			"cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente", la cual sería el garante de dicho argumento.		
Video 1 MVI_0195 **Actividad:** Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucía y Pablo. **Registro escrito:** Hoja 3 Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. **Registro escrito:** Hoja 4 **Descripción:** Los estudiantes observan el planteamiento de 1.1, a lo cual intentan responder la pregunta que se plantea, sin embargo se dan cuenta que están haciendo uso de una representación gráfica que no existe, por tanto realizan dos veces la gráfica, una en una hoja anexa y otra en el taller, cuentan las regiones y obtienen 31, luego comparan su respuesta con el garante presentado en 1.2, lo cual los hace dudar y preguntan a la docente. Al contrastar las dos representaciones	Los estudiantes leen la respuesta dada por el grupo de Juan y responden 1.1: 6:25 Carlos "si, porque si dibujamos la circunferencia… pero no… porque no la hemos dibujado … venga la dibujamos" Carlos dibuja la circunferencia con 6 puntos sobre ella y traza las regiones, luego las cuentan y obtienen 31 regiones, afirman: 08:56 "bueno pero se aproxima"			*Inferencia: Para los estudiantes el garante presentado en 1.1 (secuencia - tabla) es muy persuasivo, de tal forma que no confían ni siquiera en su representación gráfica, prefieren ajustarla al decir que se aproxima.* ***Justificación:*** *Inicialmente los estudiantes evalúan 1.1 y teniendo en cuenta la afirmación realizada por ellos anteriormente, responden que sí es verdadera, sin embargo la justificación corresponde a una representación gráfica que aún no existe, por tanto requieren realizarla en una hoja anexa, luego cuentan el número de regiones, obteniendo 31, pero como es un valor muy cercano a 32, prefieren seguir afirmando que el*	Es más fuerte la relación algebraica presentada en 1.1, tanto que los estudiantes prefieren ajustar la cantidad vista gráficamente con una aproximación y decir que serían 32.

graficas (la realizada por ellos y la de 1.2) se dan cuenta que en 1.2 concurren tres de las cuerdas en el centro, para lo cual manifiestan que la gráfica incorrecta es la realizada por ellos.				*número de regiones es 32.*	
	Carlos llama a la docente y le comenta: "a ellos (hace referencia al grupo de Antonia 1.2) les da 30 y acá (hace referencia a su representación gráfica) nos da 31"			*Inferencia: EL garante (gráfico) presentado en 1.2* ***produce duda del garante de 1.1 y la representación gráfica realizada por ellos mismos.*** ***Justificación:*** *Al revisar la actividad 1.2, se dan cuenta que el garante presentado (gráfico) tiene 30 regiones, lo cual les produce duda del garante de 1.1 y deciden llamar a la docente para buscar una explicación, sin embargo ella los escucha, pero no les da a conocer su punto de vista. Los estudiantes realizan de nuevo la gráfica, para ello utilizan instrumentos con más precisión como compás y regla, uniendo los seis puntos, al contar el número de regiones obtienen de nuevo 31.*	Al realizar una mejor gráfica y llamar a la docente para preguntarle por qué obtienen diferente valor, se evidencia que el garante algebraico se pone en duda.
	Siguen analizando su gráfica e intentan buscar una explicación del porqué no se obtienen los mismos resultados, entonces dicen: 21:43 "En la gráfica del grupo todos los segmentos	*Inferencia: Se evidencia IFI cuando Los estudiantes observan regiones solapadas al intersecarse tres cuerdas en el garante de 1.2*	*Inferencia: Los estudiantes observan regiones solapadas al intersecarse tres cuerdas en el garante de 1.2 de la actividad*		Al observar la representación gráfica de 1.2, los estudiantes le otorgan el valor de valor de verdad a este garante

	están en la mitad, pero como nuestra gráfica esta toda chambona, se suponen que todo debe estar en la mitad, o sea que si nos da 30”	*Justificación:* “En la gráfica del grupo todos los segmentos están en la mitad”	*y la comparan con la realizada por ellos; lo anterior, hace parte de un argumento que busca validar el garante gráfico de la actividad 1.2* ***Justificación:*** obsérvese que ellos están mostrando que consideran que la gráfica de Antonia es cierta y buscan encontrar porque les quedo a ellos mal.		en comparación con la realizada por ellos.
Video 2 MVI_0196 **Actividad:** 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. **Registro escrito:** Hoja 4 **Descripción:** Los estudiantes evalúan de nuevo el valor de la potencia de dos en la calculadora, Carlos dice que matemáticamente debe dar 32, entonces escribe como respuesta a 1.2 que no está de acuerdo con el grupo de Antonia pues la cantidad de regiones deben ser 32, llama a la docente y le comenta lo sucedido, luego afirma que en la gráfica se debe lograr obtener las 32 regiones. Para la segunda pregunta de 1.2, es necesario	Observan lo planteado por el grupo de Antonia 1.2, leen las preguntas de la actividad y dicen: 00:22 “No estamos de acuerdo con el grupo porque lo hice matemáticamente y los números no cambian” Tenemos que lograr que salgan 32 regiones			*Inferencia: Se evidencia que para el grupo es más persuasivo el garante de 1.1 (tabla) que las dos representaciones graficas realizadas por ellos, la planteada en 1.2 y las relaciones planteadas para las cuerdas concurrentes.* ***Justificación:*** *Carlos evalúa de nuevo el valor de la potencia de 1.1 y afirma que numéricamente debe dar 32, por ello escriben que la respuesta de Antonia es falsa*	Para ellos lo “matemático”, haciendo referencia al comportamiento algebraico evidenciado en 1.1, es lo que debe ser verdadero ya que lo algebraico genera incertidumbre, es decir que no tomas en cuenta las diferentes representaciones y contraejemplos encontrados, ya que esta si les han generado distintos resultados. Se evidencia que la gráfica no se asume como prueba, ya que genera El dibujo no es considerado como una prueba pues no tiene en cuenta todos
	7:10 Carlos escribe la respuesta a la segunda pregunta de 1.2 Registro escrito (hoja 4- Pregunta dos) ¿Con el dibujo realizado por			*Inferencia: Para los estudiantes la representación gráfica no puede ser considerada como una prueba, pues no*	

revisar el registro escrito, a lo cual los estudiantes respondieron que la imagen no es suficiente para obtener la cantidad de regiones ya que se debería probar para todas las clases de hexágonos.	ellos es suficiente para conocer la cantidad de regiones? ¿Por qué? "No porque tendrían que intentarlo con todas las clases de hexágonos" 8:10 se acerca la docente a preguntar cómo van con la actividad, Carlos le comenta que la gráfica no es suficiente porque toca probarlos con todos los hexágonos regulares e irregulares			*contempla todas las posibilidades.* ***Justificación:*** *De acuerdo al registro escrito y lo realizado por ellos hasta el momento, se infiere que no es suficiente el dibujo realizado pues no tiene en cuenta "todas las clases de hexágonos".*	los casos. Se asocia a la tipificación de Hanna en el primer nivel de la prueba visual como ayuda a la demostración.
Video 2 MVI_0196 **Actividad:** cierre de actividad 1 (1.1 y 1.2) **Registro escrito:** Hoja 5 **Descripción:** los estudiantes responden las dos preguntas de cierre en el taller, para la primera le comentan a la docente su respuesta y existe registro audiovisual, para la segunda pregunta solo se cuenta con el registro escrito.	11:00 Los estudiantes responden la primera pregunta de Hoja 5. Registro escrito: ¿Si ustedes fueran la profe Martha a cuál de los grupos le darían la razón? "Al grupo #1 porque ellos dan una respuesta matemática y las matemáticas son exactas" 11:20 "Estamos de acuerdo con el grupo número 1, el de Juan, porque nos dio una respuesta matemática y la profesora Marta es profesora de Matemáticas"			*Inferencia: Para los estudiantes la relación algebraica es más fuerte por ser numérica y por tanto se considera como prueba matemática, mientras que la representación gráfica al producir dos tipos de resultados les genera incertidumbre.* ***Justificación:*** *los estudiantes insisten reiteradas veces en que el garante verdadero es el presentado por 1.1 (tabla) y al finalizar sus afirmaciones indican que este garante tiene más fuerza que los otros al ser numérico y lo relacionan con lo matemático.*	La relación algebraica al ser numérica es más fuerte que la representación gráfica. Al asociar lo numérico como matemáticos se intuye que tienen una visión de las matemáticas como un resultado que surge de operaciones, lo cual es usual en la escuela.
	Registro escrito hoja 5 Teniendo en cuenta su			*Inferencia: Nuevamente lo*	Hasta el final de la actividad los

	respuesta anterior, para la pregunta: qué les diría a los estudiantes, en relación con las respuestas dadas ¿Ambas son correctas? ¿Solo una? ¿Ninguna? ¿Por qué? "Les diría que solo una es correcta, porque el otro no miró todas las posibilidades para ese problema"			*estudiantes concluyen lo que se ha evidenciado durante toda la actividad y es que el garante de 1.1 (tabla) es más fuerte que la representación gráfica al no contemplar todas las posibilidades.* *Justificación: Al responder la segunda pregunta que cierran la actividad 1. (1.1 y 1.2) la representación gráfica no puede ser considerada como una prueba, pues no contempla a "todas las clases de hexágonos*	estudiantes mantuvieron su postura en relación con el valor de verdad del garante presentado en 1.1, aunque hay momentos en los cuales alcanzan a dudar, sin embargo, lo numérico tiene un valor de verdad más fuerte. Además, al ver que lo grafico podría variar y la tabla no, esto pudo influir considerablemente en su respuesta. **Nota:** En el video no se muestra evidencia de la respuesta a la segunda pregunta de la hoja 5, por tanto se recurre al registro escrito en el taller.
Video 3 MVI_0197 **Actividad:** Socialización actividad 1 (1.1 y 1.2) **Descripción:** Se realiza la socialización de la actividad 1, se tiene evidencia audiovisual y registro escrito de todos los grupos participantes. Cada uno de los grupos da su opinión y aportan a la discusión en clase. La docente realiza preguntas para guiar la socialización.	Se da inicio a la socialización, la docente comienza la discusión con la pregunta propuesta en la guía ¿Están de acuerdo con el grupo 1? (actividad 1.1) El primer grupo en responder es el grupo de Carlos, quienes afirman que: 1:30 "Nosotros dijimos que si (están de acuerdo con 1.1), porque la regla que se buscó para los anteriores ejercicios, o sea para los anteriores polígonos que se trazaron en la circunferencia se cumplía, entonces la regla tiene que seguir cumpliéndose"		***Inferencia:*** *Corresponde a un argumento que busca justificar la respuesta dada por el grupo 1* ***Justificación:*** "Nosotros dijimos que si (están de acuerdo con 1.1), porque la regla que se buscó para los anteriores ejercicios, o sea para los anteriores polígonos que se trazaron en la circunferencia se cumplía, entonces la		**En conclusión se realizó un debate en torno a las respuestas brindadas en 1.1 y 1.2, algunos grupos estaban de acuerdo con 1.1, relacionaban la respuesta con un procedimiento "matemático" que debe ser válido siempre, la tabla fue bastante persuasiva para ellos y siempre buscaron que de**

			regla tiene que seguir cumpliéndose”		**alguna manera la tabla se ajustara a las gráficas hechas por ellos. Otros grupos estaban de acuerdo con 1.2, ellos probaron gráficamente la cantidad de regiones.** **La docente buscó que sus estudiantes dieran a conocer su posición frente a la respuesta de la actividad 1, con el fin de que fueran ellos quienes evaluaran los garantes brindados.**
	Continuando con la discusión, se le dio la palabra al grupo de Juan Esteban, para dar a conocer su respuesta: 1:45 “No (no están de acuerdo con 1.1), porque en la práctica al hacer la circunferencia y dividirla en 6 puntos, se encuentran 30 regiones si los lados paralelos del hexágono son congruentes pero si los lados paralelos no son congruentes, hay 31 regiones”			***Inferencia:*** *Corresponde a un argumento que busca justificar la respuesta dada por el grupo 1* ***Justificación:*** *El grupo evalúa la respuesta de 1.1, por medio de sus propios procedimientos, dando como falso el garante brindado.*	
	Luego se da la palabra al grupo de Daniel, quienes afirman lo siguiente: 2:08 “No estamos de acuerdo con el grupo 1, ya que a pesar de que la persona que estaba bien, la que realizó para hallar cual es la cantidad de espacios que quedan en la figura, hace falta una prueba de pronto física, no es solo de operaciones, uno debe hallar los lados con base en la figura en vez de con base en la operación, ya que no siempre va a ser exacta la cantidad de regiones.”(Los estudiantes realizaron la gráfica de varios polígonos de seis lados y por esto dan esa afirmación)”			*Inferencia: Los estudiantes proponen un argumento para evaluar el valor de verdad de 1.1* ***Justificación:*** Este *grupo da un argumento para evidenciar que 1.1 es incorrecto, manifiestan que hace falta otro tipo de pruebas y que no puede guiarse por la tabla presentada, ellos realizaron la gráfica de varios polígonos de seis lados lo cual es un garante de tipo gráfico que da cuenta de su afirmación.*	
	Al ver que los estudiantes se empiezan a quedar callados la docente realiza una pregunta con el fin de que los otros grupos participen de la			***Inferencia:*** *El grupo propone un argumento que busca validar la respuesta dada por 1.1.*	

	discusión: "¿Alguien más? ¿hay alguien que esté de acuerdo con el grupo 1 además del grupo de Carlos?" El grupo de Paola levanta la mano y se les da la palabra 2:44 "Pues sí (están de acuerdo con 1.1), porque ellos usaron un método de operación, para pasar el número que está ahí al lado, para hallar así la escala de operación que está ahí al lado (hace referencia a la tabla propuesta en 1.1). Por esa parte si está bien, usaron un método que está bien."			***Justificación:*** *Los estudiantes apoyan la idea de usar un "método de operación" para dar solución a la pregunta planteada.* *Argumentan que el método numérico está bien y por esa razón el procedimiento también está bien, así validan la información brindada.*	
	El siguiente grupo en intervenir es el grupo de Juan David: 3:10 "Si estamos de acuerdo, ya que si vemos los ejercicios siempre va incrementando el número de regiones, duplicando el número de estas en cada punto, 1, 2, 4, 8, 16 y 32" (Hace referencia a la segunda columna de la tabla)	*Inferencia: Los estudiantes infieren información de la tabla para evidenciar un comportamiento algebraico con la secuencia gráfica, este proceso se asocia a IFI* *Justificación: Este grupo se basa en lo que vio en la tabla para apoyar a 1.1 con su justificación.*			
	De nuevo la docente interviene y pregunta a los estudiantes que grupo no está de acuerdo con el grupo 1. Se da la palabra al grupo de Camila: 3:49 "no (no están de acuerdo con 1.1), porque al llevar a cabo el ejercicio, encontramos que al trazar dentro de una circunferencia un hexágono y luego hallar la cantidad de regiones que habían, tras dividir este dibujando diagonales entre sus		*Inferencia: los estudiantes de este grupo argumentan porque no están de acuerdo con la justificación 1.1* *Justificación: Por medio de la gráfica de un polígono de seis lados y al contar la cantidad de regiones, los estudiantes encontraron que lo*		

	vértices, probamos que el número final de regiones es 30”		*propuesto en 1.1 no es válido y la manera de argumentar esta falsedad es mediante su mismo ejemplo.*		
	La docente interviene llevando la discusión a las ultimas preguntas de la actividad, ¿Cuál de los dos grupos tiene razón? ¿Cuál respuesta es correcta o las dos los son? Se da la palabra al grupo de Maikol: 4:41 “le daríamos la razón a los dos porque de cierta manera tienen una relación con lo planteado”	*Inferencia: El grupo relaciona lo visualizado en cada solución, (1.1 y 1.2). Asociamos este proceso a IFI* ***Justificación:*** *Justificación: Los estudiantes resaltan información que para ellos es importante de cada garante (1.1 y 1.2) y finalmente las relacionan, aun sin saber claramente a que relaciones se refieren, ellos afirman que existe cierta relación entre ellos.*			
	Siguiendo la discusión, se da la palabra al grupo de Juan Esteban 4:56 “En cierta parte al de Antonia (Actividad 1.2) porque ellos revisaron los resultados que se pueden obtener, pero igual no le hallamos toda la razón porque este puede quedar igualmente dividido en 31 regiones si se hace con otras medidas (Se refiere a no hacer un hexágono regular dentro de la circunferencia)”			*Inferencia: Los estudiantes de este grupo evalúan la respuesta dada en 1.2, y afirman que tampoco es válida.* ***Justificación:*** *Se evalúa la verdad o falsedad de las afirmaciones propuestas en 1.1 y 1.2, dando razón a 1.2. Sin embargo por la forma de evaluar cada garante, para este grupo hay que tener en cuenta las medidas de los lados del hexágono para dar una respuesta verdadera.*	

	Luego de esta intervención se da la palabra al grupo de Paola: 5:18 "Bueno, pues a pesar de que ambos fueron correctos, el más acertado es el de Antonia ya que lo hicieron gráficamente y así se puede observar mejor"		*Inferencia: Se da la razón a ambos grupos, sin embargo se argumenta porque un garante es más valido que el otro.* ***Justificación:*** *Este grupo al principio de la socialización afirmó que 1.1 tenía un argumento válido para dar solución a la actividad, sin embargo con el paso de la discusión y llegado este punto, afirman que los dos tienen razón y argumentan que 1.2 tiene más validez porque se puede observar mejor con una gráfica. Se aclara que aunque los estudiantes no plantean un argumento como tal, realizan una argumentación sobre un garante.*		
	La docente continua la discusión con otra pregunta "¿hay alguien que diga que los dos resultados son correctos además del grupo de Paola?" Al ver que ningún grupo levanta la mano de nuevo genera otra pregunta a un grupo en particular "Carlos, ustedes tiene que solo el primero es correcto ¿si?" El grupo de Carlos responde: 5:50 "si, porque		*Inferencia: Los estudiantes realizan afirmaciones para argumentar la razón por la cual están de acuerdo solo con el grupo 1 (1.1).* ***Justificación:*** *Carlos, que es el líder del grupo, va respondiendo a las preguntas que se*		

	escribimos que el otro no observo todas las posibilidades de desarrollar ese problema" La docente pregunta de nuevo al grupo ¿y ustedes probaron con todos los tipos de hexágonos? A lo que Carlos respondió: "no sé si todos pero miramos más que Antonia, entonces sí" La docente de nuevo pregunta ¿Cómo hicieron más que Antonia que resultados les dio? "En esta nos dio 30 (refiriéndose a algunos polígonos realizados por ellos), en el otro nos dio 31" La docente pregunta otra vez al mismo grupo: "¿Y si tienen esas respuestas, porque están de acuerdo con el grupo 1?" a lo que los estudiantes responden: "porque es una respuesta matemática. Porque no ves que hay más opciones para generalizar, por eso estamos de acuerdo"		*generan en la discusión, defendiendo siempre su punto de vista. Finalmente argumenta que la respuesta dada por el grupo es una respuesta "matemática" que generaliza, además que para que la gráfica sea válida, se debe realizar mayor cantidad de ejemplos con todas los tipos de polígonos posibles.*		
	La docente les pregunta a todos los grupos, si al hacer la circunferencia y trazar el hexágono, ¿a quienes les dan 32 regiones?, un grupo responde afirmativamente, sin embargo dudan de su respuesta al ver que no hay otro grupo que afirme lo mismo. Se realiza otra pregunta: "Si se traza un polígono de siete lados, ¿en cuántas partes quedara dividida la circunferencia?" Los grupos que continúan apoyando a 1.1 afirman de				**En este caso se pide a los estudiantes que realicen la actividad con un polígono de mayor cantidad de lados, con el fin de que ellos evaluaron sus argumentos con un polígono diferente al propuesto en la actividad**

	inmediato que en 64 partes, sin embargo los otros grupos dicen que no. La docente les pide a los estudiantes que por grupo realicen la gráfica con un polígono de siete lados.				
Video 4 MVI_0198 **Actividad:** Finalización de socialización actividad 1. **Descripción:** Se realiza una segunda socialización con lo encontrado por los estudiantes en un polígono de siete lados con el fin de llegar a una conclusión de la actividad propuesta	Se pide a los estudiantes que digan los resultados encontrados en la gráfica del heptágono. El grupo de Paola afirma que encontraron 54 regiones. El grupo de Juan esteban encontró 56 regiones El grupo de Daniel encontró 57 regiones El grupo de Paola de nuevo interviene: 00:27 “Es que depende de las diagonales, de los lados del polígono, porque se pueden cruzar todas en un solo punto” La docente interviene pidiendo a los estudiantes que revisen de nuevo la tabla 1.1, la parte numérica, lo que los estudiantes llaman “parte matemática” y pregunta ¿La tabla entonces está bien o mejor según la tabla cuantas regiones deberían dar en un polígono de 7 lados? Los estudiantes al unísono responden que 64 regiones, un estudiante afirma que es 2^6 pero que no les da.	*Inferencia: Cada grupo, da una respuesta de acuerdo a la gráfica que hicieron y la comparan con lo planteado en la tabla 1.1.* ***Justificación:*** *Los estudiantes hicieron la gráfica pedida y de acuerdo a esta dieron los resultados a la pregunta hecha, de nuevo observan que dependiendo del polígono se tienen cantidades distintas de regiones. Finalmente se dan cuenta que la cantidad de regiones graficadas no coinciden con la cantidad de regiones según la tabla.*			**Solo mediante este ejemplo todos los estudiantes quedaron convencidos que el procedimiento realizado en la tabla no era correcto.**
Video 5 MVI_0201 **Actividad:** Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un	Los estudiantes revisan la tabla entregada, luego, para explorar dibujan un polígono de siete lados y trazan sus diagonales. 02:23 “14… ya la hice y da 14,		*Inferencia: Se evidencia un argumento para responder a una pregunta, puesto que*		Se establece una conclusión a partir de una representación gráfica que se realiza.

polígono con el número de lados. **Registro escrito:** Hoja 6 **Población grabada:** Carlos, Camilo y Juan Diego **Descripción:** los estudiantes revisan la tabla presentada con el fin de comprenderla y establecer posibles relaciones, para ello primero centran la atención en responder la pregunta ¿Un polígono de siete lados cuántas diagonales tendrá?, para esto realizan polígonos de siete lados y trazan sus diagonales, luego deducen una fórmula general.	mire a ver si está bien (se la pasa a Camilo) Camilo la revisa…”		*a partir de los datos el estudiante establece una conclusión apoyándose en un garante de tipo gráfico (Representación del polígono y sus diagonales)* ***Justificación:*** *Carlos realiza una representación gráfica y concluye que un polígono de siete lados tiene 14 diagonales.*		
	Una vez Camilo termina de revisar la gráfica no la comprende y se la entrega a Carlos, quien la revisa. 03:33 Camilo“(revisa la gráfica, e intenta contarlas)… ya me confundí” Carlos: “por eso las conté mientras las iba haciendo (la dibuja nuevamente), … si da 14, ¿Pero cuál es la xxx fórmula?”		*Inferencia: se propone un argumento que pretende explicar una respuesta y el garante presentado es una construcción geométrica.* ***Justificación:*** *Carlos explica que obtuvo las 14 diagonales por medio de la construcción geométrica al decir que “por eso las conté mientras las iba haciendo”*		Carlos siente la necesidad de encontrar una fórmula general que proporcione el número de diagonales para cualquier polígono, ya que el recurso que tiene para justificarlo es la gráfica.
	Juan Diego y Carlos piensan sobre cuál podría ser la fórmula. 05:01 “(Juan Diego murmura algo)… Carlos dice: si me parece que es sobre 2, si es		*Inferencia: A partir de los datos suministrados se obtiene una conclusión, en la cual el garante es de tipo algebraico, que a su vez se apoya o*		Juan Diego y Carlos establecen una fórmula general, se infiere que esta ya era conocida por ellos y la acción que realizan es recordarla. La

	$\frac{n(n-3)}{2}$, (la escribe en una hoja), hagámosla con el de 4, (les da), luego la prueban para 5, 6 y 7…Listo nos dio" Carlos: ahora si sigamos con la actividad.		*comprueba por medio de representaciones gráficas para diferentes polígonos.* ***Justificación:*** *Carlos y Juan Diego establecen que para un polígono de n lados el número de diagonales es* $\frac{n(n-3)}{2}$ *La validación de esta afirmación está dada por la memoria y la comprobación de la formula a través de los ejemplos*		prueban para los polígonos dados en la tabla de la hoja 6
Video 5 MVI_0201 **Actividad:** 2.1 Grupo de Camilo, Andrea y Sofía **Registro escrito:** Hoja 7 **Descripción:** Los estudiantes leen la información presentada en la actividad, luego rápidamente establecen que el procedimiento seguido por este grupo es que cuentan las diagonales de cada vértice y las multiplican por el número de vértices del polígono.	Los estudiantes leen el enunciado planteado en la actividad 2.1 07:10 "Carlos dice, cómo tu eres Camilo (señala a su compañero Camilo) entonces vas a utilizar su procedimiento para determinar el número de diagonales de estos dos polígonos, vale…(piensa) Carlos dice (señalando en la hoja) por cada uno salen cinco, entonces esta tiene 40, está por cada uno salen 6 entonces esta tiene 54" Carlos vuelve y le explica a sus compañeros por qué afirmo lo anterior.	*Inferencia: Carlos revisa el procedimiento del grupo de Camilo e infiere información que le permite deducir el número de diagonales para los polígonos que les preguntan, esto además apoyado en la representación gráfica que se les da. Por lo anterior se considera que este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Justificación: Carlos establece que según el procedimiento realizado por el grupo 2.1 para el polígono de 8 lados hay 40 diagonales y para el polígono de 9 hay 54, esto lo hace porque infiere información del procedimiento presentado en la guía que permite*			Analizan el procedimiento gráfico dado en la actividad 2.1, comprenden lo realizado y rápidamente infieren el número de diagonales para los polígonos que les plantean.

		reconocer los procesos usados y la repetición de estos con otros ejemplos.			
Video 5 MVI_0201 Actividad: Pregunta Final actividad 2.1 **Registro escrito**: Hoja 8 Descripción: Los estudiantes de acuerdo a lo que evidenciaron responden la pregunta ¿Están de acuerdo con el grupo de Camilo? ¿Por qué?	Los estudiantes observan las preguntas que se muestran en la hoja 8. 07:52 Llaman a la docente y le preguntan "¿cuál respondemos solo está (señalando la primera pregunta de la hoja 8) 09:05 Carlos escribe la respuesta en la hoja, la cual es: "No, porque Camilo no está teniendo en cuenta que algunas diagonales se repiten, es decir, que da lo mismo contarla desde un vértice o desde otro" (se toma esta información de la hoja que los estudiantes entregaron una vez finalizaron el trabajo)			*Inferencia: En este caso se observa que los estudiantes evalúan el argumento de tipo gráfico dado por el grupo de Camilo y en ello cuestionan el hecho de que repiten diagonales, además lo comparan con la fórmula general que ya encontraron.* ***Justificación:*** *Los estudiantes dicen que no están de acuerdo con el grupo de Camilo, porque no tienen en cuenta las diagonales que se repiten.*	No comparten el procedimiento del grupo de Camilo, puesto que por medio de la representación gráfica y de la fórmula general que encontraron evidencian que repiten diagonales.
Video 5 MVI_0201 Actividad: 2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago y Pregunta Final actividad 2.2 **Registro escrito:** Hoja 8 y 9 **Descripción:** Los estudiantes leen la información presentada por el grupo 2.2, luego se dan cuenta que no tuvieron en cuenta la diagonal del polígono inicial. De acuerdo a lo que	Carlos lee en voz alta la información presentada en la actividad 2.2, luego observan y analizan. 12:52 "Carlos dice no están teniendo en cuenta esta diagonal (señala en la hoja)…si me entienden… Camilo dice sí" (no realizan en procedimiento para los polígonos que se les colocan) De acuerdo a lo que analizaron de la actividad responden la pregunta. 14:14 Carlos responde la pregunta en la hoja, "No, porque ella no está teniendo en cuenta la diagonal que se forma			*Inferencia: Evalúan el garante de tipo gráfico dado en la actividad 2.2, y de ello deducen que hace falta tener en cuenta una condición para que éste sea válido.* ***Justificación:*** *Los estudiantes dicen que no están de acuerdo con el grupo de Leidy porque ellos no tuvieron en cuenta la diagonal del polígono anterior.*	Carlos, camilo y Juan Diego no comparten el procedimiento expuesto por el grupo de Leidy, puesto que no tienen en cuenta la diagonal del polígono inicial.

evidenciaron responden la pregunta ¿Están de acuerdo con el grupo de Leidy? ¿Por qué?	al eliminar un lado del hexágono para poder formar el heptágono”				
Video 5 MVI_0201 **Actividad**: 2.3 Grupo de Samuel, Karina y Diego **Registro escrito**: Hoja 10 **Descripción:** Los estudiantes leen la información presentada en la actividad 2.3, deducen por medio de la fórmula general cuántas diagonales deben dar y luego realizan el procedimiento seguido por el grupo de Samuel para los dos polígonos dados.	Los estudiantes leen la información presentada en la actividad 2.3 para poder dar solución y responder a las preguntas planteadas. 18:23 “Carlos dice polígono de 8 lados, 8 por 4 sobre 2 da 16 y 9 por 6…Camilo dice pero tiene que estar el procedimiento… (Camilo numera los vértices en la hoja y traza las diagonales siguiendo el procedimiento del grupo de Samuel, pero ellos ya saben a qué resultado deben llegar porque primero lo prueban con la fórmula general.)” De acuerdo a lo que analizaron de la actividad responden la pregunta. 00:01 Carlos responde la pregunta de la hoja, “Sí, porque él lo dibujo de cero y no con una base y además tuvo en cuenta que algunas diagonales se repetían y por eso no las contó”	*Inferencia: Se presenta el proceso IFI, en el momento en que los estudiantes reproducen el proceso de conteo en otros ejemplos.* ***Justificación:*** *Los estudiantes analizan lo visto en el procedimiento 2.3, lo apropian y lo representan para los polígonos solicitados.*		***Inferencia:*** *Los estudiantes están evaluando el garante de tipo gráfico dado por el grupo de Samuel, puesto que lo prueban para polígonos de 8 y 9 lados, de igual forma lo verifican con el garante algebraico que ya habían encontrado.* *Evalúan el garante a partir de los datos dados por la formula y dos gráficamente* ***Justificación:*** *Los estudiantes siguiendo el procedimiento planteado por el grupo de Samuel, en donde se enumeraba la cantidad de diagonales de cada vértice, teniendo en cuenta las repeticiones, comprueban que un polígono de 8 lados tiene 20 diagonales y un polígono de 9 lados tiene 27 diagonales. Se comparan los resultados de las dos formas de validar y al ser iguales, los*	Si se realiza un conteo ordenado se obtiene el mismo resultado de la fórmula algebraica**.**

				estudiantes indican que este procedimiento funciona porque dibujo en orden y tuvieron en cuenta las diagonales repetida.	
Video 6 MVI_0202 **Actividad**: Preguntas cierre de actividades 2.1, 2.2 y 2.3 **Registro escrito**: Hoja 11 **Descripción:** Los estudiantes de acuerdo a lo realizado responden las preguntas: Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué?	Para finalizar con la actividad propuesta los estudiantes responden las preguntas finales de cierre de actividad. 01:37 A la primera pregunta ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? responden: "Al grupo de Samuel, porque él es el que tuvo en cuenta todas las condiciones que estaban en el polígono y no omitió ningún aspecto como la repetición de diagonales y o la eliminación de un lado" En cuanto a la segunda pregunta, teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué? dicen: "Solo una porque Samuel fue el que acertó ya que tuvo el mismo resultado que la fórmula de cómo calcular las diagonales de un polígono que es: $\frac{n(n-3)}{2}$ donde n es el número de lados del polígono"			**Inferencia:** Los estudiantes una vez finaliza la actividad realizan una evaluación de los garantes presentados en cada una de las tres actividades y de ello se evidencia que para ellos es válido el presentado por el grupo de Samuel donde realizan un conteo ordenado puesto que la respuesta coincide con la fórmula general. **Justificación:** se evidencia cuando los estudiantes afirman que le dan la razón al grupo de Samuel, porque ellos tuvieron en cuenta todas las condiciones que estaban en el polígono y además obtuvieron el mismo resultado que se tiene con la fórmula general.	Al realizar un conteo ordenado se obtienen las diagonales que son sin alterar el resultado que se da en la fórmula general.
Video 7 MVI_0205 **Actividad:**	Para dar inicio a la socialización de la actividad, se pregunta a	*Inferencia: Los estudiantes infieren*			

Socialización actividad 2 **Descripción:** Se realiza la socialización de la actividad 2, preguntando a los estudiantes del curso por cada uno de los grupos (2.1, 2.2 y 2.3) que se presentan en la actividad.	los estudiantes por cada uno de los grupos que dieron respuesta a la actividad (2.1, 2.2 y 2.3). Del primer grupo (2.1), se pregunta si entendieron el procedimiento que usaron los estudiantes, el grupo de Juan David responde: 00:33 “si, multiplicar el número de lados que tiene el polígono por el número de diagonales que sale desde un vértice” La docente entonces pregunta ¿Qué paso con ese primer grupo? El grupo de Maikol responde: 00:54 “Están… en nuestra opinión están mal, porque contaban todas las diagonales y no tomaban en cuenta que se repetían” El grupo de juan Esteban complementa 1:12 “es que con ese procedimiento, contaba dos veces cada diagonal, todas”	*información que les permite comprender el procedimiento usado por 2.1 para solucionar el problema propuesto, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Justificación: Los estudiantes comunican la información que vieron en las gráficas, la replican en otros ejemplos y de esta manera evidenciaban los procesos incorrectos que se presentaba en esta respuesta.*			
	Dadas estas razones la docente pregunta por el segundo grupo (2.2), ¿Qué paso con ese grupo? El grupo de Carlos pide la palabra: “Que Leidy al armar el polígono basado en otro, solo agregando un vértice, no tenía en cuenta que un lado del anterior polígono, del primero se convertía en una diagonal, entonces por eso a ellos les daba 13 diagonales, ella no tenía en cuenta un lado del polígono primero”	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que le permite comprender el procedimiento usado por 2.2 para solucionar el problema propuesto, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *De nuevo los estudiantes comunican la información que vieron en la gráfica y de esta manera evidenciaban los procesos incorrectos que se presentaba en esta respuesta.*			

	Al ver que todos los estudiantes están de acuerdo con la información dada por Carlos, se pregunta por el grupo de Samuel (2.3) ¿Qué paso con ese tercer grupo? El grupo de Sebastián contesta: 2:14 "Pues ellos utilizaron un método que si se podía probar, que era pues dividir cada diagonal que salía del vértice con colores y pues entonces así no se repetían y las sacaban contando al final"	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que le permite comprender el procedimiento usado por 2.3 para solucionar el problema propuesto, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:** Al igual que con las respuestas anteriores los estudiantes comunican la información que vieron en la gráfica y en este caso afirmaron que las diagonales no se repetían ni hacían falta*			
SESIÓN 1 Colegio De La Salle					
Información recogida	**Afirmación del video " " información textual … pausa en el discurso**	**Observado sobre visualización. VP - IFI**	**Observado sobre argumentación**	**Evaluación de argumentos**	**Observación**
Video 1 MVI_0195 **Actividad:** Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de2. **Registro escrito:** Hojas 1 -2 **Población grabada:** Carlos y sus dos compañeros **Descripción:** los estudiantes revisan la tabla presentada con el fin de comprenderla y establecer posibles	Los estudiantes analizan la información planteada en la tabla, en busca de relaciones entre la cantidad de puntos sobre la circunferencia y las potencias de dos. 2:42 "acá hay tres puntos entonces ¿$4=2^2$? (cara de duda) 03:07 "¡ay! ya entendí cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente"	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que le permite comprender un posible comportamiento algebraico con la secuencia gráfica, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:** Los estudiantes revisan la tabla y buscan posibles relaciones entre la cantidad de puntos y las potencias de 2, sin embargo ellos esperaban que con 3 puntos, este número apareciera en las potencias, al ver que esto no sucedió, compararon los valores de una*			La información dada en la tabla les permite establecer un posible comportamiento algebraico.

relaciones y responden a la pregunta ¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos?, esto lo registran en la hoja 2.		*potencia a la otra y se dieron cuenta que la potencia para cada caso aumenta en uno su exponente.*			
	Los estudiantes intentan dar solución a la pregunta planteada: ¿En cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos?, para ello dicen: ”En 32 - $2^5 = 32$” 03:57		*Inferencia: se plantea un argumento para justificar y dar respuesta a la pregunta* ***Justificación:*** *Los estudiantes afirman que con 6 puntos el número de regiones serán 32.* *Esto debido a la relación planteada “cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente”, la cual sería el garante de dicho argumento.*		Para los estudiantes el comportamiento algebraico presentado en la tabla es muy fuerte por tanto los convence para concluir la cantidad de puntos.
Video 1 MVI_0195 **Actividad:** Respuesta a **1.1** Grupo Juan, Lucía y Pablo. **Registro escrito:** Hoja 3 Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. **Registro escrito:** Hoja 4 **Descripción:** Los estudiantes observan el planteamiento de 1.1, a lo cual intentan responder la pregunta que se plantea, sin	Los estudiantes leen la respuesta dada por el grupo de Juan y responden 1.1: 6:25 Carlos “si, porque si dibujamos la circunferencia… pero no… porque no la hemos dibujado … venga la dibujamos” Carlos dibuja la circunferencia con 6 puntos sobre ella y traza las regiones, luego las cuentan y obtienen 31 regiones, afirman: 08:56 “bueno pero se aproxima”			*Inferencia: Para los estudiantes el garante presentado en 1.1 (secuencia - tabla) es muy persuasivo, de tal forma que no confían ni siquiera en su representación gráfica, prefieren ajustarla al decir que se aproxima.* ***Justificación:*** *Inicialmente los estudiantes evalúan 1.1 y teniendo en cuenta la afirmación realizada por ellos anteriormente,*	Es más fuerte la relación algebraica presentada en 1.1, tanto que los estudiantes prefieren ajustar la cantidad vista gráficamente con una aproximación y decir que serían 32.

embargo se dan cuenta que están haciendo uso de una representación gráfica que no existe, por tanto realizan dos veces la gráfica, una en una hoja anexa y otra en el taller, cuentan las regiones y obtienen 31, luego comparan su respuesta con el garante presentado en 1.2, lo cual los hace dudar y preguntan a la docente. Al contrastar las dos representaciones graficas (la realizada por ellos y la de 1.2) se dan cuenta que en 1.2 concurren tres de las cuerdas en el centro, para lo cual manifiestan que la gráfica incorrecta es la realizada por ellos.				*responden que sí es verdadera, sin embargo la justificación corresponde a una representación gráfica que aún no existe, por tanto requieren realizarla en una hoja anexa, luego cuentan el número de regiones, obteniendo 31, pero como es un valor muy cercano a 32, prefieren seguir afirmando que el número de regiones es 32.*	
	Carlos llama a la docente y le comenta: “a ellos (hace referencia al grupo de Antonia 1.2) les da 30 y acá (hace referencia a su representación gráfica) nos da 31”			*Inferencia: EL garante (gráfico) presentado en 1.2* ***produce duda del garante de 1.1 y la representación gráfica realizada por ellos mismos.*** ***Justificación:*** *Al revisar la actividad 1.2, se dan cuenta que el garante presentado (gráfico) tiene 30 regiones, lo cual les produce duda del garante de 1.1 y deciden llamar a la docente para buscar una explicación, sin embargo ella los escucha, pero no les da a conocer su punto de vista. Los*	Al realizar una mejor gráfica y llamar a la docente para preguntarle por qué obtienen diferente valor, se evidencia que el garante algebraico se pone en duda.

				estudiantes realizan de nuevo la gráfica, para ello utilizan instrumentos con más precisión como compás y regla, uniendo los seis puntos, al contar el número de regiones obtienen de nuevo 31.	
	Siguen analizando su gráfica e intentan buscar una explicación del porqué no se obtienen los mismos resultados, entonces dicen: 21:43 "En la gráfica del grupo todos los segmentos están en la mitad, pero como nuestra gráfica esta toda chambona, se suponen que todo debe estar en la mitad, o sea que si nos da 30"	*Inferencia: Se evidencia IFI cuando Los estudiantes observan regiones solapadas al intersecarse tres cuerdas en el garante de 1.2* *Justificación:* "En la gráfica del grupo todos los segmentos están en la mitad"	*Inferencia: Los estudiantes observan regiones solapadas al intersecarse tres cuerdas en el garante de 1.2 de la actividad y la comparan con la realizada por ellos; lo anterior, hace parte de un argumento que busca validar el garante gráfico de la actividad 1.2* ***Justificación:*** obsérvese que ellos están mostrando que consideran que la gráfica de Antonia es cierta y buscan encontrar porque les quedo a ellos mal.		Al observar la representación gráfica de 1.2, los estudiantes le otorgan el valor de valor de verdad a este garante en comparación con la realizada por ellos.
Video 2 MVI_0196 **Actividad:** 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. **Registro escrito:** Hoja 4 **Descripción:** Los estudiantes evalúan de nuevo el valor de la	Observan lo planteado por el grupo de Antonia 1.2, leen las preguntas de la actividad y dicen: 00:22 "No estamos de acuerdo con el grupo porque lo hice matemáticamente y los números no cambian" Tenemos que lograr que salgan 32 regiones			*Inferencia: Se evidencia que para el grupo es más persuasivo el garante de 1.1 (tabla) que las dos representaciones graficas realizadas por ellos, la planteada en 1.2 y las relaciones planteadas*	Para ellos lo "matemático", haciendo referencia al comportamiento algebraico evidenciado en 1.1, es lo que debe ser verdadero ya que lo algebraico genera incertidumbre, es

potencia de dos en la calculadora, Carlos dice que matemáticamente debe dar 32, entonces escribe como respuesta a 1.2 que no está de acuerdo con el grupo de Antonia pues la cantidad de regiones deben ser 32, llama a la docente y le comenta lo sucedido, luego afirma que en la gráfica se debe lograr obtener las 32 regiones. Para la segunda pregunta de 1.2, es necesario revisar el registro escrito, a lo cual los estudiantes respondieron que la imagen no es suficiente para obtener la cantidad de regiones ya que se debería probar para todas las clases de hexágonos.				*para las cuerdas concurrentes.* ***Justificación:*** *Carlos evalúa de nuevo el valor de la potencia de 1.1 y afirma que numéricamente debe dar 32, por ello escriben que la respuesta de Antonia es falsa*	decir que no tomas en cuenta las diferentes representaciones y contraejemplos encontrados, ya que esta si les han generado distintos resultados. Se evidencia que la gráfica no se asume como prueba, ya que genera El dibujo no es considerado como una prueba pues no tiene en cuenta todos los casos. Se asocia a la tipificación de Hanna en el primer nivel de la prueba visual como ayuda a la demostración.
	7:10 Carlos escribe la respuesta a la segunda pregunta de 1.2 Registro escrito (hoja 4- Pregunta dos) ¿Con el dibujo realizado por ellos es suficiente para conocer la cantidad de regiones? ¿Por qué? "No porque tendrían que intentarlo con todas las clases de hexágonos" 8:10 se acerca la docente a preguntar cómo van con la actividad, Carlos le comenta que la gráfica no es suficiente porque toca probarlos con todos los hexágonos regulares e irregulares			*Inferencia: Para los estudiantes la representación gráfica no puede ser considerada como una prueba, pues no contempla todas las posibilidades.* ***Justificación:*** *De acuerdo al registro escrito y lo realizado por ellos hasta el momento, se infiere que no es suficiente el dibujo realizado pues no tiene en cuenta "todas las clases de hexágonos".*	
Video 2 MVI_0196 **Actividad:** cierre de actividad 1 (1.1 y 1.2) **Registro escrito:** Hoja 5 **Descripción:** los estudiantes responden las dos preguntas de cierre en el taller, para la primera le comentan a la docente su	11:00 Los estudiantes responden la primera pregunta de Hoja 5. Registro escrito: ¿Si ustedes fueran la profe Martha a cuál de los grupos le darían la razón? "Al grupo #1 porque ellos dan una respuesta matemática y las matemáticas son exactas" 11:20 "Estamos de acuerdo con el grupo número 1, el de Juan, porque nos dio una respuesta			*Inferencia: Para los estudiantes la relación algebraica es más fuerte por ser numérica y por tanto se considera como prueba matemática, mientras que la representación gráfica al producir dos tipos de resultados les genera*	La relación algebraica al ser numérica es más fuerte que la representación gráfica. Al asociar lo numérico como matemáticos se intuye que tienen una visión de las matemáticas como un resultado que surge de operaciones, lo

respuesta y existe registro audiovisual, para la segunda pregunta solo se cuenta con el registro escrito.	matemática y la profesora Marta es profesora de Matemáticas”			*incertidumbre.* ***Justificación:*** *los estudiantes insisten reiteradas veces en que el garante verdadero es el presentado por 1.1 (tabla) y al finalizar sus afirmaciones indican que este garante tiene más fuerza que los otros al ser numérico y lo relacionan con lo matemático.*	cual es usual en la escuela.
	Registro escrito hoja 5 Teniendo en cuenta su respuesta anterior, para la pregunta: qué les diría a los estudiantes, en relación con las respuestas dadas ¿Ambas son correctas? ¿Solo una? ¿Ninguna? ¿Por qué? “Les diría que solo una es correcta, porque el otro no miró todas las posibilidades para ese problema”			*Inferencia: Nuevamente lo estudiantes concluyen lo que se ha evidenciado durante toda la actividad y es que el garante de 1.1 (tabla) es más fuerte que la representación gráfica al no contemplar todas las posibilidades.* *Justificación: Al responder la segunda pregunta que cierran la actividad 1. (1.1 y 1.2) la representación gráfica no puede ser considerada como una prueba, pues no contempla a “todas las clases de hexágonos*	Hasta el final de la actividad los estudiantes mantuvieron su postura en relación con el valor de verdad del garante presentado en 1.1, aunque hay momentos en los cuales alcanzan a dudar, sin embargo, lo numérico tiene un valor de verdad más fuerte. Además, al ver que lo grafico podría variar y la tabla no, esto pudo influir considerablemente en su respuesta. **Nota:** En el video no se muestra evidencia de la respuesta a la segunda pregunta de la hoja 5, por tanto se recurre al registro escrito en el taller.

Video 3 MVI_0197 **Actividad:** Socialización actividad 1 (1.1 y 1.2) **Descripción:** Se realiza la socialización de la actividad 1, se tiene evidencia audiovisual y registro escrito de todos los grupos participantes. Cada uno de los grupos da su opinión y aportan a la discusión en clase. La docente realiza preguntas para guiar la socialización.	Se da inicio a la socialización, la docente comienza la discusión con la pregunta propuesta en la guía ¿Están de acuerdo con el grupo 1? (actividad 1.1) El primer grupo en responder es el grupo de Carlos, quienes afirman que: 1:30 "Nosotros dijimos que si (están de acuerdo con 1.1), porque la regla que se buscó para los anteriores ejercicios, o sea para los anteriores polígonos que se trazaron en la circunferencia se cumplía, entonces la regla tiene que seguir cumpliéndose"		***Inferencia:*** *Corresponde a un argumento que busca justificar la respuesta dada por el grupo 1* ***Justificación:*** "Nosotros dijimos que si (están de acuerdo con 1.1), porque la regla que se buscó para los anteriores ejercicios, o sea para los anteriores polígonos que se trazaron en la circunferencia se cumplía, entonces la regla tiene que seguir cumpliéndose"		**En conclusión se realizó un debate en torno a las respuestas brindadas en 1.1 y 1.2, algunos grupos estaban de acuerdo con 1.1, relacionaban la respuesta con un procedimiento "matemático" que debe ser válido siempre, la tabla fue bastante persuasiva para ellos y siempre buscaron que de alguna manera la tabla se ajustara a las gráficas hechas por ellos. Otros grupos estaban de acuerdo con 1.2, ellos probaron gráficamente la cantidad de regiones. La docente buscó que sus estudiantes dieran a conocer su posición frente a la respuesta de la actividad 1, con el fin de que fueran ellos quienes evaluaran los garantes brindados.**
	Continuando con la discusión, se le dio la palabra al grupo de Juan Esteban, para dar a conocer su respuesta: 1:45 "No (no están de acuerdo con 1.1), porque en la práctica al hacer la circunferencia y dividirla en 6 puntos, se encuentran 30 regiones si los lados paralelos del hexágono son congruentes pero si los lados paralelos no son congruentes, hay 31 regiones"			***Inferencia:*** *Corresponde a un argumento que busca justificar la respuesta dada por el grupo 1* ***Justificación:*** *El grupo evalúa la respuesta de 1.1, por medio de sus propios procedimientos, dando como falso el garante brindado.*	
	Luego se da la palabra al grupo de Daniel, quienes afirman lo siguiente: 2:08 "No estamos de acuerdo con el grupo 1, ya que a pesar de que la persona que estaba bien, la que realizó para hallar cual es la cantidad de espacios que quedan en la figura, hace falta una prueba de pronto física, no es solo de			*Inferencia: Los estudiantes proponen un argumento para evaluar el valor de verdad de 1.1* ***Justificación:*** Este *grupo da un argumento para evidenciar que 1.1 es incorrecto,*	

	operaciones, uno debe hallar los lados con base en la figura en vez de con base en la operación, ya que no siempre va a ser exacta la cantidad de regiones."(Los estudiantes realizaron la gráfica de varios polígonos de seis lados y por esto dan esa afirmación)"			*manifiestan que hace falta otro tipo de pruebas y que no puede guiarse por la tabla presentada, ellos realizaron la gráfica de varios polígonos de seis lados lo cual es un garante de tipo gráfico que da cuenta de su afirmación.*	
	Al ver que los estudiantes se empiezan a quedar callados la docente realiza una pregunta con el fin de que los otros grupos participen de la discusión: "¿Alguien más? ¿hay alguien que esté de acuerdo con el grupo 1 además del grupo de Carlos?" El grupo de Paola levanta la mano y se les da la palabra 2:44 "Pues sí (están de acuerdo con 1.1), porque ellos usaron un método de operación, para pasar el número que está ahí al lado, para hallar así la escala de operación que está ahí al lado (hace referencia a la tabla propuesta en 1.1). Por esa parte si está bien, usaron un método que está bien."			***Inferencia:*** *El grupo propone un argumento que busca validar la respuesta dada por 1.1.* ***Justificación:*** *Los estudiantes apoyan la idea de usar un "método de operación" para dar solución a la pregunta planteada. Argumentan que el método numérico está bien y por esa razón el procedimiento también está bien, así validan la información brindada.*	
	El siguiente grupo en intervenir es el grupo de Juan David: 3:10 "Si estamos de acuerdo, ya que si vemos los ejercicios siempre va incrementando el número de regiones, duplicando el número de estas en cada punto, 1, 2, 4, 8, 16 y 32" (Hace referencia a la segunda columna de la tabla)	*Inferencia: Los estudiantes infieren información de la tabla para evidenciar un comportamiento algebraico con la secuencia gráfica, este proceso se asocia a IFI* ***Justificación:*** *Este grupo*			

		se basa en lo que vio en la tabla para apoyar a 1.1 con su justificación.			
	De nuevo la docente interviene y pregunta a los estudiantes que grupo no está de acuerdo con el grupo 1. Se da la palabra al grupo de Camila: 3:49 “no (no están de acuerdo con 1.1), porque al llevar a cabo el ejercicio, encontramos que al trazar dentro de una circunferencia un hexágono y luego hallar la cantidad de regiones que habían, tras dividir este dibujando diagonales entre sus vértices, probamos que el número final de regiones es 30”		*Inferencia: los estudiantes de este grupo argumentan porque no están de acuerdo con la justificación 1.1* ***Justificación:*** *Por medio de la gráfica de un polígono de seis lados y al contar la cantidad de regiones, los estudiantes encontraron que lo propuesto en 1.1 no es válido y la manera de argumentar esta falsedad es mediante su mismo ejemplo.*		
	La docente interviene llevando la discusión a las ultimas preguntas de la actividad, ¿Cuál de los dos grupos tiene razón? ¿Cuál respuesta es correcta o las dos los son? Se da la palabra al grupo de Maikol: 4:41 “le daríamos la razón a los dos porque de cierta manera tienen una relación con lo planteado”	*Inferencia: El grupo relaciona lo visualizado en cada solución, (1.1 y 1.2). Asociamos este proceso a IFI* ***Justificación:*** *Justificación: Los estudiantes resaltan información que para ellos es importante de cada garante (1.1 y 1.2) y finalmente las relacionan, aun sin saber claramente a que relaciones se refieren, ellos afirman que existe cierta relación entre ellos.*			
	Siguiendo la discusión, se da la palabra al grupo de Juan Esteban 4:56 “En cierta parte al de Antonia (Actividad 1.2)			*Inferencia: Los estudiantes de este grupo evalúan la respuesta dada en*	

	porque ellos revisaron los resultados que se pueden obtener, pero igual no le hallamos toda la razón porque este puede quedar igualmente dividido en 31 regiones si se hace con otras medidas (Se refiere a no hacer un hexágono regular dentro de la circunferencia)"			*1.2, y afirman que tampoco es válida.* ***Justificación:*** *Se evalúa la verdad o falsedad de las afirmaciones propuestas en 1.1 y 1.2, dando razón a 1.2. Sin embargo por la forma de evaluar cada garante, para este grupo hay que tener en cuenta las medidas de los lados del hexágono para dar una respuesta verdadera.*	
	Luego de esta intervención se da la palabra al grupo de Paola: 5:18 "Bueno, pues a pesar de que ambos fueron correctos, el más acertado es el de Antonia ya que lo hicieron gráficamente y así se puede observar mejor"		*Inferencia: Se da la razón a ambos grupos, sin embargo se argumenta porque un garante es más valido que el otro.* ***Justificación:*** *Este grupo al principio de la socialización afirmó que 1.1 tenía un argumento válido para dar solución a la actividad, sin embargo con el paso de la discusión y llegado este punto, afirman que los dos tienen razón y argumentan que 1.2 tiene más validez porque se puede observar mejor con una gráfica. Se aclara que aunque los estudiantes no*		

			plantean un argumento como tal, realizan una argumentación sobre un garante.		
	La docente continua la discusión con otra pregunta "¿hay alguien que diga que los dos resultados son correctos además del grupo de Paola?" Al ver que ningún grupo levanta la mano de nuevo genera otra pregunta a un grupo en particular "Carlos, ustedes tiene que solo el primero es correcto ¿si?" El grupo de Carlos responde: 5:50 "si, porque escribimos que el otro no observo todas las posibilidades de desarrollar ese problema" La docente pregunta de nuevo al grupo ¿y ustedes probaron con todos los tipos de hexágonos? A lo que Carlos respondió: "no sé si todos pero miramos más que Antonia, entonces sí" La docente de nuevo pregunta ¿Cómo hicieron más que Antonia que resultados les dio? "En esta nos dio 30 (refiriéndose a algunos polígonos realizados por ellos), en el otro nos dio 31" La docente pregunta otra vez al mismo grupo: "¿Y si tienen esas respuestas, porque están de acuerdo con el grupo 1?" a lo que los estudiantes responden: "porque es una respuesta matemática. Porque no ves que hay más opciones para generalizar, por eso		*Inferencia: Los estudiantes realizan afirmaciones para argumentar la razón por la cual están de acuerdo solo con el grupo 1 (1.1).* ***Justificación:*** *Carlos, que es el líder del grupo, va respondiendo a las preguntas que se generan en la discusión, defendiendo siempre su punto de vista. Finalmente argumenta que la respuesta dada por el grupo es una respuesta "matemática" que generaliza, además que para que la gráfica sea válida, se debe realizar mayor cantidad de ejemplos con todas los tipos de polígonos posibles.*		

	estamos de acuerdo”				
	La docente les pregunta a todos los grupos, si al hacer la circunferencia y trazar el hexágono, ¿a quienes les dan 32 regiones?, un grupo responde afirmativamente, sin embargo dudan de su respuesta al ver que no hay otro grupo que afirme lo mismo. Se realiza otra pregunta: “Si se traza un polígono de siete lados, ¿en cuántas partes quedara dividida la circunferencia?” Los grupos que continúan apoyando a 1.1 afirman de inmediato que en 64 partes, sin embargo los otros grupos dicen que no. La docente les pide a los estudiantes que por grupo realicen la gráfica con un polígono de siete lados.				**En este caso se pide a los estudiantes que realicen la actividad con un polígono de mayor cantidad de lados, con el fin de que ellos evaluaron sus argumentos con un polígono diferente al propuesto en la actividad**
Video 4 MVI_0198 **Actividad:** Finalización de socialización actividad 1. **Descripción:** Se realiza una segunda socialización con lo encontrado por los estudiantes en un polígono de siete lados con el fin de llegar a una conclusión de la actividad propuesta	Se pide a los estudiantes que digan los resultados encontrados en la gráfica del heptágono. El grupo de Paola afirma que encontraron 54 regiones. El grupo de Juan esteban encontró 56 regiones El grupo de Daniel encontró 57 regiones El grupo de Paola de nuevo interviene: 00:27 “Es que depende de las diagonales, de los lados del polígono, porque se pueden cruzar todas en un solo punto” La docente interviene pidiendo	*Inferencia: Cada grupo, da una respuesta de acuerdo a la gráfica que hicieron y la comparan con lo planteado en la tabla 1.1.* ***Justificación:*** *Los estudiantes hicieron la gráfica pedida y de acuerdo a esta dieron los resultados a la pregunta hecha, de nuevo observan que dependiendo del polígono se tienen cantidades distintas de regiones. Finalmente se dan cuenta*			**Solo mediante este ejemplo todos los estudiantes quedaron convencidos que el procedimiento realizado en la tabla no era correcto.**

	a los estudiantes que revisen de nuevo la tabla 1.1, la parte numérica, lo que los estudiantes llaman "parte matemática" y pregunta ¿La tabla entonces está bien o mejor según la tabla cuantas regiones deberían dar en un polígono de 7 lados? Los estudiantes al unísono responden que 64 regiones, un estudiante afirma que es 2^6 pero que no les da.	*que la cantidad de regiones graficadas no coinciden con la cantidad de regiones según la tabla.*			
Video 5 MVI_0201 **Actividad:** Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados. **Registro escrito:** Hoja 6 **Población grabada:** Carlos, Camilo y Juan Diego **Descripción:** los estudiantes revisan la tabla presentada con el fin de comprenderla y establecer posibles relaciones, para ello primero centran la atención en responder la pregunta ¿Un	Los estudiantes revisan la tabla entregada, luego, para explorar dibujan un polígono de siete lados y trazan sus diagonales. 02:23 "14… ya la hice y da 14, mire a ver si está bien (se la pasa a Camilo) Camilo la revisa…"		*Inferencia: Se evidencia un argumento para responder a una pregunta, puesto que a partir de los datos el estudiante establece una conclusión apoyándose en un garante de tipo gráfico (Representación del polígono y sus diagonales)* ***Justificación:*** *Carlos realiza una representación gráfica y concluye que un polígono de siete lados tiene 14 diagonales.*		Se establece una conclusión a partir de una representación gráfica que se realiza.
polígono de siete lados cuántas diagonales tendrá?, para esto realizan polígonos de siete lados y trazan sus diagonales, luego deducen una fórmula	Una vez Camilo termina de revisar la gráfica no la comprende y se la entrega a Carlos, quien la revisa. 03:33 Camilo"(revisa la gráfica, e intenta contarlas)… ya me confundí"		*Inferencia: se propone un argumento que pretende explicar una respuesta y el garante presentado es una construcción*		Carlos siente la necesidad de encontrar una fórmula general que proporcione el número de diagonales para

general.	Carlos: "por eso las conté mientras las iba haciendo (la dibuja nuevamente), … si da 14, ¿Pero cuál es la xxx fórmula?"		*geométrica.* ***Justificación:*** *Carlos explica que obtuvo las 14 diagonales por medio de la construcción geométrica al decir que "por eso las conté mientras las iba haciendo"*		cualquier polígono, ya que el recurso que tiene para justificarlo es la gráfica.
	Juan Diego y Carlos piensan sobre cuál podría ser la fórmula. 05:01 "(Juan Diego murmura algo)… Carlos dice: si me parece que es sobre 2, si es $\frac{n(n-3)}{2}$, (la escribe en una hoja), hagámosla con el de 4, (les da), luego la prueban para 5, 6 y 7…Listo nos dio" Carlos: ahora si sigamos con la actividad.		*Inferencia: A partir de los datos suministrados se obtiene una conclusión, en la cual el garante es de tipo algebraico, que a su vez se apoya o comprueba por medio de representaciones gráficas para diferentes polígonos.* ***Justificación:*** *Carlos y Juan Diego establecen que para un polígono de n lados el número de diagonales es* $\frac{n(n-3)}{2}$ *La validación de esta afirmación está dada por la memoria y la comprobación de la formula a través de los ejemplos*		Juan Diego y Carlos establecen una fórmula general, se infiere que esta ya era conocida por ellos y la acción que realizan es recordarla. La prueban para los polígonos dados en la tabla de la hoja 6
Video 5 MVI_0201 Actividad: 2.1 Grupo de Camilo, Andrea y Sofía **Registro escrito:** Hoja 7	Los estudiantes leen el enunciado planteado en la actividad 2.1 07:10 "Carlos dice, cómo tu eres Camilo (señala a su compañero Camilo) entonces	*Inferencia: Carlos revisa el procedimiento del grupo de Camilo e infiere información que le permite deducir el número de diagonales para los polígonos que les*			Analizan el procedimiento gráfico dado en la actividad 2.1, comprenden lo realizado y rápidamente infieren el número de

Descripción: Los estudiantes leen la información presentada en la actividad, luego rápidamente establecen que el procedimiento seguido por este grupo es que cuentan las diagonales de cada vértice y las multiplican por el número de vértices del polígono.	vas a utilizar su procedimiento para determinar el número de diagonales de estos dos polígonos, vale…(piensa) Carlos dice (señalando en la hoja) por cada uno salen cinco, entonces esta tiene 40, está por cada uno salen 6 entonces esta tiene 54" Carlos vuelve y le explica a sus compañeros por qué afirmo lo anterior.	*preguntan, esto además apoyado en la representación gráfica que se les da. Por lo anterior se considera que este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Justificación: Carlos establece que según el procedimiento realizado por el grupo 2.1 para el polígono de 8 lados hay 40 diagonales y para el polígono de 9 hay 54, esto lo hace porque infiere información del procedimiento presentado en la guía que permite reconocer los procesos usados y la repetición de estos con otros ejemplos.*			diagonales para los polígonos que les plantean.
Video 5 MVI_0201 **Actividad:** Pregunta Final actividad 2.1 **Registro escrito**: Hoja 8 Descripción: Los estudiantes de acuerdo a lo que evidenciaron responden la pregunta ¿Están de acuerdo con el grupo de Camilo? ¿Por qué?	Los estudiantes observan las preguntas que se muestran en la hoja 8. 07:52 Llaman a la docente y le preguntan "¿cuál respondemos solo está (señalando la primera pregunta de la hoja 8) 09:05 Carlos escribe la respuesta en la hoja, la cual es: "No, porque Camilo no está teniendo en cuenta que algunas diagonales se repiten, es decir, que da lo mismo contarla desde un vértice o desde otro" (se toma esta información de la hoja que los estudiantes entregaron una vez finalizaron el trabajo)			*Inferencia: En este caso se observa que los estudiantes evalúan el argumento de tipo gráfico dado por el grupo de Camilo y en ello cuestionan el hecho de que repiten diagonales, además lo comparan con la fórmula general que ya encontraron.* ***Justificación:*** *Los estudiantes dicen que no están de acuerdo con el grupo de Camilo, porque no tienen en cuenta las diagonales que se*	No comparten el procedimiento del grupo de Camilo, puesto que por medio de la representación gráfica y de la fórmula general que encontraron evidencian que repiten diagonales.

				repiten.	
Video 5 MVI_0201 Actividad: 2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago y Pregunta Final actividad 2.2 **Registro escrito:** Hoja 8 y 9 **Descripción:** Los estudiantes leen la información presentada por el grupo 2.2, luego se dan cuenta que no tuvieron en cuenta la diagonal del polígono inicial. De acuerdo a lo que evidenciaron responden la pregunta ¿Están de acuerdo con el grupo de Leidy? ¿Por qué?	Carlos lee en voz alta la información presentada en la actividad 2.2, luego observan y analizan. 12:52 "Carlos dice no están teniendo en cuenta esta diagonal (señala en la hoja)…si me entienden… Camilo dice sí" (no realizan en procedimiento para los polígonos que se les colocan) De acuerdo a lo que analizaron de la actividad responden la pregunta. 14:14 Carlos responde la pregunta en la hoja, "No, porque ella no está teniendo en cuenta la diagonal que se forma al eliminar un lado del hexágono para poder formar el heptágono"			*Inferencia: Evalúan el garante de tipo gráfico dado en la actividad 2.2, y de ello deducen que hace falta tener en cuenta una condición para que éste sea válido.* ***Justificación:*** *Los estudiantes dicen que no están de acuerdo con el grupo de Leidy porque ellos no tuvieron en cuenta la diagonal del polígono anterior.*	Carlos, camilo y Juan Diego no comparten el procedimiento expuesto por el grupo de Leidy, puesto que no tienen en cuenta la diagonal del polígono inicial.
Video 5 MVI_0201 Actividad: 2.3 Grupo de Samuel, Karina y Diego **Registro escrito**: Hoja 10 **Descripción:** Los estudiantes leen la información presentada en la actividad 2.3, deducen por medio de la fórmula general cuántas diagonales deben dar y luego realizan el procedimiento seguido por el grupo de Samuel para los dos polígonos	Los estudiantes leen la información presentada en la actividad 2.3 para poder dar solución y responder a las preguntas planteadas. 18:23 "Carlos dice polígono de 8 lados, 8 por 4 sobre 2 da 16 y 9 por 6…Camilo dice pero tiene que estar el procedimiento… (Camilo numera los vértices en la hoja y traza las diagonales siguiendo el procedimiento del grupo de Samuel, pero ellos ya saben a qué resultado deben llegar porque primero lo prueban con la fórmula general.)" De acuerdo a lo que analizaron de la actividad responden la	*Inferencia: Se presenta el proceso IFI, en el momento en que los estudiantes reproducen el proceso de conteo en otros ejemplos.* ***Justificación:*** *Los estudiantes analizan lo visto en el procedimiento 2.3, lo apropian y lo representan para los polígonos solicitados.*		***Inferencia:*** *Los estudiantes están evaluando el garante de tipo gráfico dado por el grupo de Samuel, puesto que lo prueban para polígonos de 8 y 9 lados, de igual forma lo verifican con el garante algebraico que ya habían encontrado.* *Evalúan el garante a partir de los datos dados por la formula y dos gráficamente* ***Justificación:*** *Los estudiantes siguiendo*	Si se realiza un conteo ordenado se obtiene el mismo resultado de la fórmula algebraica**.**

dados.	pregunta. 00:01 Carlos responde la pregunta de la hoja, “Sí, porque él lo dibujo de cero y no con una base y además tuvo en cuenta que algunas diagonales se repetían y por eso no las contó”			*el procedimiento planteado por el grupo de Samuel, en donde se enumeraba la cantidad de diagonales de cada vértice, teniendo en cuenta las repeticiones, comprueban que un polígono de 8 lados tiene 20 diagonales y un polígono de 9 lados tiene 27 diagonales. Se comparan los resultados de las dos formas de validar y al ser iguales, los estudiantes indican que este procedimiento funciona porque dibujo en orden y tuvieron en cuenta las diagonales repetida.*	
Video 6 MVI_0202 **Actividad**: Preguntas cierre de actividades 2.1, 2.2 y 2.3 **Registro escrito**: Hoja 11 **Descripción:** Los estudiantes de acuerdo a lo realizado responden las preguntas: Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué?	Para finalizar con la actividad propuesta los estudiantes responden las preguntas finales de cierre de actividad. 01:37 A la primera pregunta ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? responden: “Al grupo de Samuel, porque él es el que tuvo en cuenta todas las condiciones que estaban en el polígono y no omitió ningún aspecto como la repetición de diagonales y o la eliminación de un lado”			**Inferencia:** Los estudiantes una vez finaliza la actividad realizan una evaluación de los garantes presentados en cada una de las tres actividades y de ello se evidencia que para ellos es válido el presentado por el grupo de Samuel donde realizan un conteo ordenado puesto que la respuesta coincide	Al realizar un conteo ordenado se obtienen las diagonales que son sin alterar el resultado que se da en la fórmula general.

Teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué?	En cuanto a la segunda pregunta, teniendo en cuenta su respuesta anterior, que les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué? dicen: "Solo una porque Samuel fue el que acertó ya que tuvo el mismo resultado que la fórmula de cómo calcular las diagonales de un polígono que es: $\frac{n(n-3)}{2}$ donde n es el número de lados del polígono"			con la fórmula general. **Justificación:** se evidencia cuando los estudiantes afirman que le dan la razón al grupo de Samuel, porque ellos tuvieron en cuenta todas las condiciones que estaban en el polígono y además obtuvieron el mismo resultado que se tiene con la fórmula general.	
Video 7 MVI_0205 **Actividad:** Socialización actividad 2 **Descripción:** Se realiza la socialización de la actividad 2, preguntando a los estudiantes del curso por cada uno de los grupos (2.1, 2.2 y 2.3) que se presentan en la actividad.	Para dar inicio a la socialización de la actividad, se pregunta a los estudiantes por cada uno de los grupos que dieron respuesta a la actividad (2.1, 2.2 y 2.3). Del primer grupo (2.1), se pregunta si entendieron el procedimiento que usaron los estudiantes, el grupo de Juan David responde: 00:33 "si, multiplicar el número de lados que tiene el polígono por el número de diagonales que sale desde un vértice" La docente entonces pregunta ¿Qué paso con ese primer grupo? El grupo de Maikol responde: 00:54 "Están… en nuestra opinión están mal, porque contaban todas las diagonales y no tomaban en cuenta que se repetían" El grupo de juan Esteban complementa 1:12 "es que con ese procedimiento, contaba dos	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que les permite comprender el procedimiento usado por 2.1 para solucionar el problema propuesto, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Justificación: Los estudiantes comunican la información que vieron en las gráficas, la replican en otros ejemplos y de esta manera evidenciaban los procesos incorrectos que se presentaba en esta respuesta.*			

	veces cada diagonal, todas”				
	Dadas estas razones la docente pregunta por el segundo grupo (2.2), ¿Qué paso con ese grupo? El grupo de Carlos pide la palabra: “Que Leidy al armar el polígono basado en otro, solo agregando un vértice, no tenía en cuenta que un lado del anterior polígono, del primero se convertía en una diagonal, entonces por eso a ellos les daba 13 diagonales, ella no tenía en cuenta un lado del polígono primero”	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que le permite comprender el procedimiento usado por 2.2 para solucionar el problema propuesto, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *De nuevo los estudiantes comunican la información que vieron en la gráfica y de esta manera evidenciaban los procesos incorrectos que se presentaba en esta respuesta.*			

	Al ver que todos los estudiantes están de acuerdo con la información dada por Carlos, se pregunta por el grupo de Samuel (2.3) ¿Qué paso con ese tercer grupo? El grupo de Sebastián contesta: 2:14 "Pues ellos utilizaron un método que si se podía probar, que era pues dividir cada diagonal que salía del vértice con colores y pues entonces así no se repetían y las sacaban contando al final"	*Inferencia: Los estudiantes infieren información que le permite comprender el procedimiento usado por 2.3 para solucionar el problema propuesto, este proceso se asocia a IFI.* ***Justificación:*** *Al igual que con las respuestas anteriores los estudiantes comunican la información que vieron en la gráfica y en este caso afirmaron que las diagonales no se repetían ni hacían falta*			

ANEXO G. Tabla de análisis horizontal y vertical.

Implementación Colegio La Salle Bogotá						
Videos recolectados	**Duración**	**Actividad realizada**	**Visualización IFI- VP**	**Argumentación Fines (explicar-generalizar-justificar…)**	**Evaluación objeto que se evalua (argumento de estudiantes, actividad, afirmaciones de la socialización)**	**Análisis**
Video 1. MVI_0195	23:45 min	Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de2.	IFI	Se plantea un argumento para justificar		
		Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo.			El garante presentado en 1.1 es muy persuasivo, por ello prefieren ajustar la representación gráfica de ellos para que de lo de la tabla. El garante de 1.2 produce duda respecto del de 1.1, además la representación gráfica realizada por ellos	
		Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	IFI		Se genera un argumento que busca validar el garante gráfico de la actividad 1.2	
Video 2. MVI_0196	11:32 min	Respuesta 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.			Es más persuasivo el garante de 1.1 que el de las dos representaciones gráficas realizadas por ellos y las relaciones planteadas para rectas concurrentes. Para ellos la representación gráfica no puede ser considerada como prueba.	
		Cierre de actividad 1 (1.1 y 1.2)			La relación algebraica es considerada como prueba mientras que la representación gráfica no.	
Video 3. MVI_0197	14:38 min	Socialización actividad 1 (1.1 y 1.2)	IFI IFI	Se genera un argumento que busca justificar para que casos 1.1. es verdadero	Evaluación de argumentos: El garante presentado en 1.1 y en 1.2 es verdadero	

Video 4. MVI_0198	4:21 min	Finalización de socialización actividad 1.	Se da una respuesta y se compara con lo presentado en 1.1			
Video 5. MVI_0201	23:45 min	Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados.		Argumento para responder a una pregunta. Argumento para explicar una respuesta Argumento para dar una conclusión		
		2.1 Grupo de Camilo, Andrea y Sofía	IFI			
		Pregunta Final actividad 2.1			Los estudiantes evaluan el argumento dado por el grupo 2.1	
		2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago			Evaluan el garante dado en 2.2	
		Pregunta Final actividad 2.2				
		2.3 Grupo de Samuel, Karina y Diego	IFI		Evaluan el garante de tipo gráfico dado en 2.3	
Video 6. MVI_0202	7:47 min	Pregunta final actividad 2.3			Se realiza una evaluación de todos los garantes presentados en las actividades.	
		Preguntas cierre de actividades 2.1, 2.2 y 2.3				
Video 7. MVI_0205	7:30 min	Socialización actividad 2	IFI IFI IFI		Evaluación de 2.1 falso 1. el garante presentado en 2.1 es falso. porque se repetian 2. 2.1 es falso porque se contaban dos veces diagonales Evaluación de 2.2 garante falso Evaluación de 2.3 garante verdadero	

IMPLEMENTACIÓN UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL						
Video 1. M2U00008	7:07 min	Tabla de relaciones - actividad 1	IFI	Se presenta un argumento para justificar		
Video 2. M2U00009	8:02 min	Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo. Elaboración de representación gráfica para evaluar el valor de verdad de 1.1	IFI VP	Se plantea un argumento para explicar		
Video 3. M2U00010	7:33 min	Culminación de actividad 1.1 y Revisión de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	VP	Argumento para justificar	Los estudiantes validan el garante presentado en a partir de las representaciones gráficas realizadas	
Video 4. M2U00011	9:43 min	Socialización actividad 1.1 y 1.2 con todos los estudiantes del curso.	IFI	Argumentos para responder a una pregunta y para afianzar una idea o contra-argumentar	En el proceso de socialización existe una evaluación de argumentos y afirmaciones, por lo general es la docente quien cuestiona y los estudiantes quienes responden o justifican sus afirmaciones	
Video 5. M2U00012	1:53 min	Actividad propuesta en la socialización evaluación de gráficas poligono de 7 y 8 lados.	IFI			Los estudiantes exploran la actividad indicada por la profesora Nubia para tratar de encontrar una generalidad
Video 6. M2U00013	7:10 min	Continuación análisis de la actividad propuesta por la profesora en el video anterior.	IFI	Argumento para dar respuesta		Los estudiantes realizan un trabajo de exploración para intentar
Video 7. M2U00014	2:34 min	Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados. Actividad 2.1	IFI -vp	Argumento para generalizar	Los estudiantes a medida que van construyendo el argumento van cuestionando lo que van diciendo	Los estudiantes por medio de la extracción de información de los ejemplos presentados y junto con una secuencia de validación obtienen una regla general para hallar el número de diagonales de cualquier polígono
Video 8. M2U00015	23:38 min	2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago	IFI - vp	Argumento para generalizar		
Video 9. M2U00016	2:28 min	Lectura de 2.3				En este video no se observa ninguna de las categorías, debido a que realizan únicamente un proceso de lectura para comprensión del enunciado

Video 10.M2U00017	5:23 min	Evaluación de garante 2.3	IFI - vp		Los estudiantes realizan una evaluación de un argumento	
Video 11.M2U00018	16:13 min	Finalización actividad 2		Se generan tres argumentos con el fin de justificar	Los estudiantes daban veracidad o no de los garantes de cada gráfico presentado.	
Video 12.M2U00019	1:00 min	Inicio de socialización actividad 2				En este video no se observa ninguna de las categorías, debido a que realizan únicamente la gráfica de tres polígonos en el tablero y no se alcanza a registrar la actividad que desarrollan con estos.
Video 13.M2U00020	38:38 min	Socialización actividades 2.1, 2.2 y 2.3	IFI VP	Argumentos que generalizan	*Evaluación de afirmaciones de compañeros (fórmulas)*	
			VP	Argumento para generalizar		
Video 14.M2U00021	16:25 min	Socialización actividad 2,3			*La docente y los estudiantes cuestionan las afirmaciones que se van generando respecto a la fórmula que Daniel plantea inicialmente.*	
Video 15.M2U00022	0:44 min	Continuación socialización actividad 2.3- Análisis de fórmulas			*Cuestionamiento y validación a las fórmulas generales que hallaron algunos estudiantes, esto para cuestionar la veracidad y equivalencia entre las dos fórmulas planteadas (actividad 2.1 y 2.2)*	
Video 16.M2U00042	10:41 min	Socialización de las tres fórmulas encontradas para los procesos asociados a los garantes 2.1 - 2.2 - 2.3			*Se realizaron las gráficas que permitieron deducir de nuevo las ecuaciones asociadas a cada garante a partir del procedimiento realizado para determinar el conteo.*	
Video 17.M2U00043	13:57 min	Continuación Socialización de las tres fórmulas encontradas para los procesos asociados a los garantes 2.1 - 2.2 - 2.3			Se apropian de los argumentos realizados y apoyados en procesos algebraicos deducen la equivalencia de las fórmulas.	

ANEXO H. Tabla de 1 y 2 nivel de argumentación.

Implementación Colegio La Salle Bogotá		
Actividad	**Argumentos de primer nivel**	**Argumentos de segundo nivel**
Actividad 1.1	**Argumento 1** **Datos:** Tabla de relaciones y argumento presentado en 1.1. **Conclusión:** Los estudiantes afirman que con 6 puntos el número de regiones serán 32. **Garante:** La relación planteada "cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente", la cual sería el garante de dicho argumento. 2^5=32	1. *<u>Acciones de los estudiantes</u>* Inicialmente los estudiantes evalúan 1.1 por medio de la construcción de dos representaciones gráficas y responden que la conclusión planteada en la actividad sí es verdadera, aunque el número de regiones encontrados en sus representaciones hayan obteniendo 31 regiones. **Argumento 2** *Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos y argumento presentado en 1.1. **Conclusión:** Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 32 regiones. **Garante:** Tabla de las potencias de dos. *Argumento estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos. **Conclusión:** El argumento 1.1 es verdadero. **Garante:** en las representaciones gráficas encontraron 31 regiones, pero como es un valor muy cercano a 32, afirman que el número de regiones es 32. *<u>2. Acciones de los estudiantes</u>* El garante (gráfico) presentado en 1.2 produce duda del garante de 1.1 y la representación gráfica realizada por ellos mismos, por tanto generan una nueva representación obteniendo de nuevo 31 regiones.
Actividad 1.2	**Datos:** dos representaciones gráficas, una con 30 regiones y otra con 31 **Conclusión**: la gráfica con 31 regiones realizada por ellos es falsa y la presentada en 1.2 es verdadera. **Garante:** De la gráfica 1.2 con 30 regiones los estudiantes determinan que cuando hay varios segmentos (cuerdas) que se cortan se esconde una región que sí aparece en la gráfica realizada por ellos.	*Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos. **Conclusión:** Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 30 regiones. **Garante:** Representación gráfica actividad 1.2 1. *<u>Acciones de los estudiantes</u>* Evalúa de nuevo el valor de la secuencia presentada en la tabla para 2^5 y Responden la pregunta de la actividad 1.2 *Argumento estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos y evaluación del argumento 1.1. **Conclusión:** el garante presentado en 1.2 es falso (gráfica con 30 regiones) **Garante:** Utilizando la relación de potencias (garante 1.1) el resultado es 32.
Cierre actividad 1.1 y 1.2		*Argumentos presentados en la actividad* argumentos presentados en actividad 1.1 y 1.2 *<u>Acción de estudiantes</u>* Responden pregunta acerca de cuál de los dos argumentos es cierto. *Argumento Estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, tres representaciones gráficas

		construidas por ellos y evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2 **Conclusión:** El argumento de 1.1 es verdadero y el de 1.2 es falso. **Garante:** el argumento 1.1 es algebraico y evidencia una secuencia numérica, por tanto se considera como prueba matemática, mientras que la representación gráfica produce dos tipos de resultados, los cuales generan incertidumbre y no contemplan a "todas las clases de hexágonos"
Socialización actividad 1	*Acciones estudiantes:* La docente le pide a los estudiantes que realicen una gráfica con un polígono de siete lados para comprobar la cantidad de regiones que se pueden encontrar **Datos:** Tabla de relaciones, gráficas de los estudiantes. **Conclusión:** La cantidad de regiones en las que queda dividida una circunferencia cuando se trazan segmentos cuyos extremos son puntos de la circunferencia no es 2^n . **Garante:** Representación gráfica con siete puntos en la circunferencia, hecha por los estudiantes.	*Acciones de los estudiantes* Inicia la socialización la docente dando la palabra al grupo de Carlos Argumento 1 - Grupo Carlos (grabado) **Datos:** Tabla de relaciones, tres representaciones gráficas construidas por ellos y evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2 **Conclusión:** argumento presentado en 1.1 es verdadero. **Garante:** "La regla que se buscó para los anteriores polígonos (tabla de relaciones y garante 1.1) que se trazaron en la circunferencia se cumplía, entonces la regla tiene que seguir cumpliéndose" *Acciones de los estudiantes* Después de la respuesta del grupo de Carlos continúan con las intervenciones de otros compañeros, quienes parecen contradecir lo afirmado por la participación del primer grupo. Argumento 1 - Grupo Esteban **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por ellos, evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2, afirmación realizada por el grupo de Carlos **Conclusión:** El argumento 1.1 es falso **Garante: "**al hacer la circunferencia y dividirla en 6 puntos, se encuentran 30 regiones si los lados paralelos del hexágono son congruentes pero si los lados paralelos no son congruentes, hay 31 regiones" Garante de tipo gráfico. Argumento 2 - Grupo Daniel **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por ellos, evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2, afirmación realizada por el grupo de Carlos y Esteban. **Conclusión:** la prueba de 1.1 no puede ser solo de operaciones. El garante de 1.1 es falso **Garante:** uno debe hallar los lados con base en la figura en vez de con base en la operación, ya que no siempre va a ser exacta la cantidad de regiones. Representaciones gráficas de varios polígonos de seis lados. *Acciones del docente* La docente cuestiona acerca de quién más está de acuerdo con el grupo de la actividad 1.1 además del grupo de Carlos. Argumento 3 - Grupo Paola **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por ellos, evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2, afirmación realizada por el grupo de Carlos, Esteban y Daniel

		Conclusión: El argumento 1.1 es verdadero **Garante:** Los estudiantes apoyan la idea de usar un "método de operación" para dar solución a la pregunta planteada. Argumentan que el método numérico está bien y por esa razón el procedimiento también está bien, así validan la información brindada. Argumento 4 - Grupo Juan David **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por ellos, evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2, afirmación realizada por el grupo de Carlos, Esteban, Daniel, Paola **Conclusión:** El argumento 1.1 es verdadero **Garante:** Relación identificada en las potencias de dos "si vemos los ejercicios siempre va incrementando el número de regiones, duplicando el número de estas en cada punto, 1, 2, 4, 8, 16 y 32" Argumento 5 - Grupo Camila **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, tres representaciones gráficas construidas por ellos y evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2 afirmación realizada por el grupo de Carlos, Esteban, Daniel, Paola, Juan David. **Conclusión:** argumento presentado en 1.1 es falso **Garante:** Por medio de la gráfica de un polígono de seis lados y al contar la cantidad de regiones, los estudiantes encontraron que lo propuesto en 1.1 no es válido y la manera de argumentar esta falsedad es mediante su mismo ejemplo. Argumento 6 - Grupo Esteban: **Datos:** Tabla de relaciones, representaciones gráficas construidas por ellos, argumentos presentados en 1.1 y 1.2, afirmación realizada por el grupo de Carlos, Paola, Camila **Conclusión:** El argumento 1.2 es verdadero, pero no es la única solución , ya que pueden obtenerse 31 regiones **Garante:** Ejemplos de hexágonos no regulares y regulares. Garante de tipo gráfico. Argumento 7 - Grupo de Paola: **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, tres representaciones gráficas construidas por ellos y evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2 afirmación realizada por el grupo de Carlos, Esteban, Daniel, Camila y Juan Esteban. **Conclusión:** El argumento presentado en 1.2 es más acertado que el de 1.1 **Garante:** Ambos argumentos son correctos pero al realizar la gráfica como en el de 1.2 se puede observar mejor - Garante tipo gráfico. Argumento 8 - Cuestionamiento entre la docente y el grupo de Carlos. **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por ellos, evaluación de los argumentos 1.1 y 1.2. **Conclusión:** El argumento 1.1 es verdadero **Garante:** La justificación de las tablas es "matemática" se usa un procedimiento matemático que permite generalizar, las gráficas deben mostrar todos los posibles polígonos existentes con algunos ejemplos no es suficiente.
Actividad 2.1	*Acciones estudiantes:* Los estudiantes encuentran la cantidad de diagonales de un	*Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones y polígono de 7 lados con sus diagonales.

	polígono, de acuerdo a lo pedido en la actividad. "Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Camilo para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos." **Datos:** Argumento presentado en 2.1 y circunferencia con ocho y nueve puntos **Conclusión:** en un polígono de 8 lados hay 40 diagonales, en el de nueve lados hay 54 diagonales **Garante:** Procedimiento realizado por el grupo 2.1 para el polígono de 8 y 9.	**Conclusión:** Un polígono de siete lados tiene 28 diagonales. **Garante:** Representación gráfica actividad 2.1 *Acciones de los estudiantes* Evalúan el argumento presentado en la actividad 2.1 *Argumento estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones, polígono de 7, 8 y 9 lados con sus diagonales y evaluación del argumento 2.1. **Conclusión:** el garante presentado en 2.1 es falso **Garante:** Se trazan las diagonales para los polígonos de 8 y 9 lados siguiendo la técnica de conteo de 2.1, los estudiantes afirman que no se están teniendo en cuenta las diagonales que se repiten
Actividad 2.2		*Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones y polígono de 7 lados con sus diagonales según grupo 2. **Conclusión:** Un polígono de siete lados tiene 13 diagonales. **Garante:** Representación gráfica actividad 2.2 *Acciones de los estudiantes* Evalúan el argumento presentado en la actividad 2.2 *Argumento estudiantes* **Datos:** Polígono de 7 lados con sus diagonales. **Conclusión:** el garante presentado en 2.2 es falso **Garante:** Los estudiantes afirman que de acuerdo a la gráfica no se están teniendo en cuenta la diagonal que se forma al eliminar un lado del hexágono.
Actividad 2.3	*Acciones estudiantes:* Los estudiantes encuentran la cantidad de diagonales de un polígono, de acuerdo a lo pedido en la actividad. "Utilice el procedimiento planteado por el grupo de Samuel para determinar el número de diagonales de los siguientes polígonos." **Datos:** Argumento presentado en 2.3 y circunferencia con ocho puntos **Conclusión:** en un polígono de 8 lados hay 20 diagonales **Garante:** Procedimiento realizado por el grupo 2.3 para el polígono de 8.	*Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones y polígono de 7 lados con sus diagonales según grupo 3. **Conclusión:** Un polígono de siete lados tiene 14 diagonales. **Garante:** Representación gráfica actividad 2.3 *Acciones de los estudiantes* Evalúan el argumento presentado en la actividad 2.3 *Argumento estudiantes* **Datos:** Polígono de 7 y 8 lados con sus diagonales. **Conclusión:** el garante presentado en 2.3 es verdadero **Garante:** Los estudiantes comprueban que el conteo (con orden y sin repetir diagonales) da lo mismo que la fórmula que ellos conocen.
Actividad de cierre 2.1-2.2-2.3		*Argumentos presentados en la actividad* Argumentos presentados en actividad 2.1, 2.2 y 2.3. *Acción de estudiantes* Responden las dos preguntas 1. Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Pregunta 2. Teniendo en cuenta su respuesta anterior, qué les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué? *Argumento Estudiantes*

		Datos: Argumentos presentados en actividad 2.1, 2.2 y 2.3 y el argumento generado por ellos sobre la validez de los garantes. **Conclusión:** Solo el tercer método es correcto. **Garante:** Formas de conteo evidenciadas en los métodos de 2.1, 2.2 2.3. Los estudiantes afirman que: "solo una porque Samuel fue el que acertó ya que tuvo el mismo resultado que la fórmula de cómo calcular las diagonales de un polígono que es: $\frac{n(n-3)}{2}$ donde n es el número de lados del polígono"
Socialización actividad 2		*<u>Argumentos presentados en la actividad</u>* Argumentos presentados en actividad 2.1, 2.2 y 2.3. *<u>Acciones estudiantes:</u>* Los estudiantes exponen los procedimientos de cada grupo de la actividad y responden a la pregunta hecha por la docente. ¿Qué paso con cada grupo? **Datos:** Argumento presentado en 2.1, 2.2, 2.3, polígonos de ocho y nueve lados con sus diagonales según conteo hecho por los estudiantes. **Conclusión:** Los argumentos de 2.1 y 2.2 son falsos "están mal". El argumento 2.3 es verdadero **Garante:** Según los procedimientos de los grupos para desarrollar las preguntas del taller, se socializa las siguientes afirmaciones: Grupo de Maikol, refiriéndose a 2.1 "Están… en nuestra opinión están mal, porque contaban todas las diagonales y no tomaban en cuenta que se repetían" Grupo de Carlos, refiriéndose a 2.2 "Leidy al armar el polígono basado en otro, solo agregando un vértice, no tenía en cuenta que un lado del anterior polígono, del primero se convertía en una diagonal, entonces por eso a ellos les daba 13 diagonales, ella no tenía en cuenta un lado del polígono primero" Grupo de Sebastián, refiriéndose a 2.3 "Pues ellos utilizaron un método que si se podía probar, que era pues dividir cada diagonal que salía del vértice con colores y pues entonces así no se repetían y las sacaban contando al final"
Implementación Universidad Pedagógica Nacional		
Actividad	**Argumentos de primer nivel**	**Argumentos de segundo nivel**
Actividad 1.1	*<u>Acciones estudiantes:</u>* revisan información de la tabla de relaciones y el argumento de 1.1 **Datos:** Tabla de relaciones y argumento presentado en 1.1 **Conclusión:** con seis puntos sobre la circunferencia se obtienen 32 regiones **Garante:** se deduce por la secuencia algebraica que se les presenta en 1.1	*<u>Acciones estudiantes:</u>* dibujan circunferencia con seis puntos y trazan cuerdas posibles. Argumento 1 *Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos y argumento presentado en 1.1. **Conclusión:** Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 32 regiones. **Garante:** Tabla de las potencias de dos. *Argumento estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones, argumento presentado en 1.1 y circunferencia con seis puntos. **Conclusión:** el garante de 1.1 puede ser falso **Garante:** Realizan gráfica, obtienen 31 regiones y el resultado no se corresponde con la tabla de 1.1
Actividad 1.2	*<u>Acciones estudiantes:</u>* comparan la	*<u>Acciones estudiantes:</u>* teniendo en cuenta las relaciones observadas si se tienen tres

	representación gráfica realizada por ellos y la del garante presentado en 1.2 Argumento 2 **Datos:** Tabla de relaciones, argumento presentado en 1.1 y circunferencia con seis puntos **Conclusión:** si tres cuerdas son concurrentes hay una región menos, la cual se oculta en la mitad. **Garante:** simulación de movimientos de puntos sobre la circunferencia en donde observan que una región se oculta si tres cuerdas son concurrentes, es decir un garante de tipo gráfico. *Acciones estudiantes:* los estudiantes continúan con la exploración y comparación de la gráfica realizada por ellos y la presentada como garante para la actividad 1.2, observan diferentes casos en donde se cortan tres cuerdas y determinan que para este caso solo es posible que existan un grupo de tres rectas que se intersequen, además revisan el caso de la circunferencia con 5 lados y determinan que en esta figura no es posible que se intersequen tres cuerdas por tanto el número de cuerdas no varía, caso diferente al de 6 puntos. **Argumento 3** **Datos:** Tabla de relaciones, argumento presentado en 1.1, circunferencia con seis puntos y garante presentado en 1.2, simulaciones de movimientos de puntos en la circunferencia **Conclusión:** para una circunferencia con seis puntos solo es posible tener tres cuerdas que se intersequen en el mismo punto. **Garante:** Comparación de las gráficas y observación de la relación en el polígono de cinco lados, garante de tipo gráfico.	cuerdas concurrentes los estudiantes evalúan a 1.2. Argumento 1 *Argumento presentado en la actividad* **Datos:** Tabla de relaciones y circunferencia con 6 puntos. **Conclusión:** Con seis puntos la circunferencia queda dividida en 30 regiones. **Garante:** Representación gráfica actividad 1.2 *Argumento estudiantes* **Datos:** Tabla de relaciones, argumento presentado en 1.1, circunferencia con seis puntos y garante presentado en 1.2 **Conclusión:** El argumento presentado en 1.2 es falso. **Garante:** existencia de tres cuerdas concurrentes que ocultan una región posible, por tanto 30 regiones no es una cantidad posible.
Socialización actividad 1	Argumento 3 **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas	*Acciones estudiantes:* Realizan afirmaciones con el fin de emitir argumentos con dos fines, el primero es responder a preguntas y el segundo para afianzar o contra argumentar las afirmaciones de un compañero.

	por el grupo. **Conclusión:** con seis puntos sobre la circunferencia se pueden obtener 30 o 31 regiones **Garante:** depende de la ubicación de los puntos, porque si tres cuerdas concurren en un punto se obtienen 30 regiones y en caso de que no se intersequen en un mismo punto se tendrán 31 regiones. Garante de tipo gráfico.	*Acciones del docente:* la docente pregunta a sus estudiantes que desean contarle de la actividad e integrantes de diferentes grupos dan a conocer lo discutido en los grupos Argumento 1 **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por el grupo. **Conclusión:** El garante presentado en 1.1 y en 1.2 es verdadero **Garante:** la secuencia 1.1 corresponde correctamente a los valores de las potencias de dos y para 1.2 se realizan representaciones gráficas de otras circunferencias y se obtienen 31 regiones, la cantidad de regiones depende de donde estén los puntos sobre la circunferencia Argumento 2 **Datos:** Tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, representaciones gráficas construidas por el grupo y las relaciones observadas a partir de las simulaciones de movimientos de los puntos realizadas. **Conclusión:** El garante presentado en 1.1 sólo es válido para circunferencias con hasta 5 puntos sobre ella. **Garante:** al comparar las representaciones gráficas de polígonos con hasta 5 lados, no es posible que se corten tres cuerdas, por tanto no existen regiones que pueden ocultarse. *Acciones del docente:* la docente realiza preguntas con el fin de cuestionar las afirmaciones de sus estudiantes y persuadirlos con respecto al valor de verdad de 1.1, cuando observa cambios de posturas, establece como conclusión para el garante presentado en 1.1 que el hecho de que haya una regularidad en la secuencia, no significa que sea la respuesta a la pregunta que se está haciendo. La docente pregunta ahora sobre el garante presentado en 1.2
Actividad 2.1	Argumento 2 *Acciones de los estudiantes:* Los estudiantes continúan analizando la información presentada en la tabla y el argumento presentado para la actividad del grupo 2.1 y realizan observación de la técnica de conteo asociada como garante de 2.1 y deciden que ésta no es del todo falsa, solo que se comente un error, el cual si se corrige puede dar como resultado una expresión algebraica que permite determinar el número de diagonales. **Datos:** Tabla de relaciones de diagonales asociados a una cantidad de vértices, Argumento presentado en 2.1 y circunferencia con ocho y nueve puntos **Conclusión:** La expresión algebraica determinada por la técnica de conteo de 2.1 que relaciona el número de diagonales de un	Argumento 1 **Acciones de la docente:** se acerca al grupo de los estudiantes con el fin de observar que han entendido acerca de la técnica de conteo. Aunque los estudiantes infirieron información no tenían muy claro cómo evaluar al garante presentado para 2.1, por tanto la docente les realiza preguntas que permite orientar su respuesta **Datos:** Tabla de relaciones de diagonales asociados a una cantidad de vértices, Argumento presentado en 2.1 y circunferencia con ocho y nueve puntos **Conclusión:** El argumento 2.1 es falso **Garante:** Al comparar la técnica de conteo planteada en el garante de 2.1 y el número de diagonales que se presentan en la figura, se determina que son diferentes debido a que se están contando dos veces las diagonales, es decir están repetidas. Garante es de tipo gráfico.

	polígono de n lados es Diagonales: n(n-3)/2 **Garante:** En el proceso de revisión de la técnica de conteo presentada en 2.1 los estudiantes mencionan que si se cuentan las diagonales que salen de un vértice no se debe tener en cuenta ni el vértice ni los dos contiguos, es decir tres de estos. Para hallar el número de diagonales de un polígono se multiplica el número de vértices por el número de vértices menos tres y luego este resultado se divide en 2.	
Actividad 2.2	Argumento 2 *<u>Acciones de los estudiantes:</u>* Al determinar que la técnica de conteo parte del número de diagonales del polígono anterior, los estudiantes deciden añadir el dato faltante y plantean una expresión algebraica por recurrencia. **Datos:** Tabla de relaciones de diagonales asociados a una cantidad de vértices y Argumento presentado en 2.2 **Conclusión:** para un polígono de n+1 lados se tienen D+(n-2)+1= Nuevas diagonales, teniendo en cuenta que D es la cantidad de diagonales del polígono anterior. **Garante:** En el proceso de revisión de la técnica de conteo.	Argumento 1 *<u>Argumento presentado en la actividad</u>* **Datos:** Tabla de relaciones y polígono de 7 lados con sus diagonales. **Conclusión:** Un polígono de siete lados tiene 13 diagonales. **Garante:** Representación gráfica actividad 2.2 *<u>Acciones de los estudiantes:</u>* Los estudiantes leen y comprenden la técnica de conteo que se presenta como garante para 2.2, determinando que es falsa porque se comete un error. **Datos:** Tabla de relaciones de diagonales asociados a una cantidad de vértices y Argumento presentado en 2.2 **Conclusión:** El argumento presentado en 2.2 es falso **Garante:** falta contar una diagonal que es un lado del antiguo polígono. Garante de tipo gráfico.
Actividad 2.3		*<u>Argumento presentado en la actividad</u>* **Datos:** Tabla de relaciones y polígono de 7 lados con sus diagonales. **Conclusión:** Un polígono de siete lados tiene 14 diagonales. **Garante:** Representación gráfica actividad 2.3 *<u>Acciones de los estudiantes</u>* Evalúan el argumento presentado en la actividad 2.3 *<u>Argumento estudiantes</u>* **Datos:** Tabla de relaciones, polígono de 7, 8 y 9 lados con sus diagonales y evaluación del argumento 2.3. **Conclusión:** el garante presentado en 2.3 es verdadero **Garante:** Se trazan las diagonales para los polígonos de 8 y 9 lados siguiendo la técnica de conteo de 2.3, se hace uso de los colores para facilitar el conteo por vértice.
Actividad cierre 2.1-2.2-2.3	*<u>Acciones de los estudiantes:</u>* Revisan la tabla de relaciones y los garantes de las actividades 2.1, 2.1 y 2.3 **Datos:** Tabla de relaciones, garantes dados en actividades 2.1- 2.2 y 2.3	*<u>Argumentos presentados en la actividad</u>* Argumentos presentados en actividad 2.1, 2.2 y 2.3 y el argumento generado por ellos para que los garantes de 2.1 y 2.2 sean verdaderos. *<u>Acción de estudiantes</u>* Responden las dos preguntas 1. Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de

	Conclusión: Los métodos son correctos, sólo que hay dos (2.1 y 2.2) que se deben complementar con un procedimiento adicional para que sean verdaderos. **Garante:** Los estudiantes revisan los procedimientos e identifican cuál es la condición que hace falta para que sean verdaderos (2.1 y 2.2)	los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Pregunta 2. Teniendo en cuenta su respuesta anterior, qué les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos ¿Todas son correctas? ¿Solo una? ¿Algunas, cuáles? ¿Ninguna? ¿Por qué? *<u>Argumento Estudiantes</u>* **Datos:** Argumentos presentados en actividad 2.1, 2.2 y 2.3 y el argumento generado por ellos sobre la validez de los garantes. **Conclusión:** Los tres métodos son correctos, les diríamos a los estudiantes de los grupos de 2.1 y 2.2 que sólo falta agregar una condición para que se cumplan: El 2.1 sería verdadero si se dividiera en dos el producto y el 2.2 sería verdadero si se contara como diagonal el lado del polígono anterior. **Garante:** Formas de conteo evidenciadas en los métodos de 2.1, 2.2 2.3
Socialización actividad 2	*<u>Acciones de los estudiantes y la docente:</u>* En el tablero se construyen tres polígonos por medio de los cuales los estudiantes explican el procedimiento seguido en cada una de las actividades 2.1, 2.2 y 2.3, la docente apoya cuestionando para ayudarles a comprender los métodos. *<u>Argumento generado en consenso con el grupo:</u>* **Datos:** Tabla de relaciones, garantes dados en actividades 2.1- 2.2 y los polígonos representados en el tablero. **Conclusión:** Se encuentran expresiones algebraicas asociadas a las técnicas de conteo (2.1, y 2.2), las cuales permiten generalizar la cantidad de diagonales para cualquier polígono. **Garante:** *Método* de conteo utilizado en las actividades 2.1 y 2.2, es decir, se apoyan de garantes de tipo gráfico. *<u>Acción de estudiantes y docente:</u>* Los estudiantes y la docente constantemente cuestionan y evalúan lo que se está realizando en el tablero para obtener las expresiones algebraicas en 2.1 y 2.2, ya sea para apoyar o para persuadir de que se está realizando algún procedimiento erróneo. *<u>Acciones de los estudiantes y la docente:</u>* En el tablero se construyen tres polígonos por medio de los cuales los estudiantes explican el procedimiento seguido en cada una de las actividades 2.1, 2.2 y 2.3, la docente apoya	*<u>Acción de estudiantes y docente:</u>* Los estudiantes y la docente cuestionan y evalúan lo planteado por Daniel en el tablero respecto a la expresión algebraica hallada para 2.3. *<u>Argumento de Iván</u>* **Datos:** Tabla de relaciones, garante dado en la actividad 2.3 y argumento propuesto por Daniel. **Conclusión:** El argumento de Daniel es falso, deben ser dos expresiones algebraicas asociadas a la técnica de conteo (2.3), una para hallar el número de diagonales de un polígono con una cantidad de lados par y otra para impar. **Garante:** *Método* de conteo utilizado en la actividad 2.3 y la evaluación realizada al argumento de Daniel. *<u>Acción de estudiantes y docente:</u>* La docente les propone a los estudiantes que evalúen las dos expresiones encontradas por Iván, para ello la mitad del grupo evalúa la de lados par y los otros la de impar, esto con el fin de evidenciar si son equivalentes entre sí y a su vez si son iguales a la propuesta por Daniel. Al iniciar con la próxima sesión la docente y los estudiantes reconstruyen el debate que se tenía, para ello realizan nuevamente las gráficas y recuerdan las expresiones algebraicas encontradas para los tres métodos de conteo en la sesión anterior. Luego validan la equivalencia de todas las expresiones. *<u>Argumento Estudiantes</u>* **Datos:** Garantes de las actividades 2.1, 2.2 y 2.3. Expresiones algebraicas asociadas a las formas de conteo. **Conclusión:** Los estudiantes por medio de procesos algebraicos establecen la equivalencia entre las fórmulas encontradas para el primer grupo (2.1), el segundo grupo (2.2) y las planteadas para polígonos con lados pares e impares del tercer grupo (2.3). **Garante:** *Se* comprueba esta equivalencia por medio de procesos algebraicos.

	cuestionando para ayudarles a comprender los métodos. *Argumento de Daniel* **Datos:** Tabla de relaciones, garante dado en la actividad 2.3 y el polígono representado en el tablero para 2.3. **Conclusión:** Daniel encuentra una expresión algebraica asociada a la técnica de conteo (2.3) la cual permite generalizar la cantidad de diagonales para cualquier polígono. **Garante:** Método de conteo utilizado en la actividad 2.3 (Garante de tipo gráfico)	

ANEXO I. Tabla etapas identificadas en el proceso de argumentación.

Implementación Colegio La Salle Bogotá		
Actividad	**Procesos**	**Descripción de las etapas evidenciadas en cada actividad**
Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de 2. Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo.	IFI - Argumento para justificar - Evaluación de argumento presentado en la actividad 1.1	Los estudiantes observaron e identificaron información que les permite comprender el comportamiento algebraico de la secuencia presentada en la tabla de relaciones y el garante presentado en 1.1 [IFI], ellos para responder en cuántas regiones queda dividida la circunferencia con seis puntos, afirman que "con 6 puntos el número de regiones serán 32", debido a que la relación planteada "cada vez que aumenta un punto aumenta un grado en el exponente, es decir que 2^5=32" [argumento para justificar su respuesta - primer nivel], Luego al escribir la respuesta indican que eso se puede ver gráficamente, sin embargo se dan cuenta que aún no han construido ninguna gráfica, por tanto realizan una primera construcción en donde el número de regiones que se obtiene son 31, al ser 31 un número muy cercano a 32, ellos afirman que aproximadamente si son 32 regiones. [Argumento que evalúa 1.1 - Segundo nivel]
Revisión y respuesta de 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. Respuesta 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	IFI - Argumento validar una representación gráfica - Evaluación de argumento presentado en la actividad 1.2	Los estudiantes analizan la información presentada en la actividad 1.2, a partir de ésta realizan una gráfica para intentar validar el garante presentado (IFI), de ello concluyen que la gráfica con 31 regiones realizada por ellos es falsa y la presentada en 1.2 es verdadera, esto lo justifican ya que afirman que en la gráfica con 30 regiones hay varios segmentos (cuerdas) que se cortan y por ende se esconde una región que sí aparece en la gráfica realizada por ellos. [argumento para validar su representación gráfica - primer nivel] Luego evalúan de nuevo el valor de la secuencia presentada en la tabla para 2^5 y responden la pregunta de la actividad 1.2 afirmando que el garante presentado en 1.2 es falso (gráfica con 30 regiones), lo cual lo apoyan en la relación de potencias (garante 1.1) en donde el resultado es 32. [Argumento que evalúa 1.2 - Segundo nivel]
Cierre de actividad 1 (1.1 y 1.2)	Evaluación de argumentos presentados en las actividades 1.1 y 1.2	Los estudiantes responden la pregunta acerca de cuál de los dos argumentos es verdadero (1.1 y 1.2), para ello se basan en la tabla de relaciones, circunferencia con 6 puntos, tres representaciones gráficas construidas por ellos y evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2, ante lo cual responden que el argumento de 1.1 es verdadero y el de 1.2 es falso, apoyando su conclusión en que

		el argumento 1.1 es algebraico y evidencia una secuencia numérica, por tanto se considera como prueba matemática, mientras que la representación gráfica produce dos tipos de resultados, los cuales generan incertidumbre y no contemplan a "todas las clases de hexágonos" [Argumento que evalúa 1.1 y 1.2 - Segundo nivel]
Socialización actividad 1 (1.1 y 1.2)	IFI - Argumento para justificar - Evaluación de argumentos presentados en las actividades 1.1 y 1.2	Carlos basado en la tabla de relaciones, tres representaciones gráficas construidas por ellos y evaluación de los argumentos presentados en 1.1 y 1.2 (IFI) expone que el argumento presentado en 1.1 es verdadero, debido a que "la regla que se buscó para los anteriores polígonos (tabla de relaciones y garante 1.1) que se trazaron en la circunferencia se cumplía, entonces la regla tiene que seguir cumpliéndose".[Argumento que evalúa 1.1 - Segundo nivel] Después de la respuesta del grupo de Carlos continúan con las intervenciones de otros compañeros, quienes parecen contradecir lo afirmado por la participación del primer grupo. Esteban afirma que el argumento 1.1 es falso, porque **"**al hacer la circunferencia y dividirla en 6 puntos, se encuentran 30 regiones si los lados paralelos del hexágono son congruentes pero si los lados paralelos no son congruentes, hay 31 regiones" Garante de tipo gráfico. [Argumento que evalúa 1.1 y el de Carlos - Segundo nivel] Daniel continúa la discusión afirmando que la prueba de 1.1 no puede ser solo de operaciones, por ello dice que el garante de 1.1 es falso, porque uno debe hallar los lados con base en la figura en vez de con base en la operación, ya que no siempre va a ser exacta la cantidad de regiones. La docente cuestiona acerca de quién más está de acuerdo con el grupo de la actividad 1.1 además del grupo de Carlos.Paola afirma que el argumento de 1.1 es verdadero, este grupo apoya la idea de usar un "método de operación" para dar solución a la pregunta planteada. Argumentan que el método numérico está bien y por esa razón el procedimiento también está bien, así validan la información brindada. [Argumento que evalúa 1.1, el de Carlos y Daniel - Segundo nivel] Juan David afirma que el argumento 1.1 es verdadero, porque la relación identificada en las potencias de dos "si vemos los ejercicios siempre va incrementando el número de regiones, duplicando el número de estas en cada punto, 1, 2, 4, 8, 16 y 32" [Argumento que evalúa 1.1, el de Carlos, Daniel y Paola - Segundo nivel] Camila por su parte dice que el argumento presentado en 1.1 es falso, porque al dibujar la gráfica de un polígono de seis lados y al contar la cantidad de regiones, se encuentra que propuesto en 1.1 no es válido [Argumento que evalúa 1.1, el de Carlos, Daniel, Paola y Juan David - Segundo nivel] Esteban afirma que el argumento 1.2 es verdadero, puesto que no es la única solución, ya que pueden obtenerse 31 regiones, esto lo apoyan en ejemplos de hexágonos no regulares y regulares. Garante de tipo gráfico. [Argumento que evalúa 1.1, el de Carlos, Paola y Camila - Segundo nivel]Paola interviene nuevamente para decir que el argumento presentado en 1.2 es más acertado que el de 1.1 ya que ambos argumentos son correctos pero al realizar la gráfica como en el de 1.2 se puede observar mejor - Garante tipo gráfico. [Argumento que evalúa 1.1, el de Carlos, Esteban, Daniel, Juan Esteban y Camila - Segundo nivel] Enseguida se da un cuestionamiento entre la docente y el grupo de Carlos, ante lo cual Carlos dice que nuevamente que el argumento 1.1 es verdadero, porque la justificación de las tablas es "matemática" se usa un procedimiento matemático que permite generalizar, las gráficas deben mostrar todos los posibles polígonos existentes con algunos ejemplos no es suficiente. [Argumento que evalúa 1.1 - Segundo nivel] Finalmente la docente les propone a los estudiantes que realicen una gráfica con un polígono de siete lados para comprobar la cantidad de regiones que se pueden encontrar, ante lo cual todos

		afirman que la cantidad de regiones en las que queda dividida una circunferencia cuando se trazan segmentos cuyos extremos son puntos de la circunferencia no es 2^n lo cual lo apoyan en la representación gráfica con siete puntos en la circunferencia, hecha por los estudiantes. (Argumento para justificar - 1 nivel)
Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales. Actividad 2.1 Pregunta actividad 2.1	IFI - Argumento para justificar - Evaluación del argumento presentado en la actividad 2.1	Los estudiantes observaron e identificaron la información necesaria para replicar el proceso de conteo realizado por los estudiantes de la actividad 2.1 (IFI), Teniendo en cuenta el argumento presentado en la actividad 2.1, los estudiantes afirman que el garante presentado en este grupo es falso puesto que de acuerdo a la gráfica no se está teniendo en cuenta las diagonales que se repiten. [Argumento que evalúa 2.1 - Segundo nivel]
2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago. Pregunta Final 2.2	IFI -Evaluación de argumento presentado en la actividad 2.2	A partir del argumento presentado en la actividad 2.2, los estudiantes afirman que el garante presentado en 2.2 es falso puesto que de acuerdo a la gráfica no se está teniendo en cuenta la diagonal que se forma al eliminar un lado del hexágono. [Argumento que evalúa 2.2 - Segundo nivel]
2.3 Grupo de Samuel, Karina y Diego Pregunta final actividad 2.3	IFI - Evaluación del argumento presentado en la actividad 2.3	De acuerdo con el argumento presentado en la actividad 2.3, los estudiantes afirman que el garante presentado es verdadero ya que el uso de los colores facilita el conteo por vértice y al realizar este conteo el número que da es igual al número que se halla con la fórmula de las diagonales de un polígono. [Argumento que evalúa 2.3 - Segundo nivel]
cierre de actividades 2.1, 2.2 y 2.3	Evaluación argumento 2.1 - 2.2 - 2.3	Teniendo en cuenta lo trabajado con los argumentos 2.1 - 2.2 - 2.3 los estudiantes responden las preguntas de la actividad de cierre, afirmando que la respuesta correcta es la dada por el grupo de Samuel (argumento 2.3), porque él es el que tuvo en cuenta todas las condiciones que estaban en el polígono y no omitió ningún aspecto como la repetición de diagonales y o la eliminación de un lado. [Argumento que evalúa a 2.1 - 2.2 - 2.3]
Socialización actividad 2	IFI - EVALUACIÓN 2.1 IFI - EVALUACIÓN 2.2 IFI - EVALUACIÓN 2.3	Para desarrollar la socialización, la docente pregunta a los estudiantes por cada uno de los grupos que dieron respuesta a la actividad (2.1, 2.2 y 2.3). Ellos comentan que para 2.1 el argumento es falso, debido a que contaban diagonales repetidas. [evaluación de 2.1 - argumentación segundo nivel], estas relaciones las obtuvieron a partir de la comprensión del garante de 2.1 [IFI de garante gráfico de 2.1]
Implementación Universidad Pedagógica Nacional		
Actividad	**Procesos**	**Descripción**
Tabla de probables relaciones entre representación gráfica de regiones, número de puntos sobre la circunferencia y potencias de 2. Respuesta a 1.1 Grupo Juan, Lucía y Pablo	IFI - Argumento para evaluar 1.1 Nivel 2- IFI - VP - Argumento para explicar nivel 1	Los estudiantes observan la tabla de posibles relaciones entre el número de regiones y número de puntos sobre la circunferencia, ellos observan e infieren que el resultado de las potencias de dos se corresponden con el número de regiones y que el exponente se puede relacionar con la cantidad de puntos [IFI], Afirman que 1.1 es verdadero debido a que la secuencia presentada en la tabla es verdadera [Argumento para evaluar 1.1 Nivel 2], sin embargo dibujan circunferencia con seis puntos y trazan cuerdas posibles e infieren que por cada dos puntos habrá una cuerda y que por esto se tienen las potencias de dos [IFI]. Los estudiantes realizan dos construcciones gráficas en las cuales obtienen 30 y 31 regiones respectivamente, lo cual implica dos resultados diferentes, por tanto se observa que hay tres cuerdas que se cuerdas que puede ocultar una región la cual generaría los dos posibles resultados, por tanto se producen diversas simulaciones que permite comunicar la idea de uno de sus estudiante [VP] Luego al explicar la diferencia entre los dos resultados, se afirma que si se cortan 3 cuerdas se tendrán 30 regiones y no se cortan son 31, el garante a este argumento son las diferentes simulaciones que proponen los estudiantes [argumento para explicar nivel 1]
Revisión y respuesta de 1.2	IFI - Argumento para	Teniendo en cuenta las relaciones observadas si se tienen tres cuerdas concurrentes los estudiantes

Grupo de Antonia, Alejandra y Matías. Respuesta 1.2 Grupo de Antonia, Alejandra y Matías.	evaluar a 1.2 de segundo nivel - VP - Argumento para explicar relaciones	evalúan a 1.2 afirmando que es falso [argumento para evaluar a 1.2 - segundo nivel]. Comparan la representación gráfica realizada por ellos y la del garante presentado en 1.2 un estudiantes tiene una conjetura, la cual comunica a sus compañeros por medio de diferentes simulaciones de movimientos de puntos sobre la circunferencia [VP] y observan diferentes casos en donde se cortan tres cuerdas y determinan que para este caso solo es posible que existan un grupo de tres rectas que se intersequen, además revisan el caso de la circunferencia con 5 lados y determinan que en esta figura no es posible que se intersequen tres cuerdas por tanto el número de cuerdas no varía, caso diferente al de 6 puntos[argumento para explicar relaciones de nivel 2]
Socialización Actividad 1	Argumento para evaluar 1.1 y 1.2 - Argumento para contradecir y evaluar 1.1 - 1.2 - Visualización IFI- Argumento para conjeturar	La docente pregunta a los estudiantes sobre el valor de verdad de 1.1 y 1.2, a lo cual una estudiante afirma que 1.1 y 1.2 son verdaderos [Argumento que evalúa 1.1 y 1.2 - Segundo nivel] sin embargo otro estudiante afirma que 1.1 no es verdadera, debido a algunas representaciones gráficas que había realizado en su grupo y ninguno de estos valores corresponden a las 32 regiones. [Argumento para evaluar 1.1 - Segundo nivel y contradecir afirmación anterior]. Luego la docente les solicita a sus estudiantes determinar el número de regiones para circunferencias con 7 y 8 puntos, para lo cual un estudiante después de graficar las situaciones afirma que las concurrencias entre cuerdas afectan directamente en la cantidad de regiones [visualización IFI], de tal forma que entre más puntos se tengan sobre la circunferencia, más regiones ocultas se pueden presentar [Argumento para conjeturar - Primer nivel].
Tabla de probables relaciones entre cantidad de diagonales de un polígono con el número de lados. 2.1 Grupo de Camilo, Andrea y Sofía Pregunta Final actividad 2.1	IFI - VP- Argumento para generalizar - Evaluación de argumento presentado en la actividad 2.1	Los estudiantes observaron e identificaron información presentada en la tabla que les permite comprender la relación que hay entre el número de lados de un polígono y sus diagonales (IFI), establecen un argumento para generalizar (argumento de 1 nivel) porque encuentran una expresión algebraica que permite hallar el número de diagonales para cualquier polígono la cual expresan cómo: "se *multiplica el número de vértices por el número de vértices menos tres y luego este resultado se divide en 2. n(n-3)/2"* (VP) luego analizan y evalúan la forma de conteo asociada al garante de 2.1 para así poder utilizando el procedimiento en esta actividad determinar el número de diagonales de los polígonos de 8 y 9 lados, para ello la docente también interviene quien les ayuda orientar con preguntas pues no tenían claro el método de conteo, así deducen que el garante es falso, puesto que al comparar la técnica de conteo planteada en el garante de 2.1 y el número de diagonales que se presentan en la figura, se determina que son diferentes debido a que se están contando dos veces las diagonales, es decir están repetidas. Garante es de tipo gráfico. [Argumento que evalúa 2.1 - Segundo nivel]
2.2 Grupo de Leidy, Johana y Santiago. Pregunta Final actividad 2.2	IFI - VP - Argumento para generalizar - Evaluación de argumento presentado en la actividad 2.2	Los estudiantes observan y extraen información del garante de 2.2 (IFI), así determinan que la técnica de conteo parte del número de diagonales del polígono anterior, deciden añadir el dato faltante y plantean una expresión algebraica por recurrencia. Así establecen que para un polígono de n+1 lados se tienen D+(n-2)+1= Nuevas diagonales, teniendo en cuenta que D es la cantidad de diagonales del polígono anterior, (VP) en ello se observa un argumento para generalizar (1 nivel). Luego al validar y cuestionar el garante presentado en 2.2 determinan que es falso porque se comete un error, pues falta contar una diagonal que es un lado del antiguo polígono. Garante de tipo gráfico. (Argumento que evalúa 2.2 - segundo nivel)
2.3 Grupo de Samuel, Karina y Diego Pregunta final actividad 2.3	IFI - Evaluación del argumento presentado en la actividad 2.3	Los estudiantes observan, analizan y extraen información del argumento presentado en la actividad el cual evidencia que un polígono de siete lados tiene 14 diagonales, este tiene como garante una representación gráfica (IFI), así los estudiantes evalúan dicho argumentos para a partir de ello

		establecer un nuevo argumento en el cual afirman que el garante presentado en 2.3 es verdadero, luego validan dicho argumento cuando trazan las diagonales para los polígonos de 8 y 9 lados que se piden en la actividad, para ello siguen la técnica de conteo de 2.3 (Argumento que evalúa 2.3 - segundo nivel)
Preguntas cierre de actividades 2.1, 2.2 y 2.3	Argumento para justificar - Evaluación de los argumentos presentados en 2.1, 2.2 y 2.3	Los estudiantes revisan los procedimientos e identifica cuál es la condición que hace falta para que sean verdaderos los garantes de las actividades 2.1 y 2.2, en ello se identifica un argumento para justificar (1 nivel). Luego responden las dos preguntas 1. Si ustedes fueran la profe Martha, ¿A cuál o a cuáles de los tres grupos le daría la razón? ¿Por qué? Pregunta 2. Teniendo en cuenta su respuesta anterior, qué les diría a los estudiantes en relación con las respuestas dadas por los tres grupos, con esto realizan una evaluación de los garantes y concluyen que los tres métodos son correctos, que sólo falta agregar una condición para que se cumplan: El 2.1 sería verdadero si se dividiera en dos el producto obtenido y el 2.2 sería verdadero si se contara como diagonal el lado del polígono anterior. (Argumento que evalúa 2.1, 2.2 y 2.3 - segundo nivel)
Socialización actividad 2	IFI - VP - Argumentos para generalizar - Evaluación de los argumentos presentados en las actividades 2.1, 2.1 y 2.3	En el tablero construyen tres polígonos por medio de los cuales los estudiantes explican el procedimiento seguido en cada una de las actividades 2.1, 2.2 y 2.3, la docente apoya cuestionando para ayudarles a comprender los métodos. (IFI - VP). Por medio de lo anterior se encuentran expresiones algebraicas asociadas a las técnicas de conteo (2.1, y 2.2), las cuales permiten generalizar la cantidad de diagonales para cualquier polígono. (Argumento para generalizar - 1 nivel) para lo cual se apoyan en garantes de tipo gráfico. Los estudiantes y la docente constantemente cuestionan y evalúan lo que se está realizando en el tablero para obtener las expresiones algebraicas en 2.1 y 2.2, ya sea para apoyar o para persuadir de que se está realizando algún procedimiento erróneo. Daniel un estudiante de la clase encuentra una expresión algebraica asociada a la técnica de conteo (2.3) la cual permite generalizar la cantidad de diagonales para cualquier polígono, (Argumento para generalizar - 1 nivel) lo cual se apoya en garante de tipo gráfico, ante ello los demás estudiantes y la docente cuestionan y evalúan lo planteado por Daniel en el tablero respecto a la expresión algebraicas hallada para 2.3. Así Iván genera un argumento en el cual expone que lo planteado por Daniel es falso, (Argumento que evalúa lo propuesto por Daniel - segundo nivel) puesto que según él deben ser dos expresiones algebraicas asociadas a la técnica de conteo (2.3), una para hallar el número de diagonales de un polígono con una cantidad de lados par y otra para impar. La docente les propone a los estudiantes que evalúen las dos expresiones encontradas por Iván, para ello la mitad del grupo evalúa la de lados par y los otros la de impar, esto con el fin de evidenciar si son equivalentes entre sí y a su vez si son iguales a la propuesta por Daniel. Al iniciar con la próxima sesión la docente y los estudiantes reconstruyen el debate que se tenía, para ello realizan nuevamente las gráficas y recuerdan las expresiones algebraicas encontradas para los tres métodos de conteo en la sesión anterior. Luego validan la equivalencia de todas las expresiones. Luego de realizar la validación establecen la equivalencia entre las fórmulas encontradas para el primer grupo (2.1), el segundo grupo (2.2) y las planteadas para polígonos con lados pares e impares del tercer grupo (2.3), todo ello por medio de procesos algebraicos. (Argumento que evalúa las expresiones algebraicas planteadas por los estudiantes - segundo nivel)

ANEXO J. Apreciaciones de los estudiantes.

PREGUNTAS CIERRE ACTIVIDADES – ESTUDIANTES COLEGIO LA SALLE BOGOTÁ	
PREGUNTA REALIZADA POR LA DOCENTE	**REPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES**
PRIMERA ACTIVIDAD ¿Qué es real y que es mentira? ¿Todo lo que dice el profesor es cierto?	**Juan Esteban:** Es que el profesor es la figura de autoridad, entonces consideramos que esta correcto lo que él dice
¿Qué sintieron al resolver la actividad?	**Carlos:** Extraño porque veía como una fórmula por un lado, un punto de vista y luego otro que no… quede como confundido **Juan Esteban**: es bueno porque esto demuestra que no todos los resultados son absolutos depende de ciertos factores **Maikol:** Algo extraño es que no todo lo que me dicen es cierto
SEGUNDA ACTIVIDAD ¿Qué les pareció más fácil o más difícil?	**Carlos**: Esta es más fácil porque teníamos una formula
¿Cómo se determina si una justificación es verdadera o falsa?	**Maikol:** Se comprueba, en este caso contando las diagonales **Daniel:** Haciendo una comparación entre las distintas respuestas, y se mira que grupo tiene la mejor razón o se busca un error que no tenga otro grupo y con eso se sabe quién tiene la razón **Juan Esteban**: Comparar o se puede aplicar cada procedimiento en distintos polígonos y luego de hacer el procedimiento se compara
Tipos de justificaciones que dan los estudiantes	**Carlos**: Se comprueba, si yo quiero probar algo lo hago gráficamente. **Juan Esteban:** Mostrar argumentos que apoyen a la justificación .Luego intento dar una respuesta.

PREGUNTAS CIERRE ACTIVIDADES – ESTUDIANTES UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL			
Nombre del estudiante	**¿Qué aprendiste al desarrollar las actividades?**	**Cuáles diferencias encuentras entre la actividad 1 y 2?**	**¿Qué dificultades se presentaron al desarrollar las actividades?**
Iván Segura	Distinguir que para un solo problema existen muchísimas perspectivas y puntos de vista para la solución del mismo.		
Jessica Monroy	Aprendí a comprender antes de realizar cada actividad y		

	a mirar cada caso para así poder llegar a una solución. A generar soluciones en las diferentes situaciones.		
Brayan Huertas	Aprendí a ver los diferentes análisis que podemos hacer para llegar a todas las posibles soluciones y que el trabajo en equipo me facilita conseguir el desarrollo de la actividad.	En la primera actividad encontramos que no hay una sola solución y que podemos ver el problema desde diferentes puntos de vista y en el segundo encontramos en los diferentes grupos una única solución.	
Wilson Daniel Aristizabal Vargas	Comprensión y forma de ver a futuro como sería mi labor docente y cómo podría manejar diferentes temas con los estudiantes para apoyar un conocimiento más autónomo.		Que la mayoría de grupos desarrollaron un concepto hasta hallar la solución pero no lo validaron o confirmaron. Cómo colaborar a los estudiantes para que en vez de dar respuesta lleguen ellos mismos a la respuesta por el camino que ingeniaron.
Natalia Aragón Guzmán	Que no debemos quedar en una sola idea, sino que debemos hacer las suficientes pruebas para llegar a la respuesta correcta.		
Wilson Naranjo Aguirre	La importancia de los colores en los niños para que aprendan más cosas. Que no todos llevan el mismo camino pero se debe crear interacción entre ellos para obtener resultados más ricos intelectualmente, además del respeto en ellos.		
Cristian Camilo Correa	Se aprende a comprender y a entender más a fondo el problema y que cada uno tiene perspectivas diferentes a cada situación.	En la actividad 1 plantearon problemas lógicos, pero que algunos no corresponden con las figuras, mientras que en la 2 construyeron ecuaciones que planteaban los problemas de la figura.	
Katherine Barrera	No debemos quedar en una sola idea sino que debemos hacer las suficientes pruebas para llegar a una respuesta correcta.		En algunos momentos nos quedamos con ideas planteadas y no comprobamos sus resultados.

Katherine Daniela Pedraza	No hay que guiarse solo por la parte numérica ni la gráfica, sino buscar una regularidad teniendo en cuenta las dos partes y comprobar esa regularidad.	En la actividad 1 no se encuentra una fórmula general pero en la segunda si	En la primera no se llegó a una solución conjunta y en la segunda se llegó a muchas soluciones que al final eran la misma.
Yazmin Rocío Soledo	Que por más que un método aparezca efectivo siempre es mejor probarlo.	En la actividad 1 la mayoría de los niños se dejaron llevar por la secuencia planteada, en la 2 fueron un poco más críticos y analíticos.	En la primera actividad la respuesta no era precisa. En el segundo se creía como cierto un método que en realidad no garantiza que sea el correcto.
Nubia Forero	- Es más productivo poner a los niños a investigar y crear que solo solucionar. - Entender que la matemática no tiene un solo método o fórmula.	Actividad 1 se le dio el método (gráfico o fórmula) y ellos solo lo realizaron. Actividad 2 los niños indagaron formas de solucionar un problema.	La actividad para números pequeños era manejable pero para números más grande no se podría controlar.
Oscar Ávila	Los distintos problemas que se presentan, derivan de los conocimientos propios del estudiante o del docente, dicho de este modo aprendí que hay distintas maneras de ver y socializar un problema a partir del saber de cada uno. En la primera actividad considero que visualizar es una manera de organizar las imágenes abstractas y de esta manera cuestionar ¿cómo sería si…? ¿Sería de otra manera? y en la segunda considero que a partir de la información visual, afirmarlo numéricamente es más complejo que decirla.	La Actividad 1 se centró más en la solución de un único método, en cuento en la segunda se verificó la validez de distintos métodos.	En la primera al resolver el problema se consideraron dos métodos distintos y con dos soluciones distintas y no se percataron y no se percataron que había un error de deducción y en la segunda se refutan las ideas sin tener en cuenta que era el mismo resultado.
William Andrés Pinilla	Yo aprendí varias cosas: 1. Ver los problemas desde varios puntos de vista. 2. Estudiar las conclusiones de los demás. 3. Valorar las opiniones de los estudiantes. 4. Importancia del trabajo en grupo	En la primera actividad no había una verdad absoluta, pero permite a los estudiantes aprender que aunque una respuesta parece obvia no siempre es así y la segunda actividad permite ver varias formas de resolver un problema. La actividad 1 daba lugar a ambigüedades ya que todo depende de la gráfica, esto nos llevó a encontrar varias respuestas. La actividad 2 permite llegar a una conclusión general.	Yo creo que los estudiantes presentaron confusión en la primera actividad ya que les parece extraño que hayan respuestas diferentes y en la segunda actividad yo creo que la dificultad es que todos querían defender su conclusión,

			debido a que todos tenemos puntos de vista diferentes todos intentamos defender nuestra posición.
Yenny Paola Vallejo	Que toda secuencia no es verdadera hasta un cierto punto. Observar otros métodos o diferentes puntos de vista para llegar a una misma solución.	En la segunda se puede observar diferentes métodos y pensamientos para desarrollar un problema y en la primera se observó que siempre se debe verificar si la solución a ese problema es totalmente verdadera.	Escoger el método correcto, porque en algunos casos cuando veíamos que el primer ítem era el método correcto pasamos al siguiente ítem este también era verdadero.
Sebastián Narváez Riaño	A explorar distintos métodos antes de conjeturar. A no suponer sin estar completamente seguro de que es 100% correcto. A visualizar un panorama más extenso para encontrar los posibles errores.	Se muestra como la secuencia puede funcionar en ciertos patrones, pero en otras no y por lo tanto se debe probar varios métodos antes de afirmar que con un solo método el resultado es correcto.	Por lo general siempre se tiende a buscar una regularidad y si funciona para ciertos primeros términos se asume que funciona para n términos, por lo tanto se requirió utilizar un método gráfico secuencial que mostró lo contrario.
Esteban Garzón	Aprendí a considerar las diferentes posibilidades de llegar a la solución de una situación presentada a indagar, analizar y comprender el porqué de una solución, además de dudar de los métodos conocidos y buscar métodos distintos que lleguen al mismo fin.	En la actividad 1 se buscaba hallar las regiones en que se divide una circunferencia a partir de n puntos, y en la actividad 2 se trataba de comprender y analizar lógicamente los posibles métodos para llegar a una respuesta además que en la actividad 2 se buscaba un análisis profundo por parte de nosotros mismos.	Las dificultades de la actividad 2 fue tratar de comprender cómo los niños llegaban a cierta respuesta, además de hallar la fórmula, pero lo más difícil era tratar de elegir el método más adecuado. En la actividad 1 lo difícil fue hallar el razonamiento lógico y las explicaciones a los distintos métodos ya que cada caso presentaba una respuesta diferente.

Juan Sebastián Borrás	Que para llegar a un resultado existen varios rumbos y que en vez de quedarse con un sólo resultado debemos enfrentar todas las opciones posibles sin quedarnos estancados.	En la primera se dejaron llevar por la fórmula 2¨n y pensaron que esa fórmula servía para todos los polígonos, mientras en la segunda cada estudiante llegó por un nuevo camino distinto con buena construcción.	Para mí no hubo dificultades, pues hubo un buen trabajo en grupo con gran cantidad de buenas ideas que nos ayudaron a llegar al resultado desde varios puntos de vista.
Alejandro Moreno	Por mi parte aprendí que las cosas podemos verlas desde distintos puntos de vista y que para llegar al resultado final hay que analizar y comprobar todo muy bien.	Las diferencias encontradas podrían ser que la primera actividad tenía como objetivo dar críticas constructivas del trabajo realizado por los estudiantes, mientras la segunda actividad buscaba que nosotros mismos diéramos solución a la problemática de las diagonales.	Las dificultades encontradas por nuestra parte fueron la cantidad de ideas que teníamos pues la idea es buscar las diferentes soluciones y la duda de saber si puede haber contraejemplos a nuestro método.
Blanca Cecilia Aldana	Que no debemos quedarnos en una solución sino ver más allá y poder concretar nuevas ideas.		Que en algunos momentos nos quedamos con ideas planteadas y no probamos sus resultados.
Mauricio Rodríguez	A parte de las diferentes fórmulas equivalentes y soluciones, es ver los puntos de vista de los niños de cómo resuelven los ejercicios.	En la actividad 1 se encontraron diferentes respuestas y podrían llegar a dudas a sus respuestas, en la segunda actividad hay una respuesta para lo planteado pero los estudiantes no las resolvían.	