UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Maestría en Docencia de la Matemática

LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Tesis de Maestría de
Lic. Natalia Morales Rozo

Prof. Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Asesor

Bogotá D.C.
2016

Dedico este trabajo a mi padre por su apoyo incondicional, a mi madre por escuchar mis quebrantos, y a todos los que creyeron en su culminación satisfactoria.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Edgar Alberto Guacaneme Suárez del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional por su constancia, ejemplo a seguir, por su asesoría como director del presente trabajo, y especialmente por compartir sus conocimientos, experiencias, y convicciones.

También, agradezco a cada uno de los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que por medio de su quehacer docente fortalecieron y enriquecieron mi formación académica e integral, especialmente a la profesora Leonor Camargo, quien además, guio la construcción del diseño metodológico y de la concepción sobre Didáctica de las Matemáticas del presente trabajo.

Finalmente, agradezco a los profesores Jesús Pinto (Universidad Autónoma de Yucatán, México) y Gloria García (Universidad Pedagógica Nacional, Colombia) quienes en su calidad de jurados del presente trabajo y de profesores de algunos seminarios que cursé en la Maestría en Docencia de la Matemática aportaron con sus comentarios, recomendaciones y sugerencias a la mejora del mismo.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	La Filosofía de las Matemáticas en el conocimiento del profesor de Matemáticas
Autor	Morales Rozo, Natalia
Director	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. pp. 124
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. UPN – MDMA.
Palabras Claves	Filosofía de las Matemáticas, conocimiento del profesor de Matemáticas

2. Descripción

Esta investigación tiene como propósito analizar algunos referentes teóricos sobre la Filosofía de las Matemáticas (FM) y el conocimiento del profesor de Matemáticas (CPM), con el fin de presentar evidencias de la articulación e integración de la FM en los modelos del CPM en función del quehacer docente, particularmente el sugerido por Stacey (2008).

Por lo anterior, se sistematizan y describen los planteamientos de algunas fuentes bibliográficas referentes a la FM y a los modelos del CPM con la intención de aportar información sobre la relación que hay entre la Didáctica de las Matemáticas (DM), la FM, y el CPM.

3. Fuentes

El estudio del pensamiento filosófico de las Matemáticas se basó en las aportaciones de Ernest (1991), Shapiro (2005), Colyvan (2011), Peirce (2010) y Friend (2007), puesto que su perspectiva teórica permite organizar la información en corrientes filosófico-matemáticas, tales como: formalismo, logicismo, intuicionismo, estructuralismo, entre otras. Asimismo, los estudios de Bkouche (1997); Barbin (2008); Jankvist e Iversen (2014); Hanna, Niels y Pulte (2010), constribuyeron a ampliar el conocimiento sobre la inclusión de la FM en la DM, o cómo da respuesta a algún problema de dicho campo.

Por otra parte, en la literatura se encuentran distintas conceptualizaciones (modelos) sobre cuál conocimiento debe tener un profesor de Matemáticas; como los propuestos por: Fennema y Franke (1992); Rowland, Hucksep y Thwaites (2005); Stacey (2008); Hill, Ball y Schilling (2008); da Ponte (2012). Particularmente, el modelo de Stacey enmarcado por cuatro componentes, resulta ser parte del marco analítico, puesto que se considera, que en él hay una mayor inclusión de la FM.

4. Contenidos

La presente tesis se compone de cuatro capítulos. El primero corresponde a la introducción, en la cual se presentan los planteamientos generales del estudio y se hace énfasis en el diseño metodológico del mismo. El segundo se compone de dos partes. La primera incluye una síntesis de la revisión de la literatura, la cual sirvió para conceptualizar y mostrar una aproximación de lo que hay sobre FM en la comunidad académica. En la segunda se construye el marco de referencia a tener en cuenta sobre la FM; a su vez, se hace una reorganización de la información obtenida y estudiada a lo largo de la disertación. El tercer capítulo es análogo al segundo capítulo, pero asume como foco de estudio al CPM –en vez de la FM–, cuyo derrotero son los modelos del CPM. En el capítulo cuatro se plantean y discuten los resultados obtenidos, y se proponen las conclusiones del estudio.

5. Metodología

La propuesta metodológica empleada en la presente investigación, toma en consideración las características determinadas por la metodología de investigación análisis documental.

6. Conclusiones

La concepción que se tenga sobre lo que son las Matemáticas influye en la forma en que se presenten las mismas a los estudiantes, y en los objetivos y propósitos que se planteen para la práctica educativa. De esto, los conceptos matemáticos a abordar, los planes de estudio a proponer, los libros de texto a utilizar, entre otros aspectos, tienen como referente a la postura filosófica que se tenga de los mismos en relación con lo que se concibe por el campo de estudio.

Las nociones sobre la perspectiva matemática adoptada de los profesores, reflejan su postura filosófica a partir de los significados que acepte y conozca, además que influye en su práctica didáctica; puesto que lo anterior se fundamenta en la naturaleza de las Matemáticas que construye el docente como conocimiento formativo y aplicativo en su quehacer docente, esta construcción mental, incluye implícita o explícitamente la génesis del conocimiento matemático como disciplina o como materia de enseñanza escolar, la naturaleza de los problemas matemáticos (construcción y diseño de tareas), las relaciones entre realidad abstracta y realidad empírica, cuál es la aplicabilidad y utilidad de las Matemáticas, cómo se aprenden y cómo se enseñan, y la consideración de qué se debe aprender y cómo se debe enseñar en el contexto escolar.

La FM como parte del CPM, permite forjar una postura de cuestionamiento sobre lo relacionado con el espacio laboral, el cómo se amplía o deteriora el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, y tendría una mayor autonomía en lo que realiza como "catedra oculta". Luego, la FM en el CPM tiene que formar maestros reflexivos con capacidades para intervenir en la definición y construcción de los propósitos y objetivos de su trabajo.

La FM asocia la comprensión de las Matemáticas con el conocimiento de lo que se ha de enseñar. Así, uno de los componentes –no el único– que garantiza una mejor enseñanza, es el conocer las Matemáticas, pero no solo su conocimiento de proposiciones y de procedimientos, y la forma en que se organizan, sino además debe tener una comprensión conceptual explicita de los principios y significados subyacentes a los mismos. Lo anterior debe incluir la comprensión sobre la naturaleza del conocimiento matemático, los mecanismos en que se introdujo en la comunidad matemática, así como la concepción de prueba, las reglas de inferencia, y las estructuras matemáticas.

Para una adecuada comprensión de las Matemáticas las reflexiones filosóficas juegan un papel destacado en el proceso de aprendizaje. Un maestro sin formación filosófica habla de las Matemáticas como un conjunto de problemas matemáticos *per se* y su práctica se fundamenta de las técnicas heurísticas en la resolución de problemas. Un docente con formación filosófica habla de las Matemáticas con un sentido crítico, acerca de las funciones de las aplicaciones en relación con los conceptos matemáticos y su práctica se enmarca en mostrar las diferentes características entre las Matemáticas y las demás ciencias. Luego, ser un docente crítico e influenciado por "algo" de conocimiento filosófico, es quien refleja en su discurso argumentativo justificaciones sobre: el conocimiento matemático (el papel de las pruebas); las relaciones entre las Matemáticas puras y aplicadas (modelación con sentido); el papel de los problemas y su resolución; el papel de las herramientas de representación (formas de cognición); la relación entre justificación, aplicación y desarrollo; la actividad matemática (lenguaje), el rol de las Matemáticas en la sociedad. Así, quien estudie FM estará más familiarizado con la capacidad de entender los significados, las relaciones, los patrones de pensamiento y matematización, y los obstáculos y dificultades de las Matemáticas.

Elaborado por:	Natalia Morales Rozo
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Fecha de elaboración del Resumen:	10	05	2016

"Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos".

CONTENIDO

pág.

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN 1

Planteamientos para la investigación 2

Motivación e idea impulsadora 2

Perspectiva teórica 3

Preguntas de investigación 3

Objetivos 4

Alcances de la investigación 4

Diseño metodológico 5

Caracterización del estudio 5

Técnicas para el registro de la información 7

Herramienta analítica 8

Diseño general del estudio (fases) 9

Organización del documento 11

CAPÍTULO II. LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS 13

La Filosofía de las Matemáticas según Paul Ernest 13

Filosofía de las Matemáticas y la naturaleza del conocimiento matemático 14

La postura absolutista sobre el conocimiento matemático 16

La falacia del absolutismo y la postura falibilista 19

El alcance de la Filosofía de las Matemáticas 20

Handbook sobre Filosofía de las Matemáticas 24

La Filosofía de las Matemáticas en el período moderno 26
Empirismo y positivismo lógico 30
Wittgenstein y la Filosofía de la Lógica y las Matemáticas 33
El logicismo de Frege y Russell 39
El programa neo-fregeano 42
Formalismo 46
Intuicionismo 52
Quine: Holismo y naturalismo 56
Otros autores 59
“An Introduction to the Philosophy of Mathematics” 59
“Philosophy of Mathematics” 63
“Introducing Philosophy of Mathematics” 69
Marco de referencia: Filosofía de las Matemáticas 83
Perspectivas filosóficas sobre las Matemáticas 84
CAPÍTULO III. EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS 88
Modelos del conocimiento del profesor de matemáticas 88
Conocimiento del profesor (Fennema y Franke, 1992) 88
Dominios de conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008) 89
Cuarteto del conocimiento (Rowland, Hucksep y Thwaites, 2005) 91
Componentes del conocimiento didáctico (da Ponte, 2012) 92
Los cuatro componentes del modelo de Stacey (2008) 92
Marco de referencia: Conocimiento del profesor de Matemáticas 97
Modelo de Stacey: Conocer “sobre” las Matemáticas 98

CAPÍTULO IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES 100
Filosofía de las Matemáticas en la Didáctica de las Matemáticas 100
¿Qué es la Didáctica de las Matemáticas? 100
La educación en Matemáticas vista a través de la Filosofía de las Matemáticas 103
El rol de la Filosofía de las Matemáticas en la Didáctica de las Matemáticas 105
Filosofía de las Matemáticas y el conocimiento matemático 107
Filosofía de las Matemáticas y génesis en Matemáticas 107
Filosofía de las Matemáticas y actividad matemática 109
Filosofía e Historia de las Matemáticas 111
Filosofía de las Matemáticas y la acción docente 113
El conocimiento filosófico de un educador matemático 116
En relación con los objetivos, preguntas y alcances de la investigación 120
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 122

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

A pesar de los diferentes argumentos en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (DM) sobre la importancia de la Filosofía de las Matemáticas (FM) en el conocimiento del profesor de Matemáticas (CPM) y el lugar que se le debe asignar según los diferentes modelos del CPM, se observa que esta influye en las prácticas de enseñanza y aprendizaje del quehacer docente. El conocimiento filosófico en el campo de la DM se sustenta a partir de: el modelo tetraédrico de Higginson (1980), el cual considera a la filosofía como una disciplina fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; la unidad conceptual propuesta por Ruiz (1987), la cual plantea la relación entre el uso de la Historia, la Filosofía y la enseñanza de las Matemáticas; el modelo de Steiner (1987), el cual incluye a la FM como una "ciencia referencial" para la DM; los planteamientos de Ernest (1991), en consideración a cuatro conjuntos de problemas, referidos a la FM, la naturaleza del aprendizaje de las Matemáticas, los objetivos de la educación y la naturaleza de la enseñanza; entre otros.

A su vez, se encuentran las siguientes evidencias (por mencionar algunas) sobre la existencia del estudio e interés por la FM:

- ✓ La publicación de libros, tales como: *An Introduction to the Philosophy of Mathematics* (Colyvan, 2011), *Logic, Mathematics, Philosophy: Vintage Enthusiasms. Essays in Honour of John L. Bell* (DeVidi, Hallett, & Clark, 2011), *Philosophy of Mathematics Education* (Ernest, 1991), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (François & Bendegem, 2007), *Introducing Philosophy of Mathematics* (Friend, 2007), *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives* (Hanna, Niels, & Pulte, 2010), *The Philosophy of Mathematical Practice* (Mancosu, 2008), *Philosophy of Mathematics* (Peirce, 2010), *Historia y FM* (Ruiz, 2003), *Introduction to Mathematical Philosophy* (Russell, 1919), *Filosofía Sintética de las Matemáticas Contemporáneas* (Zalamea, 2009).

- ✓ La existencia de revistas especializadas, tales como: *Philosophia Mathematica*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *Mathesis: Filosofía e Historia de las Matemáticas*.

- ✓ La existencia de comunidades de estudio sobre la FM, tales como: *The Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics. La Société Canadienne d´Histoire et Philosophie des Mathématiques* (CSHPM/SCHPM), *Munich Center for Mathematical Philosophy.*

- ✓ La publicación de *Handbooks*, tales como: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*.

El propósito de la investigación que se reporta en el presente documento es analizar algunos referentes teóricos sobre la FM y el CPM, con el fin de presentar evidencias de la articulación e integración de la FM en los modelos del conocimiento del profesor en función de su quehacer docente, particularmente el sugerido por Kaye Stacey (2008). En otras palabras, se sistematizan y describen los planteamientos de algunas fuentes bibliográficas referentes a la FM y los modelos del CPM con la intención de aportar información sobre la relación que hay entre la Didáctica y la FM, y el CPM.

En los siguientes apartados de este capítulo se presenta un boceto del estudio realizado. Se inicia con los planteamientos de la investigación, los cuales incluyen una síntesis de la perspectiva teórica, con el fin de explicitar las preguntas de investigación y los alcances del trabajo; el diseño metodológico, que versa sobre la perspectiva investigativa enfocada a la metodología de investigación análisis documental; y finaliza con una visión panorámica del documento escrito, con la intención de orientar al lector sobre lo que se va a encontrar a lo largo del mismo.

PLANTEAMIENTOS PARA LA INVESTIGACIÓN

En los siguientes párrafos se expone el planteamiento general de la investigación. Inicia con los sucesos que motivaron la realización del estudio. Posteriormente, se presenta la perspectiva teórica, las preguntas de investigación y los objetivos (general y específicos) de la misma. Y finaliza, con las metas propuestas para la investigación.

Motivación e idea impulsadora

El interés por realizar un estudio sobre la FM, el CPM y su posible integración tiene dos principios.

En primer lugar, al hacer lectura de los currículos de algunos programas de Licenciatura en Matemáticas (o afines) del país, para identificar, si se incluye la FM, se advierte que esta no es incluida o que se presentan "pocos" cursos al respecto (en comparación con los espacios académicos sobre la disciplina). Esto, lleva a cuestionarse sobre la importancia del conocimiento filosófico de las Matemáticas en el conocimiento de los profesores de Matemáticas y el por qué es necesario que tal conocimiento este inmerso en la formación docente, ya que se refleja un antagonismo entre las mallas curriculares de los programas de formación en términos del estudio de la FM y el panorama internacional de las comunidades de investigación en DM y FM.

En segundo lugar, esta propuesta surge con la intención de aportar a una posible vía de solución a algunas críticas frente a la labor docente, tales como: la ineficiencia de las metodologías que se aplican en el aula, las cuales no conllevan a la motivación por el estudio de las Matemáticas; y la falta de conexión entre los contenidos matemáticos, las habilidades matemáticas y su uso en la resolución de problemas. En este sentido, se concibe que a través de un estudio investigativo de la FM se pueden generar posibles herramientas conceptuales en pro de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Perspectiva teórica

Dos focos de estudio orientaron la elaboración de la tesis: el pensamiento filosófico de las Matemáticas y el CPM.

El estudio del pensamiento filosófico de las Matemáticas se basó en las aportaciones de Ernest (1991), Shapiro (2005), Colyvan (2011), Peirce (2010) y Friend (2007), puesto que su perspectiva teórica permite organizar la información en corrientes filosófico-matemáticas, tales como: formalismo, logicismo, intuicionismo, estructuralismo, entre otras. Asimismo, los estudios de Bkouche (1997); Barbin (2008); Jankvist e Iversen (2014); Hanna, Niels y Pulte (2010), constribuyeron a ampliar el conocimiento sobre la inclusión de la FM en la DM, o cómo da respuesta a algún problema propio de dicho campo.

El estudio del conocimiento del profesor ha presentado cambios significativos, inicia con los planteamientos de Shulman (1986) que abogaban por el conocimiento del contenido para la enseñanza y buscaban resaltar la importancia del mismo, diferenciándolo del conocimiento del contenido que tienen otras disciplinas. Es de reconocer, que además de la perspectiva teórica sobre el conocimiento propuesto por Shulman, se encuentran los modelos de otros autores que proponen incluir o excluir ciertos componentes en pro del conocimiento del profesor no solo de las matemáticas específicas que enseña, sino también proponen la necesidad de un cuerpo amplio y altamente organizado de conocimiento que le permita desarrollar su labor docente.

En la literatura se encuentran distintas conceptualizaciones (modelos) sobre cuál conocimiento debe tener un profesor de Matemáticas, como los propuestos por: Fennema y Franke (1992); Rowland, Hucksep y Thwaites (2005); Stacey (2008); Hill, Ball y Schilling (2008); da Ponte (2012). Particularmente, el modelo de Stacey enmarcado por cuatro componentes, resulta ser parte del marco analítico, puesto que se considera, que en él hay una mayor inclusión de la FM.

Preguntas de investigación

Con base en la revisión de la literatura sobre FM y el conocimiento del profesor, y el estudio de algunos currículos del país, se detectaron por lo menos tres focos–problemas que promulgaron por la necesidad de un estudio de esta naturaleza: (1) el por qué no se establece el estudio de la FM en la formación docente, a pesar de que la comunidad investigativa plantea la necesidad de dicho estudio; (2) la no claridad de qué de la FM se debe enseñar y la utilidad de la misma en el aula de clase; (3) la falta de estudios e investigaciones sobre el conocimiento filosófico, las concepciones sobre Matemáticas –especialmente en idioma castellano–.

La pregunta central de investigación que dirigió este estudio fue:

> ¿Cuáles relaciones existen entre la FM y el CPM?

Dado que el principal reto de esta investigación es el estudio y comprensión de los principios teóricos para dar a conocer los aportes de la FM al CPM. Las siguientes preguntas secundarias se plantean en pro de la pregunta central de investigación:

> ¿Qué dice la literatura sobre la FM y el CPM?
>
> ¿Qué papel se le asigna a la FM en los modelos del CPM?
>
> ¿Cuáles planteamientos de la FM son o deben ser parte del CPM, y por qué?

Objetivos

La investigación que se expone en la presente tesis de maestría tiene como objetivo general:

> Describir la función que tiene la FM en el CPM.

Como objetivos específicos se proponen los siguientes:

> Describir a la FM y al CPM como campos de estudio.
>
> Describir el papel que se le asigna a la FM en los modelos del CPM.
>
> Describir posibles intervenciones de la FM como parte del CPM en pro del quehacer docente.

Alcances de la investigación

Además de contribuir con la construcción de un marco referencial que caracteriza al CPM en relación con lo que versa la FM, la disertación pretende analizar algunos referentes teóricos, con el fin de bosquejar la articulación e integración de la FM en el CPM en función de su labor docente. Ambiciona constituirse en un referente para otras investigaciones que aboguen por la importancia de que los profesores de Matemáticas deben saber FM en pro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Además, suministra un análisis sobre la pertinencia de la FM en algunas “situaciones” que están inmersas en el quehacer docente y el rol del mismo en el aula.

El primer resultado es la sistematización bibliográfica sobre la FM y el CPM, la cual se compone de una diversidad de referencias que versan sobre los temas de interés de la presente investigación, y pueden llegar a constituir un insumo para el “estado de arte” de otras investigaciones.

El segundo resultado es la descripción del campo de la FM y del CPM en relación con lo que versa la literatura y alude a algunos autores que fueron seleccionados a razón de la metodología de investigación seleccionada (análisis documental).

El tercer resultado vislumbra el lugar que tiene o debe tener la FM en el CPM, con la intención de prever un mejor actuar del docente en su rol formativo.

El cuarto resultado se refiere a una manera de ver y estructurar la FM y los modelos del CPM en función de un "mejor" entendimiento de dichos campos de estudio.

El quinto resultado es la discusión de diversas intervenciones de la FM en el quehacer docente, al ser incluida en el CPM; lo que proporciona el reconocimiento de aspectos concretos sobre la pertinencia del estudio de la FM durante la formación continua y permanente que un profesor de Matemáticas debe tener.

DISEÑO METODOLÓGICO

La propuesta metodológica presentada a continuación, toma en consideración las características determinadas por la metodología de investigación "Análisis Documental".

Caracterización del estudio

Al preguntarse sobre si la metodología de análisis documental pertenece o no al enfoque cualitativo, se debe, en principio, reconocer las características comunes en la mayoría de las investigaciones cualitativas; para ello, se acepta el énfasis que plantea Wolcott (1982; citado en Miles & Huberman, 1994) sobre la naturaleza de la mayoría de las investigaciones cualitativas. Luego, mediante la combinación de algunos de sus descriptores con los propuestos por Miles & Huberman (1994), se esbozan las siguientes características: (1) la investigación cualitativa se lleva a cabo a través de un contacto prolongado con un "campo"; (2) el papel del investigador es obtener una visión sistémica e integrada del contexto de estudio; (3) el investigador intenta captar datos sobre las percepciones de los actores locales; y (4) la mayoría de los análisis se realizan con "palabras", las cuales, pueden ser sub-agrupadas o divididas en segmentos semióticos.

Las anteriores características se tienen en la metodología de análisis documental, puesto que: (1) hay un contacto prolongado con el campo de estudio, que en este caso, son los documentos seleccionados como muestra analítica; (2) se genera una sistematización de lo estudiado; (3) el investigador, a partir de su interpretación de los documentos, intenta mostrar las percepciones conceptuales de los autores (actores locales); y (4) el análisis es organizado por medio de "triangulaciones" conceptuales.

En la investigación cualitativa se identifican al menos tres perspectivas de investigación (interpretativismo, antropología social e investigación socio-colaborativa). La metodología de análisis documental pertenece a la perspectiva del interpretativismo, puesto que se busca una *interpretación* de significados hecha por el investigador a documentos (libros, artículos, entre otros) seleccionados como muestra analítica y que las acciones de interacción se dan entre el investigador, la muestra analítica y los referentes teóricos en relación con los objetivos y propósito de la investigación.

La metodología de análisis documental no corresponde a las perspectivas de la antropología social o a la investigación socio-colaborativa, porque en la primera debe haber un contacto prolongado con una comunidad dada en busca de una descripción de las particularidades locales y en la segunda se lleva a cabo la acción colectiva en un entorno social. Por ende, al tener en cuenta que los datos a analizar no son de naturaleza sensible (registros de acciones de alguna comunidad o entorno social), sino que se centran en lo que depara la interpretación de la información textual, la investigación presentada es netamente cualitativa-interpretativista.

Dado que una de las intenciones de la investigación es comprender la función que tiene la FM en el CPM, se da la necesidad de estudiar qué se entiende por FM y cuáles son algunos modelos del CPM. Así, el análisis documental permite dicha comprensión, puesto que se preocupa por la naturaleza de las definiciones y del lenguaje; trata de encuadrar los términos y sus interconexiones; examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias y concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual; se caracteriza como un método no empírico, que trabaja con enunciados textuales y no con datos de naturaleza sensible; y tiene como principios orientadores la naturalidad, aplicabilidad, complejidad y simplicidad. Por ello, parte inicial del trabajo es el análisis de los "conceptos" sobre los que se va a trabajar y que sostienen la investigación como derroteros de estudio.

En una investigación enmarcada por la metodología de análisis documental, los únicos participantes son los investigadores, quienes rastrean y acopian la información de los documentos seleccionados. Los datos que se obtienen de la recolección son descriptores conceptuales; el contexto y el escenario específico de investigación están en relación con los documentos de autores destacados en la materia, para este caso, se establecen dos focos de estudio: FM y CPM.

El analizar un documento se hace con el fin de *utilizar* el contenido informativo en el transcurso de la actividad investigadora. Al efectuar esta tarea se pretende *dinamizar* lo "esencial". Según Pinto (1989) el analista ideal debe tener ciertas cualidades *técnicas:* la habilidad y destreza en los métodos de lectura para captar el contenido del documento; el espíritu analítico, necesario para identificar lo sustancial de lo accesorio, al tener en cuenta una serie de indicadores claves del documento original, como objetivos, metodología, resultados y conclusiones; la capacidad de síntesis; y el dominio de la terminología específica del documento a analizar. El investigador convierte los conceptos en piezas teóricas precisas para el estudio que quiere llevarse a cabo. Para este caso, en cada uno de los focos de estudio, se discute la definición epistémica, los sub-campos de estudio, y las perspectivas conceptuales según la experticia de los autores seleccionados.

De lo anterior, una actividad a desarrollar es conocer la documentación sobre el problema que se ha de investigar. Sin embargo, es importante tener en cuenta que los documentos pueden ser muy variados, lo que puede llevar a que su clasificación sea difícil, dada la usual abundancia y heterogeneidad; entre dicha variedad se destacan los documentos escritos, icónicos, sonoros y verbo-icónicos. En razón de tal dificultad, una de las distinciones importantes del análisis documental se establece entre los métodos *intensivos* (estudiar con detenimiento algunos documentos) y los métodos *extensivos* (recurren a una gran cantidad de documentos). Asimismo, algunos métodos se centran en el análisis *externo*; este enfoque procura colocar el documento en su contexto. Otros, por el contrario, se basan en el análisis *interno* de los documentos, destaca su sentido y caracteres fundamentales.

Particularmente, la investigación propuesta se enfoca en métodos intensivos, lo cual justifica la selección (muestra analítica) de algunos documentos a estudiar, los cuales se reconocen como representativos dentro de las categorías de selección que se establecen, en términos de: tipo de documento, campo de acción del autor, mención en referencias bibliográficas. A su vez, la investigación se centra en el análisis interno de los documentos, puesto que se tiene como interés describir los planteamientos teóricos de los mismos.

Técnicas para el registro de la información

Como técnica documental esta la *indización*, la cual puede ser interpretada como proceso (consiste en describir y caracterizar un documento con la ayuda de los conceptos contenidos en dicho documento), o en cuanto a su finalidad (va destinada a permitir una búsqueda eficaz de las informaciones contenidas en un fondo documental). Según Rowley (1982; citado en Pinto, 1989) hay tres actividades que conlleva todo proceso de indización: familiarización con el contenido y materia del documento; fase de análisis, donde el indizador decidirá qué materias representa el tema principal del documento y por tanto deben ser indizadas; selección de términos representativos que expresen sin ambigüedad el contenido del documento.

En relación con el proceso de indización, es de notar que cada una de las tres actividades propuestas por Rowley tienen en cuenta los documentos seleccionados (muestra analítica). Particularmente, la actividad de selección de términos representativos facilita el cruce y triangulación de la información de los dos focos del estudio investigativo (FM y CPM) en pro de la pregunta de investigación: ¿Cuáles relaciones existen entre la FM y el CPM?

Por su parte, "la operación de resumir [es otra técnica documental que] consiste en la transformación que experimentan los documentos […] a través de dos procesos: de un lado, el análisis hasta obtener su contenido esencial, y de otro, la síntesis abreviada y precisa de ese contenido previamente analizado […]. En la operación de resumir confluyen estos ingredientes fundamentales: el resumidor, el documento original y el destinatario" (Pinto, 1989). Con esta técnica no es el estilo del texto lo que se pretende analizar, sino las ideas expresadas en él.

La operación de resumir constituye una "unidad de actuación indivisible", sin embargo, se pueden diferenciar dos etapas –complementarias–: el análisis de contenido y la síntesis. En la primera, se tiene el análisis formal (cuyo cometido es la redacción de la correspondiente referencia bibliográfica) y el análisis temático, que se inicia con la lectura para llegar a la recogida de "notas". Para Pinto (1989), la segunda etapa "trata de recomponer lo que el análisis descompuso", entendido este último como "distinción o descomposición de las partes de un todo". Luego, el resumen es "el resultado de una transformación analítico-sintética del contenido del original, de extensión reducida, que actúa de intermediario entre este y el usuario".

Es de notar, que la indización es la que permite un mayor y mejor desarrollo de la operación de resumir. La indización permite demarcar las categorías de selección documental, además, está inmersa en la etapa de análisis (transversal al desarrollo investigativo), debido a los términos representativos aceptados para el análisis posterior, el cual se sustenta con las síntesis realizadas. Aunque se reconoce la importancia de obtener el contenido "esencial" de los documentos, se acepta que dada la experticia del investigador, este proceso es más dispendioso; no obstante, se intenta hacer una aproximación al mismo.

Herramienta analítica

En el análisis documental hay diversas contribuciones y reflexiones en torno a dos corrientes: los que conciben el análisis con una práctica *integral*, que incluye tanto las operaciones de análisis formal como las relativas al análisis interno; y aquellos que lo reducen solo a las operaciones de análisis interno. En la primera corriente, se destacan tres fases de análisis: descripción bibliográfica, resumen y descripción característica (palabras clave). En la segunda corriente, se distinguen dos partes diferenciadas dentro del análisis documental: la descripción bibliográfica y el análisis de contenido. Aunque la investigación apuesta por la segunda corriente, se acepta que, debido a la experticia del investigador los resultados de la investigación estarán más próximos a la primera corriente.

Ya que en el análisis documental los documentos primarios son la fuente verídica, se pueden destacar dos grupos en función de la información que aportan: las *publicaciones unitarias* (libros, monografías, tesis) y las *publicaciones periódicas* (revistas, memorias). Así, según Pinto (1989) aunque el análisis de documentos se enfoca en el vestigio escrito, se debe reconocer que este tiene un carácter secundario puesto que son resultado de la percepción e interpretación del autor. Por ende, los documentos son de "carácter indirecto, ya que no permiten al que los utiliza un contacto directo con los hechos, sino mediato, a través de los documentos”. No obstante, los documentos son los instrumentos que permiten estudiar un marco a través de la evolución del mismo.

El objeto de análisis es el documento, cuya tipología “debe fijarse a partir de un triple criterio coincidente con su propia esencia […]: según el *soporte físico* […], desde la perspectiva de su *contenido informativo* […], y en razón a su *difusión*”. Particularmente, en el segundo grupo, se distinguen “los siguientes tipos: *primarios u originales*, que reflejan los resultados directos de la investigación científica en un soporte transmisible y durable; *secundarios*, consecuencia de la transformación que experimentan los primarios tras ser sometidos a las técnicas de análisis; y los *terciarios*, cuya delimitación conceptual varía según las interpretaciones” (Pinto, 1989).

Para el caso particular de la investigación, solo se emplean las publicaciones unitarias tales como libros o *handbooks*. En relación con la tipología, el soporte físico está sustentado con una base de datos de todas las publicaciones (unitarias y periódicas) consideradas en la investigación (no solo la muestra analítica); la difusión es utilizada como categoría de selección; y la perspectiva del contenido informativo, como resultado de la investigación. Finalmente, es de tipo secundario y terciario, debido a la técnica de indización empleada.

Diseño general del estudio (fases)

En consideración con los objetivos propuestos, las técnicas para el registro de la información y la herramienta analítica seleccionados, la investigación se llevó a cabo en las fases que se describen a continuación:

Delimitación del estudio e indagación bibliográfica

Según la técnica de indización una de las actividades a llevar a cabo es la familiarización con el contenido y materia del documento. Para ello se sigue con:

- ✓ Se establecen como focos principales de estudio a la FM y al CPM.
- ✓ Se busca sistemáticamente bibliografía sobre los focos de estudio. Aquí, se ubican todos los documentos encontrados de la literatura de la comunidad de interés (ver, Apéndice A).
- ✓ Se hace una previsión de un marco referencial, al estudiar –únicamente– las publicaciones unitarias y periódicas elegidas, con el fin de tener una muestra analítica significativa y útil para la investigación.

Selección documental

Con el fin de determinar cuál es la muestra analítica a considerar para la investigación, se hace una nueva selección de documentos del marco referencial que son de interés en relación con los focos de estudio, la pregunta de investigación y la herramienta analítica propuestos. Para ello, se establecen unos criterios de selección de búsqueda:

- ✓ ser una publicación unitaria, debido a su riqueza extensiva y analítica;
- ✓ ser un *handbook*, debido a su naturaleza documental-investigativa;
- ✓ ser un libro cuya fecha de publicación sea del último siglo, debido a que son estudios recientes y reconocen las fuentes históricas que los impulsaron a ser; o
- ✓ ser un libro cuyo autor sea reconocido en los dos campos focos de estudio, este criterio salió a la luz debido al reconocimiento de algunos planteamientos de la postura que plantea Ernest (1991) en su libro *The Philosophy of Mathematics Education*.

Debido a estos criterios, la investigación presta atención a la postura de Ernest (1991) sobre la FM; los principales problemas y posiciones teóricas de la FM enmarcadas en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, editado por Shapiro (2005); a los estudios en FM propuestos por Colyvan (2011), Peirce (2010) y Friend (2007); y al modelo del CPM propuesto por Stacey (2008) y otros autores.

Análisis temático del contenido

Esta fase es representada con el capítulo II y III, la cual alude a la operación de resumir planteada como segunda técnica de la metodología de análisis documental. Aquí, se toman los documentos seleccionados para la investigación y se esbozan los planteamientos de cada uno de los autores, lo cual resulta ser la herramienta analítica para el proceso interpretativo del contenido informativo.

Selección de términos significativos

A partir de la herramienta analítica se diseñan algunos esquemas (solo con palabras clave) y se presentan los planteamientos estudiados de forma sintética, con el fin de dar a conocer y reconocer las características centrales de cada uno de los focos de estudio; esto será presentado como últimos apartados de los capítulos II y III. A continuación, se presentan dos esquemas (ver, Figuras 1 y 2) realizados durante la primera fase de la investigación:

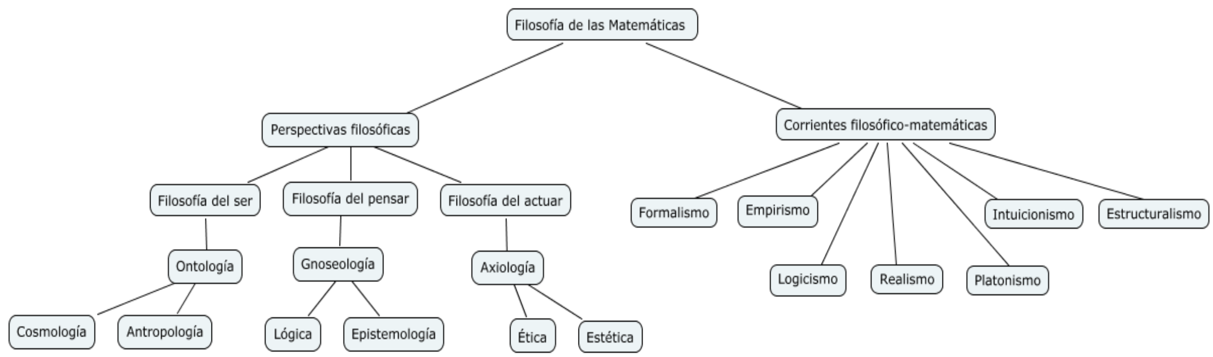

Figura 1.- Primer esquema sobre la FM

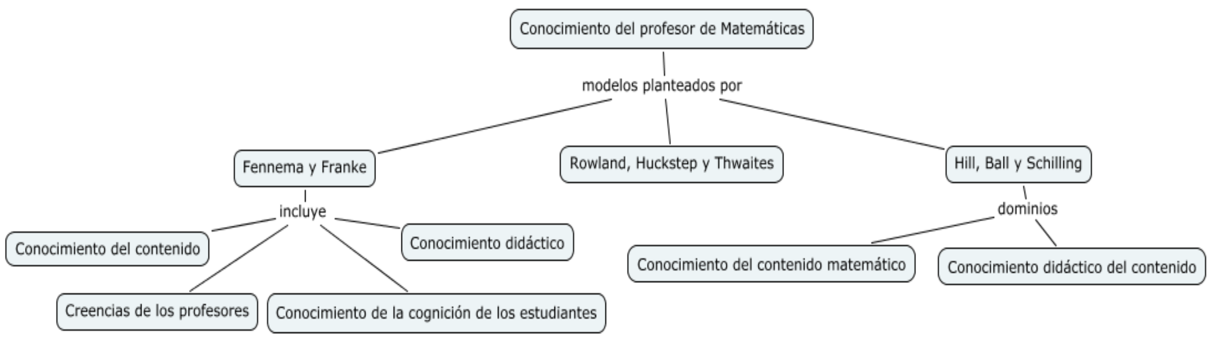

Figura 2.- Primer esquema sobre el CPM

Proceso analítico

El proceso analítico es la última fase de la investigación, en la cual se triangula la información estudiada y estructurada a lo largo de la investigación, con el fin de dar respuesta a las preguntas de investigación. Esto será presentado en el cuarto capítulo, con miras a ser la discusión, las respuestas y las conclusiones investigativas esperadas en la investigación y planteadas al principio del presente capítulo.

ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

La presente tesis se compone de cuatro capítulos. El primero corresponde a la introducción, en la cual se presentan los planteamientos generales del estudio y se hace énfasis en el diseño metodológico del mismo.

El segundo se compone de dos secciones. La primera incluye una síntesis de la revisión de la literatura, la cual sirvió para conceptualizar y mostrar una aproximación a lo que hay sobre FM en la comunidad académica. En la segunda se construye el marco de referencia a tener en cuenta sobre la FM; a su vez, se hace una reorganización de la información obtenida y estudiada a lo largo de la disertación.

El tercer capítulo es análogo al segundo capítulo, pero asume como foco de estudio al CPM –en vez de la FM–, cuyo derrotero son los modelos del CPM.

En el capítulo cuatro se plantean y discuten los resultados obtenidos, se proponen las conclusiones del estudio; y se relacionan con los planteamientos de la investigación (lo que incluye a los alcances de la misma) y el camino investigativo a futuro.

Particularmente en la primera parte de los capítulos II y III, debido a que corresponden a la operación de resumir, se reconoce que las ideas allí expuestas corresponden a las de los autores seleccionados. Esta aclaración se hace, debido a que se omite el estilo de citación de parafraseo puesto que sería iterativo debido a la naturaleza de dichas secciones.

CAPÍTULO II. LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

Este capítulo está dividido en cuatro partes. Las tres primeras corresponden a la sección de revisión de la literatura y la cuarta a la del marco de referencia; en relación con el primer foco de estudio. La primera parte contiene una síntesis de la postura de Ernest (1991) sobre la FM. La segunda presenta un resumen de los principales planteamientos de la FM enmarcadas en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, editado por Shapiro (2005). La tercera incluye una síntesis del estudio de la FM según Colyvan (2011), Peirce (2010) y Friend (2007). La cuarta presenta una esquematización de términos significativos y los planteamientos aceptados (en términos generales) por el investigador sobre la FM. En adición a lo anterior, se presentan unos esquemas construidos durante el estudio de los documentos, a lo largo de la primera sección, con el fin de recapitular en términos genéricos los planteamientos de los autores seleccionados.

LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS SEGÚN PAUL ERNEST

Aquí, se presentan algunos planteamientos de la postura que plantea Ernest (1991) en su libro *The Philosophy of Mathematics Education*, los cuales versan sobre los paradigmas absolutista y falibilista en los que las Matemáticas pueden ser provistas de significado (ver, Figura 3). Este, parte del hecho de que las Matemáticas han sido dominadas por el paradigma absolutista, el cual considera la verdad matemática como infalible y objetiva, alejada de los asuntos y valores de la sociedad. En contraposición a esto, afirma que las Matemáticas son falibles y son susceptibles al cambio, y que están condicionadas por el conocimiento humano. La perspectiva absolutista aboga por la certeza absoluta de la verdad matemática y concibe a las Matemáticas como el único ámbito incuestionable de conocimiento. Esto, está en contraste con la visión falibilista, la cual plantea que la verdad matemática es corregible y puede ser objeto de revisión. De otra parte, la postura absolutista considera que las Matemáticas son ajenas a la responsabilidad social y a la transmisión de valores, mientras que la postura falibilista concibe a las Matemáticas como un campo de investigación que está en continua expansión (no un producto terminado) y depende de la invención humana.

Para desarrollar esta ambivalencia, a continuación, se recapitulan las ideas de Ernest (1991), en las cuales él plantea lo que concibe por FM y naturaleza del conocimiento matemático, expone los aportes de las escuelas filosóficas que defienden la postura absolutista, plantea la perspectiva falibilista como una crítica a la postura absolutista, y muestra el alcance de la FM a razón de la insostenibilidad de la "certeza" del conocimiento. Particularmente, en este último apartado hace una ampliación de las escuelas filosóficas.

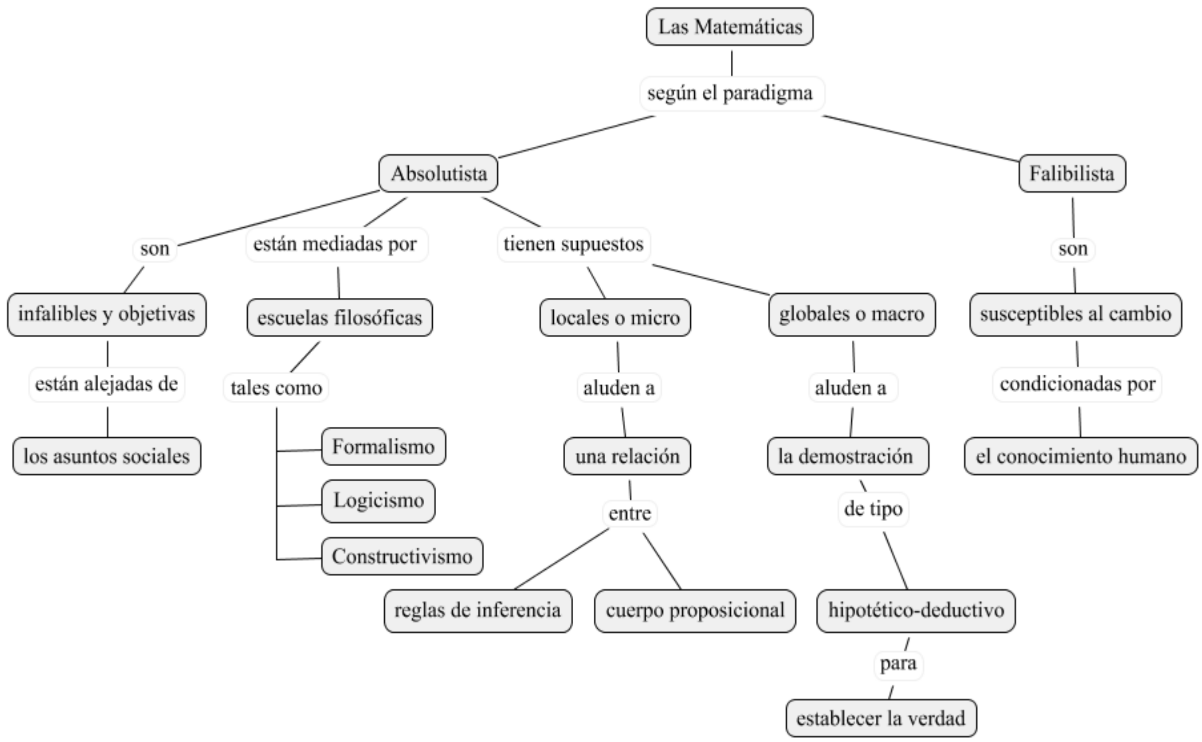

Figura 3.- Las Matemáticas, y los paradigmas absolutista y falibilista.

Filosofía de las Matemáticas y la naturaleza del conocimiento matemático

La FM es la rama de la Filosofía, cuyo objetivo es reflexionar sobre la naturaleza de las Matemáticas; esta –en principio– es estudiada a partir de la gnoseología y la epistemología, las cuales versan sobre el conocimiento humano y el científico, respectivamente. Particularmente, la epistemología se direcciona a responder preguntas, tales como: ¿cuál es el fundamento del conocimiento matemático?, ¿cuál es la naturaleza de la verdad matemática?, ¿qué caracteriza a las verdades en Matemáticas?, ¿son las verdades matemáticas necesarias, y por qué?

Antes de indagar sobre la naturaleza del conocimiento matemático, es necesario tener en cuenta la naturaleza del conocimiento en general (ver, Figura 4). Así, la respuesta filosófica estándar al interrogante ¿qué es el conocimiento?, se da en términos de que es una "creencia justificada". Y, ante la pregunta ¿de dónde procede el conocimiento?, este se clasifica en *a priori* y en *a posteriori*. Un conocimiento *a priori*, consiste en proposiciones que se afirman sobre la base de la razón *per se*, sin recurrir a las observaciones del mundo, consiste en el uso de la lógica hipotético-deductiva. Por el contrario, un conocimiento *a posteriori* consiste en proposiciones que se afirman sobre la base de la experiencia, es decir, atiende a las observaciones del mundo.

El conocimiento matemático es considerado como un conocimiento *a priori*, ya que consiste en proposiciones afirmadas sobre la base de la razón. Esto, incluye a la lógica hipotético-deductiva y a las definiciones que se utilizan, en combinación con un conjunto asumido de axiomas o postulados matemáticos como punto de partida para inferir todo conocimiento matemático. El fundamento del conocimiento matemático, que es la base para afirmar la verdad de las proposiciones matemáticas, necesita de una demostración. Esto último es una secuencia finita de pasos que termina en una proposición que enuncia la proposición planteada inicialmente. Cada proposición es una afirmación extraída de un conjunto –previamente estipulado– de axiomas, o se deriva de una regla de inferencia a partir de una o más sentencias que se producen antes o durante la secuencia.

Los supuestos lógicos y las reglas de inferencia se asumen como parte del mecanismo necesario para la aplicación de la razón. Por lo tanto, la lógica se asume como una base –sin problemas– para la justificación del conocimiento matemático. Dado que el proceso de demostración y los axiomas son asumidos como verdades absolutas, entonces cualquier teorema derivado también debe ser verdad.

De esto último, si de una teoría se toma el conjunto de axiomas, pero se asume como axioma la negación de uno de aquellos, se esperaría que la nueva teoría condujera a una contradicción. Sin embargo, esta afirmación no es aceptada; a modo de ejemplo, están las geometrías no-euclidianas. Estas geometrías surgen de asumir sistemas de axiomas que contienen la negación de uno de los postulados de la axiomática euclidiana y no necesariamente lleva a contradicciones, sino por el contrario, conduce a otros cuerpos de conocimiento geométrico igualmente válidos.

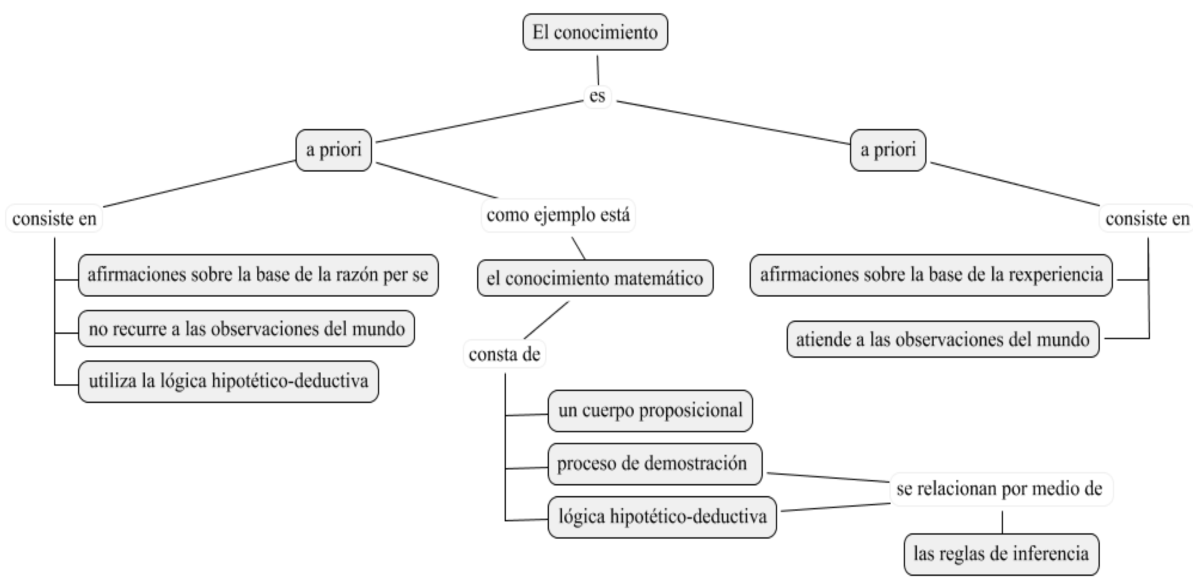

Figura 4.- El conocimiento general y el conocimiento matemático.

La postura absolutista sobre el conocimiento matemático

La postura absolutista asume que el conocimiento matemático se compone de verdades "absolutas"; en este sentido, las Matemáticas son el conjunto de determinados conocimientos (además de la Lógica) y de las afirmaciones verdaderas en virtud de los significados. Los motivos para afirmar que las Matemáticas –y la Lógica– proporcionan conocimiento absolutamente cierto, son: los enunciados básicos (o los axiomas matemáticos) utilizados en las demostraciones, se toman como verdad; y las reglas lógicas de inferencia preservan la verdad, es decir, permiten que las verdades sean deducidas de las verdades, luego, cada declaración en una demostración hipotético-deductiva, incluye su conclusión, la cual también es cierta.

Esta visión absolutista del conocimiento matemático se basa en dos tipos de supuestos: los *supuestos locales* o *micro* que aluden a la lógica en relación con los axiomas, las definiciones, las reglas de inferencia, el lenguaje formal y su sintaxis; y los *supuestos globales* o *macro* que aceptan a la deducción lógica como recurso suficiente para establecer todas las verdades matemáticas.

La postura absolutista del conocimiento matemático encontró problemas a partir del siglo XX, lo que derivó una serie de antinomias en Matemáticas. Por ejemplo, Russell fue capaz de demostrar que el sistema de Frege era inconsistente, el problema radicaba en la ley básica V de Frege, que permite crear un conjunto a partir de la extensión de cualquier concepto y para los conceptos o propiedades que se aplicará a este conjunto. Russell produjo su conocida paradoja mediante la definición de la propiedad "no ser un elemento de sí mismo". Este tipo de hallazgos tienen, por supuesto, consecuencias graves para la visión absolutista del conocimiento matemático, ya que, si las Matemáticas son ciertas, y todos sus teoremas son ciertos, ¿cómo pueden las contradicciones estar entre sus teoremas?

Escuelas absolutistas

Como no había ningún error en las antinomias del siglo XX, el resultado de esta crisis fue el desarrollo de una serie de escuelas de la FM cuyos objetivos eran explicar la naturaleza del conocimiento matemático y restablecer su certeza. Las tres escuelas principales del absolutismo (ver, Tabla 1) son conocidas como logicismo, formalismo y constructivismo (incorpora al intuicionismo).

Escuelas / Principios	Logicismo	Formalismo	Constructivismo
Idea	Las Matemáticas son parte de la Lógica.	Las Matemáticas son sistemas formales consistentes.	Las Matemáticas son argumentos *constructivos*.

Ponentes	Leibniz, Frege, Russell, Whitehead, y Carnap.	Berkeley, Hilbert, Neumann, y Curry.	Kant, Kronecker, Brouwer, Heyting, Weyl, y Bishop.
Tesis	➢ Los conceptos matemáticos de la teoría de conjuntos se pueden reducir a los conceptos lógicos. ➢ Todas las verdades matemáticas pueden ser demostradas por medio de reglas de inferencia y axiomas lógicos.	➢ Las Matemáticas se pueden expresar como sistemas formales. ➢ La validez está dada en términos de la carencia de inconsistencia.	➢ No debe existir la "pérdida de sentido". ➢ Las Matemáticas deben ser establecidas por métodos constructivos.
Debilidades	Existen axiomas no lógicos; por ejemplo, el axioma del infinito o el axioma de elección.	Las teorías son inconsistentes o incompletas; esto es demostrado en los Teoremas de Incompletitud de Gödel.	Al no reconocer elementos como: la demostración por contradicción y la validez del tercio excluido, se limita la producción de conocimiento matemático.

Tabla 1.- Escuelas Absolutistas.

Logicismo

El logicismo es la escuela de pensamiento que considera a las Matemáticas puras como parte de la Lógica. Los principales defensores de este punto de vista son Leibniz, Frege, Russell, Whitehead y Carnap. En las manos de Bertrand Russell el logicismo recibió la formulación más clara y explícita; en este, se destacan dos afirmaciones:

1. Todos los conceptos de las Matemáticas, pueden reducirse a conceptos lógicos, siempre que estos se tomen para incluir los conceptos de la teoría de conjuntos o algún sistema de potencial similar, como la teoría de tipos de Russell.

2. Todas las verdades matemáticas pueden ser demostradas de los axiomas y las reglas de inferencia de la Lógica.

El propósito de estas afirmaciones es claro. Si todas las Matemáticas se pueden expresar en términos puramente lógicos, y demostrar a partir de principios lógicos, entonces la certeza del conocimiento matemático puede ser reducida a la de la Lógica. Whitehead y Russell fueron capaces de establecer la primera de las dos afirmaciones por medio de cadenas de definiciones. Sin embargo, el logicismo declino en la segunda afirmación.

Más tarde, se mostró que las Matemáticas requieren axiomas no lógicos, como el axioma del infinito (existe un conjunto infinito o inductivo, por ejemplo, el conjunto de los números naturales) y el axioma de elección (existe una función de "elección" para cada familia de conjuntos no vacíos, por ejemplo, el producto cartesiano de una familia de conjuntos no vacíos es en sí mismo no vacío), luego, no todos los teoremas matemáticos y, por tanto, no todas las verdades matemáticas se pueden derivar de los axiomas de la Lógica, lo que significa, que los axiomas matemáticos no son eliminables a través de los de la lógica.

Formalismo

Las huellas de una filosofía formalista de las Matemáticas se pueden encontrar en los escritos del obispo Berkeley, pero los principales proponentes del formalismo son Hilbert, Neumann y Curry. Especialmente, el programa formalista de Hilbert tuvo como objetivo reescribir las Matemáticas en sistemas formales, los cuales debían ser consistentes. La tesis formalista consta de dos afirmaciones:

1. Las Matemáticas puras se pueden expresar como sistemas formales, en los que las propiedades matemáticas son representadas por los teoremas formales.

2. La validez de estos sistemas formales se puede establecer en términos de su carencia de inconsistencia.

Por su parte, los teoremas de incompletitud de Gödel mostraron que la tesis no podría cumplirse. Particularmente, el primer teorema demuestra que cualquier teoría aritmética recursiva que sea consistente es incompleta; por ejemplo, no todas las verdades de la Aritmética se pueden derivar de los axiomas de Peano (o de cualquier conjunto de axiomas por recursión más grande), lo que lleva a concluir que, no todas las verdades matemáticas pueden ser representadas como teoremas en los sistemas formales.

Constructivismo

La postura constructivista tiene sus fundamentos en las ideas de Kant y Kronecker. La escuela constructivista pretendió reconstruir el conocimiento matemático con el fin de protegerlo de la pérdida de sentido y de la contradicción. Con este fin, los constructivistas rechazaban los argumentos no *constructivos*. Específicamente, objetan el uso de la ley lógica del tercio excluido y las demostraciones por *reductio ad absurdum*; por ejemplo, la demostración de Cantor de que los números reales son no-numerables.

Los exponentes del constructivismo (tales como, Brouwer, Heyting, Weyl, Bishop) comparten la opinión de que las Matemáticas clásicas pueden ser “inseguras”, y que las verdades matemáticas y la existencia de los objetos matemáticos deben ser establecidas y reconstruidas por métodos *constructivos*. Esto significa que se necesitan construcciones o demostraciones matemáticas para establecer la verdad o la existencia, condición que no es satisfecha al emplear métodos que dependen de la demostración por contradicción. Aunque algunos constructivistas sostienen que las Matemáticas son el estudio de los procesos constructivos realizados con papel y lápiz, la postura más estricta de los intuicionistas –dirigidos por Brouwer–, es que las Matemáticas se llevan a cabo principalmente en la mente y que las matemáticas escritas son secundarias.

La falacia del absolutismo y la postura falibilista

Cada una de las tres escuelas de pensamiento absolutista (logicismo, formalismo e intuicionismo) no lograron establecer la necesidad lógica del conocimiento matemático e intentaron proporcionar una base firme para la verdad matemática. En cada caso, se emplea la lógica hipotético-deductiva para demostrar la verdad de los teoremas matemáticos y hay una postura respecto a la verdad absoluta, la cual incluye a los axiomas de la lógica, los principios intuitivamente ciertos (meta-matemáticas), y los axiomas evidentes (por intuición); cada uno de estos conjuntos de axiomas o principios se asumen sin demostración, por lo tanto, las axiomáticas son susceptibles a la duda. En consecuencia, estas tres escuelas de pensamiento no logran establecer la certeza absoluta de la verdad matemática, ni proporcionan una base para una gama completa de verdades matemáticas –como lo muestra el teorema de incompletitud de Gödel–. Luego, esta forma debilitada de la posición absolutista da paso a una crítica falibilista.

A su vez, es posible destacar tres dicotomías entre las posturas absolutista y falibilista (ver, Tabla 2). En primer lugar, existe el contraste entre el conocimiento como un producto terminado (un cuerpo de proposiciones) y la actividad de conocer, obtener o crear conocimiento (génesis). En segundo lugar, se encuentra la visión de las Matemáticas como una disciplina aislada y discreta, que es estrictamente delimitada y separada de otros campos del conocimiento; en oposición a una visión de las Matemáticas como una disciplina conectada al conocimiento humano. En tercer lugar, las Matemáticas pueden ser planteadas como objetivas y libres de valores; en contraste con las Matemáticas entendidas como una parte integral de la cultura humana, y por tanto, totalmente imbuidas de valores humanos.

El rechazo a la postura absolutista lleva a la aceptación de la postura (contraria) falibilista del conocimiento matemático. La tesis falibilista puede ser determinada a partir de dos formas “equivalentes”, una positiva y una negativa. La forma *negativa* se refiere al rechazo del absolutismo, en esta se sostiene que el conocimiento matemático no es la verdad absoluta y no tiene validez absoluta. La forma *positiva* plantea que el conocimiento matemático es corregible y abierto a revisión.

El argumento central en contra de la visión absolutista, más allá del problema de la verdad supuesta de los axiomas, está en términos de la lógica utilizada en la demostración matemática. El establecimiento de las verdades matemáticas (deducción de teoremas de un conjunto de axiomas), requiere supuestos (reglas de inferencia) no triviales y no eliminables, lo que lleva a la verdad matemática a depender esencialmente de la lógica.

Postura absolutista	Postura falibilista
El conocimiento es una producción terminada.	El conocimiento es la actividad de crear.
Las Matemáticas son una disciplina aislada de la actividad humana.	Las Matemáticas son una disciplina conectada con el conocimiento humano.
Hay objetividad y se es libre de “valores”.	Se fundamenta en la cultura humana, esta imbuida de valores.

Tabla 2.- Dicotomías entre los paradigmas absolutista y falibilista de las Matemáticas.

El alcance de la Filosofía de las Matemáticas

Anteriormente, se consideró la hipótesis de que el conocimiento matemático es un conjunto de verdades (proposiciones con demostraciones), y que la función de la FM es establecer la certeza de este conocimiento. Tras constatar que esta hipótesis es insostenible –en la postura absolutista–, se debe reflexionar sobre la naturaleza de la FM, lo cual conlleva a plantear el interrogante ¿cuál es la función y el alcance de la FM?

Las Matemáticas son un conjunto de conocimientos y pueden ser descritas en términos de sus conceptos, características, historia y prácticas; por lo cual, la FM debe responder a esta complejidad y también se debe hacer las siguientes preguntas: ¿cuál es el propósito de las Matemáticas?, ¿cuál es el papel de los seres humanos en las Matemáticas?, ¿cómo el conocimiento subjetivo de los individuos se convierte en el conocimiento objetivo de las Matemáticas?, ¿cómo ha evolucionado el conocimiento matemático?, ¿de qué manera la Historia de las Matemáticas “ilumina” la FM?, ¿cuál es la relación entre las Matemáticas, y las otras áreas del conocimiento y la experiencia humana?, ¿por qué las teorías matemáticas han demostrado ser útiles en sus aplicaciones a la ciencia y a los problemas prácticos del ser humano?

Lo que se ha predispuesto es que la FM debe incluir preguntas en relación con los orígenes históricos y el contexto social de las Matemáticas; además de las cuestiones del conocimiento, la existencia y su justificación. Por ende, la FM versa sobre la naturaleza de las Matemáticas, lo que incluye temas externos como la historia y las prácticas matemáticas, y cuestiones internas como la justificación del conocimiento matemático. De lo anterior, se concluye que la FM debe tener en cuenta: la naturaleza del conocimiento matemático y de los objetos matemáticos; las aplicaciones de las Matemáticas, su eficacia en la ciencia, en la tecnología y en otras disciplinas; y la práctica matemática, aludiendo a las actividades de los matemáticos (tanto en el presente, como en el pasado).

Escuelas filosóficas

Lo anterior, proporciona un medio para evaluar la pertinencia y eficacia de las escuelas de pensamiento filosófico-matemáticos. Por tanto, a continuación se hace mención de algunas escuelas filosóficas.

El absolutismo progresista y el intuicionismo

Confrey (1981; citado en Ernest, 1991) hace una distinción entre la filosofía absolutista formal y la filosofía absolutista progresista de las Matemáticas. La distinción clave es que en la primera se acepta el descubrimiento y la demostración de nuevos teoremas dentro de una teoría matemática formal (sobre la base de sus axiomas), aunque no acepta modificaciones de las teorías matemáticas ni las creaciones de las matemáticas informales. En contraste, la filosofía absolutista progresista permite la creación y el cambio de las teorías axiomáticas, acepta que se necesita intuición matemática –como base– para la creación de la teoría, y reconoce la actividad humana y sus resultados en la creación de nuevos conocimientos y teorías.

Particularmente, el intuicionismo encaja en la segunda descripción, ya que busca bases seguras para el conocimiento matemático a través de demostraciones intuicionistas; reconoce la actividad matemática humana en la construcción de demostraciones u objetos matemáticos, y en la creación de nuevos conocimientos; y reconoce que los axiomas de la teoría matemática intuicionista (y de la lógica) son fundamentalmente incompletos, por tanto, acepta la necesidad de incluir más verdades matemáticas de manera informal o por intuición.

Platonismo

El platonismo plantea que los objetos matemáticos tienen una existencia real y objetiva en algún mundo ideal independiente de la humanidad, y que hacer Matemáticas es el proceso de descubrir sus relaciones pre-existentes. Según el platonismo, el conocimiento matemático consiste en la descripción de estos objetos, y en las relaciones y estructuras que los conectan, de este modo, el platonismo ofrece una solución al problema de la objetividad de las Matemáticas, ya que presenta una aparente autonomía de las Matemáticas, que obedece a sus propias leyes internas y a la lógica.

El platonismo tiene dos grandes debilidades. En primer lugar, no es capaz de ofrecer una explicación adecuada de cómo los matemáticos acceden al conocimiento del reino platónico, ya que se basan en observaciones del mundo real, posteriormente generalizadas. El segundo defecto es que solo tiene en cuenta los aspectos de la teoría de conjuntos y de las estructuras estáticas de las Matemáticas, por lo cual, no tiene en cuenta la manera de utilizar las Matemáticas, sus relaciones con la ciencia, la actividad humana o la cultura.

Convencionalismo

La postura convencionalista de las Matemáticas sostiene que el conocimiento matemático y la verdad se basan en convenciones lingüísticas, las verdades de la Lógica y de las Matemáticas son analíticas. Particularmente, el convencionalismo propuesto por Quine utiliza la convención lingüística como la fuente de la verdad matemática básica sobre la que se construyen las Matemáticas. De acuerdo con este punto de vista, las convenciones lingüísticas proporcionan ciertas verdades matemáticas, lógicas y lógico-deductivas (demostraciones), que se transmiten al resto del cuerpo del conocimiento matemático, a partir de su certeza y validez.

Por su parte, Wittgenstein plantea que los usos del lenguaje implican la aceptación de las reglas, que son una condición previa, para la comunicación lingüística. Así, de acuerdo a la filosofía convencionalista de las Matemáticas de Wittgenstein, las verdades de las Matemáticas y de la Lógica dependen de las normas lingüísticas, del uso de términos y de la gramática, así como de las normas que rigen las demostraciones.

El convencionalismo ofrece los comienzos de una perspectiva descriptiva de la naturaleza de las Matemáticas, formulados en términos de su base lingüística. Tiene posibilidad de ser una postura falibilista de las Matemáticas y puede explicar la objetividad del conocimiento matemático y su génesis, a través de la aceptación de reglas lingüísticas y de la adquisición del lenguaje.

Empirismo

La postura empirista de la naturaleza de las Matemáticas sostiene que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas. Se pueden distinguir dos tesis empiristas: (1) los conceptos matemáticos tienen orígenes empíricos; y (2) las verdades matemáticas tienen justificación empírica, es decir, se derivan de las observaciones del mundo físico. La primera tesis es aceptada por la mayoría de los filósofos, dado que muchos de los conceptos no se forman directamente de observaciones, sino que se definen en términos de otros conceptos, a través de cadenas de definiciones. La segunda tesis es rechazada por todos –salvo por los empiristas–, ya que la mayoría del conocimiento matemático se acepta en lo teórico y no en lo empírico-práctico.

Cuasi-empirismo

La FM desarrollada por Lakatos es denominada *cuasi-empirismo*, esta plantea que las Matemáticas son lo que los matemáticos hacen y han hecho, con todas las imperfecciones inherentes a toda actividad humana o a la creación, es decir, son un diálogo entre las personas que abordan problemas matemáticos. Algunos de los partidarios de este punto de vista son Davis, Hallett, Hersh, Tymoczko, y Putnam.

Los matemáticos son falibles y sus productos (conceptos y demostraciones) nunca se pueden considerar definitivos o perfectos; pueden requerir cambios, a causa de nuevos patrones de rigor, retos o significados que emergen. Asimismo, como actividad humana, las Matemáticas no pueden considerarse aisladamente de su historia y sus aplicaciones en las ciencias. En el cuasi-empirismo de Lakatos se pueden identificar cinco tesis:

1. *El conocimiento matemático es falible*. El cuasi-empirismo rechaza la búsqueda de la certeza absoluta en las Matemáticas y reconoce que el conocimiento matemático es falible y corregible.
2. *Las Matemáticas son hipotético-deductivas*. El énfasis en un sistema de este tipo no está en la transmisión de la verdad a partir de premisas "verdaderas".
3. *La Historia juega un papel importante*. Parte de la tarea epistemológica es responder a la pregunta ¿cómo es posible cualquier conocimiento matemático? De este modo, la FM está indisolublemente ligada a la Historia de las Matemáticas, ya que esta última versa sobre la evolución del conocimiento matemático.
4. *La primacía de las Matemáticas informales se afirma*. Las matemáticas informales son de suma importancia, tanto como práctica, como producto.
5. *Hay una teoría de la creación de conocimiento*. Una preocupación central de la FM es la lógica del descubrimiento matemático, o heurística. En este proceso, las producciones de los matemáticos están expuestas a la crítica, y reformuladas en respuesta a las críticas, en un ciclo dialéctico-iterativo. Este proceso, es necesario para que los nuevos productos (definiciones, teoremas, demostraciones) puedan incorporarse al cuerpo de conocimientos matemáticos aceptado.

Asimismo, Lakatos recrea la naturaleza del conocimiento matemático como hipotético-deductiva y cuasi-empírica, se da cuenta de los errores en el conocimiento matemático y ofrece una elaborada teoría de la génesis del conocimiento matemático. Esta última, pone a la par al conocimiento científico y al éxito de las aplicaciones de las Matemáticas en la ciencia y la tecnología.

Debilidades del cuasi-empirismo de Lakatos

Aunque, una fortaleza clave de la FM de Lakatos es que es descriptiva (no prescriptiva) ya que trata de describir a las Matemáticas como son y no como deberían ser practicadas, y aboga por los conocimientos matemáticos y la práctica matemática. El cuasi-empirismo puede ser criticado en varios aspectos, a continuación se presentan cinco de esas críticas.

En primer lugar, no hay certeza matemática, Lakatos no explica por qué la verdad matemática es la "más segura" de todo conocimiento y no tiene en cuenta la certeza aparente de la lógica hipotético-deductiva y del conocimiento matemático. En segundo lugar, Lakatos no da cuenta de la naturaleza de los objetos matemáticos, no hay ninguna indicación en su relato de la plausibilidad del platonismo.

En tercer lugar, Lakatos no establece suficientemente la legitimidad de la Historia de las Matemáticas en los fundamentos de su FM. En cuarto lugar, la filosofía cuasi-empirista de Lakatos proporciona motivos que son necesarios pero no suficientes para establecer el conocimiento matemático. Y por último, no hay una exposición sistemática del cuasi-empirismo, no presenta sus tesis en detalle, ni anticipa o refuta objeciones a la misma.

HANDBOOK SOBRE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic editado por Shapiro (2005), hace un recuento histórico de la FM (ver, Tabla 3) y alude a algunos precursores. Así, presenta el período moderno (representado por Kant), el empirismo y positivismo lógico (bajo los planteamientos de John Stuart Mill), y la perspectiva de Wittgenstein. Asimismo, expone los fundamentos de las Matemáticas en las primeras décadas del siglo XX a través del logicismo (el programa de Frege y Russell), el neo-logicismo, el formalismo y el intuicionismo (programa liderado por Brouwer y Heyting). Al final exhibe la reconstrucción sistemática de Quine (holismo y naturalismo) como una filosofía de las últimas décadas del siglo XX.

Momento Histórico	Con qué se relaciona…	Qué dice…
Período moderno (Siglo XVIII)	➢ Kant (idealismo trascendental) ➢ Descartes	➢ La ciencia y la cognición del espacio y sus relaciones, proporcionan conocimiento *a priori* sobre la forma de los objetos espacio-temporales concebidos por la experiencia, lo que permite hacer juicios válidos. ➢ La representación que se encuentra en las bases del razonamiento matemático y la cognición, tienen su origen en lo empírico. ➢ Las Matemáticas son un cuerpo sintético *a priori* de la cognición.
Empirismo y positivismo lógico	➢ Stuart ➢ Circulo de Viena	➢ La "epistemología naturalizada" versa sobre la naturaleza de la semántica y la metodología de la ciencia. ➢ La cognición es un proceso natural debido a la importancia de la información recibida.

		➢ El apriorismo, la exactitud y la certeza de las Matemáticas se deben al "marco" de las convenciones. ➢ La justificación es *a posteriori*; la intuición es más "fuerte" que la inducción.
Filosofía "analítica"	➢ Wittgenstein	➢ La Filosofía es una disciplina o actividad autónoma, no reductible a la ciencia natural. ➢ La objetividad matemática no debe entenderse como algún tipo de verdad. ➢ Las Matemáticas son la evolución de las actividades y técnicas de pensar, aplicadas a artefactos humanos. ➢ La Lógica carece de contexto fáctico. ➢ Las Matemáticas y la Lógica no tienen una naturaleza unificada; la aplicabilidad y objetividad surgen de la necesidad humana de encontrar la validez de sus resultados.
Siglo XX (primeras décadas)	➢ Logicismo (Frege, Russell) ➢ Neo-logicismo ➢ Formalismo ➢ Intuicionismo (Brouwer, Heyting)	➢ (ver, Tabla 1)
Siglo XX (últimas décadas)	➢ Holismo y Naturalismo (Quine)	➢ La existencia de los objetos debe extraerse de un sistema de "creencias". ➢ Nada se puede confirmar o desmentir de forma aislada, todo hace parte de un sistema de hipótesis. ➢ No hay distinción entre lo empírico y lo *a priori*. ➢ La ciencia natural es una investigación sobre la realidad, falible y corregible; no necesita de ninguna justificación más allá de la observación. ➢ Hay una epistemología naturalista (evalúa) y otra descriptiva (describe) en relación con la "forma" del conocimiento.

Se enfocan en: la universalidad, la certeza, la verdad, el apriorismo del razonamiento matemático, y la aplicabilidad de las Matemáticas.

Tabla 3.- Filosofía de las Matemáticas a través de la Historia

La Filosofía de las Matemáticas en el período moderno

En la época moderna, la cual comenzó con una nueva concepción del mundo natural como único y cuantificable, el término "ciencia" se utiliza para denotar un cuerpo sistemático de conocimientos sobre la base de un conjunto de principios.

Los métodos utilizados para interpretar algunas cuestiones matemáticas en la época antigua, fueron sometidos a un período de transformación radical durante la temprana Edad Moderna. El análisis de Descartes para resolver problemas geométricos, los sistemas de Viète y Fermat, los descubrimientos independientes de Newton y Leibniz del Cálculo, son algunos de los desarrollos en la práctica matemática que son testigos de esta transformación. Estas innovaciones inspiraron otras igualmente radicales en la FM, los filósofos confrontaron a unas Matemáticas cambiantes, y su evaluación del terreno ontológico y epistemológico revela que tanto las nociones matemáticas básicas como las herramientas de los filósofos para comprender y explicar tales nociones estaban en transición. Mientras que los métodos matemáticos son más analíticos y abstractos, las Matemáticas estaban destinadas a proporcionar una descripción cuantitativa de cualquier entidad cuantificable (volumen, área, temperatura, entre otras).

En los siglos XVII y XVIII, la ontología matemática moderna incluyó a las Matemáticas abstractas y sus referentes concretos, y a los objetos empíricos cuantificables, además, pretendió explicar las características paradigmáticas del razonamiento matemático: la universalidad, la certeza y la verdad. De acuerdo con la epistemología, las Matemáticas modernas no podían sustentar la capacidad cognitiva para manipular abstracciones matemáticas, además tenían que explicar la forma en que estas abstracciones hacen contacto con el mundo natural.

Luego, el estado de la práctica matemática moderna propone responder dos cuestiones relacionadas entre sí. La primera explica el apriorismo del razonamiento matemático. La segunda cuestión trata sobre la aplicabilidad matemática. Luego, la FM trató de dar una explicación de la relación entre las características matemáticas de los objetos del mundo natural y el conocimiento *a priori*. Al final de la época moderna, Kant intenta responder a estas cuestiones con su doctrina del idealismo trascendental, al incluir argumentos para la síntesis de una cognición matemática *a priori*; afirma que los intentos anteriores para justificar el alcance cognoscitivo entran en conflicto con los principios de la experiencia.

Particularmente, la tarea del matemático moderno incluyó sistematizar la ciencia de la cantidad. Esto requiere, en primer lugar, un método para representar (y manipular) objetos reales cuantificables matemáticamente. Los objetos cuantificables incluyeron a las magnitudes discretas o aquello que podía ser representado numéricamente y manipulado aritméticamente, y a las magnitudes continuas o aquello que podía ser representado espacialmente y manipulado geométricamente.

En la concepción moderna, un número "surge" tras la consideración de un grupo de cosas de un tipo particular en relación con una sola cosa de ese tipo (unidad) y por lo tanto es, en cierto sentido, sensible al contexto. Al inicio de esta concepción, se deduce que los números son representacionalmente "inflexibles", es decir, es difícil hacer comparaciones cuantitativas entre magnitudes de diferente tipo. Así, las primeras innovaciones modernas sobre la flexibilidad representacional comenzaron con Descartes al representar y comparar magnitudes de manera uniforme mediante la formulación de relaciones y proporciones entre sus "dimensiones". Según Descartes, dimensionalidad comprende un sin número de características cuantitativas que incluyen peso, velocidad, el orden de las partes al todo, la división del todo en partes, además de longitud, anchura y profundidad. El segmento resulta ser la herramienta más versátil para representar cualquier dimensión (de magnitud), en el sistema de Descartes el segmento es la unidad.

Aunque el sistema (cartesiano) de representación gráfica fue pensado, en principio, para resolver problemas geométricos, los matemáticos modernos lo adoptaron debido a su utilidad en otras ramas de las Matemáticas; utilizaron las rectas para representar números con fines en la Teoría de números y la Aritmética. Una de las ventajas del sistema cartesiano es que permite que la noción de número se expanda de números enteros positivos a números construibles (relaciones entre segmentos de cualquier longitud y una unidad). Es importante destacar que los matemáticos modernos no fueron capaces de utilizar la representación cartesiana para concebir las cantidades negativas.

En este período, el Álgebra se concibe como una disciplina matemática en sí misma, con su propio dominio de problemas, distintos de los de la Aritmética y la Geometría; surgen investigaciones en Teoría de números y el descubrimiento del Cálculo procede a pesar de la insuficiencia de un concepto de número que incluya a las cantidades negativas o trate los infinitesimales con una perspectiva no geométrica. En este sentido, la práctica matemática moderna estuvo a la espera de una respuesta filosófica en el siglo XIX, en relación con la revisión de los avances notables de los siglos XVII y XVIII a partir de los fundamentos lógicos y matemáticos.

La respuesta de Descartes

Descartes argumenta que el ser humano tiene una percepción "clara y distinta" de la esencia (extensión) de la sustancia material; esta percepción de las naturalezas inmutables y eternas de todos los objetos materiales es la base para el conocimiento "cierto y seguro" de tales objetos. Para Descartes, la naturaleza esencial del mundo material es matemática y cognoscible.

Con el fin de mostrar que se tiene cierto conocimiento de la existencia real de las cosas materiales, Descartes debe investigar sus ideas sobre las cosas materiales, en la medida en que existen en su pensamiento, y ver cuáles de ellas son distintas y contradictorias. Él procede a mostrar que sus ideas claras y distintas de extensión exponen que la naturaleza corpórea es el objeto de las Matemáticas puras. En principio, Descartes confirma la claridad y nitidez de su idea de la cantidad, en particular, la extensión de la cantidad (segmentos) en longitud, anchura y profundidad. Y luego, enumera varias partes de la "cosa" y para estas partes asigna varios tamaños, formas, posiciones, movimientos y duraciones.

Al distinguir los rasgos cuantitativos de los objetos materiales se deduce que estas propiedades cuantitativas son "verdaderas", es decir, que los objetos materiales (si existen) realmente tienen las propiedades cuantitativas que se perciben. Descartes sostiene que el conocimiento es *a priori* en las verdades matemáticas sobre la sustancia material. Para ello, ha identificado una facultad mental y el intelecto racional, para ser herramientas cognitivas en función de la naturaleza material e independiente de la mente. En la visión de Descartes, esas naturalezas son cuantitativas y matemáticamente descriptibles.

Descartes y su filosofía racionalista de las Matemáticas explican el apriorismo de las Matemáticas con su teoría de que el intelecto, una facultad de la mente independiente de las facultades corporales de la imaginación y la sensibilidad, ofrece acceso directo a las ideas matemáticas innatas de las naturalezas eternas e inmutables. Se da cuenta de la aplicabilidad del razonamiento matemático mediante la identificación de la esencia del mundo material natural como "pura extensión"; el cómo las Matemáticas están relacionadas con el mundo natural es próximo al identificar las características esenciales del mundo natural con los objetos matemáticos.

La respuesta de Kant

Una filosofía coherente de las Matemáticas, incluye el intento de prevalecer la práctica matemática y una articulación de las condiciones epistemológicas y metafísicas sobre el éxito de dicha práctica es un componente vital del proyecto kantiano. Según Kant, es la ciencia y cognición del espacio y sus relaciones, lo que proporciona un conocimiento *a priori* de la forma espacial de los objetos conocidos por "experiencia", lo que permite hacer juicios objetivamente válidos. Kant afirma que su tesis satisface plenamente tanto el apriorismo, como las exigencias de aplicabilidad.

Para Kant, la cognición matemática es la cognición de las capacidades intuitivas; sostiene que la intuición del espacio es antes e independiente de la experiencia, por ende, la cognición geométrica es paradigmáticamente *a priori*, lo que satisface la cuestión del apriorismo. A su vez, para Kant, la cognición matemática es también la cognición de los objetos empíricos que se representan al tener en cuenta la forma y el espacio-tiempo, es decir, los objetos de la experiencia. En la medida en que se tiene un conocimiento geométrico *a priori* del espacio, se obtiene un conocimiento *a priori* geométrico de la forma espacial de los objetos reales. Es importante destacar que para Kant, la cognición matemática *a priori* se aplica a todos, y solo a, los objetos espacio-temporales.

Según Kant, el origen de las nociones de espacio y tiempo debe buscarse en la experiencia. Las representaciones que se encuentran en la base del razonamiento matemático y la cognición tienen un origen empírico. En este punto de vista, el espacio y el tiempo son "solamente inherentes" porque son las relaciones entre los objetos y no las entidades lo que subsiste por sí mismo; las representaciones del espacio y el tiempo son construidas por la abstracción de lo espacio-temporal, luego, las relaciones espacio-temporales son concebidas para ser la fuente de las nociones de espacio y tiempo y, por lo tanto, a ser "absolutamente reales". Kant admite que la cognición matemática no debe exceder a lo que se necesita para ser "límites" de la experiencia: si la cognición matemática deriva directamente del reino de las apariencias, entonces la aplicación de la cognición matemática está garantizada.

Kant plantea que los matemáticos deben asumir dos no-entidades eternas e infinitas (espacio y tiempo), ya que existen (sin que haya algo real) únicamente con el fin de comprender todo lo real dentro de sí mismas. A su vez, evalúa la postura absolutista de Newton de que el espacio es un contenedor existente e independiente de los objetos reales que contiene, aunque no es en sí misma una entidad empírica real, como el qué, que permite abrir el campo de las apariencias para aseveraciones matemáticas.

Para Kant, las Matemáticas son un cuerpo sintético *a priori* de la cognición que proporciona el conocimiento sobre las condiciones puras en representaciones sensibles y los objetos que aparecen en esas condiciones. A modo de ejemplo, la Geometría es la ciencia de una capacidad cognitiva, en particular, una capacidad para representar relaciones espaciales; la Geometría es la única ciencia que describe las diversas formas en que esa capacidad es a la vez justificada y limitada. A su vez, es la ciencia de los objetos naturales o empíricos que están inmersos en las relaciones espaciales que se pueden representar. Por lo tanto, la Geometría puede informar acerca de la función propia de la capacidad cognitiva para la intuición espacial, a la vez que proporciona el conocimiento de la forma espacial de los objetos reales.

Asimismo, la "revolución copernicana" de Kant, plantea que si la intuición (cognición sensorial de objetos) tiene que ajustarse a la constitución de los objetos, entonces no se puede saber sobre ellos *a priori*, pero si el objeto (como un objeto de los sentidos) se ajusta a la constitución de la facultad de intuición, entonces se puede representar. Kant sostiene que el conocimiento requiere de un marco para que cada objeto cognoscible pueda existir, esto, se localiza en las estructuras *a priori* de la sensibilidad y en las bases sintéticas en un carácter *a priori* de la Aritmética y la Geometría.

Empirismo y positivismo lógico

Los enfoques empiristas de las Matemáticas se extienden a partir de las críticas realizadas por Kant en la década de 1780 hasta los movimientos analíticos del siglo XX. Así en la época moderna se distinguían dos versiones empiristas: el empirismo radical de Mill y el empirismo lógico asociado con el círculo de Viena (positivismo de finales de 1920 y principios de 1930). Mill (1843) propone una "epistemología naturalizada" que incluye un tratamiento a fondo naturalista de la semántica y de la metodología de la ciencia. Si la cognición es un proceso puramente natural, ¿cómo puede tener un papel relevante en la determinación de la objetividad de los contenidos?

En la elaboración de la doctrina de que la Lógica y las Matemáticas son exactas y *a priori*, los positivistas lógicos renovaron elementos vitales del pensamiento kantiano, puesto que para ellos, y a diferencia de Kant, ninguna proposición informativa es *a priori*. Mill y los positivistas lógicos dan por sentado que la cognición es un proceso natural en el mundo natural, debido a la información recibida. Específicamente, los positivistas lógicos están de acuerdo con la idea general de la "revolución copernicana" de Kant, de que el conocimiento crítico solo es posible dentro de un marco *a priori*, en el que los objetos cognoscibles pueden existir, pero la forma en que lo plantean difiere de la interpretación idealista trascendental de Kant. Para ellos, no se proporcionó el marco necesario por las formas de la intuición o entendimiento, sino por un sistema de convenciones. La Lógica y las Matemáticas debían su apriorismo, exactitud, y certeza al hecho de que pertenecían al marco de las convenciones.

Como caso particular, Quine tiene afinidades con Mill, sin embargo, difieren en aspectos importantes. Mill es un inductivista y fenomenalista, Quine es un abductivista y fisicalista; Mill rechaza lo abstracto, Quine lo incluye. Para ambos, la Lógica y las Matemáticas son una parte de la ciencia, conocida por los métodos *a posteriori* de la ciencia; ambos tienen una concepción similar de "la epistemología naturalizada".

Argumento empirista

En los siguientes párrafos se esbozan algunos planteamientos de la escuela empirista, particularmente, a partir de la postura de Mill, quien a su vez, hace críticas sobre algunas visiones filosóficas, con el fin de mostrar la importancia del empirismo para la época.

Mill, considera que el "nominalismo" que versa sobre que la Lógica y las Matemáticas son *a priori*, ya que son totalmente vacías de contenido, no está a disposición del empirismo, puesto que él contra-argumenta por medio del análisis semántico, que la Lógica y las Matemáticas contienen inferencias sintéticas. Por ende, los nominalistas no pueden hacer distinción entre connotación y denotación de términos. Además, si la Lógica no contiene inferencias sintéticas, el razonamiento hipotético-deductivo no podría producir nuevos conocimientos.

También considera otras dos visiones rivales, el "realismo" y el "conceptualismo". Los realistas sostienen que el conocimiento lógico y matemático es el conocimiento de los universales que existen en un dominio abstracto e independiente de la mente; los términos que componen frases son signos que representan tales universales. Por su parte, los conceptualistas sostienen que los objetos estudiados por la Lógica son conceptos y juicios concebidos como estados psicológicos.

Es de reconocer, que aunque los nominalistas y conceptualistas sostienen que la Lógica y las Matemáticas pueden ser conocidas no por la experiencia empírica, ambos aceptan que ninguna proposición instructiva acerca de un mundo independiente de la mente puede ser conocida. El realismo, por el contrario, no acepta dicha restricción, y al hacerlo, refuta una de las cosas que Mill ha encontrado como "obvia". En el sistema lógico de Mill, se hace hincapié en la distinción entre el juicio y el contenido de la sentencia, destaca el papel de la intuición frente a la inducción en nuestra aceptación de demandas lógicas y matemáticas. Pero, él cree que la justificación es, en sí misma, *a posteriori*.

La postura de Mill sobre la Geometría y la Aritmética refleja ciertas preocupaciones: quiere mostrar cómo estas ciencias encajan en una epistemología inductivista y nominalista. El sistema lógico de Mill, da lugar al "proceso productivo", se comienza con fenómenos naturales, aparentemente inconexos, espontáneos y no-científicos. Las generalizaciones se acumulan, se entrelazan y se encuentran para resistir el paso del tiempo o se corrigen mediante una mayor experiencia. A medida que se acumulan y se entrelazan, justifican la conclusión inductiva de segundo orden que todos los fenómenos están sujetos a uniformidad y, más específicamente, que todos tienen condiciones suficientes. Esta conclusión, a su vez proporciona el supuesto para un nuevo estilo de razonamiento acerca de la naturaleza inductiva. La inducción científica mejorada que resulta de este tipo de razonamiento, plantea la confianza en la totalidad de determinadas inducciones. Así, la cantidad de confianza con la que se puede confiar en el "proceso inductivo" como un todo, depende del punto que ha alcanzado en su historia natural.

Pero, ¿de qué manera el conocimiento lógico-matemático encaja en esto? Mill piensa que provienen de lo espontáneo y no-científicos, que se han confirmado de forma *a posteriori* por el éxito del proceso inductivo. De ahí, el principio de exclusión: la misma proposición no puede al mismo tiempo ser falsa y verdadera. Su argumento sería que a través de los avances de la ciencia, fundamentos teóricos alejados de la experiencia podrían llevar a rechazar una propuesta apoyada por la prueba concebible.

Positivismo Lógico

En la década de 1920 está implícita la concepción de analiticidad, la cual comienza a aparecer en el pensamiento de Wittgenstein y Carnap. En su intención, la idea de Wittgenstein del apriorismo como tautología en el *Tractatus* había estado en línea con la idea de Kant y Mill de analiticidad. Es decir, que estaba destinado a demostrar con rigor que la inferencia tautológica es puramente formal, vacía de contenido, en su totalidad no instructiva. Mill señala que la doctrina del *Tractatus* sobre "bipolaridad" como condición para el sentido de las proposiciones esta dogmáticamente por sentado. Pero, luego de sus conversaciones con el círculo de Viena, Wittgenstein rechaza la idea de que la tautología es la esencia de lo *a priori*, ya que es la sintaxis, la que decide si una inferencia es correcta o no. De lo anterior, las tautologías son solo una manera de mostrar lo que es sintáctico.

De esto último, se desprende que la noción de una definición implícita no puede explicar la naturaleza de un conocimiento *a priori*. El punto se aplica siempre que se consideren definiciones implícitas. De acuerdo con esto, y según Mill y Kant, la única manera de mostrar una inferencia es de forma verbal. Sin embargo, los positivistas lógicos no lo aceptan. Su punto de vista se apoyaba en un replanteamiento verdaderamente revolucionario del lenguaje, la verdad y la lógica; ya que es natural pensar que las lenguas son vehículos particulares meramente contingentes para la expresión de contenidos del pensamiento, conceptos, proposiciones, y normas epistémicas.

Luego, un conocimiento *a priori* es el conocimiento de las reglas y puede incluir el conocimiento existencial, ya que la existencia es interna a las normas. Todo el mundo es libre de construir su propia lógica (es decir, su propia forma de lenguaje) como desee. Todo lo que se requiere de él es que si quiere mencionar, debe indicar claramente sus métodos y dar reglas sintácticas en lugar de argumentos. La aplicación de las Matemáticas ahora parece simple, se trata de unas Matemáticas entendidas como un todo perteneciente a un marco de referencia predispuesto.

Finalmente, el positivismo debe responder a los siguientes interrogantes: ¿las Matemáticas pueden demostrar que tienen un marco lingüístico?, ¿cómo saber si una frase expresa una regla lingüística o transmite una afirmación empírica (es decir, si se trata de algo analítico o algo sintético)?, y ¿cómo es sostenible el "giro lingüístico"?

Críticas al enfoque empirista y positivista

En alusión al interrogante ¿las Matemáticas pueden demostrar que tienen un marco lingüístico?, se presupone en principio que el marco debe ser especificado por el individuo de forma explícita para cada regla, frase o inferencia que contenga. Pero no toda la Lógica y las Matemáticas se pueden plantear de dicha forma. De hecho, no es posible especificar un procedimiento que decida efectivamente si cualquier sentencia dada pertenece al marco inicial.

Luego, ¿cómo se puede garantizar una axiomatización efectiva, que estipule que cualquier teorema del sistema axiomático es una “convención”? Una meta-lógica totalmente determinada tendría una especificación totalmente determinada de oraciones analíticas en el lenguaje, lo que responde a las dos últimas preguntas plantadas.

Pero este enfoque da lugar a preguntas como: ¿de dónde proviene la idea de que el contenido debe ser fáctico? Una interpretación es que se trata de una hipótesis argumentada, que todo conocimiento debe ser científico. Pero, el juicio normativo es inherente a los “prejuicios científicos”; hace parte de la ética, la estética y la epistemología. Y como Wittgenstein argumentó, cualquier juicio acerca de la forma correcta de aplicar una regla, no es ni fáctica ni estipulativa, pero si es normativa. Luego, ¿es posible que la Lógica y las Matemáticas sean en sí mismas normativas? La idea sería que, además de las proposiciones fácticas sobre los objetos y sus propiedades, hay proposiciones normativas que no son sobre las propiedades de los objetos, sino sobre el razonamiento acerca de los objetos.

Wittgenstein y la Filosofía de la Lógica y las Matemáticas

Ludwig Wittgenstein (1889-1951) escribió sobre la FM y la Lógica, lo que corresponde a miles de páginas de manuscritos, cuadernos y correspondencia que contiene observaciones sobre Brouwer, Cantor, Dedekind, Frege, Hilbert, Poincare, Skolem, Ramsey, Russell, entre otros. Como trabajo celebre dejo el *Tractatus logico-philosophicus* (1921), una obra cuyo impacto se dio en la preocupación posterior de la filosofía analítica por la caracterización de la naturaleza de la lógica como formativa. Las reacciones de Wittgenstein a la recepción empirista de sus primeros trabajos en el círculo de Viena y en el trabajo de Russell, le llevó a realizar esfuerzos adicionales para clarificar y adaptar su perspectiva, estimulada en parte por la evolución de los fundamentos de las Matemáticas de los años 1920 y 1930.

Las discusiones sobre las Matemáticas y la Lógica de Wittgenstein se realizan en el fondo de una investigación sobre las nociones de lenguaje, lógica y el concepto de la “posesión”. La fecundidad de su trabajo ha surgido principalmente por su capacidad para excavar, reformular, y evaluar críticamente la idealización más natural sobre la expresión del conocimiento, el significado y el pensamiento en el lenguaje. Wittgenstein, al igual que Frege y Russell, dio una comprensión adecuada de la lógica del lenguaje; papel que Kant intento reservar para una intuición *a priori* en la contabilización de la objetividad, la importancia y la aplicabilidad de las Matemáticas. El enfoque de Wittgenstein en la expresión lingüística del pensamiento, lo llevó a cuestionar el significado filosófico de su análisis logicista de la Aritmética. Su resistencia al logicismo generó preguntas como: ¿cuál es la naturaleza de la Lógica?, ¿qué es el lenguaje?, ¿qué se entiende por concepto?

Para Wittgenstein, como para Kant, la Filosofía y la Lógica abogan por la auto-comprensión y el conocimiento de sí mismo; las actividades de la autocrítica, la autodefinición y la reconciliación con las imperfecciones de la vida, en lugar de ramas especiales del saber encaminadas directamente en el descubrimiento de la verdad impersonal. Por tanto, estas actividades deben tener como objetivo ofrecer claridad y autenticidad de la "expresión", en lugar de ser una base cierta o explícita en términos de los principios generales del conocimiento.

En lugar de adoptar el empirismo o una doctrina claramente formulada acerca de las Matemáticas y la Lógica para combatir el racionalismo, Wittgenstein formó una nueva apropiación del lado dialéctico de la filosofía de Kant, según la cual la Filosofía es una disciplina o actividad autónoma no reductible con la ciencia natural. Esto establece su filosofía como independiente de la de Frege, Russell y mismo empirismo lógico. La mayoría de académicos coincide en que el corazón de la filosofía de Wittgenstein contiene una refundición de las concepciones tradicionales de un conocimiento *a priori*. Ve al platonismo o al racionalismo sin caer en el empirismo puro, el escepticismo, el naturalismo causal, o el ficcionalismo. Sin embargo, a diferencia de Kant, Wittgenstein rechazó la idea de que la objetividad matemática o lógica debe entenderse en términos de un objetivo general, norma o tipo de verdad.

Wittgenstein sugirió una comprensión detallada de cómo los seres humanos en realidad se expresan durante su vida. Así, el principal debate interpretativo sobre su filosofía se refiere a la forma y contenido de esta sugerencia. En sus últimos escritos Wittgenstein insistía explícitamente que sus observaciones filosóficas eran una propedéutica de las imágenes. En este punto de vista, la tarea del filósofo es investigar, construir, explorar, y poner de relieve los efectos filosóficos y presupuestos de diferentes modelos posibles, cada uno con una cierta naturalidad dada por la práctica lingüística y matemática "real"; el punto es explorar los problemas en lugar de defender o enunciar verdades generales. Wittgenstein radicalizó la idea de Kant de que las leyes de la lógica y las Matemáticas requieren análisis filosófico debido a la tendencia a malinterpretar la "verdad". Para Wittgenstein, las Matemáticas y la Lógica son para ser vistas no solo como ciencias de la verdad o cuerpos de conocimiento derivados de los principios básicos, sino también como la evolución de las actividades y técnicas de pensar, aplicadas a artefactos humanos.

El logicismo de Frege y Russell mostró la aplicación y contenido de la Lógica y la Aritmética como internas a su naturaleza; las Matemáticas y la Lógica no pueden explicarse totalmente en términos de normas meramente formales. Sin embargo, Wittgenstein cree, que debe entenderse en términos de una apelación a un conjunto de verdades primitivas o axiomas, o conocimiento de los objetos lógicos. La mejor manera de entender las funciones epistémicas (aparentemente únicas) de la Lógica y las Matemáticas es renunciar a la búsqueda de una epistemología unificada en favor de una investigación detallada de cómo estas actividades y artefactos moldean y son moldeados por el lenguaje. Al final, la obra de Wittgenstein no se mide en términos de su directa contribución al conocimiento (teoremas, definiciones o resultados), sino en términos de la potencia crítica de los diversos argumentos, analogías, términos, preguntas, sugerencias, modelos y modos de investigación conceptual.

Wittgenstein nos ofrece problemas en lugar de soluciones, nuevas formas de pensar en lugar de una defensa especialmente persuasiva de cualquier tesis filosófica sobre la naturaleza del lenguaje, la Lógica o las Matemáticas. A pesar de la “negatividad” de algunos, estas formas de pensar marcan un paso decisivo en la Historia de la Filosofía, en particular, en relación con el legado de Kant, Frege, Russell y el círculo de Viena; e inauguraron nuevas y fecundas formas de investigar fenómenos de la obviedad y la auto-evidencia en relación con la noción de la lógica. Después de Wittgenstein, el vocabulario lógico y filosófico tradicional que implica nociones categoriales fundamentales, como proposición, oración, sentido de verdad, hecho, objeto, concepto, número y vinculación lógica, ha sido relativizado por los filósofos a las lenguas particulares, en lugar de suponer que tiene una interpretación absoluta o universal.

En la época de Wittgenstein se consideraba que las nociones lógicas requerían de una explicación inmanente, su “sintaxis lógica” se deriva necesariamente de proposiciones o principios verdaderos. Es en gran parte a Wittgenstein (especialmente en lo heredado por Russell, Carnap y Quine) que la Filosofía analítica debe el interés de cuestionar la idea de Frege sobre que la objetividad obliga a interpretar las colecciones de varias sentencias declarativas o enunciativas, como el reflejo de un determinado contenido, pensamiento, proposición, sentido o significado.

En lo que sigue, algunos de los temas principales que rigen las discusiones sobre las Matemáticas y la Lógica de Wittgenstein son tratados en el contexto de la evolución de su pensamiento. Particularmente, un fuerte énfasis se coloca en los inicios de su filosofía (1908-1925), ya que dio lugar a los principales problemas con los que Wittgenstein quiso lidiar, y porque fue el primer trabajo que puso Wittgenstein en confrontación directa con las filosofías anteriores (según la Historia) de las Matemáticas.

Vida y Filosofía

Un primer esfuerzo por resolver la paradoja de Russell fue en parte responsable de llevar a Wittgenstein hacia la filosofía como una vocación. Formado como ingeniero en la *Technische Hochschule* de Berlín (1906-1908), estudió aeronáutica en Manchester (1908-1911) encontrándose con las obras de Frege y Russell. En Cambridge (1911-1913), las conversaciones con Moore y especialmente con Russell estimularon a Wittgenstein profundamente, y su versión final de *Tractatus Logico-philosophicus* se terminó en 1918. Se puede leer, al menos en parte, comentarios sobre las filosofías de Frege, Moore y Russell, y el lugar del logicismo en relación con el legado del idealismo kantiano. Así, el *Tractatus* forma un puente entre las primeras fases de la Filosofía analítica y el positivismo lógico del círculo de Viena (especialmente en lo que se expresa en la obra de Carnap).

El impacto y contribución principal de Wittgenstein fue sobre la cuestión filosófica: ¿cuál es la naturaleza de la Lógica?, una pregunta que surge naturalmente, si se intenta medir la significación filosófica general de Frege, Whitehead y Russell. A partir de que se había mostrado cómo derivar verdades y principios aritméticos básicos desde principios lógicos básicos (formalmente), surge el interrogante, por qué estos principios pueden considerarse "puramente" lógicos. Los principios básicos de Frege expresan verdades sobre nociones fundamentales (concepto, proposición, extensión) que siempre habían sido reconocidas con naturaleza "lógica". Sin embargo, ni Frege, ni después de él, Whitehead y Russell, proporcionaron una explicación satisfactoria del por qué sus aplicaciones sistematizadas de la noción matemática de la función a la estructura lógico-gramática obligan a considerar sus análisis puramente lógicos en algo más de un sentido verbal.

Frege y Russell concibieron a la Lógica como la ciencia de las características de la realidad, que enmarca el contenido de todas las demás ciencias. Sin embargo, se generaron tensiones internas dentro de esta visión universalista, dado que el contenido y la aplicabilidad de la Lógica son asumidos por el universalista como "leyes". Para ellos, sus lenguajes formalizados son las verdades que rigen todos los objetos, conceptos y proposiciones. Así, por ejemplo, Frege explicitó sus leyes básicas, puramente lógicas; negó que la "verdad" es una propiedad (palabra) genuina; la aplicabilidad de muchos de sus conceptos no pudieron ser enunciados en términos de verdades o definiciones puramente lógicas, dentro del lenguaje de su sistema lógico.

La integridad de estos sistemas con respecto a la inferencia lógica no pudo ser evaluada en aquel momento, fue casi cincuenta años después de Frege, para que la cuestión de la integridad con respecto a la noción de validez lógica fuese abordada. En sus primeros trabajos, al tiempo que responde las tensiones conceptuales de la vista universalista, Wittgenstein comenzó a concentrarse en el proyecto de aislamiento de una noción de consecuencia lógica.

El *Tractatus* respondió a la insistencia de Russell sobre la importancia de la lógica-matemática de la realidad de las relaciones exteriores (independientes de la mente) por revisar la noción idealista de una propiedad interna o una noción conectada en la tradición kantiana con la necesidad de entenderse como un reflejo de las condiciones humanas y formas de conocimiento. En el *Tractatus* se toman las necesidades de reflejar las estructuras de pensamiento posible o modos de representación de los hechos a través de proposiciones. Estas no son descriptibles con una proposición, verdadera o falsa, porque ellas reflejan las condiciones de una posible descripción que debe reflejarse en cualquier descripción. Por esta razón, Wittgenstein incluye las propiedades "formales" y los conceptos "pseudo-relacionales", con la intención de revitalizar la idea kantiana de que la Lógica es en su naturaleza una fuente fértil de ilusión dialéctica.

Cada una de estas ideas entran en conflicto directo con el punto de vista universalista de Frege y Russell: las leyes lógicas son verdades. Kant estableció una lógica trascendental de las apariencias que muestra las condiciones del conocimiento humano en un conjunto de principios *a priori* sintéticos. La concepción de Wittgenstein de las relaciones lógicas permite socavar cualquier función de principios independiente de lo trascendental. Su objetivo era mostrar los límites dentro del lenguaje en relación con la noción básica de que el ser humano se expresa de manera significativa por medio de la comunicación.

La principal dificultad filosófica de Wittgenstein yacía en la elaboración de una concepción de la Lógica que mostrará todas las características lógicas de las proposiciones lógicas. Wittgenstein rechazó un formalismo sobre una lógica que deja su aplicación a una teoría de la interpretación (en el espíritu universalista) y al mismo tiempo rechaza todas las teorías de la lógica que se basan en una actividad puramente mental.

En la concepción de Wittgenstein, no está contemplada la manera objetiva para comunicarse que se da a través de una aceptación de diferentes signos (pensamiento fregeano). Wittgenstein utiliza la notación implícita de la tabla de verdad en la lógica de Frege y Russell para exponer su concepción de la Lógica. Él interpreta una tabla de verdad como una expresión totalmente completa de una proposición o pensamiento y apuntó de desarrollarse a partir de un diagrama de distinciones lógicas. En primer lugar, él identificó el "sentido" de una proposición con la dependencia "verdad-funcional". Esto retrata a la Lógica como "vacía" de contenido fáctico, por los valores de verdad de tales formas oracionales que pueden ser vistos sin ningún valor de verdad asignado.

Wittgenstein concibió las conexiones como parte de un marco para expresar dependencias lógicas. Esto exige, un tratamiento adecuado de las señales lógicas, la introducción de una nueva categoría gramatical de la función y el nombre "operación". La representación de objetos y funciones por las configuraciones de nombres o palabras-concepto forma parte del contenido de las proposiciones de Frege, Russell y Wittgenstein. Particularmente, las operaciones de Wittgenstein, al ser meramente formales, son simplemente una manera de operar con signos proposicionales; que no tienen ninguna representación, ya sea para los conceptos o los objetos. Wittgenstein toma parte de su tarea, el mostrar cómo considerar todas las señales lógicas habituales como signos de operación; era ajeno a Wittgenstein, tanto como lo había sido para Frege y Russell, concebir los cuantificadores como re-interpretables según los universos del discurso elegidos arbitrariamente.

Después de la primera Guerra Mundial, Wittgenstein se retiró en gran parte de la filosofía académica. Él habló con Ramsey a mediados de la década de 1920 acerca de los fundamentos de las Matemáticas, alrededor de las nociones de identidad y cardinalidad, ya que a finales de 1920 había decidido regresar a Cambridge para intentar una articulación adicional de sus puntos de vista. Su período de transición (1929-1933) fue un período de exploración de sus puntos de vista anteriores. Después de 1935, Wittgenstein llegó expresamente para abogar por una investigación filosófica de la gramática y la Lógica.

De una manera general, su atención se desplazó debido a las contribuciones y los errores de Frege y Russell. Durante la fase inicial de esta última parte de su vida filosófica, sus ideas evolucionaron bajo la presión de sus intentos por aclarar sus ideas en *Tractatus* y los acontecimientos (cambios) en los fundamentos de las Matemáticas y la Lógica; como es el caso de su insistencia sobre la importancia de la expresión lingüística para la comprensión de las Matemáticas (su escepticismo acerca de un trascendental). Particularmente, en 1934 él rechazó explícitamente dos ideas: las Matemáticas y la Lógica tienen un núcleo o naturaleza unificada; y una comprensión filosófica de la Lógica o las Matemáticas puede descansar sobre la solución a un problema fundamental. Desde *Tractatus*, Wittgenstein conservo la idea de concebir lo indefinidamente extensible como regla gramatical, así como la idea de que la noción de infinito no es una noción específica de la Lógica.

En los momentos de crítica, para librarse de apelaciones filosóficas falsas a los significados y objetos, Wittgenstein siempre hizo hincapié en el papel central de los algoritmos y el cálculo en las Matemáticas, la imagen de la actividad matemática personificada por la resolución de las ecuaciones de acuerdo con las técnicas de cálculo. Él no veía ninguna razón para tratar de justificar dicha estrategia, aunque reconocía que las Matemáticas consisten en más que una construcción de algoritmos, procedimientos y sistemas axiomáticos (idea de estructura). En particular, la meta-matemática de Hilbert parecía ser capaz de mostrar cómo matematizar ciertas nociones y preguntas filosóficas que no habían sido matematizadas antes. En respuesta, Wittgenstein insistió en que la meta-matemática no es una teoría establecida de verdaderos principios. Así, la meta-matemática fue para Wittgenstein solo otra rama de las Matemáticas, una extensión de la misma en una nueva dirección. En cierto modo, la meta-matemática parecía ser solo una manera sofisticada de representar formalmente la gramática que ya existía en la Aritmética. El problema de la meta-matemática, para Wittgenstein, es que tiende a confundir a los filósofos en el pensamiento de que el lenguaje meta-matemático da un solo significado de las nociones matemáticas y lógicas aparentemente fundamentales.

A lo largo de su vida, Wittgenstein dio muchos argumentos para cuestionar lo complejo que es sostener que la necesidad lógico-matemática (la verdad) se aloja en las implicaciones puramente hipotético-deductivas (principios aritméticos, definiciones, leyes de inferencia, o reglas gramaticales). Su enfoque principal estaba en las imágenes engañosas del lenguaje, la comprensión y la racionalidad que emergen de las interpretaciones de las Matemáticas. Al igual que un sistema de medición, las Matemáticas (como la Lógica) son para Wittgenstein un artefacto humano complejo, situado y creado en y para un mundo natural en evolución, y sus pretensiones de objetividad y aplicabilidad provienen de la necesidad de la capacidad humana por encontrar la validez de los resultados de su aplicación en la práctica.

Wittgenstein sugiere, que la noción de comprensión, prueba y verdad, son la fuente para concebir a las Matemáticas, el número y el lenguaje. Su discusión pretende explorar la medida en que la noción de comprensión plena o completa de una sentencia es en sí una idealización potencialmente engañosa, especialmente en el logicismo. De esta manera, él conservó su temprana disposición a cuestionar la relevancia de la filosofía de la idea de que a cada predicado o concepto de la lengua se le puede asociar una función o una extensión, es decir, una propiedad bien definida o concepto. También retuvo su idea de que el conocimiento no debe ser concebido como una relación entre una persona y una propuesta sin tener en cuenta el contexto particular de la expresión o la frase en particular afirmada. Una dificultad importante aquí es, por supuesto, la forma de hacer justicia a la noción intuitiva de la verdad matemática y lógica. Su concepción orientada a negar que la objetividad, el sentido y la aplicabilidad de las nociones básicas de la Lógica y las Matemáticas (concepto, proposición, verdad, prueba, número) puede ser explicada por la manifestación de un teoría axiomatizada en la que las verdades que implican dichas nociones se derivan explícitamente de los principios fundamentales.

El énfasis de Wittgenstein sobre la imagen del matemático como inventor de modelos, imágenes y conceptos era, en general, dirigido a la charla filosófica de aquellos que, como Hardy y Russell, insistieron en hablar de la realidad matemática de una manera independiente. Wittgenstein no quería negar que hay una "realidad matemática". Pero en su opinión, la imagen de Hardy y Russell de la verdad tiende a ser irrelevante en las Matemáticas entendidas como lengua. Para Wittgenstein el matemático es un inventor, no en el sentido de que constituyen la verdad de cualquier manera, sino como participes en las actividades de la configuración de las pruebas, diagramas, anotaciones, rutinas o algoritmos que permiten ver y aceptar (comprender y aplicar) resultados que responden a la aplicabilidad y al apriorismo.

El logicismo de Frege y Russell

Dentro de las preguntas que los logicistas pretender dar respuesta se encuentran: ¿cuál es la base del conocimiento de la infinitud de los números?, ¿cómo es la Aritmética aplicable a la realidad?, ¿por qué el razonamiento por inducción está justificado? Particularmente, el hilo explicativo de Frege, Dedekind y Russell es su oposición a la tesis kantiana de que la reflexión sobre el razonamiento son meros conceptos, es decir, sin prestar atención a las intuiciones *a priori*. Lo que es esencial para el logicismo es su oposición a la incursión de la intuición kantiana en el contenido de teoremas aritméticos, puesto que las verdades básicas de la Aritmética son susceptibles de una justificación asegurada en la base de una intuición dada *a priori*.

Una observación sobre Kant y Frege

Frege puso el problema de la aplicación en el centro de su FM. A la pregunta ¿cómo es la Aritmética aplicable a la realidad?, el logicista proporciona como respuesta; es debido a que se aplica a todo lo que se puede pensar; es la ciencia más general posible. La definición contextual parcial, proporcionada por el principio de Hume, y la idea fundamental de que los conceptos numéricos son conceptos de segundo nivel rinde cuenta de cómo la Aritmética es aplicable a la realidad de Frege.

En la terminología de Kant, las categorías de unidad y pluralidad deben ser esquematizadas, y esto requiere abordar cómo la unidad y la pluralidad se relacionan con las intuiciones. A modo de ejemplo, el conteo se puede comparar con la construcción de una figura geométrica, ambos refieren a la intuición empírica, a los datos de la experiencia posible. Sin embargo, también hay objetos de la intuición pura; aunque no se dan tales objetos en la intuición empírica, son el producto de la forma de la intuición empírica. En el caso de objetos geométricos, esta forma es espacial y que constituye un marco en el que las construcciones que implican regla y compás, junto con su posible combinación y repetición, son posibles. Para el caso de la Aritmética, se puede suponer que la forma relevante de la intuición empírica es el tiempo y que es un marco temporal que hace posible el conteo, pero, en el caso de la Aritmética, el procedimiento constructivo que se hace posible es solo el proceso de iteración en sí. La posibilidad de iterar indefinidamente cualquier procedimiento, está garantizada por las formas espaciales y temporales de la intuición empírica.

En relación con la idea de esquematización, la medida en que el conteo es iterativo; la esquematización de los diversos conceptos numéricos depende de la forma de intuición. En primer lugar, dicha cuenta debe explicar la aplicabilidad de los conceptos numéricos sin invocar ninguna intuición más allá de aquellas que son demandadas por los conceptos a los que se aplican los conceptos numéricos. En segundo lugar, se debe explicar la referencia de ecuaciones numéricas e inecuaciones sin recurrir a la intuición, quizá en términos de relaciones entre conceptos, o en términos de objetos “lógicos” que son transparentes para la razón misma. Por último, se debe recuperar cualquier pieza de razonamiento aritmético que se base en la posibilidad de una operación por iteración indefinida como una especie de razonamiento general.

Los pensamientos fregeanos y la paradoja de Russell

Russell deriva una paradoja que ha llegado a ser conocida como la paradoja proposicional. La paradoja de Russell propone la clase de todas las clases que no son miembros de sí, su principal interés, consiste en el hecho de que se impugna una serie de supuestos básicos acerca de la naturaleza de las proposiciones y la identidad-proposicional. Es de notar, que la paradoja es derivable para una amplia variedad de proposiciones.

En la filosofía de Frege hay dos jerarquías que emergen de las reflexiones filosóficas sobre la lógica y el lenguaje: la jerarquía de funciones (o conceptos) y objetos, y la jerarquía de los sentidos. La primera jerarquía tiene una estructura de tipo teórico simple y, al igual que la teoría de tipos, es motivada por consideraciones de predicabilidad; las funciones de primer nivel se predican de los objetos, las funciones de segundo nivel de funciones de primer nivel, las funciones de tercer nivel de las funciones de segundo nivel, y así sucesivamente. La segunda jerarquía plantea que la medida de los sentidos son los objetos, puesto que los sentidos de las expresiones completas, son objetos. Así, algunos "pensamientos" son universales, es decir, se componen de los sentidos para el cuantificador universal y un concepto-expresión.

Potter (2000; citado en Shapiro, 2005) afirma que la paradoja proposicional puede extenderse a pensamientos fregeanos solo si se ignora el "grado de carácter indirecto" de un pensamiento y sus sentidos constituyentes. Al tener en cuenta los "grados", el argumento puede fracasar porque se basa en la identificación de los pensamientos de diferente grado. Potter no explica el principio de control de la asignación de los índices de grado; por eso, hay que mirar la carta de Frege a Russell (28-12-1902), la cual dice que el grado de un pensamiento se asigna en función del número de inclusiones en contextos "opacos" de una expresión lingüística canónica de las exposiciones de pensamiento, es decir, indistintamente del grado que un pensamiento pueda tener es posible establecer un concepto de primer nivel. Es correcto observar que la dificultad en el pensamiento fregeano va más allá de la teoría de clases de Frege. Sin embargo, el origen de la dificultad es una característica generalizada de la teoría de los conceptos y los objetos, la cual proporciona una inconsistencia en el contexto de clases y otra en el contexto de pensamientos (sentidos).

La similitud esencial entre concepto-clase y concepto-pensamiento se puede hacer intuitivamente convincente de la siguiente manera: un objeto pertenece a una clase si cae bajo el concepto de extensión de la clase. Del mismo modo, un objeto pertenece a un pensamiento universal si cae bajo el concepto principal del pensamiento. Entonces los conceptos expresados por x es la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas y x es el pensamiento universal de todos los pensamientos universales que no pertenecen a sí mismos; carecen de representantes objetuales. Por lo tanto, el hecho de que no puede haber una inyección de conceptos en objetos es lo que muestra que la dificultad que plantea la ley básica V es una instancia de una incoherencia más general en la teoría fregeana de los conceptos y los objetos.

El logicismo de Russell

Para Russell, ninguna solución satisfactoria del problema sobre el conocimiento de la Aritmética es posible; la teoría de los conceptos y de los objetos no está en una posición "segura". El carácter de esta base determinará en qué medida el logicismo puede considerarse

un éxito. Los primeros pasos hacia una solución llegaron con el descubrimiento de las “descripciones”, sus contribuciones a la filosofía de la aritmética, al menos, giran entorno de dos aspectos: la clarificación de la teoría de la generalidad y la consiguiente simplificación de la teoría de los conceptos mediante la eliminación de conceptos indicadores, y el método de análisis contextual. Particularmente, la teoría de la generalidad se basa en la noción que denota a un concepto; tales conceptos fueron importantes, porque sin ellos, según Russell, el conocimiento de las infinitas combinaciones de cosas que corresponden a las palabras de la cuantificación y la capacidad de expresar por medios finitos a los pensamientos, no existirían.
De hecho, se puede decir que el propósito lógico de la teoría de la generalidad es permitir la existencia de las proposiciones de complejidad finita para hacer frente a las clases infinitas de términos, ya que, toda proposición general acerca de una clase infinita tendría que ser infinitamente compleja. Es de notar, que todas las proposiciones que se conocen son de complejidad finita. Es solo por la obtención de este tipo de proposiciones, las clases infinitas, que la capacidad humana puede entender el infinito.

La teoría lógica que abogue por algún tipo de jerarquía de tipos de proposición de funciones busca preservar ciertas características de la teoría del conocimiento proposicional que, junto con la teoría de las descripciones, forma la columna vertebral de la teoría del significado de Russell. Particularmente, Ramsey explicitó lo que es distintivo de esta teoría lógica, a partir de su división de funciones proposicionales; satisface un intrincado sistema de restricciones cuya justificación es que se ve “obligado” por la reflexión sobre cómo funcionan las proposiciones, y otro, sin considerar las restricciones puramente lógicas de la teoría de tipos.
Finalmente, surge una pregunta fundacional importante, que pone en relieve una diferencia básica y generalizada entre Frege y Russell, la cual alude al análisis de la inducción matemática y la definición del conjunto de los números naturales. Por ende, a continuación, se presenta el programa neo-fregeano.

El programa neo-fregeano

Frege creyó que las leyes fundamentales de la aritmética elemental de la teoría de los números naturales (cardenales finitos) y el análisis real son analíticas, es decir, son demostrables sobre la base de las leyes lógicas, junto con las definiciones adecuadas. Esta tesis dependía de la adopción de esas teorías para referirse a un ámbito de objetos independientemente existentes, los cardinales finitos y la versión platónica del logicismo. Asimismo, los neo-fregeanos utilizaron estos dos componentes de la filosofía fregeana para dar explicaciones contextuales de conceptos matemáticos fundamentales tales como: número cardinal y número real, los que en la actualidad son llamados principios de abstracción.

Para derivar las leyes fundamentales de la aritmética, Frege requiere de una teoría subyacente de extensiones o clases. Trató de proporcionar, por medio de su ley básica V, lo que él llamaba rangos de valores de funciones. En cuanto a las extensiones de conceptos, lo que la ley básica

V afirma es que las extensiones de dos conceptos son idénticas si tales conceptos tienen los mismos objetos comprendidos en ellos. Sin embargo, no resulta útil, ya que la ley básica V conduce a la paradoja de Russell.

El programa neo-fregeano sostiene que la teoría de los números naturales, y los objetivos matemáticos y filosóficos centrales de Frege se pueden lograr; al basar la teoría sobre el principio de Hume, como un axioma complementario a una formulación adecuada de la lógica de segundo orden. El neo-fregeano sostiene que el principio de Hume es una comprensión de segundo orden y es suficiente para mantener los fundamentos de la Aritmética, lo que merece ser visto como una forma de logicismo, aunque no en el sentido de una reducción de la Aritmética a la Lógica o como una demostración de analiticidad. Se conserva el núcleo esencial y el contenido de dos afirmaciones fundamentales de Frege. La afirmación lógica es que el resultado del principio de Hume de segundo orden es un sistema coherente y suficiente como base para la Aritmética, en el sentido de que todas las leyes fundamentales de la Aritmética son derivables como teoremas. La afirmación filosófica es que si esto es así, hay una reivindicación del logicismo.

A continuación, se presentan algunas cuestiones del programa neo-fregeano, sin olvidar que el alcance de sus pretensiones principales se limita a la aritmética elemental, con el fin de favorecer una epistemología apriorista satisfactoria para, al menos una parte de, las Matemáticas.

Principio de abstracción

El platonismo de Frege es la tesis de que las palabras tienen números de referencia y que su referencia son los objetos. Pero, ¿por qué era crucial para Frege que los números fuesen reconocidos como objetos?, debido a la forma en que se propone demostrar que todo número finito es seguido inmediatamente por otro, es decir, la secuencia de los números finitos es infinita. Dicha demostración requiere la aplicación del criterio de Frege sobre la identidad de los números cardinales, o el codificado principio de Hume.

El caso de la existencia de los números puede hacerse sobre la base del principio de Hume y es importante para el neo-fregeano que esto sea así, ya que se prevé una partida en respuesta al epistemológico reto que plantea el dilema de Benacerraf. El principio de Hume, fija las condiciones de verdad de los enunciados de identidad que ofrecen términos canónicos para los números como los de las declaraciones correspondientes que afirman la existencia de correlaciones inyectivas entre conceptos apropiados. La verdad de tales identidades (y por tanto, la existencia de números) puede ser inferida.

El logicismo en el siglo XXI constituye la identidad de un nuevo tipo de objeto, al cual se introduce el concepto. El sentido en que son nuevos, es porque el concepto es introducido por medio de una explicación abstracta. En sí misma, la abstracción no hace más que introducir ese concepto y establecer un uso para un rango correspondiente de términos singulares mediante el cual sus instancias, en su caso, podrán ser designadas, y no implica ningún intento de garantizar que el concepto tenga instancias. La existencia de los objetos de la nueva especie depende de la correspondiente relación de equivalencia, en la que esa relación es definida.

Análisis real neo-fregeano

El mínimo requisito formal para el programa neo-fregeano en pro de una teoría matemática es idear principios de abstracción para garantizar la existencia de una serie de objetos que tengan la estructura de los objetos de la teoría de la aritmética. En paralelo, el requisito formal mínimo para una exitosa base neo-fregeana de análisis real es encontrar principios de abstracción consistentes que, junto con una lógica de orden adecuado, sea suficiente para la existencia de una serie de objetos que se comporten como los números reales "clásicos". Han surgido maneras para lograr este resultado. Un enfoque "atractivo" es conocido como el *Dedekindian Way*, aunque el camino es bastante complejo en detalle y la prueba de que de hecho tiene éxito en la construcción de un campo completamente ordenado, tiene la concepción de un número real como el corte de un conjunto superior delimitado, no vacío de números racionales.

Es cierto, que las abstracciones que participan no prevén la transformabilidad de cualquier declaración acerca de los reales. Si cada una de las abstracciones sucesivas involucradas en el *Dedekindian Way* tienen éxito como una definición implícita de las condiciones de verdad de los contextos del tipo esquematizado, entonces no es una ruta de las formaciones conceptuales sucesivas que se inicia dentro de la lógica de segundo orden y termina con una comprensión de las "cortaduras" y una demostración de las leyes fundamentales de una teoría matemática canónica. Aunque Dedekind no tenía la noción de un principio de abstracción, probable sus "simpatías" logicistas habrían aplaudido esta construcción y su potencial filosófico.

El *Dedekindian Way* suministra una base para el análisis, en particular, el afirmar que la serie de abstracciones que participan conduce a los "verdaderos" números del *Dedekindian Way*; puede ser visto como que descansa sobre una concepción esencialmente estructural de lo que es un número real, en efecto, la idea de número real es un cierto tipo de "serie" ordenada y completa. El éxito del *Dedekindian Way*, consiste en la construcción de un campo de objetos en los cortes, tal como se define la estructura de la serie continua clásica. Ahora, se podría concluir que los números reales son objetos, que las cosas que tienen los números reales son propiedades de números racionales, y que los números reales son el tipo de cosas que las propiedades de números racionales comparten puesto que sus instancias tienen los mismos límites racionales superiores. Por el contrario, el caso intuitivo es que el número real pertenece a cosas como longitudes, masas, temperaturas, ángulos y períodos de tiempo.

Por su parte, es una característica peculiar de los fundamentos neo-fregeanos que el principio para la aritmética sea el principio de Hume, este realiza dos tareas fundamentales bastante separadas. No hay ninguna razón *a priori* sobre la intención de incorporar la naturaleza de un tipo particular de entidad matemática, ya que también debe proporcionar una base axiomática suficiente para la teoría matemática estándar de ese tipo de entidad. Luego, una tarea es caracterizar el tipo de entidad, y la otra cosa es demostrar por qué no son todas las entidades de ese tipo.

De lo anterior, la distinción entre el proyecto metafísico de explicar la naturaleza de los objetos en un campo determinado de la investigación matemática y el proyecto epistemológico de proporcionar una base para la teoría matemática estándar de esos objetos; conlleva al *Grundgesetze* adoptado por Frege. Los números reales, como se señaló, son las cosas que poseen longitudes, masas, pesos, velocidades y esas cosas permiten algún tipo de magnitud o cantidad. Las cantidades no son en sí los números reales, pero si son la medida de los números reales. Por ende, se puede formular un principio de abstracción que incorpore una respuesta a la pregunta metafísica ¿qué tipo de cosas son los números reales?

Es de notar, que la concepción de una "fundación" para el análisis debe participar con cada una de las siguientes tres tareas. En primer lugar, una explicación filosófica se debe dar, en términos de la relación abstractiva del principio "real" de la abstracción en sí. En segundo lugar, si la aspiración es dar un tratamiento logicista en el sentido amplio en que el principio de Hume ofrece un tratamiento logicista del número, se debe demostrar la correspondencia uno a uno, pero solo se deben utilizar los recursos de segundo orden de la Lógica, tanto la noción de cantidad, como la relación de equivalencia correspondiente. Y tercero, un resultado necesario es establecer un análogo al teorema de Frege sobre la existencia de un "continuo completo" de los números reales.

Una cuestión clave en el contexto de las bases del análisis, es la restricción de Frege: una "fundación" filosóficamente satisfactoria para una teoría matemática debe de alguna manera construir sus posibilidades de aplicación. Esto conlleva a exigir que una abstracción de los objetos particulares de una teoría matemática es satisfactoria solo si el dominio abstractivo comprende el tipo de cosas que los objetos matemáticos son de la clase de cosas de las que proporcionan una medida matemática. En contraposición a esto, está el estructuralismo, el cual rechaza la restricción de Frege.

Lógica neo-fregeana

La tesis clásica logicista acerca de una teoría matemática particular es que sus leyes fundamentales se pueden obtener sobre la base de definiciones y la Lógica. Así, el interés de las reconstrucciones neo-fregeanas de teoría matemática clásica dependerá de las respuestas sobre los sistemas lógicos. La importancia de un tratamiento con éxito de una teoría matemática logicista particular (tradicionalmente) es para llevar el supuesto de que la Lógica se distingue de las otras disciplinas formales *a priori*. Es solo en el contexto de la aceptación de que la Lógica es, de alguna manera, metafísica y epistemológicamente privilegiada, en comparación con una reducción de las teorías matemáticas a la lógica. Por tanto, la gran cuestión que se plantea es si la Filosofía de la Lógica puede proporcionar una explicación sobre el sentido fundamental de la Lógica y su separación de otras disciplinas *a priori*.

Una cuestión clave, en este caso, se refiere a la ontología de la lógica de orden superior. Quine dijo –a modo de broma– que él consideraba a la Lógica de orden superior como "la teoría de conjuntos con vestido de oveja"; su opinión radica en que la teoría de conjuntos puede asemejarse a lo que es la lógica, así, la lógica de orden superior puede ser considerada como matemática.

La propuesta neo-fregeana consiste en que la lógica de orden superior debe ser aceptada por su valor nominal, como la cuantificación sobre las entidades que constituyen los valores semánticos de expresiones completas, y que las preocupaciones sobre el carácter de dichas entidades y sobre su aceptabilidad epistémica, deben ser abordados de forma *mutatis mutandis*. Por último, una cuestión técnica que surge en este contexto se refiere a las diversas demandas que la lógica subyacente por diferentes fases de la reconstrucción neo-fregeana de las Matemáticas. Bell (1999; citado en Shapiro, 2005) ha demostrado que la lógica necesaria para la demostración del teorema de Frege sobre la base del principio de Hume de orden superior es de hecho extensa. Así que, la cuestión "intrigante y difícil", se plantea en términos de, si es posible justificar una concepción de la ontología de orden superior que pueda sostener estas demandas, y si en particular, es posible hacerlo sobre la base de la cuantificación de orden superior.

Formalismo

El marco formalista

El formalismo consta de cinco elementos clave. Entre ellos, se encuentra la revisión de la clasificación tradicional de las Matemáticas. Desde la antigüedad, la visión dominante de las Matemáticas era que se dividió en diferentes ciencias, la principal de ellas eran una ciencia de la magnitud (Geometría) y una ciencia de la multitud (Aritmética). La perspectiva formalista rechazó este pedido tradicional de las ciencias matemáticas. Este rechazo es el primer componente del marco formalista.

Un segundo componente es su rechazo a la concepción clásica de la prueba y el conocimiento matemático. Desde Aristóteles, la prueba y el conocimiento fueron concebidos en un modelo genético. De acuerdo con este modelo, se conoce algo a través de su "causa". En Matemáticas, esta causa fue llevada a residir en las definiciones y los principios de la construcción, por ejemplo, los postulados de Euclides. Esto permitió presenciar la formación de los objetos y esta exposición se convirtió en una parte importante de la norma tradicional de rigor. Estos fueron los elementos esenciales de la concepción clásica de la prueba. Sin embargo, el formalismo rechazó ambas ideas. Rechazaron la concepción genética de la prueba y rechazaron la tradicional concepción del rigor que consiste en el mantenimiento de un objeto de forma continua antes de la imaginación visual o intuición durante el transcurso de una prueba. De hecho, se trasladaron hacia una concepción de rigor que hacía hincapié en la abstracción en lugar de la inmersión en la intuición y el sentido. Este cambio en la concepción de rigor es el tercer componente del marco formalista general.

El cuarto −y quizás más distintivo− componente del marco formalista era su defensa de un papel no figurativo del lenguaje en el razonamiento matemático. Esta idea llegó a la plena conciencia en Berkeley; quien se impresionó con el uso de los algebristas de elementos imaginarios, abogó por la posición de que hay usos de expresiones en el razonamiento cuya utilidad y justificación es independiente de los contenidos (semánticos) de esas expresiones.

El quinto y último componente del marco formalista es la "creatividad de crear". Esta es la idea de que el matemático, tiene libertad de crear instrumentos de razonamiento para promover sus objetivos epistémicos. Esto fue utilizado por los formalistas para hacer frente a los cargos de que las Matemáticas iban a ser un asunto esencialmente mecánico. Los formalistas estuvieron de acuerdo con que el fin del razonamiento matemático es la adquisición de conocimiento genuino. Sin embargo, ellos no están de acuerdo, con que la única manera correcta de perseguir este fin es a través del uso exclusivo del razonamiento contextual.

Las anteriores son las principales características históricas y filosóficas variantes del formalismo. Todas ellos son, de una manera u otra, en relación con dos acontecimientos importantes en la Historia de las Matemáticas. Uno de tales acontecimientos fue la aparición y el rápido desarrollo de métodos algebraicos a partir del siglo XVII. El segundo fue la erosión de la autoridad de la geometría clásica y sus métodos. En particular, el primero fue impulsado a partir de diversas fuentes. Wallis, por ejemplo, abogó por una inversión de la prioridad tradicionalmente otorgada a la geometría sobre la aritmética, sostuvo que muchas de las leyes geométricas tradicionales se basan en propiedades aritméticas y no en propiedades de construcción de figuras geométricas. Esto último, se deriva del descubrimiento de las geometrías no-euclidianas. Este descubrimiento sugiere que la intuición geométrica (clásica) no es la "autoridad final", incluso en la misma Geometría. Esto fue apoyado además por los descubrimientos de Bolzano que sugerían que la intuición geométrica no era una guía confiable para el desarrollo del Análisis. Por lo anterior, los matemáticos se vieron obligados a buscar a la Aritmética con el fin de encontrar una base para el Análisis.

El surgimiento del formalismo

El formalismo moderno surgió en el contexto de dos desarrollos notables. Uno, fue una disminución general de la importancia de la intuición como guía para la demostración. El otro fue el aumento general de la popularidad de los métodos algebraicos que comenzó en el siglo XVII. La disminución de la intuición era un fenómeno complejo que dejó un amplio espacio para las respuestas formalistas. Cuán importante es, que a continuación se planteará un argumento en alusión a ello.

La decadencia de la intuición

Se ha sugerido que la influencia fundamental de la conformación del formalismo del siglo XIX fue la pérdida general de "confianza" en la intuición geométrica. El siguiente comentario a principios del siglo XX, fue dado por el matemático y filósofo Hans Hahn, como una evaluación de esta crisis:

> "La intuición resultó ser engañosa en muchos casos y debido a las proposiciones que habían sido aceptadas como verdaderas por la intuición se probaron repetidamente falsas por la Lógica, los matemáticos se hicieron cada vez más escépticos sobre el valor de la intuición. Se enteraron de que no es segura para aceptar cualquier proposición matemática y mucho menos para ser la base de cualquier disciplina matemática. Por tanto, surgió como demanda la expulsión de la intuición del razonamiento matemático en pro de la formalización completa de las Matemáticas […]. Cada nuevo concepto matemático debe ser introducido a través de una definición puramente lógica, cada prueba matemática debe ser por medios estrictamente lógicos […]. No es cierto, como Kant insistió, que la intuición es un medio *a priori* del conocimiento, […] de hecho, es –tan solo– una fuerza de la costumbre arraigada en la inercia psicológica" (Hahn, 1980; citado en Shapiro, 2005).

Hahn hace dos reclamos importantes a distinguir. Uno, es la afirmación radical de que la creencia en una proposición matemática no debe basarse en la intuición, y el otro, es que la confianza en la intuición debe ser desterrada del razonamiento matemático. Este último, es una preocupación por el rigor, de hecho, fue ampliamente conocido entre los geómetras del siglo XVII que las pruebas de los elementos no eran tan rigurosas como se había supuesto comúnmente. En concreto, se les conocía por confiar en supuestos que no se señalaron en los axiomas o postulados. Ante esto, Lambert (1786; citado en Shapiro, 2005) ofrece un "diagnóstico" y una "cura". Su diagnóstico fue que los lapsos en rigor se debieron principalmente al uso de elementos no declarados de nuestra comprensión intuitiva de figuras en las inferencias de las pruebas geométricas. Su cura era directa. Hizo un llamamiento de proceder únicamente sobre la base del "carácter algebraico" en la prueba (es decir, el carácter sintáctico de las expresiones que ocurre en ella).

De lo anterior, para determinar si una proposición dada se deduce de otras, se debe abstraer de todo lo que tiene que ver con la representación (*vorstellung*) del objeto (*sache*) que se refiera en la prueba. En este sentido, una prueba nunca debe apelar a la cosa misma y se debe realizar simbólicamente en su totalidad (*durchaus symbolisch vorträge*). Esto fue en oposición radical a la concepción tradicional de rigor. Es decir, que la verificación rigurosa de la validez de una inferencia no debe requerir apelación a su objeto de estudio. A su vez, se ve una tendencia a asociar el formalismo con lo que podría llamarse la forma algebraica del pensamiento, esto último consiste en algún tipo de abstracción de los contenidos intuitivos de objetos métrico-geométricos.

La concepción moderna de rigor por lo tanto requiere que la intuición sea eliminable de la verificación de la validez de las inferencias que se hacen en una prueba. Esto, por supuesto, plantea la cuestión de si el uso de análisis lógico en lugar de intuición es un medio de minimizar la probabilidad de error. El formalista puede tratarlo como una cuestión abierta. Esto se debe, a que no requiere la exclusión de la intuición de las Matemáticas, sino que requiere de la inclusión de lo "no-intuitivo" (e incluso, lo "no-contextual").

Particularmente, para Hilbert, la eliminación de la intuición, por tanto, no es un elemento esencial del formalismo, ya que para él, el uso mismo de la inferencia lógica y la realización de operaciones lógicas requieren de la representación intuitiva. Al no ser un compromiso fundamental del formalismo la eliminación de la intuición, se debe mencionar, que si es una obligación hablar sobre la naturaleza del lenguaje, es decir, qué puede servir como guía para el pensamiento, incluso sino funciona de forma descriptiva. Esto último, fue planteado por Berkeley en el siglo XVIII, en parte como un intento de mostrar la utilidad de las expresiones imaginarias en el Álgebra.

Kant plantea dos tipos o componentes de intuición: lo "puro", lo cual suministra la forma de la experiencia; y lo "empírico", que suministra la materia o contenido. Emplea esta división para obtener una concepción de la intuición que permita poseer contenido robusto, y al mismo tiempo retiene un elemento de apriorismo.

> "Los objetos son dados por medio de la sensibilidad, y solo ella rinde intuiciones. […] La intuición que está en relación con el objeto a través de la sensación, tiene derecho empírico (*empirisch*). El objeto indeterminado de una intuición empírica es el aspecto (*erscheinung*) y éste corresponde a la sensación que yo llamo materia (*materie*) […] solo las sensaciones pueden postular y ordenar; y por lo tanto, mientras que la apariencia se da *a posteriori*, su forma debe estar lista (*bereitliegen*) de las sensaciones *a priori* en la mente. […] La forma pura de las intuiciones sensibles se encuentra en la mente *a priori*. Esta forma pura de la sensibilidad es […] la intuición pura" (Kant, 1781; citado en Shapiro, 2005).

La importancia de la distinción entre la intuición pura y empírica de Kant responde a la esencia de dicha distinción. Esta distinción es un intento de distinguir la variable de los elementos invariables de la intuición; lo que resulta ser análogo a la distinción de Locke entre cualidades secundarias (variantes) de los objetos primarios con la identificación del conocimiento objetivo (invariante). El conocimiento, y en particular, el conocimiento matemático, se identifican con la comprensión de ciertas invariantes de experiencia.

En conclusión, la decadencia de la intuición representa un compromiso con la objetividad, es decir, un compromiso con la búsqueda de las propiedades de las figuras geométricas que se encuentran en las mismas cifras, a diferencia de aquellas propiedades que están en la mente del geómetra. Particularmente, Kant cambió el objetivo de la objetividad a la intersubjetividad, pero conservo el énfasis en la invariancia. El formalismo se centra en una concepción instrumentalista del lenguaje y su uso en el razonamiento.

El formalismo simbólico y la concepción de Berkeley

La concepción instrumentalista del lenguaje permite usos puramente simbólicos de signos en el razonamiento, usos que no dependen del contenido semántico de los signos involucrados. Esta es la doctrina central de la posición formalista-simbólica, o simplemente, el formalismo. El formalismo-simbólico recibió su principal impulso histórico del rápido desarrollo del Álgebra en los siglos XVI y XVII. Impresionado por este desarrollo, Berkeley (1685-1753), a principios del siglo XVIII, intento esbozar un marco filosófico para ello. La piedra angular de este marco era una concepción del lenguaje y el pensamiento de que este adquiere su significación cognitiva mediante semánticos, en concreto, por su expresión de las ideas y sus combinaciones. En este punto de vista, Berkeley instó a una función ampliamente instrumentalista; el lenguaje no tiene otro fin sino el de comunicar las ideas y que todo nombre significativo represente una idea.

A modo de ejemplo, en la Geometría cada magnitud se representa por uno de la misma clase; rectas están representadas por rectas, ángulos por ángulos. De este modo se evita toda contradicción, y la Geometría no se permite razonar sobre las relaciones de las cosas que no existen o no pueden ser exhibidas. Así, el rigor se ve comprometido en cualquier argumento algebraico, donde había una expresión cuyo objeto no estaba –directamente– presente en la mente o en la intuición del razonador.

Finalmente, para Berkeley la significación cognitiva del lenguaje no era, exclusivamente, el resultado de su uso semántico; ya que podía tener un tipo de uso logístico cuyo objetivo era ayudar a la mente en el razonamiento, con el fin de transmitir conocimientos incluso sino se utiliza para expresar ideas.

Desafíos para el formalismo

El formalismo requiere que los términos aritméticos no tengan "referencia", ya que si tienen referencia las frases aritméticas no expresarían pensamientos; en términos de Frege, si las sentencias aritméticas no expresan pensamientos entonces no puede haber alguna demostración genuina, y si no hay prueba real entonces no hay razón para la ciencia. El elemento central de este argumento era la anti-concepción sobre Berkeley planteada por Frege: la verdadera inferencia o razonamiento no puede consistir en una manipulación de señales, y una premisa verdadera no puede ser una “fórmula”.

Las anteriores concepciones de Frege, siguen de las siguientes afirmaciones: una inferencia no consiste en signos, solo se puede decir que en la transición de un grupo de signos a un nuevo grupo de signos, puede darse el caso de que se presente una inferencia. Una inferencia simplemente no pertenece a la esfera de los signos, más bien, es el pronunciamiento de una sentencia hecha de acuerdo con las leyes lógicas en la base de sentencias dictadas con anterioridad. Cada una de las premisas es un determinado pensamiento reconocido como verdadero. De lo anterior, ¿qué es una inferencia formal?, toda inferencia es formal si procede de acuerdo con una ley general de la inferencia.

El desafío fundamental de Frege para el formalismo es definir “razonamiento matemático” y “prueba”. Para él, son procesos de “vocación” que producen juicios justificados, es decir, afirmaciones de contenidos proposicionales o pensamientos llamados “conclusiones”. Al mostrar el pensamiento que forma el contenido de una conclusión lógica implícita; el contenido de un grupo de sentencias antecedente de justificados es conocido como premisas; son en última instancia, compuestas por un grupo de sentencias llamado “axiomas” (el contenido de las cuales es, evidentemente, cierto).

De otro modo, el formalismo de Hilbert era diferente. No cuestiona la idea de que el propósito de la prueba es en última instancia, para producir un juicio garantizado. Tampoco discute la idea de que para lograr este fin, una prueba debe presentar una relación lógica entre premisas y una conclusión contextual. Planteó que las bases de las pruebas auténticas deben ser proposiciones meta-matemáticas relativas a un sistema formal y no a los axiomas del mismo sistema.

Es de notar, que la distinción entre los planteamientos de Frege y Hilbert radica en la terminológica en relación con el uso del término “prueba”. Esto le impidió responder a Hilbert de una manera clara y satisfactoria la reclamación de Frege, de que la única manera de probar un cuerpo de razonamiento formal consistente es interpretarlo, es decir, para transformarlo en un cuerpo de razonamiento contextual mediante la asignación de una interpretación a las fórmulas que hicieron su verdad evidente.

Otro desafío, se deriva de ciertos comentarios sobre la base de la certeza en Matemáticas. La certeza de las Matemáticas no es solo mediante la manipulación de símbolos físicos, sino más bien, mediante la profundización de conocimiento de los propios conceptos abstractos que conducen a la creación de sistemas mecánicos, y aún más, mediante la búsqueda para obtener información sobre la solvencia y los métodos de solución de “todos” los problemas matemáticos.

Por último, un tercer desafío considera la probabilidad, para aquellas variedades del formalismo, que admite una distinción entre “partes” de las Matemáticas. Unas que se comportan de forma contextual y no de forma algebraica-simbólica, y aquellas que funcionan esencialmente como instrumentos algebraico-simbólicos. Se refiere a la forma de determinar, de una manera no arbitraria y descriptivamente adecuada, dónde se ubica la línea divisoria entre las Matemáticas reales e ideales. Más específicamente, se refiere al problema de si una distinción real-ideal puede ser diseñada de tal manera que facilite una prueba de la consistencia de la banda ideal de la división por métodos que se pueden distinguir de una manera basada en principios de los métodos del lado ideal.

Intuicionismo

El intuicionismo involucra las técnicas matemáticas-intuicionistas y la lógica intuicionista moderna. Para la filosofía del intuicionismo son inseparables de su núcleo técnico: las matemáticas intuicionistas en el caso de Brouwer (fundador del intuicionismo) y la lógica intuicionista en el caso de Heyting y Dummett.

El intuicionismo comenzó con la tesis doctoral de Brouwer, ya que contenía un “ataque mordaz” sobre los cimientos de las Matemáticas modernas y las semillas de una revisión radical de todo el campo. Así, el trabajo fundacional de Brouwer tiene un interés matemático especial, porque se enfrentó a la “Matemática clásica”. La obra de Brouwer interesa a los filósofos porque su matemática se basa en una epistemología única, una ontología especial, y una imagen de fondo de la conciencia matemática intuitiva. Brouwer utiliza esta imagen filosófica no solo para fundar su trabajo matemático positivo, sino también para hacer un barrido de la Matemática clásica, en general; el uso clásico de la Lógica y el lenguaje, en particular. Particularmente, el matemático clásico, en opinión de Brouwer, ilícitamente apela a la lógica y el lenguaje con el fin de llenar los vacíos creados por una visión demasiado estrecha de la construcción intuitiva.

El intuicionismo de Brouwer consistía en una nueva matemática, basada en su relato de la construcción intuitiva no lingüística y en gran medida de la lógica “libre”. Es de notar, que esta postura no perduro debido a las Matemáticas contemporáneas, que generalmente no son constructivas. Por otra parte, hubiese tenido que prevalecer unilateralmente dentro del campo intuicionista, sin embargo, varias doctrinas matemáticas y filosóficas de Brouwer han asumido una vida independiente y se han desarrollado de una manera que en realidad divergen de sus propios puntos de vista. Esto último, es expuesto por Heyting y Dummett.

Intuicionismo de Brouwer

La matemática de Brouwer comienza con el problema de la continuidad, este problema surgió de las nuevas Matemáticas y la Filosofía del siglo XX. Este fue un período de creciente abstracción matemática: el nuevo análisis funcional y sus generalizaciones en Álgebra y

Topología eran testimonios de esta tendencia. Se estudiaron las Matemáticas –irrevocablemente– lejanas de cualquier dependencia de la intuición perceptiva y la noción de infinito jugó un papel clave en la construcción de nuevas Matemáticas.

Particularmente, Weierstrass y Dedekind mostraron cómo construir un “colector” continuo de números reales, que a su vez se define a partir de series o secuencias de números. Además, las sucesiones convergentes de Weierstrass y las cortaduras de Dedekind eran conjuntos infinitos. De hecho, la continuidad se define así, como una “recolección infinita cuyos elementos son a su vez conjuntos infinitos, cada uno de cuyos elementos a su vez es una secuencia infinita”; la teoría de conjuntos de Cantor hizo todo esto matemáticamente riguroso. A modo de ejemplo, se hizo necesario establecer la diferencia entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales: los racionales son numerables; los reales no. Los reales son cerrados bajo la convergencia; los racionales no. Como consecuencia, Cantor desarrolló su teoría de la aritmética de cardinales transfinitos, y herramientas para estudiar la estructura y el “ordenamiento” del continuo.

Brouwer aplaudió activamente el paso a la abstracción pero, su concentración y dedicación al estudio de la teoría de conjuntos, la construcción del continuo y la noción de infinito le hicieron detenerse. El problema no era que la teoría de conjuntos aceptara secuencias y conjuntos infinitos, sino que la nueva tendencia de la teoría de conjuntos hacia las secuencias y los conjuntos arbitrarios, establece que no se pueden describir secuencias cuyos elementos no se puedan calcular. Por esto, Brouwer se dio a la tarea de proporcionar una respuesta epistemológica a la idea de continuo matemático.

En el lado matemático proporcionó una teoría constructiva de las matemáticas finitas, junto con una nueva teoría de conjuntos que abarca al infinito discreto y al infinito continuo. Esto, lo ancló con doctrinas ontológicas y epistemológicas especiales, derivadas de una perspectiva fenomenológica general; para dar respuesta al lado filosófico de las matemáticas proporcionadas por él.

Para Brouwer, la matemática discreta comienza con la operación de formación de pares ordenados de elementos distinguidos, y continúa con iteraciones repetidas de esa actividad; esto produce matemáticas finitas. Estas iteraciones, dice Brouwer, generan cada número natural y mediante manipulaciones abstractas se pueden derivar las operaciones aritméticas, el complemento completo de números enteros y los números racionales como pares de números enteros. Brouwer, por un lado, genera estructuras más complejas y abstractas a través de sus iteraciones. Y por otro lado, no acepta la existencia de cualquier entidad matemática que no pueda ser producida de dicha manera (proceso secuencial predicativo). Esto, en particular, lo pone en conflicto con la teoría de Cantor.

En el lado fenomenológico, Brouwer define a la conciencia primordial como un “sueño” oscilante entre la sensación y el descanso; así, según él, la vida consciente se quedaría de esa manera si no fuera por los “actos de atención causal”, por los cuales, el sujeto se centra en los cambios individuales entre diferentes contenidos sensoriales. Luego, la conciencia-objeto comienza en el sujeto que se centra en tales eventos; el sujeto genera elementos conscientes individuales distinguidos junto con su contenido y discierne un orden entre ellos. El sujeto itera este proceso y por lo tanto forma secuencias mentales. Estas a su vez, son los bloques de construcción de la conciencia del sujeto de los objetos empíricos ordinarios. Para Brouwer, el sujeto produce conciencia del mundo causalmente ordenado. Esto se traduce a la ciencia como: la actividad productiva principal es generar secuencias y correlacionarlas con otras secuencias; los actos que forman al mundo son imposiciones premeditadas de la estructura original de la conciencia, es decir, el proceso formativo incluye prueba y error, pero la voluntad creativa y la imposición de la voluntad son fundamentales; la actividad matemática es secuencial, intencional y creativa, y pura y abstracta. Así, la abstracción matemática se lleva a cabo desde el principio, en la formación de lo que Brouwer llama la intuición básica de las Matemáticas. El primer acto del intuicionismo comienza en la conciencia ordinaria y queda la forma vacía de lo común; esta es la intuición básica de las Matemáticas.

Intuición matemática

El conocimiento matemático es para Brouwer, como lo fue para Kant, conocimiento *a priori* sintético basado en una noción de intuición pura. Pero Brouwer, tiene su propia versión –única– de la intuición matemática.

Para Brouwer, la intuición matemática es temporal y abstracta. El hecho de la temporalidad, va en relación con la idea de “tener un orden temporal”; conservar las secuencias producidas. Respecto al carácter abstracto, considera que tener un contenido matemático intuitivo y vacío de materiales sensoriales y empíricos, es “superior” a cualquier tipo de comprensión sensorial. Así, las Matemáticas son *a priori*, según la expresión kantiana. Es epistemológicamente independiente de la experiencia sensorial empírica y es una base necesaria de la ciencia empírica.

Adicional a esto, Brouwer da cuerpo a esta independencia y necesidad en formas que difieren de las opiniones de Kant. Para Brouwer, las Matemáticas son independientes de la experiencia empírica no son causa de su abstracción o debido a alguna noción especial de justificación matemática. Es independiente de la experiencia –simplemente– porque no se recurre a la experiencia empírica para justificar, o incluso para ejemplificar, a las Matemáticas puras. Contrario a esto, se logran aplicaciones empíricas de las Matemáticas mediante la superposición de secuencias causales empíricas sobre una estructura matemática formada, es decir, el sentido en que las Matemáticas subyacen en la ciencia empírica.

A diferencia de Husserl, Brouwer no separa la cuestión de la construcción consciente del tema de la existencia objetiva en el mundo o en las Matemáticas. Cada objeto viene dado por un acto de generación en particular y lo que se construye es lo que hay. Esto indica la actitud Brouweriana por la construcción y la existencia. Particularmente, Brouwer aboga por la existencia de constructibilidad; las entidades matemáticas que no se pueden construir simplemente no existen. En este sentido, las pruebas de existencia indirecta basadas en el principio del tercio excluido no son aceptadas.

Conclusiones "negativas": lógica y lenguaje

A partir de las consideraciones sobre el contenido intuitivo y la construcción intuitiva de Brouwer; se llega a conclusiones "negativas" acerca de la Lógica y el lenguaje.

Un "error frecuente" de la Matemática clásica es afirmar la existencia de las cosas que en realidad no existen. Brouwer en realidad ofrece una etiología por este error clásico. Él postula que esas Matemáticas solo estudiaban objetos y sistemas finitos; así, los "primeros" matemáticos, reflejan en sus construcciones intuitivas, principios formulados en leyes lógicas de no contradicción, silogismo y el tercio excluido, y se dejaron construir pruebas matemáticas sobre la base de esto. Sin embargo, estas reglas solo fueron las propiedades generales de las construcciones, y las derivaciones no eran más que la abreviatura de posibles construcciones. Las Matemáticas evolucionaron, así, sus objetos de estudio se vuelven infinitos, y de "constructibilidad infinita", por lo tanto, las leyes lógicas empleadas en la Matemática clásica son incompletas. En pocas palabras, para Brouwer, la lógica *per se* sigue a la lógica-ontológica clásica.

El matemático clásico, dice Brouwer, ve el lenguaje como un reemplazo para el contenido intuitivo. El lenguaje se supone que es intuitivo, ya que es "cuasi-perceptual". Sin embargo, para Brouwer, el lenguaje es un sustituto ilegitimo y no tiene valor intuitivo especial, ya que para él, la intuición matemática no es perceptiva. Además es ilegítimo porque, a la vista fenomenológica de Brouwer, "sin notación simbólica nunca se puede informar con precisión el contenido de un momento consciente". Particularmente, Brouwer se opuso al programa de Hilbert, en todo momento, ya que para él, si las Matemáticas abstractas se practican de forma constructiva entonces son totalmente intuitivas. Luego, los sistemas formales son legítimos objetos matemáticos, pero no necesariamente, intuitivos.

La interpretación de Heyting

Para Heyting, la afirmación filosófica central del intuicionismo es que las Matemáticas no tienen verdades desconocidas. En Matemáticas, es verdad lo que es comprobable. Al sustituir la noción estándar de la "verdad" en un modelo con la noción de "prueba" en una situación epistémica; es donde se encuentra una base filosófica para la lógica intuicionista.

El trabajo de Heyting tiene en cuenta los siguientes planteamientos de Brouwer. En primer lugar, el trabajo de Brouwer contiene amplia evidencia sobre la concepción de la verdad matemática. Su prueba de la versión positiva del teorema de continuidad se basa, precisamente, en el supuesto de "verdad". En segundo lugar, la insistencia de Brouwer en la construcción se conserva, ya que la construcción es la actividad básica de la prueba. Por último, acepta el supuesto de que una teoría de la verdad debe ser referencial y debe involucrar a una teoría de los objetos, lo cual se atribuye a la labor del matemático. En particular, a pesar de que se encuentra a la matemática clásica "desagradable", Heyting considera que esta matemática tiene su propio tema y por lo tanto no entra en conflicto con el intuicionismo.

Quine: Holismo y naturalismo

Los positivistas distinguen claramente entre verdades conocidas empíricamente a través de la experiencia sensible y verdades conocidas *a priori*, o independientemente de la experiencia sensible. Pero, decididamente rechazaron una intuición *a priori*, ya sea platónica o kantiana, como fuente de conocimiento matemático, y creyeron que la filosofía empirista de Mill de las Matemáticas muestra el sentido de percepción.

La característica fundamental de la FM de Quine es una combinación de un empirismo acérrimo con el holismo. Esto significa que la prueba de la existencia de los objetos debe ser indirecta y extraída de la evidencia de un sistema de "creencias". Por lo tanto, Quine desarrollo un criterio para determinar qué objetos del sistema de creencias adjudica un compromiso ontológico. Al ver, a la ciencia como el más completo y el mejor desarrollo de un sistema de base empírica de las creencias, Quine anunció que las Matemáticas parecen ser una parte indispensable de las ciencias, por lo que Quine concluyó que se debe aceptar como cierto no solo a la ciencia, sino también a las Matemáticas que la ciencia requiera. Según su criterio de compromiso ontológico, esto también obliga a reconocer la existencia de los objetos matemáticos. Debido a que hay suficiente holgura en la conexión entre los objetos y la evidencia *per se*, se puede interpretar de manera uniforme una referencia a otro sistema de objetos mientras se mantenga la evidencia para el sistema original.

Al hablar de holismo, se hace alusión a la intención epistémica o al holismo confirmatorio. Esta es la doctrina de que ningún derecho de la ciencia teórica se puede confirmar o desmentir de forma aislada, sino que hace parte de un sistema de hipótesis. En términos de Quine:

> "La totalidad del conocimiento o de las creencias, desde los asuntos más casuales de la Geografía y la Historia de las leyes más profundas de la Física atómica o incluso de la Matemática pura y la Lógica, es un tejido hecho por el hombre que incide en la experiencia. Es decir, la ciencia total es un campo de fuerza cuyas condiciones de límite son experiencias" (Quine, 1951; citado en Shapiro, 2005).

Consecuencias de los planteamientos de Quine

En primer lugar, el holismo de Quine implica el rechazo de la distinción entre verdades empíricas y *a priori*, donde las verdades *a priori* son las que se conocen de forma independiente de la experiencia. Esto se debe, a que la experiencia lleva a las creencias individuales de un sistema hasta cierto punto. Quine rechaza otros medios para distinguir entre lo *a priori* y lo empírico, tales como el uso de una intuición *a priori* o las frases verdaderas por convención o en virtud de los significados de los términos que lo componen.

En segundo lugar, aunque Quine reconoció objetos abstractos y su inaccesibilidad perceptual, e incluso habló de algunas creencias que surgen de la observación y de otras como el resultado a través del ejercicio de la razón, esto no le proporcionó distinción epistemológica para privilegiar declaraciones acerca de los objetos matemáticos abstractos. Las Matemáticas no producen conocimiento *a priori*, aunque parecen proceder en gran medida a través del ejercicio de la razón. Dado que para Quine, no hay *a priori* o conocimiento conceptual, ningún conocimiento de que la filosofía puede impartir sobre la ciencia debe ser ciencia. Esto es parte de lo que Quine llama naturalismo. Se ve a la ciencia natural como una investigación sobre la realidad, falible y corregible, y no necesita de ninguna justificación más allá de la observación.

El naturalismo de Quine es un componente clave de su argumento para el realismo matemático. Varias preguntas surgen de la teoría filosófica de Quine: ¿cuál es su interés?, ¿su objetivo es contribuir al conocimiento? Para responder esto, se hace una distinción entre epistemología normativa y descriptiva. La primera evalúa las formas de conocimiento y sistemas de creencias, con la mirada puesta en la mejora sobre ellos; la segunda, simplemente las describe. Luego, ¿se puede interpretar la doctrina de Quine del holismo como una pieza de la epistemología descriptiva? El holismo surge, en parte, de la observación de la práctica científica y de las numerosas suposiciones auxiliares en el diseño de experimentos para probar sus hipótesis suelen hacer los científicos. Eso lo refleja como descriptivo, pero a su vez, puede ser analizado científicamente.

Quine no pretende afirmar que alguna declaración es inmune a la revisión como una descripción de lo que los científicos han hecho o como predicción de lo que van a hacer. Él subraya cuán radical sería revisar las Matemáticas con el fin de salvar una teoría científica. Ciertamente, alude a la observación relativa del código metodológico al que los científicos se suscriben. Esta observación considera al holismo de Quine como una epistemología descriptiva.

Objeciones al holismo

Una primera objeción alude a que Quine está equivocado acerca de la revisabilidad de las Matemáticas y la Lógica, y que son, *a priori*; Quine no demostró que no lo fuesen. La segunda es que el holismo no puede ser correcto, ya que excluye las formas importantes de razonamiento utilizados en las ciencias y las Matemáticas. Por lo tanto el argumento de Quine, no demuestra que las Matemáticas y la Lógica no son *a priori*.

Para Quine las aplicaciones "serias" son las teorías científicas y filosóficas. La simplificación y clarificación de la teoría lógica a la que una notación canónica contribuye no solo es algorítmica; también es conceptual. Además, una de las principales contribuciones del filósofo proviene de clarificar el lenguaje de la ciencia y de las Matemáticas con el fin de evaluar y reducir los compromisos ontológicos de las teorías sobre el mundo. De esto último, ni Penélope Maddy, ni Elliott Sober consideran que se pueda contar con la ciencia para proporcionar evidencia de la verdad de las Matemáticas. Para Sober, las pruebas científicas no confirman las matemáticas utilizadas en la ciencia, y por su parte, Maddy se basa en la observación de que gran parte de las Matemáticas utilizadas en la ciencia ocurre en la teoría.

A nivel general, aunque se sepa que la aplicación de las Matemáticas a idealizaciones o teorías este "mal", los científicos la utilizan de una manera que les compromete en su verdad y ontología. El argumento de indispensabilidad pragmática se ejecuta de la siguiente manera:

1. Al afirmar las leyes y la realización de sus derivaciones, la ciencia asume la existencia y verdad de muchos objetos matemáticos.

2. Los supuestos son indispensables para la búsqueda de la ciencia; por otra parte, muchas de las importantes conclusiones extraídas de la ciencia no podían extraerse sin tener reclamaciones matemáticas sobre la "verdad".

3. Los supuestos se justifican en la elaboración de conclusiones, solo si son justificados a partir de las Matemáticas utilizadas en la ciencia para ser verdad. Se aplica siempre que la ciencia presupone la verdad de algunas Matemáticas.

4. Se acepta que la evidencia de la ciencia es también evidencia de las Matemáticas. Se reconocer la verdad de las Matemáticas por razones pragmáticas. Se justifica el hacer ciencia, a partir del uso y verdad de las Matemáticas en la ciencia, porque se presupone que no hay otra manera de obtener lo explicativo y predictivo de la ciencia.

El naturalismo

Muchos filósofos han sido clasificados como "naturalistas", en algún sentido u otro. Sin embargo, la versión más influyente del naturalismo en la filosofía de la Lógica y las Matemáticas, proviene de Quine. Él describe su naturalismo, alude a Descartes, quien vio "única esperanza" en la metafísica para establecer lo estable y probable de las ciencias. Su enfoque, fue dudar de todo, incluso de toda la ciencia y el sentido común, a fin de descubrir las primeras certezas filosóficas que luego sustentarán el conocimiento.

El naturalista de Quine, comienza su razonamiento en las teorías del mundo heredadas: la física, la botánica, la biología y la astronomía; el naturalista se pregunta cómo es que los seres humanos, tal como se describen por la fisiología, la psicología, la lingüística, y demás, llegan a un conocimiento fiable del mundo. Esta es la tarea de la epistemología naturalizada, "la cuestión de cómo los seres humanos lograron llegar a la ciencia. El naturalista ve a la ciencia natural como una investigación sobre la realidad, falible y corregible, pero no necesita de ninguna justificación más allá de la observación y el método hipotético-deductivo. El naturalista trata de mejorar, aclarar y comprender el sistema *per se*.

OTROS AUTORES

Aquí, se presentan algunos planteamientos sobre FM, influenciados por las perspectivas de Colyvan (2011), Peirce (2010) y Friend (2007), respectivamente.

"An Introduction to the Philosophy of Mathematics"

Colyvan, en su libro *An introduction to the Philosophy of Mathematics* (2011), aboga por la postura de que las Matemáticas se desarrollan a través de un medio que utiliza la prueba hipotético-deductiva *a priori*, a diferencia de los métodos *a posteriori* de la experimentación y la inducción que se encuentran en las demás ciencias. Así, al investigar la relación entre las Matemáticas y el resto de las ciencias, la lógica de las pruebas matemáticas, y la importancia del lenguaje matemático en la práctica matemática; resultan ser tópicos de estudio significativos tanto para la FM como para la Matemáticas *per se*. Por otra parte, muestra algunas posturas de la FM (ver, Tabla 4), tales como: formalismo, logicismo, intuicionismo, realismo, platonismo, estructuralismo, naturalismo, holismo, y ficcionalismo.

Corrientes	Qué estudia…
Formalismo	(ver, Tabla 1)
Logicismo	
Intuicionismo	
Realismo	➢ Objetividad: Las Matemáticas son objetivamente ciertas e independientes (antítesis). ➢ Naturaleza: Los objetos matemáticos son entidades abstractas que carecen de espacio-temporalidad (antítesis).
Platonismo	➢ Existencia: Todo objeto matemático existe en el "mundo platónico".
Estructuralismo	➢ Naturaleza: Las Matemáticas se expresan sobre las condiciones de las "estructuras".
Naturalismo	➢ Naturaleza: Hay una "metodología" que permite determinar la naturaleza de las cosas.

Holismo	➢ Indispensabilidad: Hay al menos dos procesos, a saber, el analítico y el sintético.
Ficcionalismo	➢ Existencia: No existen las entidades matemáticas.

Tabla 4.- Corrientes filosófico-matemáticas

A continuación, se muestra una síntesis de las ideas principales que el autor suscita de los planteamientos de cada una de las corrientes filosófico-matemáticas que reconoce a través del estudio sobre ¿qué son las Matemáticas?

Formalismo

Esta postura se enfoca en la notación matemática y su uso en el quehacer matemático como actividad principal de las Matemáticas. En su forma "más pura", el formalismo plantea que las Matemáticas no son más que la manipulación de símbolos de orden lógico-matemático. De otro modo, el formalismo se enfrenta a una serie de dificultades, al incluir el interrogante sobre la utilidad de las Matemáticas (aplicaciones), sin embargo, al centrarse en la notación matemática, evita los problemas asociados con la existencia de los objetos matemáticos y la legitimidad de los símbolos.

Logicismo

De acuerdo con el logicismo, las Matemáticas son Lógica, es decir, las verdades matemáticas pueden ser reducidas a verdades lógicas. Esta posición, está motivada epistemológicamente, ya que concibe que el conocimiento lógico es más "sencillo" que el conocimiento matemático. En un primer momento, el logicismo fue propuesto y desarrollado por Gottlob Frege, no obstante, el sistema de Frege era inconsistente; lo cual fue demostrado por Bertrand Russell, al refutar la ley básica V del conjunto de axiomas lógicos propuesto por Frege en la teoría inicial del logicismo.

Posteriormente, Russell y Whitehead iniciaron una nueva era del logicismo, conocida como *neo-logicismo*. Este fue posible, ya que el programa neo-logicista tomo como punto de partida el hecho de que el programa de Frege, no necesitaba la ley básica V; puesto que ese axioma puede ser reemplazado por el principio de Hume: "el número de Fs es igual al número de Gs si y solo si hay una correspondencia 1-1 entre las Fs y las Gs".

Una causal del logicismo es otorgada al matemático alemán Richard Dedekind, ya que al desarrollar la reducción de los números reales con secuencias de números racionales, era tentador creer que la Aritmética podía ser el fundamento de las Matemáticas y, por otra parte, si la Aritmética pudiese ser derivable de la Lógica, entonces esa sería la respuesta a la naturaleza de las Matemáticas.

Intuicionismo

Según el intuicionismo, la demostración y las construcciones son todo lo que hay. Por consiguiente, las Matemáticas no incluyen algún "reino" pre-existente de objetos matemáticos, por ende, los objetos matemáticos tienen que ser construidos antes de que se puedan mencionar –razonablemente–, es decir, las Matemáticas tienen que ver con la construcción de los objetos matemáticos y de las demostraciones que los incluyen. Esto tiene consecuencias tanto para el "estilo" de la prueba, como para el "dominio" de los objetos matemáticos que se pueden utilizar; lo más notable es que muchas demostraciones matemáticas clásicas no son válidas para los intuicionistas.

Esto último, se da porque los intuicionistas no aceptan la ley del tercio excluido: para toda proposición P, la disyunción de P o su negación, es verdadera ($P \vee \neg P$); ni la doble negación ($\neg\neg p \leftrightarrow p$). Particularmente, el rechazo de la doble negación socava una forma importante de la demostración matemática clásica conocida como *reductio ad absurdum*, este estilo de prueba comienza al asumir la negación de S, y al mostrar una contradicción de este supuesto concluye a S. De acuerdo con el intuicionismo, todo lo que se ha demostrado es $\neg\neg S$, luego, el paso que concluye a S esta injustificado.

Realismo

Hay dos antítesis realistas en relación con las Matemáticas. La primera es sobre la objetividad de las Matemáticas, esta tesis plantea que los enunciados matemáticos son objetivamente ciertos, e independientes de creencias o actitudes hacia ellos. La segunda se refiere a la naturaleza de los objetos matemáticos, de esta, los objetos matemáticos abstractos son entidades sin poderes causales y carecen de ubicaciones espacio-temporales. Por lo anterior, los realistas matemáticos rechazan la abstracción de las entidades matemáticas y las caracterizan como entes físicos.

Platonismo

Según el platonismo, cada teoría matemática consistente describe alguna parte del universo matemático, así, cada objeto matemático que pudiera existir, existe; lo que toma en consideración la cuestión ontológica sobre la existencia de los objetos matemáticos. Particularmente, Balaguer supone que se tienen creencias –verdaderas– sobre un reino abstracto de entidades matemáticas con las que no se puede tener contacto causal.

De lo anterior, y como dificultad epistémica del platonismo se tiene que: si cada objeto matemático que pudiera existir, existe; entonces las creencias matemáticas no pueden faltar. Es decir, que las creencias acerca de los objetos matemáticos de una teoría consistente constituyen el conocimiento de esos objetos, lo que va en contraposición del significado de las Matemáticas como conocimiento *a priori*.

Estructuralismo

El estructuralismo en la FM centra su atención en las relaciones entre los diversos tipos de entidades matemáticas, en lugar de las entidades *per se*. De hecho las consignas estructuralistas, tales como: "los objetos matemáticos son parte de las estructuras" o "las Matemáticas son la ciencia de los patrones", parecen revelar "pistas" importantes sobre la naturaleza de las Matemáticas y su objeto de estudio. Sin embargo, el verdadero significado del estructuralismo está en su capacidad de proporcionar respuestas a algunos problemas de la FM, por ejemplo, el estructuralismo es capaz de explicar por qué los matemáticos están –normalmente– interesados solo en la descripción de los objetos que estudian hasta determinar un isomorfismo con una estructura ya conocida. El estructuralismo también es capaz de explicar por qué se tiende a pensar que, o bien todos los números naturales existen o ninguno existe; y ofrece una respuesta ordenada y plausible al problema de indeterminación de Benacerraf. Así, para el estructuralismo, la estructura de una entidad matemática no debe depender de la forma que la representa en el mundo real (posición *ante rem* del estructuralismo).

Naturalismo y Holismo

El naturalismo surge de un "profundo respeto" por la metodología científica y un reconocimiento del innegable éxito de esta metodología como una forma de responder a las preguntas fundamentales sobre la naturaleza de las cosas. Como sugiere Quine (1981; citado en Colyvan, 2011), su origen se encuentra en el realismo y en el estado "sólido" de la mente del científico que nunca ha sentido reparo por las incertidumbres internas de la ciencia, así por ejemplo, el naturalismo descarta la creencia en los ángeles, por razones místicas.

A partir de los escritos de Quine se pueden distinguir por lo menos dos temas holistas. El primero es el *holismo confirmatorio*, el cual plantea que las teorías se confirman o se des-confirman como totalidades. El segundo es el *holismo semántico*, el cual plantea que la unidad de significado debe ser analizada en su totalidad y no solo a través de sus partes. Este último holismo está relacionado con la –conocida– negación de Quine sobre la distinción analítico-sintético y su tesis de la indeterminación. Aunque para Quine, el holismo confirmatorio y el holismo semántico están estrechamente relacionados, hay una buena razón para distinguirlos, particularmente porque para muchos solo se requiere del holismo confirmatorio para hacer de un argumento "indispensable".

Ficcionalismo

Los ficcionalistas suelen estar impulsados a rechazar la verdad de las afirmaciones matemáticas debido a que estas declaraciones implican la existencia de entidades matemáticas, y, de acuerdo con el ficcionalismo, no hay tales entidades. El ficcionalismo es un planteamiento nominalista (o anti-realista) de las Matemáticas en el que se niega la existencia de un reino de entidades matemáticas abstractas, se debe poner en contraste con el realismo matemático (o platonismo), donde se toman las declaraciones matemáticas para ser verdad. El problema principal del ficcionalismo es su incapacidad de sustentar la aplicabilidad de las Matemáticas.

"Philosophy of Mathematics"

La Filosofía de Peirce presentada en su libro *Philosophy of Mathematics* (2010), se fundamenta de las Matemáticas, puesto que él considera que la Lógica recurre a las Matemáticas para el control de sus principios y la filosofía ontológica –de igual manera– recurre a la Lógica. Por ende, para entender la filosofía posterior de Peirce hay que entender su FM (ver, Tabla 5), ya que las Matemáticas radican en la base de todo sistema de las ciencias y de ahí subyace la Filosofía. En términos generales, la Filosofía de Peirce se enfoca en el falibilismo y la cosmología evolutiva, lo cual se centra en la teoría de la continuidad desarrollada por el mismo autor.

Peirce es un realista matemático, es decir, él acepta la mayor parte de las Matemáticas clásicas; valora su veracidad. Es por otra parte, un empírico, ya que declara que "la experiencia es nuestro único maestro" y "*est nihil en intellectus quin prius fuerit en sensu*" (no hay nada en el intelecto que no estuviese previamente en los sentidos). A su vez, adopta la posición aristotélica de que el objeto del conocimiento científico, ya sea matemático o físico, no es la cosa concreta con la que el científico interactúa, sino es la forma en que es conocido el resultado de la interacción.

Las Matemáticas son la base de todas las ciencias, particularmente, la Lógica necesita de las Matemáticas para el "control" de sus proposiciones.
No hay nada en el intelecto que no estuviese previamente en los sentidos.
El pensamiento matemático consiste en la experimentación y observación de los resultados.
Hay distinción significativa ente los "teoremático" y lo "corolario".
Los objetos matemáticos son "seres de razón", lo que conlleva a pensar que la problemática del realismo, versa sobre la objetividad de las Matemáticas y no sobre la existencia de los objetos matemáticos.
Las Matemáticas son el estudio científico de las hipótesis. Las Matemáticas aplicadas versan sobre las formas en que las hipótesis surgen de la experiencia. Las Matemáticas puras son el resultado de las ideas que eliminan lo "irrelevante" de las Matemáticas aplicadas.
Las ciencias se clasifican en: Matemáticas, Filosofía, y ciencias de tiempo y espacio.

Tabla 5.- Planteamientos de Peirce

Contribuciones

Por un lado, Peirce era reconocible por su preocupación por las cuestiones filosóficas básicas sobre las Matemáticas, por la lógica de la ciencia, y por sus análisis filosóficos sofisticados del lenguaje (tradición analítica de la Filosofía). Por otro lado, la educación y el temperamento filosófico de Peirce eran –de muchas maneras– diferentes en comparación con otros fundadores de la tradición analítica. Tal vez, las diferencias más notables entre Peirce y la corriente analítica radican en su apropiación creativa del realismo escolástico, y su perspicaz respeto a Hegel.

Se debe empezar por algunos problemas perdurables de la FM, ya que cualquier filosofía adecuada y unificada de las Matemáticas debe simultáneamente responder a las preguntas planteadas por Russell: ¿qué son las Matemáticas? (sentido metafísico) y su correspondencia epistemológica ¿cómo se adquiere y justifica el conocimiento de las Matemáticas? Según los metafísicos, las Matemáticas tratan de los objetos abstractos y los epistemólogos consideran la idea de que el conocimiento de cualquier objeto se inicia en las interacciones causales con él. Así, el dilema de Benacerraf radica en que los objetos abstractos no pueden tener interacciones causales, luego ¿cómo se puede saber algo acerca de tales objetos? La formulación original del dilema de Benacerraf presupone una teoría causal del conocimiento, cuyo argumento puede proceder de que el conocimiento matemático posa para cualquier epistemología empirista.

Se puede empezar a localizar la posición de Peirce, al señalar qué rechaza del campo de la FM y por qué. Un primer argumento es el conocimiento matemático en relación con el conocimiento lógico, Peirce considera la reducción de las Matemáticas a la Lógica (planteamiento logicista), sin embargo, él lo rechaza, ya que para él "la Lógica debe recurrir a las Matemáticas para el control de los principios", por ende, la Lógica es una parte de las Matemáticas y no al revés. Particularmente, la lógica de Peirce plantea tres categorías (predicados), las cuales son: monádico, diádico y triádico.

Un segundo argumento es la tesis de Quine en torno a la idea de indispensabilidad, ninguna ciencia natural puede sobrevivir sin las Matemáticas, y sumado a esto, se encuentra el criterio de compromiso ontológico de Quine, el cual ratifica la aceptación de una teoría que valide la existencia de aquellas entidades que deben estar en el rango de cuantificadores, a fin de que los estados que componen la teoría sean veraces. El argumento de indispensabilidad, se suscribe no solo al realismo matemático, sino también al platonismo, en consecuencia se tiene la afirmación de que las verdades matemáticas tratan de los objetos abstractos. Aunque Peirce reconoce la perspectiva general de Quine, a su vez, acepta dos de las principales objeciones de tal método. La primera objeción es que Quine no considera la "obviedad" de las matemáticas elementales. Y al tener en cuenta que el realismo matemático acepta principios muy generales que se consideran universalmente como "obvios", e incluso, con una visión empirista pueden llegar a ser hipótesis, de ahí, Peirce toma muy en serio la obviedad de las Matemáticas.

La segunda objeción se da al considerar el razonamiento matemático como "perspicaz y absolutamente convincente". Si el razonamiento matemático es, en cierto sentido el más perspicaz, entonces ningún otro tipo de razonamiento puede ser capaz de rescatar al razonamiento matemático en caso de que presente dificultades. Esto, permite visualizar otro problema del logicismo, ya que, "si el matemático nunca vacila o nunca se equivoca en su razonamiento, la Lógica no puede ser una ayuda. Por tanto, ya que la Lógica es menos perspicaz que las Matemáticas, el razonamiento matemático implica inutilidad del razonamiento lógico.

Ahora, como mociones de la claridad del razonamiento matemático, se tiene en primer lugar, el hecho de que no hay posibilidad –en comparación con las otras ciencias– de conseguir datos erróneos, ya que la evaluación de los resultados matemáticos no implican una comparación de tales resultados con los hechos. La segunda fuente de claridad, gira entorno a las representaciones "transparentes e imaginativamente manejables" con las que opera el razonamiento matemático.

De la segunda moción, el modelo recurrente es un diagrama geométrico, la simplicidad de este tipo de imagen da cierta verosimilitud a las afirmaciones de Peirce sobre la trazabilidad imaginativa: si todo el razonamiento matemático se basa en diagramas de este tipo, entonces su veracidad se explica fácilmente. Pero, ¿se basa todo el razonamiento matemático en los diagramas de este tipo? Es de notar, que desde el surgimiento de la formalización, los diagramas (excepto, para los propósitos heurísticos) no tienen algún papel protagónico en el razonamiento aritmético o algebraico. Sin embargo, Peirce considera que "la vida misma del pensamiento matemático consiste en hacer experimentos sobre diagramas (no se ha de entender solo como imagen) y en la observación de los resultados". Con esto último, el razonamiento algebraico tiene lugar en la "vida misma del pensamiento matemático". Así, para Peirce "todos los diagramas dependen de convenciones", así para él, el razonamiento matemático es esquemático.

Por su parte, las implicaciones de la naturaleza esquemática del razonamiento matemático proporcionadas por Peirce, permiten vislumbrar una idea ampliamente discutida en la FM: la distinción entre razonamiento teoremático y corolario. He aquí una de sus explicaciones de tal distinción:

> Cualquier corolario es una proposición deducida directamente de las proposiciones ya establecidas sin el uso de otras construcciones. Cualquier teorema es una proposición que necesita de una demostración que emplee proposiciones previamente establecidas, pero no sin imaginar algo más de lo que supone la condición de existir.

Se sugiere que los corolarios son los resultados que se pueden leer –más o menos– directamente y fuera del diagrama de las hipótesis, mientras que un teorema obliga a actuar sobre el diagrama de alguna manera. Peirce afirma que ninguna demostración debe requerir una construcción. De otro modo, si el razonamiento teoremático es esencialmente no mecánico, la distinción entre teorema y corolario puede ayudar a aclarar el carácter informal del conocimiento matemático.

Peirce no considera las formas matemáticas como individuos abstractos en un cielo platónico, y sostiene que la naturaleza común y la razón objetiva de una proposición no son formas platónicas. Por ende, “la problemática del realismo, versa sobre la objetividad de las Matemáticas y no sobre la existencia de los objetos matemáticos. Peirce, a menudo se refiere a los objetos matemáticos como *entia rationis* (seres de razón).

La naturaleza de las Matemáticas

Peirce identifica la característica distintiva de las Matemáticas; el uso mínimo de la observación por parte del matemático, plantea una independencia relativa de la observación en las Matemáticas, en comparación con la ciencia empírica, la lógica y la metafísica, las cuales confían en mayor medida en la observación que hacen las Matemáticas. A su vez, las Matemáticas se distinguen de otras prácticas por su preocupación exclusiva con la deducción de las consecuencias de las hipótesis.

El discurso de Peirce comienza con un tratamiento despectivo de la definición tradicional de las Matemáticas como la ciencia de la cantidad, y da como contra-ejemplo a la geometría proyectiva. Igualmente, al analizar la sugerencia, tomada de Kant por De Morgan y Hamilton, que las Matemáticas son la ciencia del espacio y del tiempo, Peirce asigna el espacio y el tiempo para “la más abstracta de las ciencias especiales”; de ahí, las Matemáticas son la ciencia más abstracta de todas. Otra definición discutida por Peirce es la atribuida a su padre, la cual dice que las Matemáticas son “la ciencia que extrae conclusiones necesarias”, ya que esta debe ser entendida como “las Matemáticas deben referirse exclusivamente a las hipótesis”; rechaza la afirmación de que la formulación de hipótesis para el estudio matemático es una lógica matemática y no una pregunta matemática.

Por tanto, la característica distintiva de las Matemáticas es que son el estudio científico de las hipótesis, a su vez, las Matemáticas son aplicadas o “puras”. Al ser aplicadas, las Matemáticas discursan sobre las formas en que las hipótesis surgen por primera vez en la experiencia, lo cual no incide sobre las formas de deducción. Por su parte, las Matemáticas puras son el resultado de las ideas que eliminan las características “irrelevantes” de las Matemáticas aplicadas. Es de aclarar, que no se puede afirmar que toda formulación hipotética es matemática, ya que el matemático solo está interesado en las hipótesis que permiten formas de inferencia a partir de ellas mismas (creaciones mentales).

Al identificar algunas respuestas sobre qué son las Matemáticas en la Historia, se notan cuestiones como: los “maestros” romanos definieron a las Matemáticas como la ciencia de los *cuantos*, sin embargo, esta definición no hubiese sido admitida por un geómetra griego, ya que ellos eran conscientes de que la rama fundamental de la Geometría trata de las intersecciones de planos, tampoco concuerda con la noción de métricas geométricas, ya que esto es un problema especial de gráficos geométricos. La única defensa de los romanos que ofrecen de la definición es que los objetivos de las cuatro ciencias Matemáticas por ellos reconocidas, a saber: la Aritmética, la Geometría, la Astronomía y la Música, dependen de la *cantidad*.

Posteriormente, De Morgan y Sir William Rowan Hamilton influenciados indirectamente por el kantismo, definen a las Matemáticas como la ciencia del tiempo y el espacio, se supone que el Álgebra hace frente al tiempo como la Geometría hace con el espacio. Entre las objeciones a esta definición, se tiene que esta definición hace que las Matemáticas sean una ciencia positiva que investiga las cuestiones de hecho. Porque, aunque el tiempo y el espacio son de origen subjetivo, son objetos de los que una "cosa" es verdadera o falsa, y particularmente, la ciencia del espacio más que ser una rama de las Matemáticas es de la Óptica. Además, esta definición no deja lugar a algunos estudios de las Matemáticas, como el espacio *n*-dimensional, la teoría de los imaginarios, el cálculo de la lógica (incluye probabilidades), los cuales no permiten separar el Álgebra y la Geometría.

Dado que Benjamin Peirce, definió a las Matemáticas como "la ciencia que extrae conclusiones necesarias", es imposible sacar conclusiones necesarias sin el conocimiento del mundo real, se deduce que, de acuerdo con esta definición, las Matemáticas deben referirse –exclusivamente– a la "sustancia" de las hipótesis como base de la deducción matemática (Lógica, no Matemáticas). Por su parte, Sr. George Chrystall, se esfuerza por definir a las Matemáticas mediante la descripción de los caracteres generales esenciales para una hipótesis matemática (concepción matemática); así, una aplicación de la teoría lógica solo se requiere con carácter excepcional en el razonamiento, y no en toda deducción matemática.

Con el fin de sugerir el lugar que las Matemáticas parecen tener en el "sistema" de las ciencias, el autor propone el siguiente esquema de clasificación de todas las ciencias, modificado del propuesto por Auguste Comte, un procedimiento que va de lo más abstracto a lo más concreto. Cada ciencia (excepto las Matemáticas) se basa en los principios fundamentales extraídos de las verdades descubiertas por la ciencia inmediatamente anterior en la lista: (1) las Matemáticas, que solo observan las creaciones del matemático. Toman "prestadas" las sugerencias de todas las demás ciencias, de la Filosofía, la Lógica, la Economía, la Física, la Óptica; (2) la Filosofía, aunque no hace observaciones especiales, utiliza hechos comúnmente conocidos. Descansa en principios matemáticos. Se divide en la Lógica, que estudia el mundo del pensamiento, y la metafísica, que estudia el mundo del ser, este último parte de los principios de la Lógica; (3) la ciencia del tiempo y la ciencia del espacio. Ellas están basadas en principios metafísicos, la ciencia del tiempo es psíquica y la del espacio física.

Particularmente, la “seguridad” del razonamiento matemático se manifiesta en la Historia de las Matemáticas, como la ausencia de desacuerdo prolongado sobre cualquier cuestión matemática. Peirce insiste en que todas las ciencias, incluso las Matemáticas, tienen una base observacional. Lo que diferencia a las Matemáticas es su independencia de la observación externa; aunque las Matemáticas no son totalmente independientes de la observación, si lo son de los hechos: no hacen afirmaciones fácticas, solo hipotéticas.

Peirce insiste en que todo razonamiento necesario es esquemático. La explicación de Peirce del carácter “necesario” de la experimentación en Matemáticas se debe a la circunstancia de que el objeto de esta observación y el experimento son un diagrama de la creación mental humana. Luego, Peirce contrasta la idealidad de las hipótesis matemáticas, que son capaces de producir conclusiones necesarias, con afirmaciones fácticas (en relación con el mundo real, no se puede suponer que cualquier proposición inteligible dada es cierta en absoluto rigor). A pesar de que nunca se ha dado una definición formal de las Matemáticas (en la Historia), es evidente, la opinión generalizada de que las Matemáticas no deben ser definidas por lo que estudian, sino por su modo de construir y su grado de abstracción.

En consideración a lo anterior, el profesor George Chrystal, sostiene que la esencia de las Matemáticas radica en el hacer hipótesis y en el carácter que tienen las hipótesis. Lo que los matemáticos entienden por una “hipótesis” es una propuesta imaginada estrictamente cierta en un estado ideal de cosas. A su vez, Kant se opone a la definición de las Matemáticas como la ciencia de la cantidad y aboga por su naturaleza esquemática de razonamiento matemático. Ya que para él, lo que realmente distingue a las Matemáticas, no es el tema del que trata, sino que es el método, el cual consiste en construcciones que estudian los diagramas.

Kant considera las proposiciones matemáticas como los juicios sintéticos *a priori*; en donde las proposiciones son las cogniciones verdaderas, o incluso formas de cognición. Esta posición acepta los planteamientos de Platón y Aristóteles de que las Matemáticas se refieren exclusivamente a los estados hipotéticos de las cosas. Así, el afirmar que cualquier fuente de información que se limita a los hechos reales permite un conocimiento “necesario”, sería contradictorio. De lo anterior, la esencia referente a la construcción de hipótesis, es de naturaleza inferencial-apodíctica. Aunque, se debe reconocer que es difícil decidir entre –al menos- dos definiciones de las Matemáticas, una por su método, el de sacar conclusiones necesarias; y la otra por su finalidad y objeto, como el estudio de los estados hipotéticos de las cosas.

Ahora, cómo decidir la exclusión, o no, de un trabajo en el dominio de las Matemáticas. Tal vez la respuesta debe ser que, en primer lugar, cualquiera que sea el ejercicio del intelecto puede ser llamado en la aplicación de las Matemáticas a una cuestión no propuesta en forma matemática, sin duda no es el pensamiento matemático puro; y en segundo lugar, que la mera creación de una hipótesis puede ser una gran obra de un “genio poético”, pero no se puede decir que sea científica, por lo tanto no es conocimiento. El matemático esta –intensamente– interesado en métodos eficientes de razonamiento, con miras a su posible extensión a nuevos problemas. Las Matemáticas son “puramente” hipotéticas, a diferencia de la Lógica, la cual es categórica en sus afirmaciones.

Finalmente, las verdades matemáticas son verdades sobre las ideas. La afirmación de que las Matemáticas son “puramente” un ideal requiere un poco de explicación. Thomson y Tait comentan que es “absolutamente imposible someter a razonamiento matemático las condiciones exactas de cualquier cuestión física”. Como consecuencia, surge un problema práctico, y los esfuerzos físicos para encontrar un problema matemático soluble implican un análisis lógico del problema. Luego, las Matemáticas aplicadas son –simplemente– el estudio de una idea que se ha construido.

“Introducing Philosophy of Mathematics”

Friend, en su libro *Introducing Philosophy of Mathematics* (2007), hace énfasis en las posturas filosóficas (ver, Tablas 1 y 4) del platonismo y el realismo, y las relaciona con las corrientes filosóficas del logicismo, estructuralismo y constructivismo. Por ello, a continuación se hace una síntesis sobre el platonismo y el realismo matemático, y posteriormente, se describen las corrientes filosóficas mencionadas; relacionándolas con las posturas platónicas, realistas y anti-realistas.

Platonismo y realismo matemático

Platón estaba interesado en lo que consiste la verdad matemática. Era experto en Geometría y Aritmética, así que él, estaba interesado –particularmente– en lo que preservará las verdades geométricas y aritméticas. Platón observó que los teoremas geométricos se captan de una manera diferente a la forma en que se dan las verdades empíricas (verdades a través de los sentidos). Consideraba que para aprender Matemáticas no se necesita tener mucha experiencia de los sentidos o memorizar fórmulas particulares. Es suficiente aprender algunos principios generales, y reconstruir lo que se necesita para resolver problemas particulares. En otras palabras, está la capacidad de razonar *a priori* acerca de la Geometría y la Aritmética.

En uno de los diálogos famosos de Platón, Sócrates propone a Menón ejecutar un experimento para ilustrar su pensamiento acerca de cómo se llega a conocer acerca de las verdades geométricas. El experimento es preguntar a alguien que tiene poca formación en Geometría para desarrollar un teorema geométrico, con solo un poco de orientación racional. La persona elegida es un esclavo de la casa de Menón; el esclavo ha tenido poca educación en Geometría, pero él puede leer, escribir y sabe lo que es un triángulo. Sócrates no le dice al esclavo cómo resolver el problema que plantea, pero le indica si ha cometido un error. El esclavo desarrolla el teorema de Pitágoras. Es toda una hazaña impresionante y bastante creíble. Con este experimento, Sócrates demuestra que no se necesita algún conocimiento previo para desarrollar teoremas en Geometría. Por otra parte, parece que cualquier persona racional puede indicar si hay un razonamiento equivoco. El buen razonamiento es universalmente reconocido.

La Geometría euclidiana es intuitiva y "fácil de imaginar", luego ¿cómo la Geometría euclidiana genera verdades? Para Platón y Sócrates, la posibilidad misma de poder razonar *a priori* acerca de la Geometría depende de la capacidad de razonar acerca de algo. En este caso, el "algo" es abstracto, no concreto o físico. En esto, está inmersa la idea de existencia, de ahí, Sócrates y Platón desarrollaron una teoría, el "platonismo", en la que existe un reino de los objetos perfectos bastante independiente de los seres humanos. Los objetos en el "cielo de Platón" son perfectos y todo en la tierra es una imitación de tales objetos. Al razonar acerca de figuras geométricas, se razona sobre objetos ideales perfectos, no se trata de los "dibujos". La filosofía platónica dice que los seres humanos tienen una idea de este reino de las formas perfectas.

El realismo

Todos los realistas tienen en común la idea de que las verdades matemáticas no son obra del ser humano; la contención es sobre los objetos. No obstante, hay puntos de divergencia entre posiciones realistas. Un ejemplo, es sobre la noción de ser un realista en la ontología o un realista en valor de verdad.

El realista en la ontología piensa que hay una serie de objetos independientes, lo que hace que los juicios acerca de tales objetos sean objetivos. Por su parte, el realista en valor de verdad cree que las verdades matemáticas son independientes del ser humano, pero no necesariamente, que lo que las hace independientes es un reino de los objetos. El realista en valor de verdad sostiene que es difícil imaginar que los objetos etéreos-atemporales tales como los números, son objetos de la misma manera que las mesas y sillas. El realismo en la ontología explica o justifica que los objetos son independientes de las verdades matemáticas.

A muchos filósofos no les "gusta" poner la independencia de la verdad junto con el agnosticismo acerca de la ontología. Así, el realista en valor de verdad puede generar indiferencia respecto a la existencia de cualquier objeto que corresponda a las verdades de las Matemáticas. Luego, el filósofo no va a hablar sobre los objetos abstractos; lo que lo lleva a ser intuitivo y se basará en la idea de que el ejemplo canónico de un objeto es un objeto físico. Así, las cosas que existen son los objetos físicos, el resto o no existen o se es agnóstico sobre cuál es su situación.

Otro punto de divergencia entre las posiciones realistas es sobre qué se es realista. Es decir, algunos son realistas acerca de conjuntos, otros acerca de números; otros acerca de las ideas primitivas geométricas (punto, recta, plano). Para argumentar a favor de una ontología matemática sobre otra, se debe argumentar que la teoría que tiene tales objetos como primitivos es una "disciplina fundacional" dentro de las Matemáticas. Una "disciplina fundacional” es tal, si se puede reducir partes de las Matemáticas *per se*. Como disciplinas fundacionales de las Matemáticas se incluyen: la teoría de conjuntos, la teoría de tipo, la teoría de categorías, la teoría de modelos y la Topología.

Un tercer punto de divergencia se refiere a la epistemología. Las teorías realistas se distinguen unas de otras al discutir sobre cómo se conocen las verdades de las Matemáticas. Algunos apelan a la intuición (Platón); otros argumentan que las verdades matemáticas se perciben (Maddy); otros sostienen que el conocimiento es analítico y *a priori*, y por lo tanto, no depende de la intuición (Frege).

Asimismo, es útil distinguir entre dos partes de la teoría: lo ontológico y lo epistemológico. Las preocupaciones ontológicas se refieren a que los objetos existen de acuerdo con la teoría. La epistemología se refiere a cómo es que se sabe acerca de los objetos postulados por la teoría. La parte ontológica de la teoría de las Matemáticas de Platón se refiere al “cielo de las formas perfectas”. La parte epistemológica se refiere a la noción de razonamiento *a priori* sobre los objetos matemáticos. Las dos partes de la FM de Platón se complementan y son adoptadas por el realista moderno (en la ontología). Más explícitamente, para responder a cómo es que se sabe (es decir, la epistemología) sin apelar a las verdades de la experiencia sensorial, debe haber algo que hace a estas afirmaciones verdaderas, ese algo es un reino de los objetos (es decir, la ontología) que existe independientemente de los seres humanos y que es cargado con sus objetos perfectos.

El realista se convenció de que él descubre las verdades de las Matemáticas. Luego, “descubrir” no necesitará de un reino de los objetos (como el cielo de Platón). Se “descubre” por medio de la racionalidad. “Descubrir” ha de entenderse en contraste con “crear”. Si el realista “crea” un conjunto, crea en el sentido de seguir reglas de la teoría. En contraste, el anti-realista piensa que se crean las Matemáticas; en comparación el ajuste teórico realista utiliza la Lógica clásica para construir nuevos conjuntos. El concepto de construcción, utilizado por los filósofos anti-realistas de las Matemáticas, es el de la producción por pasos. El anti-realista “crea” en el sentido de seguir reglas; para el realista, la parte inconsistente del anti-realismo en las Matemáticas es que si –simplemente– vamos sobre la creación de las Matemáticas, esto hace que las Matemáticas no expliquen en la práctica de forma rigurosa.

La mayoría de las Matemáticas pueden ser fielmente descritas por la teoría clásica (realista) de conjuntos, se pueden traducir otras teorías matemáticas (teoría de grupos, Análisis, Cálculo, Aritmética, Geometría) en el lenguaje de la teoría de conjuntos. En este sentido, la teoría de conjuntos es una disciplina fundadora. Así que, la teoría de conjuntos es una postura reduccionista de las Matemáticas, por su capacidad de absorber otras ramas de las Matemáticas.

Por otra parte, las características de la Lógica clásica incluyen: la ley de bivalencia, la ley del tercio excluido, el uso gratuito de los argumentos de reducción al absurdo, y una lectura no ontológica del cuantificador existencial. La ley de bivalencia significa que solo hay dos valores de verdad, cierto y falso. La ley del tercio excluido dice que dada una fórmula bien formada, su afirmación o su negación es cierta. La ley del tercio excluido es sintáctica, mientras que la ley de bivalencia es semántica. Los argumentos de reducción al absurdo son los que comienzan por negar lo que se quiere demostrar. Y la cuantificación existencial pertenece al primer orden en Lógica. Particularmente al juntar las dos últimas características mencionadas se obtiene un tipo de prueba que los lógicos no-clásicos objetan, "pruebas puramente existenciales".

Problemas con el realismo teórico

Los realistas teóricos son los que tienden a tomar la teoría de conjuntos como la disciplina fundadora de las Matemáticas. Los problemas vienen de dos áreas: la ontología y la epistemología. Los problemas relativos a la ontología tienen que ver con: el número de objetos que existen de acuerdo con la teoría y la existencia de los objetos. Los problemas relativos a lo epistemológico se preocupan por: cómo justificar que dichos objetos existen y la forma en que se aprehenden.

La cuestión ontológica sobre el número de objetos matemáticos, genera una preocupación tradicional de la Filosofía, a menudo referido como "la navaja de Ockham". La cuestión epistemológica sobre ¿cómo justificar que existe la ontología de la teoría de conjuntos? se reduce a la pregunta, ¿cómo justificar que existe el conjunto vacío? Las preguntas sobre si los objetos existen (ontología) y cómo aprehendemos los objetos (epistemología) están exacerbadas por la presencia de teorías de conjuntos competitivas entre sí, que no están de acuerdo sobre la verdad o falsedad de ciertos axiomas.

De esto último, hay dos tipos de situación en la que se tienen teorías rivales. Uno es donde tenemos –ligeramente– diferentes axiomas básicos. Por ejemplo, los Axiomas de Zermelo-Fraenkel y Gödel-Bernays de la teoría de conjuntos. Las dos teorías discrepan sobre las nociones de construcción ordinal y sobre la noción de clase, entre otras cosas. La otra manera es con axiomas "independientes" de la teoría de conjuntos (por ejemplo, el axioma de elección), luego, a modo de ejemplo, se tienen dos teorías rivales: la axiomática de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección y la axiomática de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de elección.

Por su parte, Eckehart Köhler (2000; citado en Friend, 2007) da una respuesta plausible a la pregunta epistemológica sobre la forma en que se aprehenden, y de ese modo a la cuestión ontológica sobre la existencia de los objetos. El argumenta que existe una facultad intuitiva, lo que él llama "intuición racional", que es lo que los matemáticos usan para percibir la jerarquía de la teoría de conjuntos y hacer Matemáticas. En su lugar, se basa "simplemente" en la capacidad de razonar; es la intuición de razonamiento que garantiza la capacidad de poder hacerlo. Por otra parte, nuestra intuición racional permite razonar sobre objetos abstractos como entidades matemáticas. El punto de vista de Köhler consiste en dar respuesta a la fenomenología de las Matemáticas, es decir, a cómo es que los matemáticos describen su experiencia de las Matemáticas.

Logicismo

La cuestión importante de la filosofía logicista es intentar responder a: ¿cuál es la esencia de las Matemáticas? Como la palabra "logicista" sugiere, la respuesta es que las Matemáticas, o parte de ellas, es esencialmente la Lógica. El logicismo puede ser una filosofía realista de las Matemáticas o una filosofía anti-realista de las Matemáticas.

Frege era un realista. El logicismo de Frege cree que las verdades matemáticas son independientes de los seres humanos, es decir, el ser humano descubre, o deja de descubrir, las verdades matemáticas. Así, el logicismo de Frege es realista en valor de verdad. La verdad lógica es independiente de los seres humanos. El realismo de Frege en valor de verdad se sustenta en su realismo en la ontología. Es decir, lo que da cuenta de la independencia de las verdades lógicas es la existencia de objetos lógicos. El logicista busca apoyar su realismo al demostrar que todas, o parte, de las Matemáticas son Lógica, y al abogar en segundo lugar por la afirmación de que la Lógica es objetiva. Frege cree que la Aritmética es reducible a la Lógica pero, que la Geometría no es reducible a la Lógica.

Por su parte, Whitehead y Russell piensan que todas las Matemáticas son reducible a la Lógica. Creen no es solo en la reducción de la Lógica, sino también tienen la convicción de que hay algo –profundamente– fundamental acerca de la Lógica; la Lógica ocupa un lugar privilegiado, no solo en Matemáticas, sino en todo el conocimiento. La perspectiva de Whitehead y Russell como logicistas es que ellos creen que las Matemáticas son esencialmente Lógica, y desarrollan su teoría formal de tipos con el fin de probar esto, demuestran que se pueden reproducir todas las Matemáticas a partir de su teoría de tipos. Ellos evitan las paradojas y utilizan las paradojas para indicar que el ser humano crea la realidad matemática, ya que los errores que llevaron a las paradojas fueron creados. Por ello, se debe tener cuidado en cómo es que se justifican las "verdades", deben ser justificadas por un sistema (su teoría de tipos) completamente fiable, que no dé lugar a las paradojas

Whitehead y Russell difieren del logicismo de Frege en dos aspectos. Uno es que Frege es un realista, y Whitehead y Russell no lo son. El otro aspecto en el que las posiciones logicistas son diferentes es en su alcance, Frege pensó que solo la Aritmética y el Análisis son ramas de la Lógica. Whitehead y Russell piensan que todas las Matemáticas son Lógica. En pocas palabras, para Frege se descubren las verdades matemáticas, y para Whitehead y Russell se crean.

Logicismo de Frege

La Lógica y las Matemáticas se percibían como disciplinas muy diferentes. La Lógica era una rama de la Filosofía y no de las Matemáticas. La norma se siguió hasta que George Boole, y más tarde Frege, decidieron llevar su comprensión matemática al ámbito de la Lógica. Particularmente, Frege con el fin de mostrar que la Aritmética es Lógica, desarrolló su *Grundgesetze*, el cual contiene pruebas "largas" sobre que los axiomas de Peano y Dedekind de la Aritmética son solo teorías de la Lógica; lo que conlleva a la reducción de la Aritmética a la Lógica. Sin embargo, Russell mostró que el sistema lógico de Frege es inconsistente.

Boole hizo algunos avances importantes en la Lógica, en los que trae un enfoque algebraico a proposiciones, e introduce la noción de cuantificación y un tipo de razonamiento probabilístico. A pesar de los logros de Boole, el sistema no fue suficiente para los propósitos de Frege. En particular, Frege se vio obligado a desarrollar un nuevo sistema. Así, el sistema formal de Frege era un avance revolucionario en la Lógica, trajo conceptos de Matemáticas al análisis de oraciones, y su elección de notación y conceptos tomados de las Matemáticas y la lingüística le dieron un sistema con alcance para expresar más de la estructura lógica de una oración.

La prueba de Frege que la Aritmética puede basarse en la Lógica es filosóficamente una señal, epistemológica y ontológica. El significado se basa en la opinión de que el conocimiento y la justificación están dispuestas en una jerarquía. Mediante la reducción de la Aritmética a la Lógica, Frege muestra que la Aritmética es una justificación universal y objetiva, puesto que la Lógica era considerada universal y objetiva. La lógica aritmética es objetiva en el sentido de estar basada en objetos lógicos, luego, ¿qué es un objeto lógico (abstracto)? Para el caso de los números, pueden ser considerados como objetos abstractos, ya que son: referente de los términos singulares, no deben su existencia al ser humano, y son objetos de estudio.

El ser referente de los términos singulares está motivado por la forma en que se usa el lenguaje y cómo se estructura la gramática de dicho lenguaje, es decir, es un indicador gramatical de que los números son objetos. Por su parte, dado que se descubre, en lugar de crear, los objetos existen independientemente del ser humano. Y dado que, los números se utilizan para demostrar la verdad de los descubrimientos en Aritmética, los números son objetos de estudio. Los números se pueden definir solo mediante lenguaje lógico y nociones lógicas, además, se puede derivar la existencia de los números como teoremas de la lógica. Es decir, solo se necesita la lógica para demostrar su existencia. De lo anterior, se desprende que los números ocupan un lugar especial en el pensamiento, dado que los objetos de la Aritmética son objetos de la lógica universal.

Frege demostró que la Aritmética es *a priori* y analítica. Una verdad es analítica si y solo si es verdadera en virtud del significado o la Lógica. Si la Aritmética es Lógica y si la Lógica es analítica, las verdades aritméticas son verdaderas en virtud del significado. Ellas son verdaderas en virtud de los axiomas, definiciones e inferencias de la Lógica. Bajo el punto de vista logicista, la Aritmética no confía en la intuición espacio-temporal en el sentido de Kant. Frege está en desacuerdo con la creencia de Kant de que tanto la Aritmética como la Geometría son sintéticas. Las verdades son sintéticas si dependen de la experiencia o la intuición kantiana (intuición espacial y temporal). La "intuición" para Kant es el puente entre la experiencia sensible y el razonamiento puro, esto hace posible aplicar el razonamiento con el mundo físico. Frege no creía que la Aritmética debería depender de intuiciones, ya que para él es parte de la Lógica, sin necesidad de requerir de la intuición.

El logicismo de Whitehead y Russell

Whitehead y Russell recogieron lo que Frege había elaborado. Ellos decidieron desarrollar un sistema lógico "más elaborado" en dos aspectos. En primer lugar, trataron de reducir todas las Matemáticas a su sistema formal, para ello necesitaban un gran poder expresivo en su lenguaje lógico. El otro aspecto, fue el acto de evitar la paradoja de Russell.

El sistema formal desarrollado por Whitehead y Russell se llama "teoría de tipos", se desarrollaron dos teorías de tipos: la teoría de tipo simple y la teoría de tipo ramificado. La segunda fue desarrollada para permitir un mayor análisis y la organización de los conceptos matemáticos. En la teoría de tipo simple es explícito qué tipo de cosas se clasifican con un símbolo dado. Por otra parte, a fin de evitar la paradoja existe un sistema de nivel estricto donde solo a los predicados se les permite predicar sobre las cosas a un nivel inferior.

El logicismo pasó de estudiar las leyes básicas de Frege a estudiar los axiomas de Russell. La diferencia entre axiomas y leyes básicas, radica en que las leyes básicas son las leyes de la Lógica y, según el logicista, la Lógica juega un papel especial en para el conocimiento. Por el contrario, si se estudia un sistema formal arbitrario que es presentado axiomáticamente, los axiomas son los supuestos fundamentales de ese sistema formal. Así que los axiomas son básicos en relación con un sistema formal, en contraposición a las leyes básicas de Frege, que son fundamentales para todos los sistemas.

Debido a la cuantificación de orden superior, el lenguaje de la teoría de tipos le da el "poder" de absorber la mayor parte de las Matemáticas. La teoría de tipos de Whitehead y Russell es era una teoría formal y fundamental para la mayor parte de las Matemáticas, es decir, se puede hacer la mayor parte de las Matemáticas en la teoría de tipos. Varias modificaciones se han introducido recientemente y varias clases de teoría de tipos son utilizadas por científicos de la computación en la actualidad. Sin embargo, existe cierta inquietud filosófica acerca de la teoría de tipos que actúa como un fundamento a las Matemáticas en el sentido logicista, puesto que el logicismo aboga por que toda o la mayoría de las Matemáticas es Lógica.

Se suponía que el desarrollo de la teoría de tipos era para demostrar la afirmación filosófica que las Matemáticas son esencialmente Lógica. Para demostrar esto, se necesitan al menos tres requisitos: una reducción de las Matemáticas a una disciplina fundadora, la disciplina fundacional debe ser consistente, se debe tener la afirmación de que la disciplina fundacional es la Lógica. La teoría de tipos de Whitehead y Russell satisface los dos primeros requisitos, pero es criticada por los filósofos por "no ser muy lógica". Las críticas se hacen por dos razones. Una es que Whitehead y Russell no podían probar que los números naturales forman un conjunto infinito, lo que Frege era capaz de hacer en su lógica. De hecho, Whitehead y Russell fueron incapaces de demostrar que existe algún conjunto infinito, han tenido que agregar un axioma que afirma explícitamente que existe un conjunto infinito. La crítica filosófica dice que no es una verdad lógica, es solo una verdad matemática. Si Whitehead y Russell realmente querían tener éxito en sus objetivos filosóficos, entonces ellos tenían que demostrar que existe un conjunto infinito por principios lógicos. La segunda crítica en relación con el tercer requisito es similar, pero más técnica. Los críticos del proyecto de Whitehead y Russell cuestionar el estatus filosófico del axioma de reductibilidad, el cual garantiza que se tienen copias exactas de los números en todos los "niveles". Los críticos señalan que esto, tampoco es un asunto de Lógica, tan solo es un hecho matemático.

Russell era consciente de estas críticas y su respuesta final era admitir que esto era un problema. Distingue axiomas lógicamente necesarios de lo que él llama "axiomas empíricos", de la siguiente manera: los axiomas lógicamente necesarios son muy parecidos a las leyes básicas de Frege. En contraste, los axiomas empíricos no gozan del mismo estatus filosófico como los axiomas lógicos necesarios, es decir, hay una cierta duda persistente en cuanto a si son lógicos o matemáticos; ellos son justificados empíricamente en el sentido de ser bastante útiles en retrospectiva. Así, para Russell como para Whitehead las Matemáticas son reducibles a un sistema formal que incluye tanto axiomas lógicos como axiomas empíricos.

Estructuralismo

Los tres principales exponentes –actuales– del estructuralismo son: Michael Resnik, Stewart Shapiro y Geoffrey Hellman. En resumen, la posición estructuralista afirma que las Matemáticas son sobre estructuras, a diferencia de los objetos matemáticos tales como los números. Aproximadamente, una estructura es un patrón, estos pueden ser geométricos o numéricos, complejos y abstractos. Para comprender una estructura, el estudio se debe centrar en las propiedades estructurales y no en el contenido.

La posición estructuralista es diferente del platonismo porque, para el estructuralista, las Matemáticas no se tratan de objetos. Los objetos no son de importancia si están despojados de sus relaciones con otros objetos están en una estructura. Así, los objetos de estudio en Matemáticas son las estructuras "enteras": los objetos junto con los predicados que se aplican a ellos, las relaciones que guardan entre ellos y las funciones que nos llevan de un dominio de objetos a una serie de otros objetos.

Particularmente en la posición de Hellman, es posible interpretar las Matemáticas de tal manera como para hacer todos los cálculos matemáticos sin la necesidad de postular los objetos matemáticos. Hellman tiene una posición eliminativista, es decir, elimina los objetos Matemáticos. Luego, se debe distinguir entre lo que son objetos y los conceptos de una teoría. También, se debe distinguir entre objetos de una teoría y objetos de estudio. De acuerdo con la postura estructuralista, el estudio de los conceptos matemáticos; son los “objetos de estudio”. A diferencia del platónico, quien piensa que las Matemáticas son acerca de los objetos que se encuentran en una especie de cielo platónico.

Epistemológicamente, el estructuralista ya no se ocupa de cómo saber cuáles son los objetos matemáticos, sino más bien, se ocupa de la forma en que se conocen las relaciones entre los objetos y cómo se da la capacidad de seleccionar un sub-conjunto de objetos por medio de la predicación. El lema epistemológico del estructuralismo es: “el conocimiento matemático consiste en la capacidad de detectar los patrones” (Resnik, 1982; citado en Friend, 2007).

El rompecabezas de Benacerraf

Antes de profundizar en el estructuralismo, se considera que el “rompecabezas de Benacerraf” condujo al planteamiento estructuralista. El “rompecabezas” versa sobre el contraste de dos educaciones en Matemáticas diferentes. Suponga que hay dos hijos, Ernie y Johnny; cada uno es hijo de matemáticos y cada uno comienza su educación en casa. En lugar de estar expuestos a una educación convencional en Matemáticas, ellos primero aprenden teoría de conjuntos: Johnny aprende la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y Ernie aprende la teoría de conjuntos de von Neumann. En algún momento los dos niños comienzan a recibir una educación más convencional y son expuestos a la aritmética básica. Los niños ya tienen un “montón” de teoría de conjuntos, por lo que solo se les enseña la traducción de palabras tales como “número”, “añadir” y “multiplicar” a su teoría de conjuntos, de forma análoga. A ellos se les enseña que, convencionalmente, uno se centra en un conjunto infinito en particular; el cual tiene un primer elemento, cada elemento tiene un sucesor único, y así sucesivamente. Particularmente, Ernie y Johnny en una discusión acerca de la Aritmética, descubren que son capaces de obtener la Aritmética, por medio de los axiomas de Peano y Dedekind. El desacuerdo comienza a nivel ontológico (en el nivel de los objetos matemáticos).

Cada uno de los niños trata de coincidir con lo que se denomina convencionalmente 1, 2, 3, ...; uno, interpreta 1 como $\varnothing$, 2 como $\{\varnothing\}$, 3 como $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, y así sucesivamente; por lo que cada número es un miembro de todos los ordinales. El otro niño, interpreta 1 como $\varnothing$, 2 como $\{\varnothing\}$, 3 como $\{\{\varnothing\}\}$, y así sucesivamente; por lo que cada ordinal sucesor está rodeado de más “soportes” de la teoría de conjuntos. En particular, Ernie y Johnny no estarán de acuerdo si 2 es un miembro de 6 o un miembro de un miembro de un miembro de un miembro de 6.

Es de notar, que el platónico o el realista no pueden ayudar porque el desacuerdo entre Ernie y Johnny muestra que los números de la Aritmética no son una sola cosa, por lo menos según las teorías de conjuntos más desarrolladas. El platónico niega que la teoría de conjuntos pueda decir lo que los números son en realidad, ya que la interpretación de la teoría de conjuntos es solo una representación de los números en un sistema. Por su parte, la reacción general del estructuralista al rompecabezas de Benacerraf es estudiar las relaciones entre estos objetos en comparación con los objetos mismos. Ellos estudian los objetos solo en el sentido de las posiciones que ocupan en una estructura. Las relaciones entre los objetos son los que dan forma a la colección de objetos.

La filosofía del estructuralismo: Hellman, Resnik y Shapiro

En *Mathematics without numbers* (1989), Hellman desarrolla un estructuralismo modal. La idea detrás del estructuralismo modal es que las estructuras estudiadas en Matemáticas son posibles estructuras. Algo es posible en caso de que se permita, por reglas o conceptos. El estructuralismo modal piensa en teorías matemáticas, individualiza a las estructuras, como posibilidades. Una estructura matemática puede o no existir en el mundo real.

Para él, todas las estructuras deben ser tratadas de igual manera por el estructuralista. Así que la aplicación de las Matemáticas es solo el reconocimiento de que una posible estructura matemática se actualiza. Al aplicar las Matemáticas, se aplican los conocimientos matemáticos para saber "más" sobre el mundo "real". Debido a que no hay forma matemática de favorecer una estructura sobre otra, el enfoque de Hellman también incluye la idea de que no existen –literalmente– los objetos básicos de las estructuras matemáticas. En contraste con la posición de los platónicos o de los realistas, los números no existen independientemente de la estructura en la que estén. Por otra parte, las estructuras no "existen"; las estructuras son solo "posibilidades". Hellman consigue evitar todos los problemas ontológicos asociados con el platonismo y el realismo. Una estructura (composición de los conceptos con un dominio de objetos) es posible solo en el caso en que los conceptos no conduzcan a contradicciones; los axiomas estipulan algunas restricciones sobre los conceptos y los objetos.

Por su parte, Shapiro y Resnik, aunque tienen posiciones diferentes, comparten el rechazo del estructuralismo modal de Hellman. Ellos no necesitan las nociones modales porque piensan a las estructuras como *sui generis*, es decir, las estructuras no se explican con más detalle en términos de nociones modales más primitivas. Las estructuras no son eliminadas a favor de posibilidades o cualquier otra cosa.

Ahora, para distinguir las posiciones de Resnik y Shapiro, se deben considerar algunas generalidades sobre el estructuralismo, en particular, se debe ver qué dice el estructuralista acerca de los objetos básicos como los números. Hay dos formas de pensar acerca de los objetos de primer orden en el estructuralismo, lo que corresponde a una disputa entre los estructuralistas. Una forma es pensar en los objetos como *ante rem* (antes de la realidad); esta es la opinión de Shapiro. La otra, es pensar en ellos como *in re* (en la realidad); esta es una opinión compartida por Hellman y Resnik.

Un estructuralista *ante rem* piensa que las estructuras existen independientemente de si existen objetos que pasan a exponer la estructura. Uno de los motivos estructuralistas es la aplicación de las estructuras en el mundo real. Un estructuralista *in re* cree que solo existen estructuras matemáticas en la medida en que existen objetos que tienen la estructura en particular. Al generalizar la discusión de las propiedades en las estructuras, los estructuralistas *in re*, como Hellman o Resnik, piensan en estructuras como objetos abstraídos o colecciones de objetos reales; si no hay objetos reales, entonces no hay estructura. El estructuralista *in re* no tiene tal dificultad, ya que –simplemente– levanta la estructura de los objetos existentes a través de un proceso de abstracción.

Según Friend (2007), el estructuralismo *in re* no es tan filosóficamente robusto, debido a la existencia de estructuras matemáticas que parecen depender de la existencia del real puntual o del real actual; objetos que participan en ciertas estructuras. Si esos objetos dejan de existir, entonces las estructuras también dejaran de existir. Debido a esto, el estructuralista *in re* tiene que decir qué tipo de objetos pueden participar en una estructura. A modo de ejemplo, si el estructuralista *in re* considera que los únicos objetos reales o actuales son objetos físicos, entonces solo las estructuras matemáticas exhibidas por los objetos físicos son estructuras matemáticas. No obstante, lo anterior plantea diversos problemas. Un problema es que hay un "montón" de Matemáticas, sobre las que no se tiene idea de si es aplicable. Así que el estructuralista *in re* corre contra la experiencia matemática, que desarrolla la estructura primero y se preocupa de las aplicaciones más tarde. Otro problema es que en la contabilización de las estructuras matemáticas infinitas, no está claro en absoluto que hay un número infinito de objetos físicos en torno a las Matemáticas a abstraer, para legitimar su desarrollo en la teoría de números de infinitos.

El estructuralismo *ante rem* de Shapiro, cuenta una historia diferente. El estructuralista *ante rem* dice que existen estructuras independientes a cualquier objeto. La idea es que los matemáticos conocen y estudian, algunas estructuras. Los matemáticos no estudian los objetos matemáticos individualmente, sino que estudian a los conjuntos de objetos con relaciones entre sí. Es posible preguntarle al estructuralista cómo es que el "mismo" objeto (lugar en una estructura) puede pertenecer a estructuras diferentes.

Shapiro propone dar un fundamento filosófico para la comprensión matemática, para lo cual necesita tener una idea de la teoría de modelos. El modelo teórico está interesado en la caracterización de las estructuras de acuerdo a sus propiedades matemáticas y en comparar estructuras entre sí. Posteriormente, la perspectiva de un modelo teórico da solución al problema de por qué un objeto puede pertenecer a estructuras diferentes. Las estructuras matemáticas son independientes, una estructura implica aplicabilidad universal, sin compromiso ontológico con los objetos de primer orden. Shapiro considera a la teoría de modelos como la rama de las Matemáticas que describe mejor a las Matemáticas. La esencia de la actividad matemática se ve, por el estructuralista, como un ejercicio de comparación de estructuras matemáticas entre sí.

Crítica

Con toda FM, una pregunta que se debe hacer es: ¿cuáles son los compromisos ontológicos de la teoría? El estructuralista se distancia de la posición realista, precisamente en relación con el asunto de compromiso ontológico. Al recordar que el realista está comprometido con la existencia de los objetos básicos de primer orden de las Matemáticas. Así que existe un "todo", a menos que el realista reduzca las Matemáticas a una disciplina fundacional, en cuyo caso el realista se compromete con la existencia de los objetos reconocidos por esa disciplina.

La posición eliminativista de Hellman elimina los objetos del realista; los objetos se eliminan en favor de las nociones modales, relativas a posibles objetos y posibles estructuras. La eliminación tiene sus propios problemas filosóficos, por lo que se debe saber el estatus ontológico de las posibilidades. Por su parte, el estructuralista *ante rem* afirma que los objetos de estudio de las Matemáticas son estructuras.; lo que el matemático etiqueta como un "objeto" en su disciplina, se llama "un lugar en una estructura" por el estructuralista. El alcance y significado filosófico de esta traducción es que no hay un compromiso ontológico a las etiquetas de "objetos" matemáticos.

La postura del estructuralista *ante rem* hacia la ontología matemática tiene dos grandes ventajas. Una de las ventajas es que sostiene, a diferencia del realista, que él no tiene que sostener el carácter epistemológico de los objetos "atemporales etéreos espeluznantes". Más bien, el estructuralista simplemente dice que estructuras matemáticas se pueden aplicar a cualquier objeto. La segunda ventaja está relacionada con la primera y es que la aplicabilidad de las Matemáticas, no es algo que el estructuralista tiene que explicar. Dicho de otra manera, es un asunto de la metafísica el explicar cómo es que las Matemáticas son aplicables al mundo físico o al mundo imaginario. Por el contrario, el filósofo de las Matemáticas, bajo la concepción estructuralista, debe ocuparse de la actividad matemática, no de cómo se pueden utilizar las Matemáticas.

Constructivismo e intuicionismo

Para entender mejor el realismo, es útil contrastarlo con su posición opuesta, el anti-realismo. El constructivista es un anti-realista y, como tal, rechaza totalmente la tesis realista de que los objetos matemáticos o las verdades matemáticas son independientes del ser humano. Las Matemáticas constructivistas son fundamentalmente una construcción de la mente humana. No se descubren verdades u objetos matemáticos; se construyen. Es de aclarar que los constructivistas son anti-realistas específicamente sobre las Matemáticas.

El término utilizado históricamente para “constructivista” era “intuicionista”, introducido por Brouwer a principios del siglo XX. El intuicionismo es un cierto tipo especializado de constructivismo. Hay muchas posiciones constructivistas, lo que las distingue entre sí son las diferentes lógicas que utilizan para formar su razonamiento subyacente. Por razones de importancia histórica y filosófica, el autor centra su estudio en el intuicionismo y no en las otras posiciones constructivistas.

En principio, se debe recordar que la Lógica clásica se caracteriza por las siguientes aceptaciones: la ley del tercio excluido, la eliminación de la doble negación, las pruebas por reducción al absurdo y el axioma de elección en toda su generalidad. La ley del tercio excluido dice que se tiene la afirmación o negación para cualquier “fórmula”. La eliminación de la doble negación es la regla que dice que a partir de una fórmula doblemente negada, la fórmula no negada se tiene ($p = \neg\neg p$). Las pruebas por reducción al absurdo son las que proceden de asumir lo contrario de la conclusión, lo que demuestra una contradicción, y permite rechazar la hipótesis y afirmar su contrario. El axioma de elección dice que cada conjunto tiene un “miembro representativo”.

En un nivel metafísico, un realista en su discurso es alguien que cree que las verdades de dicho discurso son independientes del ser humano. El realista se compromete a decir que las oraciones tienen un valor de verdad, a pesar de que, es imposible saber lo que el valor de verdad es. El anti-realista piensa que no tiene sentido la idea de que una sentencia pueda ser cierta, independientemente de la capacidad de saber si es cierta o no. El anti-realista piensa que no es racional decir que las sentencias deben tener un valor de verdad sino se sabe lo que el valor de verdad es. El constructivista es “cauteloso” acerca de cuáles frases en Matemáticas son verdaderas y cuáles no lo son; quiere limitar epistémicamente la verdad.

Lógica intuicionista

Aunque en la Lógica clásica la ley del tercio excluido está íntimamente relacionada con la ley de bivalencia, que dice que solo hay dos valores de verdad, si se rechaza la primera, tal como lo hace la lógica intuicionista, se encuentra que la ley de bivalencia es bastante independiente. Es decir, que puede ser aceptada o rechazada. Particularmente, puede ser rechazada si se permiten frases sin valor de verdad o frases con más de un valor de verdad (oraciones paradójicas). Cada una de estas estrategias se puede encontrar en alguna teoría constructivista.

Un intuicionista, conserva la bivalencia, pero rechaza la ley del tercio excluido. Por otra parte, el rechazo de la ley del tercio excluido tiene repercusiones para una serie de reglas de inferencia, como la eliminación de la doble negación, la reducción al absurdo y el *modus tollens*. Para el intuicionista afirmar A, no se significa afirmar que A es verdad. En cuanto a la doble negación, si no se sabe que no se sabe A, no significa que se sabe A, luego la inferencia anterior no es intuitivamente válida.

La semántica del intuicionismo lógico: Dummett

Para Dummett, la semántica está completamente articulada por las reglas de inferencia del sistema. Dummett es filosóficamente austero porque las reglas de deducción naturales de inferencia son suficientes para hablar sobre el significado de las fórmulas y sus conectivas. Él considera que el demostrar es una actividad significativa que tiene que ser compartida y comunicada por una comunidad. Dummett es un ejemplo de un intuicionista que tolera la bivalencia, pero niega que todas las fórmulas bien formadas son significativas. Para Dummett, "saber" significa "poder generar una prueba intuitivamente aceptable".

Es de notar, que el tener valores de verdad no implica que se definan los conectores lógicos a partir de tablas de verdad. Si una fórmula bien formada no es constructiva, ni demostrable mediante las reglas de inferencia, entonces no es significativa. Una fórmula bien formada es una candidata para el proceso de demostrabilidad, es decir, si no está bien formada una fórmula, entonces no tiene ninguna esperanza de ser demostrada. Las frases bien formadas que son significativas, es porque se puede mostrar su prueba, se puede manifestar el conocimiento a través de la prueba y, por lo tanto, se comparte el conocimiento a través de la prueba.

Dummett insiste en que no se puede entender una fórmula que no es posible probar. El significado de las oraciones en un lenguaje formal se aprende a través de su prueba, por lo que la prueba es lo que da sentido a una frase. Para el intuicionista, la semántica de un sistema formal es el procedimiento de la prueba, todo lo que se necesita es entender las reglas de inferencia que lo rigen. Lo interesante de este asumir el significado es que elimina la posibilidad de "criticar" tales reglas, puesto que las reglas son las que dan "sentido". Ahora, bien, ¿por qué las reglas de inferencia son suficientes?: solo permite entender un número finito de cosas; el lenguaje es composicional, la comprensión se construye de la oración simple a oraciones más complejas; y las pruebas han de ser consideradas como los procedimientos para la comunicación, son artefactos no son estáticas.

La lógica intuicionista es proposicional, atómica o compleja. Si es atómica, entonces consiste en una variable proposicional y esto puede tener un significado determinado. En particular, tiene un determinado significado si representa un hecho que puede ser probado, verificado o que muestre que conlleva a una contradicción. Por su parte, si es compleja, entonces se compone de varias variables proposicionales y conectores lógicos, así que si las proposiciones que la componen tienen un significado determinado entonces el todo es comprobable o su negación es demostrable.

Otro elemento es el aspecto procesal de las pruebas. Las pruebas tienen que dar un método para manifestar el significado de una conclusión. El significado de la conclusión depende de cómo se trazan las premisas. Las reglas de inferencia dan los procedimientos para determinar el significado de las frases en las Matemáticas.

MARCO DE REFERENCIA: FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

Antes de responder qué es la FM, se dice de forma sucinta, que la Filosofía (ver, Figura 5) *per se* es una ciencia que busca el conocimiento acerca de las "cosas" a razón de su existencia, naturaleza y finalidad a partir del uso de la razón. La Filosofía puede ser vista a partir de los objetos que se estudien, por ello, se divide en Filosofía del *ser*, del *pensar* y del *actuar*.

En la Filosofía del ser se discute la existencia de: el hombre *per se*, el hombre en contexto, el hombre como ser pensante, el mundo y Dios. Para estudiar "estas existencias" se tienen los marcos y concepciones de la Metafísica, la Ontología, la Antropología, la Cosmología y la Teodicea, respectivamente. Es de notar, que el existencialismo puede ser entendido como una "preeminencia de la existencia" o como una "primacía de la existencia". En el primer caso, se tiene en cuenta la naturaleza del objeto, se destaca la inteligibilidad del mismo; en el segundo caso, se rechaza la inteligibilidad y por ende la naturaleza del objeto. Por tanto, la preeminencia de la existencia es el "existencialismo auténtico" puesto que reconoce a la existencia y a la intuición existencial.

En la Filosofía del pensar el objeto de estudio es el conocimiento, el cual se aborda a partir de su estructura, su naturaleza y su validez. Estas miradas del conocimiento son el marco de la Lógica, la Epistemología y la teoría del conocimiento, respectivamente. Para el caso de la Epistemología, distinguir entre conocimiento *a priori* y *a posteriori* representa el poder caracterizar un conocimiento particular; por su parte, la Lógica es considerada una ciencia preliminar, puesto que ofrece las garantías de lo que sería un "legítimo saber". Finalmente, en la filosofía del actuar se estudia la moralidad, el comportamiento, los valores y la "belleza" del ser humano. Para estudiar estas particularidades del ser humano se tienen los marcos de la Ética, la Política, la Axiología y la Estética, respectivamente.

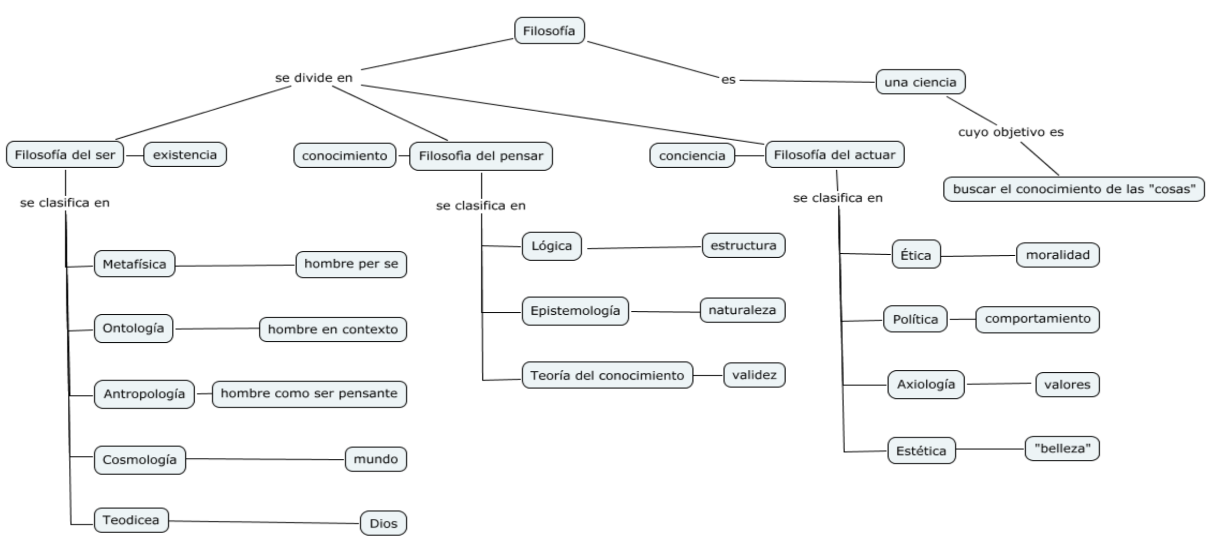

Figura 5.- Marco conceptual de la Filosofía

La FM es una rama de la Filosofía, cuyo objetivo es reflexionar sobre la existencia, naturaleza, finalidad y validez de las Matemáticas. Así, para estudiar a las Matemáticas, la Historia de la FM ha demarcado algunas corrientes filosóficas con el fin de mostrar las diferentes perspectivas o posturas sobre el campo de las Matemáticas. A causa de lo anterior, a continuación se presentan *grosso modo* las corrientes filosóficas destacadas previamente.

Perspectivas filosóficas sobre las Matemáticas

En los siguientes párrafos, se muestran los planteamientos generales de algunas corrientes filosófico-matemáticas; la selección fue a raíz de su constante mención entre los autores estudiados.

Constructivismo e Intuicionismo

La postura constructivista tiene sus fundamentos en las ideas de Kant y Kronecker. La escuela constructivista pretendió reconstruir el conocimiento matemático con el fin de protegerlo de la pérdida de sentido y de la contradicción. Con este fin, los constructivistas rechazaban los argumentos no *constructivos*, objetan el uso de la ley lógica del tercio excluido y las demostraciones por *reductio ad absurdum*.

Por su parte, el intuicionismo es un cierto tipo especializado de constructivismo. Hay muchas posiciones constructivistas, lo que las distingue entre sí son las diferentes lógicas que utilizan para formar su razonamiento subyacente. Particularmente, en el intuicionismo los exponentes más destacados son: Brouwer y Heyting; quienes consideran que las verdades matemáticas y la existencia de los objetos matemáticos deben ser establecidas y reconstruidas por métodos *constructivos*. El intuicionismo aboga por la demostración en Matemáticas. De hecho, de acuerdo con el intuicionismo, la demostración y las construcciones son el todo; los objetos matemáticos tienen que ser construidos (razonablemente) antes de ser mencionados.

Logicismo y Neo-logicismo

El logicismo pretende dar respuesta a ¿cuál es la esencia de las Matemáticas?, para lo cual, dice que las Matemáticas son parte de la Lógica, es decir, las verdades matemáticas pueden ser reducidas a verdades lógicas. Los logicistas más destacados son: Frege, Russell y Whitehead. Particularmente, Russell planteo dos afirmaciones logicistas: todos los conceptos de las Matemáticas pueden reducirse a conceptos lógicos, y todas las verdades matemáticas pueden ser demostradas de los axiomas y las reglas de inferencia de la Lógica.

En un primer momento, el logicismo fue propuesto y desarrollado por Frege, no obstante, el sistema de Frege era inconsistente; lo cual fue demostrado por Russell, al refutar la ley básica V del conjunto de axiomas lógicos, lo cual condujo a la *paradoja de Russell*. Posteriormente, Russell y Whitehead iniciaron una nueva era del logicismo, conocida como *neo-logicismo*. Esto fue posible, ya que el programa neo-logicista tomo como punto de partida el hecho de que el programa de Frege, no necesitaba la ley básica V; puesto que ese axioma puede ser reemplazado por el principio de Hume: “el número de Fs es igual al número de Gs si y solo si hay una correspondencia 1-1 entre las Fs y las Gs”.

Naturalismo y Holismo

A partir de los escritos de Quine se pueden distinguir dos holismos. El primero es el *holismo confirmatorio*, el cual plantea que las teorías se confirman o se des-confirman como totalidades. El segundo es el *holismo semántico*, el cual plantea que la unidad de significado debe ser analizada en su totalidad y no solo a través de sus partes.

En primer lugar, el holismo de Quine implica el rechazo de la distinción entre verdades empíricas y *a priori*, donde las verdades *a priori* son las que se conocen de forma independiente de la experiencia. En segundo lugar, aunque Quine reconoció objetos abstractos y su inaccesibilidad perceptual, e incluso habló de algunas creencias que surgen de la observación y de otras como el resultado a través del ejercicio de la razón, esto no le proporcionó distinción epistemológica para privilegiar declaraciones acerca de los objetos matemáticos abstractos. Las Matemáticas no producen conocimiento *a priori*, aunque parecen proceder en gran medida a través del ejercicio de la razón. Dado que para Quine, no hay *a priori* o conocimiento conceptual, ningún conocimiento de que la filosofía puede impartir sobre la ciencia debe ser ciencia. Esto es parte de lo que Quine llama naturalismo. Se ve a la ciencia natural como una investigación sobre la realidad, falible y corregible, y no necesita de ninguna justificación más allá de la observación y el método hipotético-deductivo.

El naturalista de Quine, comienza su razonamiento en las teorías del mundo heredadas, luego se pregunta por cómo es que los seres humanos llegan a un conocimiento fiable del mundo. El naturalista ve a la ciencia natural como una investigación sobre la realidad, falible y corregible, pero no necesita de ninguna justificación más allá de la observación y el método hipotético-deductivo.

Estructuralismo

El estructuralismo nace como una corriente cultural caracterizada por concebir cualquier objeto de estudio como un todo, cuyos miembros se relacionan entre sí y con el todo, de tal manera que la modificación de uno modifica también los restantes, es decir, a su estructura. Los tres principales exponentes –actuales– del estructuralismo son Resnik, Shapiro y Hellman. En resumen, la posición estructuralista afirma que las Matemáticas son sobre estructuras, así, para comprender una estructura, el estudio se debe centrar en las propiedades estructurales y no en el contenido.

El estructuralismo tiene como foco las relaciones entre los diversos tipos de entidades matemáticas, en lugar de las entidades *per se*. El verdadero significado del estructuralismo, sin embargo, esta en su capacidad de proporcionar respuestas a algunos problemas bastante difíciles en la FM. Por ejemplo, el estructuralismo es capaz de explicar por qué los matemáticos están normalmente interesados solo en la descripción de los objetos que estudian (planteamiento de isomorfismos).

De acuerdo con el estructuralismo, la aplicación de las Matemáticas a la ciencia es el descubrir que ciertas estructuras matemáticas se ejemplifican en el mundo material. Una postura ontológica relativa a las "estructuras" es el *ante rem*, la cual plantea que la estructura existe independientemente de si tiene instancias en el mundo físico. Otra postura es el estructuralismo eliminativo, la cual plantea que solo existen los sistemas de objetos que ejemplifican a las estructuras, es decir, no existen estructuras y la existencia de las estructuras está ligada a la existencia de los sistemas que las ejemplifican.

Formalismo

Esta postura se enfoca en la notación matemática y su uso en el quehacer matemático como actividad principal de las Matemáticas. En su forma "más pura", el formalismo plantea que las Matemáticas no son más que la manipulación de símbolos de orden lógico-matemático. Las huellas de una filosofía formalista de las Matemáticas se encuentran en los escritos del obispo Berkeley, pero los principales proponentes del formalismo son Hilbert, Neumann y Curry. Especialmente, el programa formalista de Hilbert (fundador del formalismo moderno) tuvo como objetivo hacer la construcción axiomática consistente y completa de la totalidad de las Matemáticas. La tesis formalista consta de dos afirmaciones: las Matemáticas se pueden expresar como sistemas formales, en los que las propiedades matemáticas son representadas por los teoremas formales; la validez de estos sistemas formales se puede establecer en términos de su carencia de inconsistencia.

El formalismo consta de cinco elementos clave que son las principales variantes históricas y filosóficas como causantes del formalismo, las cuales son: la revisión de la clasificación tradicional de las Matemáticas, el rechazo a la concepción clásica de la prueba y el conocimiento matemático, el cambio en la concepción de rigor, su defensa de un papel no figurativo del lenguaje en el razonamiento matemático y la "creatividad de crear"

Platonismo

El platonismo se origina con Platón, quien tenía interés por decir en qué consiste la verdad matemática. Así, el platonismo plantea que los objetos matemáticos tienen una existencia real y objetiva en algún mundo ideal independiente de la humanidad, y que hacer Matemáticas es el proceso de descubrir sus relaciones pre-existentes. Según el platonismo, el conocimiento matemático consiste en la descripción de estos objetos, en las relaciones y estructuras que los conectan; cada teoría matemática consistente describe alguna parte del universo matemático, por ende, cada objeto matemático que pudiera existir, existe.

El platonismo tiene dos grandes debilidades. En primer lugar, no es capaz de ofrecer una explicación adecuada de cómo los matemáticos acceden al conocimiento del reino platónico, ya que se basan en observaciones del mundo real, posteriormente generalizadas. Y en segundo lugar, la postura platónica solo tiene en cuenta los aspectos de la teoría de conjuntos y de las estructuras estáticas de las Matemáticas, por lo cual, no tiene en cuenta la manera de utilizar las Matemáticas, sus relaciones con la ciencia, la actividad humana o la cultura.

Empirismo

La postura empirista de la naturaleza de las Matemáticas sostiene que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas. Se pueden distinguir dos tesis empiristas: los conceptos matemáticos tienen orígenes empíricos y las verdades matemáticas tienen justificación empírica. La primera tesis es aceptada por la mayoría de los filósofos, dado que muchos de los conceptos no se forman directamente de observaciones, pero si se definen en términos de otros conceptos, a través de cadenas de definiciones. La segunda tesis es rechazada por todos –salvo por los empiristas–, ya que la mayoría del conocimiento matemático se acepta en lo teórico y no en lo empírico-práctico.

CAPÍTULO III. EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Este capítulo está dividido en dos partes. La primera corresponde a la revisión de la literatura y la segunda al marco de referencia en relación con el segundo foco de estudio (CPM). La primera incluye una presentación de algunos modelos del CPM, y la segunda presenta una esquematización de términos significativos y los planteamientos aceptados (en términos generales) por la investigadora sobre el CPM.

MODELOS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Como se mencionó en la perspectiva teórica del presente trabajo, el estudio del conocimiento del profesor inició con los planteamientos propuestos por Shulman (1986) que abogaban por el conocimiento del contenido para la enseñanza y buscaban resaltar la importancia del mismo; diferenciándolo del conocimiento del contenido que tienen otras disciplinas (ajenas a la labor docente). Asimismo, es de reconocer, que además de la perspectiva teórica sobre el conocimiento propuesta por Shulman, se encuentran modelos de otros autores que proponen incluir o excluir ciertos componentes en pro del quehacer docente, y particularmente, del profesor de Matemáticas.

Es por ello, que en los siguientes párrafos se hace una presentación de los modelos del CPM planteados por Fennema y Franke (1992); Hill, Ball y Schilling (2008); Rowland, Hucksep y Thwaites (2005); da Ponte (2012); y Stacey (2008).

Conocimiento del profesor (*Fennema y Franke, 1992*)

Fennema y Franke (1992) consideran que el CPM para la enseñanza de las Matemáticas escolares debe ser “dinámico e interactivo”. Por esto, su modelo de conocimiento para el profesor de Matemáticas (ver, Figura 6) se centra en el conocimiento en relación con el contexto del aula (*Contexts specific knowledge*), el cual, a su vez, interacciona continuamente con el conocimiento de las Matemáticas (*Knowledge of Mathematics*), el conocimiento pedagógico (*Pedagogical Knowledge*) y el conocimiento de la cognición matemática de los estudiantes (*Knowledge of learners cognitions in Mathematics*). Además, acepta que estos cuatro componentes de conocimiento están permeadas por las creencias (*Beliefs*) del profesor.

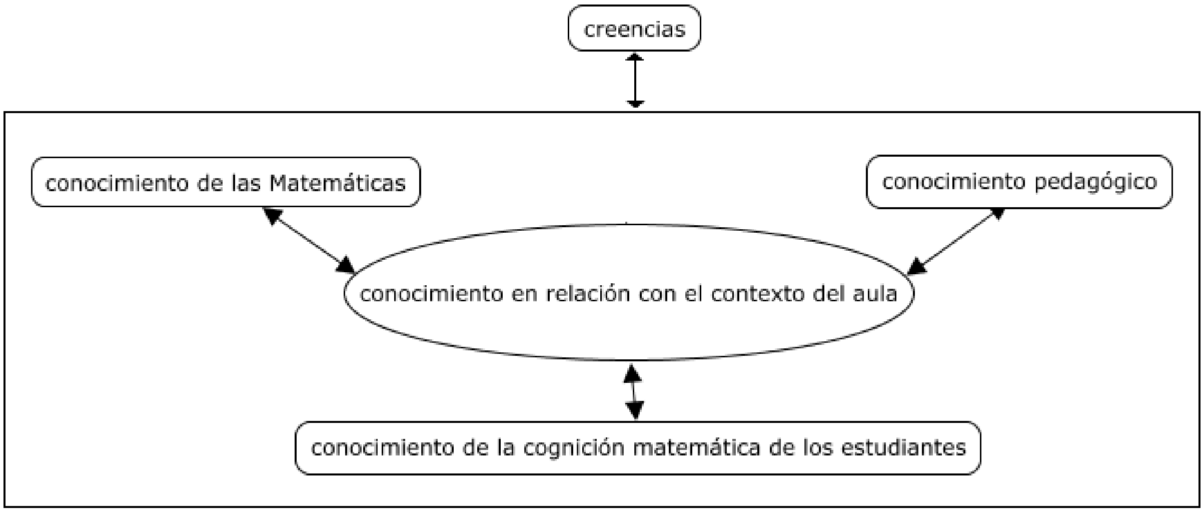

Figura 6.- Conocimiento del profesor (Fennema y Franke, 1992)

El *Knowledge of Mathematics* incluye el conocer los conceptos (y su interacción) y los procesos de resolución de problemas, el dominio de los contenidos matemáticos en relación con el tema de estudio. El *Pedagogical Knowledge* incluye el conocer estrategias efectivas para la planificación y la organización de clase, y las técnicas motivacionales, como estrategias para la gestión del aula. El *Knowledge of learners cognitions in Mathematics* incluye el conocer cómo los estudiantes piensan y aprenden un contenido matemático, cómo adquieren los contenidos matemáticos, y cuáles son las dificultades y los logros que enfrentan en los procesos de aprendizaje.

Dominios de conocimiento matemático para la enseñanza **(*Hill, Ball y Schilling, 2008*)**

Ball, Hill y Schilling (2008) centran su estudio en la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar Matemáticas y en el cómo se relaciona con la "calidad" de enseñanza y el rendimiento de los estudiantes. El modelo planteado por estos autores surge de la observación de la práctica en el ámbito matemático, e identifica las tareas –habituales– que realizan los profesores que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento de la materia. Esto establece una base teórico-práctica para el modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* (conocimiento matemático para la enseñanza).

Para Hill, Ball y Schilling (2008) el conocimiento matemático para la enseñanza (*MKT*) es el conocimiento que los profesores utilizan para producir aprendizaje en los alumnos. A partir de esta noción, es de notar que la labor del profesor de Matemáticas debe incluir: análisis de errores, estrategias para la solución de situaciones-problema, saber explicar en cuáles momentos los estudiantes no "comprenden", evaluar lo significativo de los materiales de enseñanza, disponer de diferentes tipos de representación, y tener argumentos "sólidos" sobre el funcionamiento de un proceso.

Por lo anterior, el modelo *MKT* distingue dos dominios de conocimiento: el *conocimiento del contenido matemático* y el *conocimiento didáctico del contenido*, los cuales, a su vez, tienen una división en tres sub-dominios específicos (ver, Figura 7).

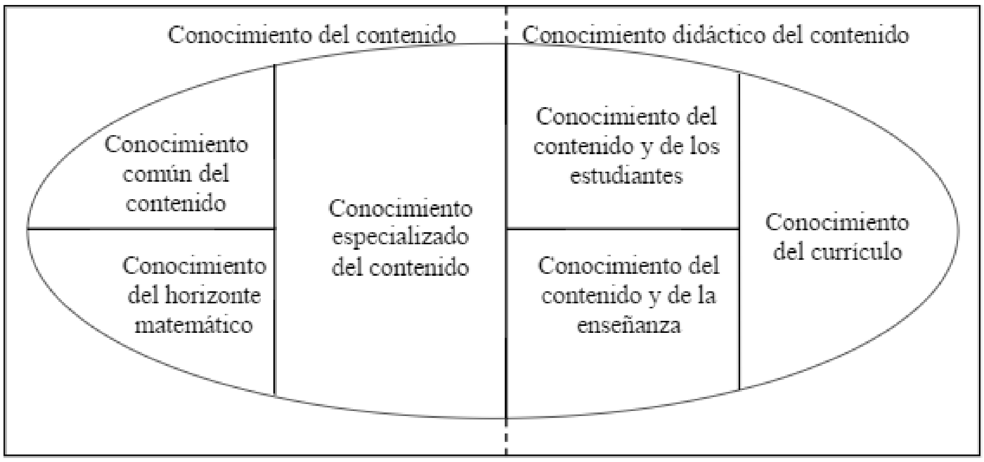

Figura 7.- Dominios del *MKT* (Hill, Ball y Schilling, 2008)

El conocimiento del contenido matemático, como dominio del *MKT*, contempla los sub-dominios: conocimiento común del contenido, conocimiento del horizonte matemático y conocimiento especializado del contenido. El *conocimiento común del contenido* es definido como el conocimiento matemático y las habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza; constituye el conocimiento básico sobre las Matemáticas de cualquier ciudadano. Aquí, se tiene en cuenta el conocimiento que el profesor emplea al resolver situaciones-problema, particularmente, cómo aplica definiciones y propiedades matemáticas. El *conocimiento del horizonte matemático* es definido como el conocimiento que tiene el docente sobre los distintos contenidos matemáticos y la evolución de los mismos en pro del aprendizaje; es decir, es el conocimiento matemático avanzado hacia el cual apunta el conocimiento matemático escolar (son las elaboraciones no escolares del conocimiento matemático). Es el conocimiento que indicaría que, por ejemplo, la proporcionalidad tiene en el horizonte a la linealidad, las transformaciones lineales y los isomorfismos. El *conocimiento especializado del contenido* describe al conocimiento matemático y la habilidad de enseñar del profesor.

El conocimiento didáctico del contenido, en tanto dominio del *MKT*, contempla los sub-dominios: conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y de la enseñanza, y conocimiento del currículo. El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* es definido como el conocimiento del contenido que se relaciona con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan y aprenden un contenido matemático particular; es uno de los conocimientos que se utiliza en el diseño de tareas para la enseñanza. El *conocimiento del contenido y la enseñanza* es definido como el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el conocimiento matemático; es decir, es el conocimiento de diferentes estrategias de enseñanza para un mismo objeto matemático. El *conocimiento del currículo* es el conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, y materiales para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su quehacer docente y seleccionar las tareas "adecuadas" para el aprendizaje de los estudiantes.

***Cuarteto del conocimiento* (*Rowland, Hucksep y Thwaites, 2005*)**

El *Knowledge Quartet* (cuarteto de conocimiento) es un modelo diseñado por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) con el fin de reflexionar sobre las formas en que el conocimiento del profesor influye en el aula. El *Knowledge Quartet* (ver, Figura 8) es un marco para observar, describir y discutir el papel que desempeña el conocimiento didáctico y de contenido, que tiene el profesor en pro de su práctica. Este modelo, plantea las siguientes dimensiones: *Foundation* (fundamentación), *Transformation* (transformación), *Connection* (conexión) y *Contingency* (contingencia).

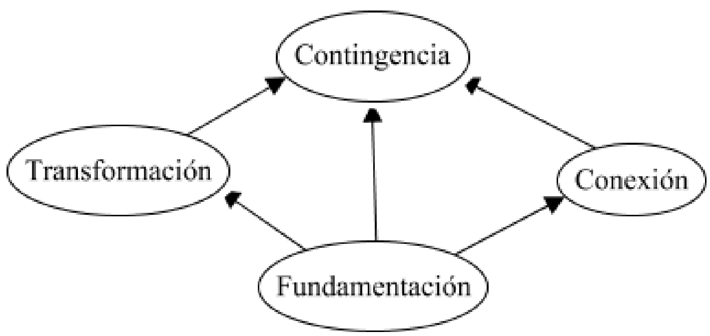

Figura 8.- Dimensiones del *Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005)

La dimensión *Foundation* se refiere al conocimiento, las concepciones y las comprensiones adquiridas antes y durante la formación académica del profesor de Matemáticas. La dimensión *Transformation* aboga por el conocimiento en la acción (planificación para la enseñanza y enseñanza en aula) y tiene en cuenta el uso de representaciones "adecuadas", ejemplos y procedimientos. La dimensión *Connection* alude al conocimiento que los profesores utilizan al momento de establecer conexiones entre las partes del contenido matemático, con el fin de hacer elecciones respecto al contenido matemático a enseñar; incluye al conocimiento como derrotero para la secuenciación del material para la instrucción a partir de las demandas cognitivas de cada "tema". La dimensión *Contingency* se manifiesta en aquellas situaciones en las que los profesores han de responder ante eventos inesperados que emergen durante la instrucción; por ejemplo, preguntas de los estudiantes que no tuvieron en consideración durante la planeación.

Componentes del conocimiento didáctico (*da Ponte, 2012*)

da Ponte (2012) ubica como derrotero central de su modelo (ver, Figura 9) al conocimiento didáctico de las Matemáticas. Este modelo discute los aspectos del conocimiento del profesor en relación con la práctica docente y se focaliza en el conocimiento didáctico del contenido. Aquí, se distinguen cuatro tipos de conocimiento: el conocimiento de las Matemáticas, el conocimiento del currículo, el conocimiento de los estudiantes y del aprendizaje, y el conocimiento de la práctica docente (núcleo).

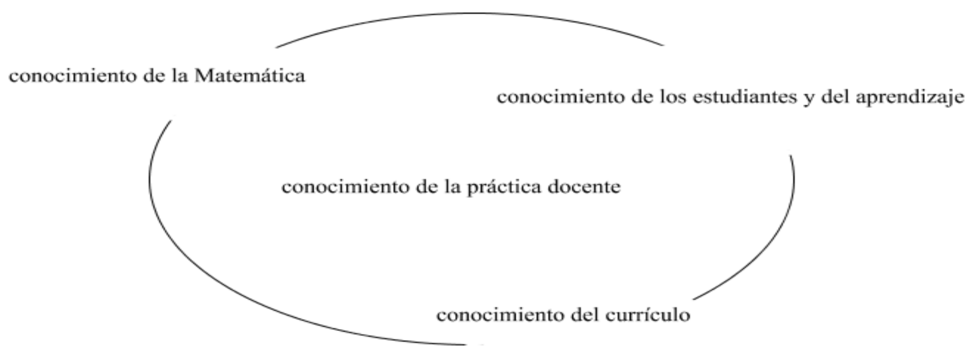

Figura 9.- Componentes del conocimiento didáctico (da Ponte, 2012)

La *práctica docente* se define como la actividad llevada a cabo con regularidad por el profesor, al tener en cuenta el contexto escolar y sus intenciones. Esta incluye la planificación de las sesiones de clase y la elaboración de tareas para la enseñanza. Por su parte, el *conocimiento didáctico de las Matemáticas* versa sobre las interpretaciones que hace el profesor de los objetos matemáticos para su enseñanza; incluye los conceptos y procedimientos fundamentales de las Matemáticas, las distintas formas de representar los conceptos, y el conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje. Aquí, se plantea como condición esencial para un buen proceso de enseñanza y aprendizaje, que el profesor reconozca a sus estudiantes como personas con sus propios intereses, gustos, valores y conductas. Por su parte, el *conocimiento del currículo* pregunta por el cómo los docentes gestionan el contenido curricularmente, lo que implica tener conocimiento de: los principales fines y objetivos de la enseñanza de las Matemáticas, la organización de los contenidos, los materiales existentes para la enseñanza y las diversas formas de evaluación.

Los cuatro componentes del modelo de Stacey (*2008*)

El modelo propuesto por Kaye Stacey (2008) enmarca cuatro componentes para caracterizar el CPM en función del quehacer docente. Estos componentes están en términos del conocimiento matemático para la enseñanza y son: conocer las Matemáticas (*knowing mathematics*) de una manera que tiene cualidades especiales para la enseñanza de las mismas; experimentar las Matemáticas en acción (*experiencing mathematics in action*) para la solución de problemas, la realización de investigaciones y la modelación del mundo real; saber acerca de las

Matemáticas (*knowing about mathematics*) lo que incluye a su historia y su evolución actual; y saber cómo se aprenden las Matemáticas (*knowing how to learn mathematics*). A continuación, se hace una síntesis y explicación de cada uno de los componentes.

Conocer las Matemáticas

Este componente se centra en el estudio del contenido matemático, ya que se considera que los profesores deben y necesitan una "buena" comprensión de las Matemáticas para la enseñanza de las mismas, en este sentido, se debe cuestionar acerca de "cuánto" y cuáles temas matemáticos se deben saber y enseñar.

Respecto al interrogante de la "cantidad" de Matemáticas que un profesor debe saber, se aboga por el hecho de que los maestros deben tener una solidez en sus conocimientos y habilidades matemáticas más allá de lo que se exige a nivel de escuela, y deben ser capaces de responder a dónde conduce la matemática escolar. Asimismo, e independiente de la postura filosófica sobre la naturaleza de las Matemáticas que se tenga, los programas escolares y universitarios deben integrar el contenido matemático con la construcción social de las mismas. De esto último y en consideración con el interrogante "cuáles" Matemáticas, se han de considerar los siguientes ejemplos:

- ✓ En la era de las "nuevas Matemáticas" para los programas escolares, orientadas por el formalismo de los Bourbaki, se valoraba un enfoque lógico-matemático, en el cual los escolares estudiaban Teoría de conjuntos y las definiciones de los objetos matemáticos para deducir sus propiedades.

- ✓ Según los planteamientos de Cyprus, Stylianides, Stylianides, & Philippou (2007; citado en Stacey, 2008) todos los profesores de Matemáticas deben dominar las "diversas formas" de la demostración y deben ser capaces de proponer a sus estudiantes experiencias ricas relacionadas con la demostración, a pesar de que en la educación escolar la demostración, justificación y verificación están sub-representadas.

De lo anterior, la acción de solo cursar espacios académicos que promueven el estudio de las Matemáticas *per se*, propende a reevaluar la formación del profesorado con el fin de que los futuros profesores aprendan Matemáticas que les aumenten su eficacia y eficiencia en el aula dentro del campo laboral. Se recomienda hacer hincapié en: la naturaleza subyacente al conocimiento; una profunda comprensión del contenido, tal que este organizado para la enseñanza; y el conocimiento de las raíces históricas, culturales y científicas de las ideas y técnicas de las Matemáticas.

Por otra parte, al considerar los cambios recientes en las áreas de aplicación de las Matemáticas que causaron una ampliación de las Matemáticas escolares para incluir Estadística, matemática discreta y la utilización de las nuevas tecnologías, se puede concluir que los futuros profesores necesitan saber más Matemáticas que antes, de alguna manera diferentes de las Matemáticas “clásicas” y deben experimentar posibles vías de aprendizaje de las mismas. Esto implica considerar si el conocimiento matemático requerido por los futuros profesores debe ser diferente al exigido a los estudiantes que cursan otras profesiones que también se relacionan con las Matemáticas. Cooney y Wiegel (2003; citado en Stacey, 2008) ratifican esto, ya que consideran que los futuros profesores deben estudiar de manera explícita la matemática escolar y reflexionar sobre la misma.

Luego, más que discutir sobre qué de las Matemáticas debe saber un profesor es cómo los futuros profesores hacen conexiones entre las Matemáticas avanzadas y las matemáticas escolares que han de enseñar. Dentro del contenido matemático se debe destacar el pensamiento matemático, la comprensión conceptual y la matemática aplicada. Esto implica tener experiencia en el proceso de hacer Matemáticas (razonar matemáticamente, comunicar y resolver situaciones-problemas), y la funcionalidad de las Matemáticas (entender y apreciar el papel de las Matemáticas y sus aplicaciones en el mundo real).

Según Cooney y Wiegel (2003; citado en Stacey, 2008) existe una amplia literatura que muestra que las actitudes de los docentes hacia las Matemáticas y sus creencias sobre las Matemáticas influyen en su método de enseñanza. Está claro que toda la educación en Matemáticas, en la escuela, y dentro de la formación del profesorado, contribuye a las actitudes y creencias que los profesores adoptan y, por tanto, condicionan a los estudiantes a quienes se les imparten las clases. También es importante notar que los maestros se moverán más allá de sus propias preferencias en función de los intereses de los estudiantes. Tales creencias de los profesores sobre las Matemáticas pueden ser mediadas por las creencias de los estudiantes y sus necesidades, especialmente por la experiencia de los estudiantes. Los “buenos” maestros tienen como objetivo dar la mejor educación a cada estudiante como individuo, independientemente de su talento matemático y el enfoque de trabajo de la escuela, y esto puede llegar a la anulación consciente de las preferencias personales del profesor.

Adicional a lo que los maestros deberían saber, está establecido que para que este conocimiento del contenido sea eficaz para la enseñanza, se requiere de ciertas características. Por ejemplo, Shulman (1986; citado en Stacey, 2008) alude a aspectos como la cantidad y organización del conocimiento, la comprensión de las estructuras matemáticas y la capacidad de explicar por qué una proposición es considerada como verdadera; por ello vale la pena conocer cómo se relaciona tal proposición con otras proposiciones, dentro y fuera de la disciplina. Otra característica está sustentada por Chinnappan y Lawson (2005; citado en Stacey, 2008) quienes señalan la conectividad entre el conocimiento del contenido disciplinar de los profesores y el conocimiento del contenido de la enseñanza.

Hacer Matemáticas

Aquí se explica lo esencial que es para los profesores de Matemáticas haber experimentado hacer Matemáticas a través de las investigaciones abiertas que modelan al mundo real. El argumento más influyente fue presentado por Polya (1962; citado en Stacey, 2008) en sus libros sobre cómo resolver problemas matemáticos y su exposición de la heurística en la resolución de problemas. El docente debe saber resolver problemas que requieren cierto grado de independencia, juicio, originalidad, y creatividad, ya que este debe desarrollar conocimientos en sus alumnos (capacidad de razonar) y estimular el pensamiento creativo. En este sentido, el docente, no solo debe saber qué tipo de problemas plantear, con qué fin, y sus posibles procesos de solución, sino que además debe reflexionar sobre el uso en el aula de este tipo de problemas.

En adición a lo anterior, Cooney y Wiegel (2003; citado en Stacey, 2008) plantean principios o recomendaciones para las Matemáticas de los futuros docentes, a saber: las Matemáticas (como un campo de estudio y como una herramienta para la resolución de problemas) no solo se deben estudiar, sino que además se debe reflexionar sobre la Matemática escolar; las Matemáticas se deben experimentar en formas que apoyen el desarrollo de estilos de enseñanza orientados a procesos; la modelación matemática utiliza a las Matemáticas para responder a preguntas sobre el mundo real. Esto último, se puede entender como un conjunto de cuatro pasos: la formulación de un problema matemático del problema del mundo real, resolver el problema matemático (por medio de las técnicas desarrolladas dentro de las propias Matemáticas), la interpretación de la solución matemática en términos del problema del mundo real y la evaluación de la solución para ver si esta solución es adecuada para el problema original en el mundo real.

Conocer “sobre” las Matemáticas

Más allá del conocimiento de las Matemáticas y la experiencia de hacer Matemáticas, los profesores necesitan saber “acerca” de las Matemáticas. Esta es un área en la preparación de los docentes que se ve –fácilmente– como un requisito diferente a la preparación para otras profesiones. Los maestros que saben de Matemáticas, de su historia tanto en Oriente como en Occidente, de sus formas de trabajo, de sus principales eventos, pueden animar su enseñanza y ayudar a los estudiantes a entender cómo funcionan las Matemáticas, de dónde vienen y su papel en la sociedad. Algunos conocimientos acerca de las Matemáticas se dan mientras se aprenden Matemáticas, pero otros, como la Historia, la Epistemología o la FM pueden ser estudiados por separado de las Matemáticas.

De esto último, existe un interés de larga data en los cursos sobre Historia de las Matemáticas, en los que uno de sus objetivos es ayudar a los profesores de Matemáticas a obtener ideas sobre cómo la Historia de las Matemáticas se puede integrar en la enseñanza y cómo puede ayudar a los estudiantes a aprender Matemáticas; asimismo, se plantea el interés sobre cómo la

FM se puede integrar en la enseñanza y pueden ayudar a los estudiantes a aprender Matemáticas.

Según Stacey (2008), parece razonable que los futuros profesores deben ser capaces de proporcionar buenas respuestas a preguntas, tales como: ¿qué es un objeto matemático?, ¿cuál es la naturaleza de la verdad matemática?, ¿las Matemáticas se han creado o descubierto?, y ¿por qué las Matemáticas modelan el mundo real con tal exactitud? Sin embargo, no hay respuestas simples aquí; estas son preguntas difíciles en la interfaz de la Filosofía, la Lógica y las Matemáticas, que requieren un estudio serio. Además, son preguntas que –usualmente– los problemas matemáticos no trabajan y que por lo general, no se ofrecen en la educación en Matemáticas de los futuros docentes.

Al respecto de tales preguntas, Davis y Hersh (1981; citado en Stacey, 2008) observaron que la mayoría de los matemáticos actúan como si fueran platónicos, actúan sobre una visión ingenua de que los objetos matemáticos tienen un estado sin complicaciones; a su vez, esos matemáticos se pliegan a una visión formalista, en la que las Matemáticas son vistas como un "juego jugado" de acuerdo a ciertas reglas y en las que no es necesario especificar ningún significado. En contraste con la preocupación de sustentar las bases matemáticas a partir de las herramientas que ofrece la Lógica y las Matemáticas, muchos educadores matemáticos están interesados en destacar a las Matemáticas como una actividad humana y verle desde una perspectiva social. Por ejemplo, en su extenso artículo sobre las Matemáticas para la formación del profesorado, Cooney y Wiegel (2003; citado en Stacey, 2008) promueven la idea de que una vista falibilista de las Matemáticas es la más productiva para guiar cursos para los futuros profesores. En su opinión, las creencias prevalentes de maestros en relación a que las Matemáticas son abstractas, rígidas e inmutables, y que no se basan en la experiencia humana, han surgido a partir de su formación matemática. Ellos consideran que estas creencias representan un gran obstáculo para la reforma de las Matemáticas en las escuelas, por lo que deben ser contrarrestadas por la visión social falibilista.

¿Cómo se aprenden las Matemáticas?

Los cursos de Matemáticas en la universidad deben ser diseñados para preparar a los futuros profesores para el aprendizaje permanente de las Matemáticas, en lugar de enseñarles todo lo que necesitan saber para poder enseñar Matemáticas. Es, por tanto, importante para los profesores ser un estudiante independiente de las Matemáticas, tanto para dominar nuevas habilidades y técnicas necesarias para hacer frente a nuevos temas en el programa de estudios como, para estar al tanto de los conceptos detrás de los nuevos desarrollos. Así, las nuevas exigencias están enmarcadas en las nuevas ideas matemáticas, las aplicaciones y las tecnologías para hacer Matemáticas.

MARCO DE REFERENCIA: CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Desde la mitad del siglo XX a la actualidad han habido cambios trascendentales en lo que se considera el conocimiento de un profesor de Matemáticas, proponiéndose una mirada que integra el conocimiento disciplinar y el didáctico. Asimismo, al pensar en respuestas a interrogantes en relación con el quehacer docente, y particularmente, a cuáles campos disciplinares (de estudio) justifican dichas respuestas; surge el reconocimiento de la DM, la FM, las Matemáticas, y la Historia de las Matemáticas como posibles participes en el CPM (ver, Figura 10). Así, surgen diversos modelos de conocimiento cuyo objetivo es dar respuesta a la pregunta: ¿cuál conocimiento debe tener un profesor de Matemáticas?

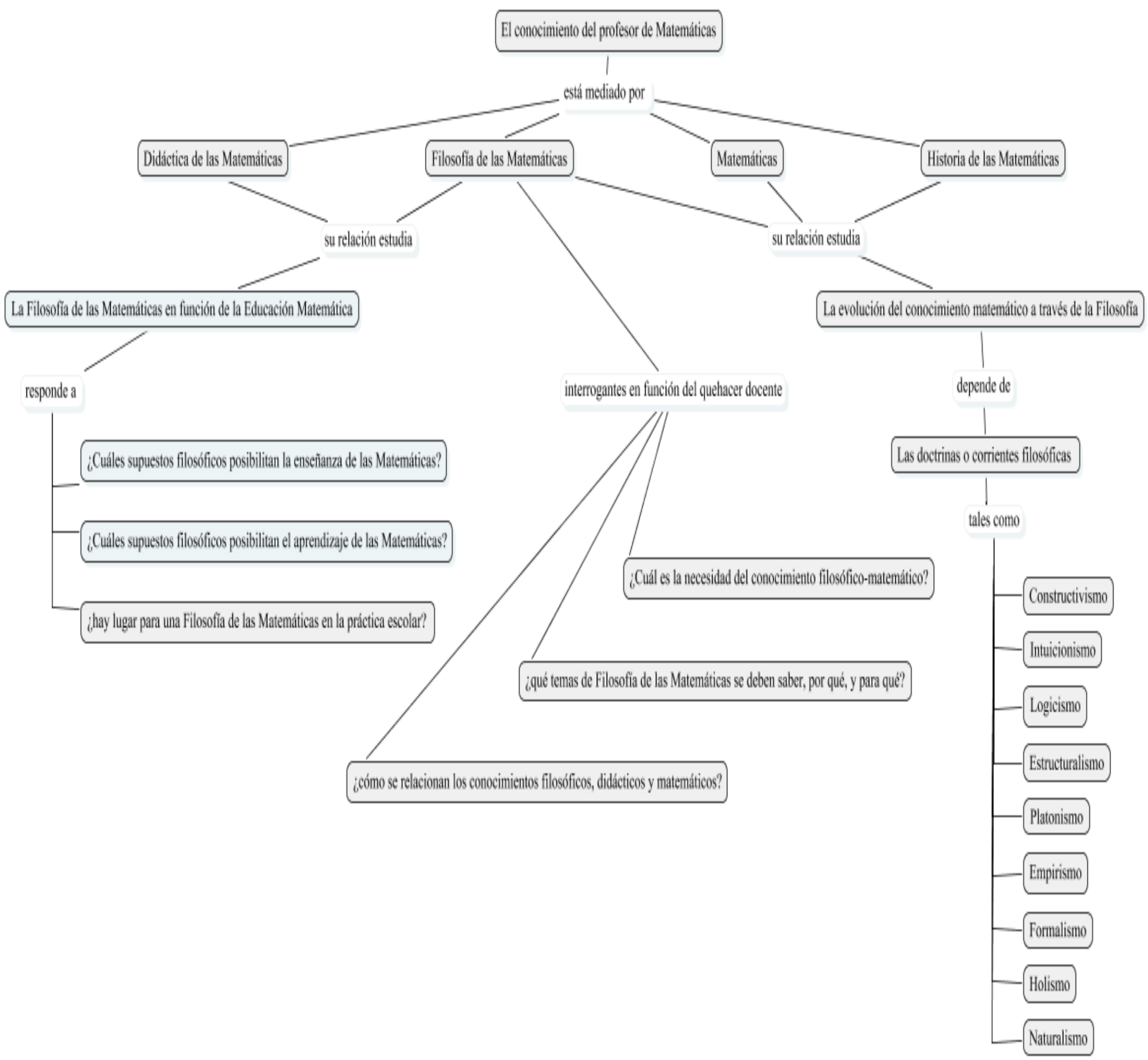

Figura 10.- Marco conceptual del CPM

Por lo anterior, se reconoce que los modelos propuestos por Fennema y Franke (1992); Hill, Ball y Schilling (2008) y da Ponte (2012), incurren en el reconocimiento del saber disciplinar (o de contenido), didáctico (o pedagógico, según la perspectiva), y en relación con el cómo aprenden (cognición matemática) los estudiantes Matemáticas. Asimismo, es de notar que el primer modelo además, toma en consideración el contexto en el aula y las "creencias" del profesor; y el último modelo versa sobre el currículo. Por su parte, se divisa el hecho de que el modelo propuesto por Rowland, Hucksep y Thwaites (2005) toma como derrotero las formas en que el conocimiento del profesor influye en el aula, en vez del tipo de conocimiento *per se*.

De otro modo, es de resaltar que ninguno de los modelos mencionados anteriormente, versas de forma explícita sobre la FM, a diferencia del propuesto por Stacey. Es por esto, y en consideración con las preguntas de investigación, que se va a tomar como modelo de CPM al planteado por Stacey, puesto que este hace mención de la importancia del estudio de la FM por parte del profesor de Matemáticas y no desconoce la relevancia de lo mencionado por los otros autores. Es de notar, que otra motivación que conlleva a la selección de dicho modelo, es que dentro del campo del CPM, es el único que atiende a los dos focos de estudio de esta investigación, lo que se puede entender como un camino "poco" explorado; lo que lo hace más fructífero a razón de la naturaleza de la presente disertación.

Queda de relieve que el conocimiento de los profesores de Matemáticas incluye una diversidad de aspectos, de los cuales, en este estudio interesan aquellos que planteen la necesidad de estudiar FM o de tener una postura filosófica respecto a las Matemáticas, su conocimiento o su actividad. Por ello, a continuación se mencionan los planteamientos genéricos del tercer componente (Conocer "sobre las Matemáticas") que destacan la inclusión de la FM en el quehacer docente.

Modelo de Stacey: Conocer "sobre" las Matemáticas

Existe un interés en los cursos propuestos a futuros profesores de Matemáticas sobre Historia de las Matemáticas; en dar respuesta a cómo la Historia de las Matemáticas se puede integrar en la enseñanza, con el fin de que los estudiantes aprendan Matemáticas; asimismo, este componente del modelo de Stacey plantea el interés sobre cómo la FM se puede integrar en la enseñanza y puede ayudar a los estudiantes a aprender Matemáticas.

Más allá del conocimiento de las Matemáticas y la experiencia de hacer las Matemáticas, los profesores necesitan saber "sobre" las Matemáticas. Luego, esta es un área en la preparación de los docentes que se ve como un requisito diferente e importante en comparación con la preparación para otras profesiones. Algunos conocimientos "sobre" las Matemáticas se dan mientras se aprenden Matemáticas, pero otros, como la Historia o la FM pueden ser estudiados por separado de las Matemáticas, aunque no se desconoce que también pueden ser estudiados en conjunto.

Parece razonable que los profesores de Matemáticas deben ser capaces de proporcionar –buenas– respuestas a preguntas como: ¿qué es un objeto matemático?, ¿cuál es la naturaleza de la verdad matemática?, ¿las Matemáticas se han creado o descubierto? y ¿por qué las Matemáticas modelan el mundo real con tal exactitud?, lo cual solo es posible con el estudio de la FM, sumado a que son preguntas que raramente los matemáticos trabajan; se ve un contraste entre la necesidad de dar bases matemáticas al destacar las herramientas de la Lógica y las Matemáticas, y muchos educadores matemáticos que están interesados en destacar a las Matemáticas como una actividad humana y verle desde una perspectiva social.

En conclusión y a razón de lo anterior, el tercer componente del modelo de Stacey aboga por el hecho de que los profesores Matemáticas deben estudiar FM con el fin de poder reflexionar sobre la existencia, naturaleza, finalidad y validez de las Matemáticas en pro de su práctica docente.

CAPÍTULO IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el segundo y tercer capítulo se llevó a cabo la operación de resumir y se presentaron los planteamientos de algunos autores en relación con la FM y el CPM, respectivamente. A su vez, se hizo una síntesis del resultado de la operación de resumir, la cual presenta unos esquemas de términos y las ideas generales de algunas palabras clave en alusión a los focos de estudio. Luego, queda por hacer el proceso analítico con el fin de dar respuesta a las preguntas de investigación y de cumplir los objetivos y el alcance investigativo propuestos para la investigación.

En relación con las preguntas de investigación y objetivos del presente estudio, es de notar, que la revisión de la literatura presentada en los dos capítulos anteriores argumenta y muestra una panorámica sobre lo qué son y lo qué estudian cada uno de los campos (focos) de estudio. A su vez, el marco de referencia del tercer capítulo expone la inclusión, o no, de la FM en el CPM, a partir del modelo de conocimiento propuesto por Stacey (2008), el cual le da relevancia a dicho campo de estudio en pro de la formación de los profesores de Matemáticas.

Por lo anterior, se ha organizado este capítulo con la intención de dar respuesta a la última pregunta secundaria (¿Cuáles planteamientos de la FM son o deben ser parte del CPM, por qué?) y de cumplir el último objetivo específico (Describir posibles intervenciones de la FM como parte del CPM en pro del quehacer docente) en pro de la pregunta central y el objetivo general; lo que resulta ser lo faltante, de momento, en la presente investigación. El proceso analítico se da al relacionar a la FM con algunos focos, que están o deben estar inmersos en el conocimiento teórico y práctico del docente, de los cuales algunos son reconocidos en el modelo propuesto por Stacey (2008) y otros son incluidos como resultado de la investigación.

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Puesto que el estudio del modelo del conocimiento del profesor propuesto por Stacey (2008) permite vislumbrar el lugar que tiene la FM en el CPM y esto último influye en el que hacer docente, lo que a su vez es estudiado por la DM, en los siguientes párrafos se versa sobre el lugar que tiene la FM en la DM; para ello, en primer lugar se definirá lo que se entiende por DM, y posteriormente se muestran los temas que relacionan a la FM con la DM.

¿Qué es la Didáctica de las Matemáticas?

La DM es una disciplina científica cuyo objeto de estudio es el funcionamiento de los sistemas didácticos específicos que articulan el rol del profesor, del estudiante, y del saber matemático. Además, es un sistema social que debe recrear una interacción constante entre la acción práctica y reflexiva propia del docente, debe ir a la vanguardia con la evolución tecnológica de la sociedad, y la investigación científica que le da la connotación de ciencia. A su vez, la DM debe adaptar e incluir en su marco de referencia las disciplinas interesadas en los métodos de enseñanza de las Matemáticas y los procesos de aprendizaje de las Matemáticas, tales como: las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas, la FM, la Psicología, la Sociología, y la Antropología. Es de notar, que estas disciplinas dan respuesta a problemáticas propias de los componentes particulares de los sistemas didácticos, los cuales son: la clase de matemáticas; la formación de los profesores; el desarrollo del currículo; la formación de cultura ciudadana; la instrucción al individuo, para ser integrado a la sociedad como un agente productivo; el desarrollo de habilidades, competencias y creatividad en los estudiantes; el contexto educativo; y la cultura social.

Godino (2009) plantea que los componentes de la DM, entendida como sistema social son disyuntos, en términos de sus objetivos, funcionalidad y agentes. Así, la acción práctica y reflexiva está a cargo del profesor, el cual tiene como objetivo ser un mediador en pro del aprendizaje de los alumnos, y cuyo cumplimiento depende de sus métodos de enseñanza. Por su parte, la tecnología didáctica contribuye en la construcción del currículo; en la creación de materiales didácticos para el fomento del desarrollo cognitivo, social y formativo de los estudiantes; entre otros. Y como último componente, la investigación científica se encarga de la teorización de la DM, lo cual fundamenta la denominación de *ciencia* para la DM.

Aunque la investigación en DM es un asunto reciente, se destaca su posicionamiento consolidado en la comunidad. Tal posicionamiento se ve reflejado en: los eventos y revistas a nivel nacional e internacional en pro de la divulgación de los resultados en DM; la aceptación de trabajos en DM por parte de editoriales reconocidas en el ámbito académico; la existencia de una jerga o una terminología para el campo de estudio; la existencia de sociedades profesionales cuyo objeto de estudio es el funcionamiento de los sistemas didácticos, quienes a su vez, hacen una organización y explicación teórica de los agentes, recursos, disciplinas de referencia y contextos de acción que están inmersos en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Ahora, con la intención de dar soporte a la caracterización de la DM como disciplina científica, se sintetiza a continuación una reconstrucción histórica “pues la práctica científica consiste en procesos determinados de producción de conocimientos, y estos procesos de producción se van materializando a lo largo del tiempo, con lo que la sucesión de procesos vendría a ser la historia de cada disciplina científica” (Sotos, 1993). Así, a través de la historia de la investigación en DM, es innegable que se han constituido varias definiciones referentes al campo de las prácticas educativas. A partir de aquellas, se determinan los objetivos de estudio, la construcción de herramientas y teorías, y las metodologías de investigación en pro del mejoramiento y funcionamiento de las prácticas educativas. En este sentido, la evolución de la DM, depende de las ampliaciones de la *problemática didáctica*, lo cual lleva a cambios en el *objeto primario* de investigación. Así, en la antigüedad se consideraba a la enseñanza de las Matemáticas como un *arte*, por lo cual, los procesos de aprendizaje solo dependían del maestro, puesto que este era quien dominaba tal arte. En concordancia con esto, un primer cambio, fue dejar de concebir a esta disciplina como arte y pasar a entenderla como un *proceso psico-cognitivo,* al ser la *psicología educativa* el fundamento científico.

Luego, a principios de los años 70, se dio cabida a la *didáctica fundamental*, la cual concebía al *conocimiento matemático* como objeto primario de investigación. Esta ampliación se dio, dado que a partir de la visión clásica no fue posible dar respuesta a interrogantes referentes a la actividad matemática, además se vio la necesidad de convertir los objetos *paradidácticos* en objetos *didácticos*. Esto último, propició el origen de la *epistemología experimental* propuesta por Brousseau, en la que se toma como objeto primario de estudio a la *actividad matemática escolar*, de lo cual se desprende que el "enseñar matemáticas" y "aprender matemáticas" son objetos secundarios definidos en el modelo epistemológico-didáctico. Como consecuencia, surge la teoría de la transposición didáctica, propuesta por Chevallard, (1985) en la cual se plantea que no es "posible interpretar adecuadamente la *matemática escolar* ni la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático" (Gascón, 1998). En este punto, se define a la DM como "ciencia de las condiciones específicas de la difusión (impuesta) de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas" (Brousseau, 1994; citado en Gascón, 1998).

La generalización de la idea de "institución escolar" a cualquier institución que imparta conocimientos matemáticos resulta ser la última de las ampliaciones de la problemática didáctica. Así pues, desde el enfoque antropológico se hace necesario incluir la noción de *obra matemática*, lo que conlleva considerar las dimensiones de *institucionalización* y *evaluación*. Por su parte, al estudiar la influencia de la Psicología en la DM, es de notar, que a partir de los años 60, se dio una evolución en los planteamientos educativos, propició algunas tendencias didácticas influidas por corrientes psicológicas (conductista, estructuralista y formativa) cuyo objetivo era determinar la "mejor" manera de enseñar las Matemáticas. Así, con el conductismo se pretendía mejorar el aprendizaje de los alumnos y las habilidades matemáticas de los ciudadanos, de lo cual se consideró al aprendizaje como resultado de un funcionamiento cognitivo a partir de conexiones de estímulo/respuesta. Por otra parte, en el enfoque estructuralista la combinación de actividad-descubrimiento y el desarrollo del *curriculum* en espiral se convierten en recursos metodológicos. A diferencia del conductismo que promueve *aprendizajes mecánicos*, el estructuralismo incluye "una aproximación más conceptual y comprensiva de las Matemáticas, bajo el supuesto de la competencia cognitiva del alumno" (Armendáriz et al., 1993). Y la aproximación formativa aboga por el proceso constructivo del conocimiento, por lo cual, determina que el papel de la educación escolar consiste en garantizar el desarrollo de habilidades cognitivas a través de experiencias educativas.

Parte del interés de los estudios investigativos se relaciona con *los problemas de la práctica*, entendido como el "conjunto de preocupaciones para los predicamentos de la enseñanza a cargo de profesores y el aprendizaje de temas matemáticos por parte de los estudiantes" (Valero, 2012). Por lo anterior, no se puede plantear una disyunción entre las prácticas sociales de enseñanza y aprendizaje, y las prácticas sociales de investigación. De aquí, surge la necesidad de construir los *sistemas de razón,* los cuales determinan *marcos reguladores* para pensar y concebir prácticas educativas significativas.

Es de recordar que una parte de la investigación en DM está centrada en el currículo, las prácticas en el aula de matemáticas, los procesos de aprendizaje, y las prácticas sociales que integran el conocimiento matemático y la acción de los partícipes de un contexto académico. Es por ello, que la DM acepta la intervención de varias disciplinas emergentes, con el fin de adoptar una *re-contextualización* teórica que permita explicar, analizar, diseñar y organizar estrategias de enseñanza ligadas al contenido curricular. A su vez, es preciso determinar la *producción de conocimiento* que permite la aceptación de nuevos planteamientos en torno al contexto educativo. Por lo cual, a finales de la década de 1980, el *giro hacia lo social* tuvo como propósito, según Lerman (2000), construir teorías que ven el significado, el pensamiento y el razonamiento como productos de la actividad social. Las cuales han de explicar la cognición individual y la diferencia, e incorporar el cuerpo sustancial de investigación en la cognición matemática como productos de la actividad social.

En el marco del giro social, la teoría del conocimiento situado lleva a plantear significados, para la DM, de conceptos como: conocimiento, aprendizaje, subjetividad en las prácticas, transferencia e identidad, ya que estos permiten interpretar experiencias particulares, más allá de las construcciones mentales. Por otra parte, se hace una diferenciación entre matemáticas escolares y Matemáticas. Así, la teoría de la cognición situada involucra al aprendizaje con las prácticas de las matemáticas escolares, cuyos *agentes de aprendizaje* son el profesor, los estudiantes y el conocimiento disciplinar. A través del giro hacia lo social, Valero (2012) reconoce que el pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas hacen parte de estructuras sociales, culturales, económicas y políticas. Para finalizar, se debe mencionar que el mecanismo de aprendizaje que adopta Lave (1988), proporciona los siguientes elementos: la prioridad de la intersubjetividad (de lo social a lo individual); la internalización (construcción del *plano de conciencia*); la mediación (a través de recursos); y la zona de desarrollo próximo (el entorno y la colaboración entre pares).

La Didáctica de las Matemáticas vista a través de la Filosofía de las Matemáticas

En términos generales, la educación incluye diversos dominios de conocimiento: la Psicología, la Sociología, la Antropología, la Historia y la Filosofía; los cuales si se trasponen al campo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, resultan ser garantes y participes del marco de referencia de la DM. A su vez, al incluir el discurso de la FM en la DM, surge la pregunta: ¿cómo se justifica y cómo se desarrolla el conocimiento matemático en la enseñanza de las Matemáticas?; la respuesta varía según la perspectiva filosófica –del docente–. A modo de ejemplo, para los constructivistas radicales, el maestro no enseña Matemáticas, sino que ofrece la posibilidad a los estudiantes de construir conocimiento matemático.

Para el caso de la educación en el ámbito socio-cultural, es de notar, que también algunas posturas filosóficas respaldan dicha concepción de las Matemáticas, en la cual consideran al individuo como un ente situado en una cultura e inmerso en situaciones sociales, luego no tiene sentido hablar de conocimiento "puro", puesto que este se da a través de un contexto o actividad socio-cultural. En esta perspectiva el conocimiento es el conocimiento cultural, socialmente producido y potencialmente modificable según el contexto en el que se esté inmerso; lo anterior conlleva a destacar la distinción entre el conocimiento espontáneo y el conocimiento teórico. Si se tuviese una postura interaccionista, la educación sería un proceso comunicativo que consiste en el crecimiento de los contextos compartidos; luego el objetivo es establecer formas compartidas de entender y saber. Ahora, si se relacionará el constructivismo con el interaccionismo, el individuo construye sus propios significados, pero dicha construcción se basa en las interpretaciones producidas por las interacciones dentro de la cultura del aula.

Es de notar que las posturas filosóficas tienen una influencia significativa en la DM, en campos tales como: el desarrollo de *curriculum*, las metodologías de enseñanza, el trabajo teórico y la investigación empírica sobre los procesos de aprendizaje matemático –de forma local o global de contenido–. A modo de ejemplo, puesto que no hay una FM universal, es de notar que para desarrollar criterios evaluativos es preciso evaluar las filosofías matemáticas en función de los objetivos y propósitos a plantear. Esto presenta posibles dualidades, tales como: sujeto y objeto, *a priori* y *a posteriori*, racionalismo y empirismo, estructura y proceso, mente y cuerpo, determinismo o libre albedrío, habilidad y comprensión, construcción de estructura y resolución de situaciones-problema, axiomática y constructivismo, matemáticas puras y matemática aplicada. Esto no implica que sean opuestos, solo que en algunos casos no son comparables o en otros, se interrelacionan; depende de la perspectiva filosófica o didáctica.

Se debe mencionar que la selección de la perspectiva filosófica debe ir en sintonía con la perspectiva didáctica, así, se debe considerar que la Filosofía debe respetar el condicionamiento del conocimiento matemático, los tipos de representación, las relaciones entre lo objetivo y subjetivo del conocimiento matemático, la interdisciplinariedad. Así, la FM es un ingrediente para la DM en pro de la reflexión, el aprendizaje, y el desarrollo meta-cognitivo o de meta-conocimiento.

La formulación de objetivos, la construcción de un *curriculum* de Matemáticas, a modo de ejemplos, requieren de la comprensión de la naturaleza de las Matemáticas, de las matemáticas escolares, y su interrelación, particularmente, las Matemáticas pueden ser vistas como un medio para el análisis de la experiencia, un recurso cultural, o una lengua importante y esencial para la comunicación actual. Al dinamizar la construcción del *curriculum* en términos de la naturaleza y tipo de Matemáticas a estudiar, al menos se pueden divisar tres modelos: las matemáticas puras, la Matemática aplicada, o las matemáticas básicas.

El rol de la Filosofía de las Matemáticas en la Didáctica de las Matemáticas

Se propone que la FM en el campo de la DM puede ser vista como herramienta o como meta. En el primer caso, la FM es vista como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, lo que conlleva al cómo la Filosofía puede ayudar a los estudiantes a darle sentido a sus decisiones (en la actividad matemática) y construcciones (definiciones, teoremas, demostraciones) matemáticas. El segundo caso, muestra qué de la FM se debe aprender; por ejemplo, la epistemología y ontología de los conceptos matemáticos.

Para el caso del uso de la FM como herramienta, a modo de ejemplo se ha de considerar la argumentación y prueba (o demostración) dentro de la actividad matemática. De esto, se reconoce que los estudiantes están en diferentes niveles de comprensión sobre lo que es e implica la demostración matemática; luego si se reconociera la naturaleza de la demostración y de las propiedades matemáticas a demostrar, se cree que se potenciaría una mejor comprensión y desarrollo en este foco de la actividad matemática. Para el caso del uso de la FM como meta, a modo de ejemplo, está la importancia de identificar y caracterizar la utilidad y papel de las Matemáticas en la sociedad y en la propia disciplina. De esto, se resalta el estudio de las Matemáticas puras y aplicadas, lo que depende de la naturaleza que se atribuya a las Matemáticas, y su nivel de eficacia.

Particularmente, dentro de la actividad docente es inherente la elección y estudio de libros de texto de Matemáticas, cada uno de los cuales tiene sus propias cualidades (estructura, intereses, forma de comunicación, entre otras); cada una de estas cualidades depende de la perspectiva que el autor tenga sobre las Matemáticas y los propósitos del texto. Así, el docente debe ser capaz de identificar estas diferencias desde su fundamento, con la intención de decir con convicción si realmente determinado libro será útil y para qué, en pro de sus propósitos de clase y del aprendizaje que quiere lograr en sus estudiantes; esto último tiene muchas vertientes, sea procedimental, analítico, critico, de resolución, etc. Lo que a su vez, enriquece continuamente la formación del docente, puesto que este ha de discutir y reevaluar lo que se lee, reformula o reafirma en relación con sus conocimientos ya construidos.

Se ha de mencionar que una “aclaración” epistemológica de las Matemáticas unida a una reflexión crítica de los conocimientos matemáticos del profesor en pro de las prácticas prevalecientes de la enseñanza de las Matemáticas, argumenta la relevancia del conocimiento filosófico como parte del conocimiento profesional del docente de Matemáticas. Como ejemplos de ello, se tiene: al conocimiento matemático (su naturaleza, justificación y génesis); los objetos matemáticos (su naturaleza y origen); la actividad matemática en la práctica profesional.

De otra forma, se puede considerar que el rol de la FM en relación con la práctica matemática se puede destacar en tres "planos": Matemáticas, sociedad e individuo. En el plano de las Matemáticas se afirma que el profesor y los estudiantes deben ser capaces de reflexionar sobre la naturaleza de los objetos y conocimiento matemático. En el plano de la sociedad se destaca que el profesor debe reconocer el papel social, cultural y político de las Matemáticas en la educación. En el plano del individuo se entrevé el hecho de que el estudio filosófico-matemático permite al individuo aprender a aprender e incluso ser un "mejor matemático", esto último, no porque aprenden más Matemáticas, sino porque son capaces de obtener un dominio más amplio de su contenido y reconocen sus implicaciones sociales a pesar de que, en algunos casos, no los condicione a cambios. Otro rasgo de la FM en el individuo dentro de un contexto histórico-cultural, es el hecho de que da la oportunidad de explorar la creatividad –entendida bajo la concepción de Boden (1994)– involucrada en la transformación que conlleva a cambios en la cognición y la cultura.

En el campo de la DM se reconoce al conocimiento filosófico de las Matemáticas como objeto de estudio. Esto, se sustenta a partir de: el modelo tetraédrico de Higginson (Godino, 2003), el cual considera a la Filosofía como una disciplina fundamental para la enseñanza de las Matemáticas y el aprendizaje de las Matemáticas; la unidad conceptual propuesta por Ruiz (1987), la cual plantea la relación entre el uso de la Historia, la Enseñanza y la FM; el modelo de Steiner (Godino, 1991), el cual incluye a la FM como una *ciencia referencial* para la DM. De otro modo, Jankvist e Iversen (2014) ejemplifican algunas razones del uso de la FM en la DM, además hacen un acercamiento al cómo puede ser estudiada la FM.

Particularmente, la perspectiva filosófica de Higginson, plantea al menos cuatro conjuntos de problemas y cuestiones filosóficas.

1. La FM: ¿Qué son las Matemáticas?, ¿cuál es la naturaleza o génesis de las Matemáticas?, ¿qué FM se han desarrollado?, ¿qué autores han hablado de la FM?

2. La naturaleza del aprendizaje: ¿Cuáles hipótesis filosóficas –posiblemente implícitas–, potencian el aprendizaje de las Matemáticas?, ¿son estas suposiciones válidas?, ¿cuáles conceptos epistémicos las fundamentan?

3. Los objetivos de la educación: ¿Cuáles son los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas?, ¿son estos objetivos válidos?, ¿para quién están planteados?, ¿en cuáles valores se fundamentan?

4. La naturaleza de la enseñanza: ¿Qué supuestos filosóficos –posiblemente implícitos–, potencializan la enseñanza de las matemáticas?, ¿son estas suposiciones válidas?, ¿qué medios se adoptaron para alcanzar los objetivos de enseñanza de las Matemáticas?, ¿son los fines y los medios consistentes entre sí?, ¿cuál es la mejor manera de enseñar?

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Una forma de ver al conocimiento es a partir de lo *a priori* y *a posteriori*; otra es a partir de lo exógeno (mundo centrado y empirista) y lo endógeno (mente centrada y racionalista), los cuales van en contraposición con el constructivismo social, puesto que este tiene como inicio o foco al lenguaje; el comportamiento argumentativo tiene como objetivo mostrar a la prueba como un mecanismo para establecer la verdad de un enunciado. A su vez, los objetos a estudiar son los mecanismos que intervienen en los procesos de constitución del conocimiento, luego se tienen al menos dos perspectivas para la identificación y estudio de tales mecanismos: la perspectiva *sincrónica* (que es un análisis lógico-matemático que se utiliza para definir la importancia epistemológica) y la perspectiva *diacrónica* (que plantea la génesis del pensamiento matemático).

Filosofía de las Matemáticas y génesis en Matemáticas

Es de notar que la génesis del conocimiento está en relación directa con la Historia de dicho conocimiento, el cual, en su mayoría, surge de la necesidad y relevancia para la evolución de la humanidad; luego, el conocer dicho origen garantiza tener respuestas al por qué fue importante dicho conocimiento, por lo menos desde su desarrollo histórico. La afirmación de que las Matemáticas deben basarse en el razonamiento hipotético-deductivo en lugar de la evidencia empírica, es resultado de la transformación de las Matemáticas como una búsqueda teórica; esto plantea la necesidad de conocer qué impulsó dicha transformación y cuáles repercusiones le atañen a la educación, lo cual es resuelto, en su momento histórico, por cada una de las posturas filosóficas sobre qué son las Matemáticas y cómo deben ser tratadas y estudiadas.

Dentro del estudio de las Matemáticas, se debe preguntar qué son las Matemáticas; la respuesta depende de la apreciación que se le den a las mismas; así, por ejemplo, si se pretendiera responder dicha pregunta en términos de cuáles sub-campos la componen, una opción es mencionar a la Aritmética, la Geometría, la Estadística, entre otras tantas; u otra forma es decir si es pura o aplicada. Estas clasificaciones distintivas implican una connotación diferente del campo de estudio. En la última se reconoce explícitamente su lugar en función de la sociedad, en la primera no necesariamente; lo importante es que quien responda de una u otra forma reconozca la unidad a la que se le da prioridad.

En relación con la última clasificación se reconocen dos posturas sobre la esencia de las Matemáticas. La primera las reconoce como ciencia “pura”, lo que implica que no es solamente una herramienta a favor de las otras ciencias, sino que aboga por las cualidades abstractas; de esto se sigue que el objetivo de aprendizaje en la enseñanza de las mismas se relaciona con la formación “mental” del estudiante, es decir, que las Matemáticas son una actividad cultural y como tal, debe ser presentada en pro de preservar los hallazgos de la humanidad. La otra postura es en términos de lo “utilitario”, es decir las Matemáticas se debe entender en tanto respuesta a problemas prácticos de la humanidad, luego el objetivo de aprendizaje busca la formación de individuos que puedan emplear las Matemáticas en campos como la Ingeniería o la Ciencia, o al menos en la solución de problemas (no estrictamente matemáticos). Aquí la FM entrevé la importancia de las dos vertientes y plantea el interrogante de cómo articular esas dos posturas; así el profesor debe reconocer al menos estas dos miradas de las Matemáticas en la educación y, decidir y diseñar en pro de algún posible camino de estudio.

Una cuestión constante en el estudio de las Matemáticas es la relación que tienen con las demás ciencias; luego es importante reconocer qué de las Matemáticas hace *feedback* en las demás ciencias y cómo estas se diferencian de las Matemáticas. De esta reflexión se reconoce la “matematización” de las ciencias y se debe reconocer en qué momentos de la actividad de enseñanza se recae en la acción de matematizar a las mismas Matemáticas; luego, se debe ser consiente sobre qué es lo que se enseña: Matemáticas en su versión naturalista y fundamental-teórica o matemáticas escolares como una matematización de las Matemáticas.

Al comparar las ciencias con las Matemáticas, es de notar que los paradigmas matemático y científico son similares. El primero, parte de que las verdades matemáticas se obtienen por deducción con ayuda de una conciencia lógica en términos de las condiciones suficientes y necesarias; por su parte, el segundo también plantea que sus verdades, las científicas, son obtenidas por la deducción, solo que le exigen su demostrabilidad en lo empírico. Nótese que esta inclusión, limita a las ciencias en comparación con las Matemáticas, puesto que la realidad es “finita” en su grado de exactitud a diferencia de las Matemáticas que reconocen al “infinito” para su exactitud.

Algunos autores consideran que al estudiar Matemáticas, debe ser indispensable e indiscutible conocer qué son las Matemáticas, por ello, Aghadiuno (1992) plantea un acercamiento a este interrogante en términos de algunas concepciones a través de la Historia y cómo estas pueden ser condensadas en dos puntos de vista de índole filosófico (la no aplicabilidad o aplicabilidad de las Matemáticas). En este sentido, el primero, define a las Matemáticas como una ciencia pura, lo cual aboga por las “cualidades abstractas”, es decir, es una actividad cultural en pro de una “gimnasia mental” que se fundamenta en las estructuras algebraicas, la lógica conjuntista, la generalización topológica y categórica. La segunda perspectiva, se enfoca en el fin utilitario, en el cual las Matemáticas son creadas para apoyar la resolución de problemas prácticos, sean estos de índole colectivo o de la misma ciencia. Es de notar, que cada una de estas posturas son “verdades parciales”, es por ello, que el autor responde al interrogante ¿qué son las Matemáticas? como el híbrido entre las Matemáticas puras y la Matemática aplicada, ya que las Matemáticas deben ser una herramienta para otras ciencias, pero que esto no conlleve a la pérdida de su naturaleza abstracta.

Por su parte, Sfard (1991) versa sobre la “doble naturaleza” de los conceptos matemáticos, de lo cual es de notar que los tipos de representaciones en la educación tienden a ser presentadas como parte del concepto. Ella relaciona la naturaleza con la comprensión, la cual puede ser operativa o estructural. La primera devela la capacidad de concebir el concepto como un operador dinámico, un proceso con entrada y salida; la segunda devela la capacidad de pensar en el concepto como un objeto matemático. Así, para pasar de la comprensión operativa a la estructural se divisan tres fases de aprendizaje: interiorización (procesos conectados con el concepto), condensación (el proceso como unidad), cosificación (objeto independiente). Es de notar, que a partir del nivel en que el estudiante este, la concepción y naturaleza comprensiva que se tenga de un conocimiento matemático particular es diferente. Particularmente, es de notar que se generan conflictos en la enseñanza de las Matemáticas en el momento en que los profesores introducen un concepto matemático como una generalización de lo concreto, neutralizándolo de la distinción entre las explicaciones y la naturaleza teórica; esto fue demostrado por Steinbring (1991), quien lo explica a partir de un análisis epistemológico de las Matemáticas y de las relaciones entre lo subjetivo y las dimensiones sociales del conocimiento.

Filosofía de las Matemáticas y actividad matemática

Al “dinamizar” las Matemáticas se han de tener ciertas consecuencias educativas, particularmente los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas han de incluir “el empoderamiento de los estudiantes a crear su propio conocimiento matemático”. Así, las Matemáticas pueden ser reformadas –al menos en la escuela– para generar un mayor acercamiento y comprensión de los conceptos; los contextos sociales y las prácticas matemáticas ya no pueden desconocer los valores implícitos de la educación. Así, las Matemáticas toman significado social, deben ser estudiadas en contextos significativos y relevantes para los estudiantes, sin descartar el lenguaje, las culturas, y las experiencias escolares. Por lo anterior, las Matemáticas proporcionan una razón de ser *per se*, se convierten en responsables de sus usos y consecuencias; en la educación y la sociedad.

El caso de la demostración constituye un ejemplo de actividad matemática donde hay posibilidad y necesidad de una reflexión epistémica en la propia actividad de enseñanza. Aquí es importante que el docente reconozca la importancia y las posibles vías que tiene la acción de demostrar, debe hacer una distinción clara entre lo que es justificar, argumentar, y demostrar; ello, con el fin de que la demostración como actividad matemática no se convierta solo en el empleo de algunas reglas lógicas y procedimientos impuestos que carecen de criterio sobre el campo problemático en el que se esté. Lo anterior, solo puede ser posible si el profesor aboga por la enseñanza de unas Matemáticas falibilistas, que permiten reconocer a las Matemáticas como una actividad de conocer, obtener o crear conocimiento, inmersas en las tendencias y valores del ser humano; son parte de la cultura humana.

De esto último y a modo de ejemplo, en su artículo sobre las Matemáticas para la formación del profesorado, Cooney y Wiegel (2003) promueven la idea de que una vista falibilista de las Matemáticas es la más productiva para guiar cursos para los futuros profesores. En su opinión, las creencias de maestros en términos de que las Matemáticas son abstractas, rígidas, inmutables y no se basan en la experiencia humana han surgido a partir de su formación matemática. Ellos proponen que estas creencias representan un gran obstáculo para la reforma de las matemáticas en las escuelas, por lo que deben ser contrarrestadas por la visión social falibilista.

Dialogismo en Matemáticas

Uno de los problemas que tienen los profesores de Matemáticas en el aula, es cómo hacer que los estudiantes lean y escriban "correctamente" en Matemáticas, lo que resulta ser importante en la práctica matemática; por ello, Barbin (2008) expone el concepto de *dialogismo* en Matemáticas entendido *grosso modo* como la reflexión, estudio minucioso o necesidad de argumentar "todo" en Matemáticas. Para el caso particular de la demostración en Matemáticas surge una reflexión filosófica en términos del "dialogismo" en Matemáticas; este resalta la importancia de la conectividad entre las proposiciones dadas y las proposiciones previamente justificadas, puesto que dicho conjunto determina el campo y cuerpo de estudio.

De esto, se entrevé la importancia de fomentar en los estudiantes una escritura clara, secuencial, y lógica en pro de la comunicación de sus aprendizajes y de su proceso lector e interpretativista del campo de estudio. Si el estudiante comprende el significado de lo que está en el discurso de enseñanza y aprendizaje, el uso e interrelación con otros significados será más comprensible y "fácil" de alcanzar. De esto, surge la importancia del lenguaje lógico-matemático, y la insuficiencia y dificultades que trae el lenguaje convencional para el estudio, desarrollo y construcción del conocimiento matemático. Por lo anterior, surge como actividad matemática el reconocer los esquemas de razonamiento discursivo en las demostraciones matemáticas, y el mostrar y enseñar a los estudiantes cómo se ligan los conocimientos aprendidos y cómo ello potencia la comprensión de significado de lo que se estudia mediante la interrelación de aprendizajes.

Visto el dialogismo de otro modo, se infiere que el docente debe reconocer el “tipo” de estudiantes que tiene con el fin de adecuar y conocer el “nivel” de lenguaje matemático que debe emplear; luego es importante enriquecer el léxico matemático de los estudiantes sin que esto se convierta en un obstáculo didáctico de aprendizaje. Asimismo, reconocer cuál campo de estudio se aborda y domina, permite tener claridad de las posibles “herramientas” para el avance del mismo estudio; es decir, un objeto matemático puede ser visto desde diferentes teorías y cada una de estas le da una connotación diferente; por ejemplo, el número 2, decir que es natural, o entero, o racional, o real, le quita o le da características propias según cada conjunto numérico. Este tipo de estudio diferenciado, permitiría que el estudiante reconozca las intersecciones y disyunciones dentro de las mismas Matemáticas.

FILOSOFÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

En principio se debe destacar la diferencia entre la FM clásica y la FM contemporánea en relación con la DM. La primera solo se enfoca en los fundamentos de las Matemáticas, la ontología de los objetos matemáticos y el estado de la verdad en Matemáticas; la segunda también se preocupa por los fundamentos, pero incluye la necesidad de hacer su análisis en las prácticas matemáticas, muestra la relación entre las Matemáticas y los seres humanos, y la necesidad de hace reflexiones socio-filosóficas sobre el papel de las Matemáticas en la sociedad. De esto, se produce un cambio frente a la perspectiva sobre qué son las Matemáticas; en el primer caso son un cuerpo de conocimiento bien fundamentado y en el segundo, es una actividad humana y fenómeno social que forma parte de la cultura humana y que solo es inteligible según el contexto social.

La articulación entre “la diversidad de las Matemáticas, su carácter empírico y sus determinantes epistemológicos. Se trata, en realidad, de una unidad conceptual. A través de estos tres elementos es posible definir el bosquejo de una nueva visión filosófica sobre las Matemáticas. Hacer esta descripción teorética nos va a permitir comprender mejor (de una manera más concreta) la relación […] entre el uso de la Historia, la Enseñanza y la FM” (Ruiz, 1987). En este sentido, el aspecto histórico juega un papel importante, puesto que los enfoques filosóficos respecto a la instauración del currículo dependen de lo que se pretenda atender en el marco de lo que se debe enseñar y cómo se debe enseñar. Es por ello, que se puede analizar el vínculo de la FM con la formación académica a partir de varias miras: la dificultad de construcción de las reflexiones filosóficas respecto a la disciplina de estudio, la no transversalidad de la FM en el conocimiento matemático, la FM solo para dar respuesta al por qué y para qué de las Matemáticas, la FM influenciada por el contexto histórico.

Particularmente, los aspectos históricos y filosóficos pueden actuar como medios para dar a los estudiantes: una visión más amplia de las Matemáticas; factores de motivación; y herramientas de aprendizaje para la comprensión de conceptos, teorías y métodos matemáticos. Con la integración de la Historia y la Filosofía, las cuestiones políticas, éticas y sociológicas se pueden plantear en la enseñanza de las Matemáticas. Es preciso destacar la distinción entre Filosofía e Historia de las Matemáticas, puesto que, aunque la primera necesita de la segunda no implica que haya alguna “contenencia” conceptual; la Historia de las Matemáticas se ocupa de lo particular y temporal, mientras que la FM se ocupa de lo universal y atemporal.

El estudio de la Historia de las Matemáticas implica la búsqueda de explicaciones de los procesos históricos de cambio en la percepción sobre las Matemáticas, su estado y función en la sociedad; asimismo en la comprensión de las ideas y objetos matemáticos que se consideran como argumentos legítimos para las proposiciones matemáticas. Así, el estudio de los procesos en el desarrollo de las prácticas matemáticas implica dar respuesta al por qué se introducen definiciones específicas, por qué se estudian ciertos problemas y en la forma en que fueron abordados.

Así, una forma de estudiar dichos procesos es abordar episodios concretos de actividad matemática con el fin de descubrir y entender la dinámica de la producción de conocimiento matemático. Aquí, el marco de objetos epistémicos entra a jugar un papel clave, puesto que se refieren a los objetos matemáticos sobre los cuales el “nuevo” conocimiento es “buscado”; esto resulta ser una herramienta bastante útil para el análisis de la producción de conocimiento y la comprensión de las entidades matemáticas en textos históricos.

Ahora, al particularizar la atención en la FM dentro de las prácticas matemáticas se destaca que la FM plantea diferentes preguntas, las cuales surgen como consecuencia de los cambios en la actividad matemática. De esto, se dice que la Filosofía plantea preguntas fundamentales sobre el mundo y el lugar que ocupa el ser humano en él; particularmente la ontología y epistemología de las Matemáticas plantea preguntas, tales como: ¿qué son los objetos matemáticos?, ¿cómo se obtiene conocimiento sobre las Matemáticas?, ¿cuál es la necesidad de las verdades matemáticas para la sociedad?, ¿por qué y cómo son aplicables las Matemáticas? Para dar respuesta a dichos interrogantes se tiene como normas a la suposición razonable, los argumentos válidos, teoría coherente y el valor de la teoría práctica; lo que se traduce en la existencia de una comunidad de estudiantes y profesores con la necesidad de aprender y enseñar el conocimiento creado por el ser humano a lo largo de la Historia, lo que adiciona la necesidad de comunicación, que a su vez, muestra el interés por la naturaleza de los objetos matemáticos y el desarrollo de las Matemáticas. Luego las prácticas pertinentes para dicho estudio son los diferentes y posibles contextos en los que se desarrolla Matemáticas.

Así, al plantear la necesidad de una interdisciplinariedad entre la DM, la Historia de las Matemáticas y la FM se da la necesidad de que los futuros profesores de Matemáticas desarrollen competencias interdisciplinares, en vez de pensar en un catálogo de temas, conceptos y resultados. Dentro de las competencias se distingue la capacidad de hacer y responder preguntas en relación con el pensamiento, la modelización y el razonamiento, así como la habilidad con el lenguaje matemático, el simbolismo y las técnicas. Además, el profesor debe tener competencias en relación con las aplicaciones de las Matemáticas en otras áreas, el desarrollo histórico de las Matemáticas en la cultura y la sociedad, y la naturaleza de las Matemáticas como disciplina de estudio.

Por su parte, Brown (1991) plantea que a través de la Historia, la Filosofía y el "papel contemporáneo" de las Matemáticas, pretende que los estudiantes conciban a las Matemáticas como una disciplina conceptual que no carece de estética y valor. Asimismo, cree que ayuda a entender la noción y necesidad del simbolismo matemático, las limitaciones y contribuciones de las Matemáticas como herramienta en la resolución de problemas fuera del contexto escolar. En este sentido, plantea que la valoración debe ser en términos de la participación y aprecio por las Matemáticas, en vez del "rigor" en la comprensión de las Matemáticas. Después de esto, define a la FM como el trabajo filosófico que todo matemático debe hacer en su posición de investigador, es decir, incluye a la FM en la práctica matemática y en la actividad de "hacer matemáticas". Concluye que es necesario ver a las Matemáticas como una ciencia humanística con el fin de ligar a la Historia y FM con la DM.

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA ACCIÓN DOCENTE

La reflexión sobre la enseñanza de las Matemáticas es antigua en la medida en que la enseñanza de las Matemáticas es antigua. Así, siempre que haya una necesidad por la búsqueda de la historia y la reflexión epistémica de la enseñanza de las Matemáticas esta será fructífera *per se*. La intención es responder cómo la reflexión de orden epistemológico da herramientas para un mejor ejercicio de la práctica docente y a su vez, cómo participa en dicha práctica.

Para el caso propio de la formación docente, es indiscutible que la reflexión epistemológica, entendida como la reflexión sobre el discurso (saber) influye en la reflexión pedagógica, por ello es indispensable reconocer y cuestionar la relación entre la construcción del saber y la adquisición del saber, lo cual resulta ser una constante durante la formación docente y durante el quehacer docente como actividad en pro del aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes. De esto, una situación constante en la labor docente es el planteamiento de estrategias, las cuales pueden ser diseñadas a partir del fundamento o de la construcción del conocimiento; luego, depende de la postura filosófica del profesor identificar cuál es el camino a utilizar en su actividad de enseñanza y por qué.

Particularmente, Bkouche (1997) aboga por el papel que puede jugar la reflexión epistemológica del profesor en la actividad docente; para ello, hace una distinción entre la reflexión epistemológica (de un pensamiento), y la epistemología (discurso constituido). Así, la primera se sitúa en la actividad de enseñanza, en la cual se plantea el problema de la relación entre construcción del saber y adquisición del saber, y cómo tal reflexión debe ser justificada desde la epistemología. Por su parte, la epistemología hace una distinción entre una “estrategia de fundamento” y una “estrategia de empeño” en la construcción del conocimiento, para ello plantea tres aspectos: la epistemología de los fundamentos (condiciones de legitimación de la actividad científica), la epistemología del funcionamiento (análisis de los procedimientos), y la epistemología de las problemáticas (causa-efecto-solución).

Luego, la actividad de enseñanza depende de la postura que el profesor tenga sobre: qué es la actividad matemática, puede ser de forma lógico-matemática o de forma experimental; cuál es la naturaleza del conocimiento y de los objetos matemáticos, puede ser metafísica apoyada desde la ontología de los objetos entendidos como abstracciones del mundo sensible o de forma analítica que plantea a los objetos como parte de un sistema definido y apoyado del análisis lingüístico y del mundo cognoscible; qué es lo más importante en la práctica matemática, una opción es el análisis de procedimientos sobre los fundamentos de significado o viceversa, el plano técnico o el plano conceptual.

Como caso particular, es de notar que el uso que se le da a los libros de texto depende de la perspectiva y concepción filosófica que el profesor (intención filosófica) tenga sobre la enseñanza de las Matemáticas. Así, en principio, se pueden identificar diversas formas de uso: instrumental, el docente lo usa al “pie de la letra”, el aprendizaje ocurre debido a la secuencia de tareas presentada; subjetivo, el docente primero lo analiza de forma constructiva y luego profundiza en él a partir de sus creencias; fundamental, se analiza de forma constructiva según el plan de estudios y se profundiza con un enfoque teórico-filosófico.

Por su parte y en relación con la dualidad conocimiento vs. experiencia, Elbaz (1983) considera que un profesor debe saber sobre qué trata su campo de estudio y cómo está organizado (teoría), y a su vez debe reconocer cómo se ha dado la construcción social de dicho campo a través de la experiencia; así no solo articula su propia experiencia y saber sino, además la de los demás participes de la “creación” de dicho conocimiento de la humanidad.

Ahora, como supuesto sobre la naturaleza, fin y eficacia de la enseñanza de las Matemáticas se tiene que la acción de los educadores matemáticos se relaciona con la adquisición de conocimientos matemáticos; el educador matemático debe potenciar a partir del intelecto y las emociones la experiencia matemática en pro del aprendizaje de los estudiantes. A su vez, el docente debe comprender al individuo (no hay homogeneidad en las capacidades de los estudiantes), lo que conlleva a preguntarse sobre el funcionamiento psicológico del individuo en el contexto del aprendizaje de las Matemáticas y la actividad matemática, lo que a su vez difiere en relación con la estructura socio-cultural de cada individuo.

Lo anterior, en principio, muestra un núcleo conformado por las Matemáticas, la Psicología y la Sociología, y este conjunto intelectual se basa en un conjunto de interrogantes filosóficos (verdad, certeza y consistencia lógica), tales como: la naturaleza del conocimiento, el ser, lo bueno, la belleza, el propósito, los valores; epistemología, ontología, ética, estética, teleología, axiología, respectivamente.

Es importante analizar la naturaleza del objetivo que se propone en la situación de enseñanza. Así, si los estudiantes lo interpretan como "hacer" en vez de "saber" su trabajo en la actividad matemática no será del mismo nivel en comparación con el otro caso. La epistemología en la enseñanza de las Matemáticas es la reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, en los procesos y condiciones para su desarrollo en la actividad matemática. Ahora, ante la dicotomía de lo teórico y lo práctico, epistemológicamente son diferentes respecto a los objetos de estudio, orientación, objetivos y tareas. La segunda estudia la relación sujeto-objeto, y la primera la relación conocimiento del estudiante y conocimiento del docente. En relación con dicha dicotomía, Sierpinska y Lerman (1996) exponen que algunos educadores matemáticos se interesan más por explicar los procesos de crecimiento del conocimiento matemático, es decir sus mecanismos, las condiciones y contextos de los descubrimientos pasados, las causas de los períodos de estancamiento y afirmaciones que desde un punto de vista de la teoría actual fueron erróneos, en vez de estudiar los fundamentos de validez de las teorías matemáticas.

Es indiscutible considerar que el profesor es un elemento crucial en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así, los diferentes componentes del conocimiento del profesor merecen de atención, particularmente la naturaleza de dicho conocimiento. Se debe establecer la relación entre el conocimiento cognitivo del profesor y el de los estudiantes, lo que se relaciona con las creencias epistemológicas del profesor sobre la enseñanza de las Matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes. Es de notar, que tales creencias juegan un papel fundamental en las decisiones instrucciones del profesor. Así, las posturas filosóficas que el docente conozca o acepte influyen en la forma en que evalúa el proceso de enseñanza y aprendizaje que se da en las aulas de clase; tales corrientes están vinculadas con el campo de estudio en relación con el momento socio-temporal en el que se plantean y analizan. A modo de ejemplo, se destaca la influencia estructuralista de las Matemáticas que influyó en los diseños curriculares debida a las concepciones planteadas en términos de las matemáticas escolares; después, las corrientes, en su momento de apogeo, generaron esquemas teóricos que influyeron a la enseñanza de las Matemáticas; estos esquemas demarcaban la naturaleza y rol de cada uno de los partícipes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Por su parte, el profesor debe ser un profesional reflexivo, por lo que debe estar en constante observación analítica de lo que ocurre en el aula y proveer de insumos para la comunidad de estudio. Así, los "profesionales-expertos" utilizan tales situaciones par reconocer patrones o esquemas de la actividad matemática llevada a cabo en el aula de clase para potenciar las herramientas de los docentes para hacer más efectivos los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Otro aspecto a considerar es el conocimiento práctico vs. el conocimiento teórico del profesor, así la experticia del docente no está en términos de cuánto tiempo ha enseñado o cuánto ha aprendido, sino se vislumbra debido al cómo relaciona sus conocimientos teóricos para dar una mejor práctica y cómo su práctica enriquece la reflexión y reconstrucción de los conceptos teóricos estudiados. Luego, en el conocimiento cognitivo del profesor debe estar, al menos, el reconocimiento de características entorno al aprendizaje de las Matemáticas, lo que conlleva a reconocer la necesidad de saber cuál es la naturaleza de dicho aprendizaje, a modo de ejemplo. Lo anterior se reduce al análisis de las posibles relaciones entre las epistemologías del profesor y de los estudiantes.

En resumen, es el tipo de concepción epistemológica sobre las Matemáticas que influya al profesor la que permite vislumbrar y caracterizar el tipo de ambiente que genera y considera propicio para el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Es imperativo que las creencias epistemológicas del docente sobre las Matemáticas y los procesos de aprendizaje de los estudiantes estén en correspondencia y que no se dé la necesidad de priorizar en una de ellas, lo que podría producir una obstrucción en el proceso e interrelación conocimiento-profesor-estudiantes.

El conocimiento filosófico de un educador matemático

En términos generales, al pensar en qué de la FM específicamente un profesor de Matemáticas debe saber y en relación a lo anteriormente mencionado se tiene en cuenta que desde una perspectiva descriptiva y social, debe ser lo siguiente: conocimiento matemático (naturaleza, justificación, génesis); objetos matemáticos (naturaleza y orígenes); aplicabilidad matemática (eficacia en la ciencia y en la tecnología), práctica matemática (actividad matemática a través de la Historia).

Ahora, al cuestionar qué de la FM debe incluirse en la formación de los profesores de Matemáticas surgen interrogantes en términos del contenido, método e incorporación, lo siguiente: ¿qué temas de FM se deben enseñar a los futuros profesores?, ¿cuáles métodos son los más apropiados para enseñar a los maestros? y ¿qué relaciones deben establecerse entre la Filosofía de la Matemáticas, las Matemáticas y la DM? Para esto, Chassapis (2007) considera que la FM unifica la epistemología del conocimiento matemático con la reflexión crítica sobre el conocimiento matemático, lo cual todo profesor de Matemáticas debe considerar en su práctica. En este sentido, ejemplifica la integración de algunos temas de la FM en un curso de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas de la escuela primaria que se ofrece a los docentes como parte de un programa de formación en Grecia.

A su vez, es preciso hacer una distinción entre el hecho de que el maestro no puede interferir directamente en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sino que este ofrece entornos de aprendizaje para los estudiantes, por ello, el profesor debe observar y diagnosticar las actividades y los logros de los estudiantes, con el fin de variar el aprendizaje. Esto, implica una transición incondicional entre el proceso de aprendizaje de los estudiantes y el proceso de enseñanza "dirigido" por el docente; asimismo, esto plantea una distinción entre el "estatuto epistemológico" de los profesores respecto al del estudiante. El caso particular, del conocimiento epistemológico del docente, a este le permite o desarrolla la capacidad de evaluar las limitaciones epistemológicas del conocimiento matemático en diferentes entornos sociales de enseñanza, aprendizaje y comunicación matemática.

Se considera que un estudio inicial en pro del conocimiento epistemológico, debe estar en relación con: la naturaleza del desarrollo del conocimiento matemático, los procesos sociales e interactivos de comunicación matemática como sistemas autónomos, la interdependencia de las limitaciones sociales y epistemológicas de la comunicación matemática, la generalización y el cambio de los contextos de los conceptos matemáticos, la interpretación cambiante de los contextos de representación para las Matemáticas, el significado de los símbolos, las relaciones entre dominios matemáticos, y el análisis de episodios de enseñanza.

Finalmente, la importancia de la FM en el CPM tiene dos fundamentos; uno de carácter cultural y otro profesional. El primero, relaciona la "imagen" del profesor socialmente con su acción de realizar transposición didáctica del "saber" al "saber enseñar", sin descuidar el papel del lenguaje matemático y la comunicación matemática. El segundo carácter, destaca los obstáculos epistemológicos, los cuales merecen un amplio conocimiento teórico y práctico por parte del docente.

En relación con el factor cultural, se muestra la necesidad de "rigor", lo que a su vez resulta ser una necesidad lingüística y filosófica más que matemática. Es de notar, que la idea de rigor en Matemáticas coexiste en relación con el momento histórico y la perspectiva racional de dicho momento. Asimismo, las Matemáticas se asocian con la creación de conceptos, los cuales, a su vez, dependen de la delimitación epistemológica que se les asigne. Así, el pensar sobre el desarrollo de las Matemáticas, debe considerar la naturaleza de los conceptos u objetos matemáticos y cómo esta ha evolucionado. De otro modo y como factores transversales, se encuentra al lenguaje matemático, el aprendizaje en Matemáticas, y las relaciones entre lo semiótico y lo noético (lo que se comunica y lo que se piensa). Para el caso particular de aprender Matemáticas, la concepción del profesor respecto a lo que se debe aprender de las Matemáticas influye, puesto que es esta el mayor mediador en los procesos de aprendizaje a razón de sus mecanismos de enseñanza, los cuales a su vez están mediados por lo que el docente considera en relación con qué son las Matemáticas; así, las prácticas de enseñanza difieren si se piensa en unas Matemáticas desde la postura realista, constructivista, platónica (por dar algunos ejemplos); o si se consideran falibles o no; o si se acepta su inclusión en el constructo social o no.

En relación con el factor profesional y a modo de ejemplo, si se toma como referente la teoría de obstáculos de Brousseau (1986) o D´Amore (1999), estos plantean tres tipologías de obstáculos: ontogenéticos, didácticos, epistemológicos; estos, a su vez se relacionan con los focos del triángulo didáctico (alumno, maestro, saber) propuesto por Chevallard (1985), respectivamente. De esto, aunque el profesor tiene como foco lo didáctico, es de notar que un reconocimiento de lo ontogenético y especialmente lo epistemológico en relación con los errores de los estudiantes, podría establecer el origen de los obstáculos epistemológicos propios del conocimiento que influyen en el aprendizaje de los estudiantes y con esta identificación diseñar estrategias que eviten dichos obstáculos.

Un caso particular del factor profesional es la evaluación; esta puede ser vista como proceso o como fin. Así es de notar que el pensar a las Matemáticas como falibles o no, está en directa relación con cuál tipo de evaluación se evalúa –valga la redundancia–. Asimismo, una evaluación más integral, muestra al profesor la necesidad de evaluar su práctica constantemente en función del contexto en que está inmerso y de los contextos particulares de los estudiantes, además juzgará la pertinencia de los objetivos y técnicas que propone en su actividad de enseñanza en función del aprendizaje.

Por otra parte, Sánchez (2011) identifica las principales tendencias de investigación en el campo de la formación de profesores, mediante la diferenciación de: a) investigaciones actuales en el área de interés de los investigadores en formación de profesores, b) conceptos teóricos empleados, y c) las nuevas tendencias. Destaca que estudiar la práctica de los profesores es dominante en la línea de formación del profesorado, busca caracterizar las acciones que realizan en el aula, y comprender los factores de formación y promoción de su desarrollo. El autor considera que las investigaciones en esta área ponen de relieve la importancia de estudiar el conocimiento de los profesores, distinguiéndose dos tipos de estudios: aquellos que se centran en contribuir al dominio de conocimiento que los profesores necesitan para la enseñanza, y otros que buscan la manera de ayudar a los docentes a adquirir ese conocimiento.

Es de notar que el profesor de Matemáticas tiene un conocimiento que se distingue del conocimiento académico de los matemáticos (en su naturaleza teórica, declarativa o formal), y también del común de las personas. Este conocimiento está orientado para una actividad práctica (para la enseñanza de las Matemáticas a un grupo de alumnos), sobre la base de los conocimientos teóricos (sobre la Matemáticas, la educación en general y la enseñanza de las Matemáticas) y también considera la naturaleza social y vivencial (en los estudiantes, la dinámica del aula, los valores y cultura de la comunidad, la participación de la comunidad escolar). En efecto, el conocimiento del profesor se considera como resultado de la experiencia práctica acumulada en la realización de tareas docentes específicas, que se construyen desde su formación inicial y durante toda su carrera y labor docente. Las creencias son consideradas como verdades personales con elementos evaluativos y afectivos, mientras que las concepciones se refieren a esquemas que organizan los conceptos, formándose como resultado y confrontación de la elaboración de nuestras propias experiencias, lo que conlleva a que su naturaleza sea, fundamentalmente, cognitiva. Por tanto, las concepciones estarían implícitas en el pensamiento de las personas y permitirían organizar determinados conceptos, consecuentemente, el conocimiento que comprenden las concepciones, se basa especialmente en la experiencia y reflexión, es fundamentalmente conocimiento en la acción, que conforme se fundamenta y se relaciona tanto con teorías como con experiencia y reflexión sobre la práctica, se convertirá en conocimiento.

Ahora bien, la FM resulta ser una herramienta para la reflexión crítica sobre las creencias y valores del conocimiento matemático que un profesor tiene o debe tener en relación con el contenido y las prácticas de enseñanza y aprendizaje; por ello, la FM resulta ser un componente esencial en el CPM. Como punto de partida, se pueden tener al menos tres argumentos que sustentan dicha importancia.

Un primer argumento afirma la asociación directa de una FM con las características fundamentales de la DM. Así, particularmente, es claro que la concepción que se tenga sobre lo que son las Matemáticas influye en la forma en que se presenten las mismas a los estudiantes, y en los objetivos y propósitos que se planteen para la práctica educativa. De esto, los conceptos matemáticos a abordar, los planes de estudio a proponer, los libros de texto a utilizar, entre otros aspectos, tienen como referente la postura filosófica que se tenga de los mismos en relación con lo que se concibe por el campo de estudio.

Un segundo argumento afirma que las ideas, concepciones y creencias sobre la perspectiva y marco teórico adoptado de los profesores, reflejan su postura filosófica a partir de los significados que acepte y conozca, además que influye en su práctica didáctica; puesto que lo anterior se fundamenta en la naturaleza de las Matemáticas que construye el docente como conocimiento formativo y aplicativo en su quehacer docente, esta construcción mental, incluye implícita o explícitamente la génesis del conocimiento matemático como disciplina o como materia de enseñanza escolar, la naturaleza de los problemas matemáticos (construcción y diseño de tareas), las relaciones entre realidad abstracta y realidad empírica, cuál es la aplicabilidad y utilidad de las Matemáticas, cómo se aprenden las Matemáticas y cómo se enseñan, y la consideración de que se debe aprender y cómo se debe enseñar en el contexto escolar particular de contexto. Además la FM como CPM en este segundo argumento, le permitiría forjar una postura de cuestionamiento sobre lo relacionado con su espacio laboral, el cómo se amplía o deteriora el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, y tendría una mayor autonomía en lo que realiza como “catedra oculta”. Luego la FM en el CPM tiene que formar maestros reflexivos con capacidades para intervenir en la definición y construcción de los propósitos y objetivos de su trabajo.

Un tercer argumento es que la FM asocia la comprensión de las Matemáticas con el conocimiento de lo que ha de enseñar. Así, uno de los componentes –no el único– que garantiza una mejor enseñanza es el conocer Matemáticas, pero no solo su conocimiento de proposiciones y de procedimientos, y la forma en que se organizan, sino además debe tener una comprensión conceptual explicita de los principios y significados subyacentes a los mismos. Lo anterior debe incluir la comprensión sobre la naturaleza del conocimiento matemático, los mecanismos en que se introdujo en la comunidad matemática, así como la concepción de prueba, las reglas de inferencia, y las estructuras matemáticas.

Se supone que para una adecuada comprensión de las Matemáticas las reflexiones filosóficas juegan un papel destacado en el proceso de aprendizaje. Un maestro sin formación filosófica habla de las Matemáticas como un conjunto de problemas matemáticos *per se* y su práctica se fundamenta de las técnicas heurísticas en la resolución de problemas. Un docente con formación filosófica habla de las Matemáticas con un sentido crítico, acerca de las funciones de las aplicaciones en relación con los conceptos matemáticos y su práctica se enmarca en mostrar las diferentes características entre las Matemáticas y las demás ciencias.

Luego, ser un docente crítico e influenciado por “algo” de conocimiento filosófico, es quien refleja en su discurso argumentativo justificación sobre: el conocimiento matemático (el papel de las pruebas); las relaciones entre las Matemáticas puras y aplicada (modelación con sentido); el papel de los problemas y su resolución; el papel de las herramientas de representación (formas de cognición); la relación entre justificación, aplicación y desarrollo; la actividad matemática (lenguaje), el rol de las Matemáticas en la sociedad. Así, quien estudie FM estará más familiarizado con la capacidad de entender los significados, las relaciones, los patrones de pensamiento y matematización, y los obstáculos y dificultades de las Matemáticas.

EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS, PREGUNTAS Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

Con lo expuesto en este capítulo se considera que se han dado los elementos necesarios y suficientes para afirmar que se ha dado cumplimiento al objetivo general de la investigación, puesto que se describió la función que tiene la FM en el CPM. Además, los tres objetivos específicos planteados también fueron cumplidos, en el sentido de que estos constituyen la línea argumentativa en pro del objetivo general y la pregunta central de este estudio. Los capítulos son evidencia ya que: (1) se describió el campo de la FM y del CPM en relación con lo que versa la literatura; (2) se mostró el papel que tiene la FM en cada uno de los modelos estudiados, lo que implica como resultado que solo el modelo de Stacey le da un lugar protagónico; (3) se plantearon diversas intervenciones de la FM en el quehacer docente, al ser incluida en el CPM.

Este estudio, permitió observar y ratificar que las creencias y reflexiones epistemológicas (conocimiento teórico) de los profesores sobre la naturaleza de las Matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las mismas, influyen en el conocimiento práctico y la actuación docente con derroteros tales como: los por qué de sus principios de enseñanza y objetivos de aprendizaje sobre las Matemáticas. Esto se sustenta a partir de las investigaciones centradas en los conocimientos que los profesores necesitan para la enseñanza, las cuales poseen una dualidad dentro de la DM, lo que comprende el conocimiento que un profesor "tiene" y el conocimiento que un docente "debe tener" con el objeto de producir "buenas" enseñanzas; en la actualidad se reconoce que un profesor de Matemáticas debe tener un profundo conocimiento, no solo de las Matemáticas específicas que enseña, sino también requiere de un cuerpo amplio y altamente organizado de conocimiento que le permita desarrollar su tarea docente.

En relación con los alcances investigativos, se presentó una sistematización bibliográfica sobre la FM y el CPM (ver, Apéndice A), se describieron los campos de la FM y del CPM en relación con lo que versa la literatura, se presentó el lugar que tiene la FM en el CPM según lo que dicen los autores seleccionados, y se presentaron varias intervenciones de la FM en el quehacer docente al ser incluida en el CPM. Finalmente, queda por mencionar que el presente estudio pretende (a futuro) llegar a ser un insumo para el "estado de arte" de otras investigaciones; y principalmente ser la base de futuros estudios del investigador en alusión a una posible construcción de currículo de Matemáticas cuyo foco sea la Filosofía de las Matemáticas y el rol del docente en el contexto de prácticas matemáticas; la construcción, desarrollo y análisis de un programa académico sobre Filosofía de las Matemáticas en y para el aula, dentro de un programa de formación universitaria para futuros profesores; entre otros que puedan surgir a lo largo de este camino que es la vida y el sueño utópico de dominar "el todo" sin desconocer su infinitud y complejidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aghadiuno, M. C. K. (1992). Mathematics: History, Philosophy and Applications to Science. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(5), 683–690. doi:10.1080/0020739920230506

Armendáriz, M., Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Revista Infancia y Aprendizaje,* 62–63, 77–99.

Barbin, E. (2008). Dialogism in Mathematical Writing: Historical, Philosophical and Pedagogica, Issues. In *The HPM Satellite Meeting of ICME 11*. Ciudad de México.

Bkouche, R. (1997). Epistémologie, Histoire et Enseignement des Mathématiques. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 34–42.

Boden, M. A. (1994). What is Creativity? In Boden (ed.) *Dimensions of Creativity*. London: MIT.

Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques.* 7 (2), 33-115.

Brown, G. (1991). Integrating the History and Philosophy of Math into Core Curriculum Math Courses from a Cultural and Humanistic Viewpoint. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 13–14.

Chassapis, D. (2007). Integrating the Philosophy of Mathematics in Teacher Training Courses. En K. François, & J. V. Bendegem, *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (págs. 61-79). New York: Springer.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: la Penseé Sauvage.

Colyvan, M. (2011). *An introduction to the Philosophy of Mathematics*. Australia: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139033107.

Cooney, T. J. y Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En, A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 795-828). Dordrech: Kluwer A. P.

D´Amore, B. (1999) Il ruolo essenziale ed insostituibile delle didattiche disciplinari nella costruzione della conoscenza nell´educazione. *Pitagora Notizie.* 4 (2).

da Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. En N. Planas (Ed.), *Teoría, critica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

DeVidi, D., Hallett, M., & Clark, P. (2011). *Logic, Mathematics, Philosophy: Vintage enthusiasms-essays in honour of John L. Bell*. Springer.

Elbaz, F. (1983) *Teacher thinking*. *A study of practical knowledge*. London: Crom Helm.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Great Britain: The Falmer Press.

Fennema, E. & Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York, NY: Macmillan.

François, K., & Bendegem, J. (2007). *Philosophical dimensions in Mathematics Education*. New York: Springer.

Friend, M. (2007). *Introducing Philosophy of Mathematics*.

Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1(52), 7 – 33.

Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. In A. Gutierrez (Ed.) *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105–148). Madrid: Síntesis.

Godino, J. (2003). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica*. Universidad de Granada.

Godino, J. (2009). Presente y Futuro de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Educação Matemática* (19).

Hanna, G., Niels, H., & Pulte, H. (2010). *Explanation and proof in Mathematics. Philosophical and educational perspectives*. New York: Springer.

Hellman, G. (1989). *Mathematics without numbers: Towards a modal-structural interpretation*. Oxford: Clarendon Press.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 1(2), 3-7.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Jankvist, U. T., & Iversen, S. M. (2014). "Whys" and "Hows" of Using Philosophy in Mathematics Education. *Science & Education*, 23(1), 205–222. doi:10.1007/s11191-013-9616-3.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler, *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (págs. 19-44). Westport: Ablex Publishing.

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of mathematical practice*.

Miles, M., & Huberman, M. (1994) *An Expanded Sourcebook Qualitative Data Analysis*. SAGE Publications.

Peirce, C. S. (2010). *Philosophy of Mathematics*. Indiana University Press.

Pinto, M. (1989). Introducción al análisis documental y sus niveles: El análisis de contenido. *Anabad*. XXXIX, 2.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281. doi:10.1007/s10857-005-0853-5.

Ruiz, Á. (1987). Algunas implicaciones de la Filosofía y la Historia de las Matemáticas en su enseñanza. *Revista de Educación*, 11, 7–19.

Ruiz, Á. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas.*

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen and Unwin.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Shapiro, S. (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. En A. Bishop, & M. Clements, *International Handbook of Mathematics Education* (págs. 827-876). Springer.

Sotos, M. (1993). Didáctica de las Matemáticas. *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 173-192.

Stacey, K. (2008). Mathematics for secondary teaching. Four components of discipline knowledge for a changing teacher workforce. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.) *The international handbook of mathematics teacher education. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 87–113). Sense Publishers.

Steinbring, H. (1991), The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics 22,* 503-522.

Steiner (1987) Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*. 7(1). pp. 7-13.

Valero, P. (2012). *La educación matemática como una red de prácticas sociales*. En P. Valero, O. Skovmose (eds). Educación Matemática Crítica. Bogotá: Universidad de los Andes, 299-327.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las Matemáticas contemporáneas.*