# DE LO SUSTANCIAL A LO ANALÍTICO: UN ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS EN LA CLASE DE GEOMETRÍA

MATILDE GÓMEZ CUELLAR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICANACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2016

# DE LO SUSTANCIAL A LO ANALÍTICO: UN ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS EN LA CLASE DE GEOMETRÍA

MATILDE GÓMEZ CUELLAR

Tesis de grado presentada como requisito parcial
para optar al título de
Magíster en Docencia de la Matemática

Asesor: Camilo Sua Flórez
Profesor del Dpto. de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICANACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2016

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

*Educadora de educadores*

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

# ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "***De lo sustancial a lo analítico: un análisis de los argumentos en la clase de geometría***", presentado por la estudiante:

***Matilde Gómez Cuellar - 2013285006 - 52081149***

Como requisito parcial para optar al título de ***Magíster en Docencia de la Matemática***, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado,** con 44 Puntos.

Observaciones:

______________________________________________

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2016.

**JURADOS**

Director del Trabajo: Profesor Camilo Sua Flórez

*CAMILO SUA FLÓREZ*

Jurados:

Profesora Leonor Camargo

*LEONOR CAMARGO ~~URIBE~~ (UPN)*

Profesora

*ANGELA RESTREPO (U. ANDES)*

Nota de aceptación:

Firma del asesor

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, D.C., Enero del 2016.

***A Dios***

*Por haberme permitido iniciar la maestría, terminarla y alcanzar los objetivos que me he propuesto y su amor incondicional.*

***A Laura Juliana León Gómez***

*Mi hija quien me ha apoyado y acompañado durante cada momento del proceso y quien es mi motor.*

## AGRADECIMIENTOS

*A mi esposo Luis Carlo León Hernández, quien siempre me motiva y apoya en la consecución de las metas que me he propuesto.*

*A mi mamá Alba Cuellar y a mi papá Juan Manuel Gómez, quienes siempre han creído en mi y han sido ejemplo de perseverancia y constancia para alcanzar las metas.*

*Al profesor Camilo Sua por su acompañamiento y sus aportes y orientaciones en la realización de este trabajo.*

*A los estudiantes de 702 y 801 del colegio Distrital Hunza (2014), pues sin la colaboración de ellos no había sido posible el desarrollo del presente trabajo.*

*A la profesora Leonor Camargo, por los aporte y orientaciones en la formación durante el desarrollo de la maestría.*

*A la Secretaría de Educación de Bogotá, el apoyo brindado para realizar la maestría.*

*Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mí total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores, he dado los respectivos créditos.*

**RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)**

| **1. Información General** | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de grado de Maestría Profundización |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Título del documento** | De Lo Sustancial A Lo Analítico: Un Análisis De Los Argumentos En La Clase De Geometría |
| **Autor(es)** | Gómez Cuellar, Matilde |
| **Director** | Sua Flórez, Camilo |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 156p. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional |
| **Palabras Claves** | GEOMETRÍA, ARGUMENTOS, ANÁLISIS DE ARGUMENTOS, ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA. |

**2. Descripción**

Este trabajo de grado presenta un estudio realizado con 70 estudiante de grados séptimo y octavo en la IED Hunza durante el año 2014. El mismo se fundamenta en una investigación de diseño, en la cual se diseñó, experimentó y evaluó una intervención de enseñanza. El propósito de este estudio es desarrollar y analizar las prácticas argumentativas que producen estudiantes de educación básica durante la clase de geometría, en el marco de la *Actividad Demostrativa*.

Para el desarrollo del estudio, en primer lugar se determinó el marco teórico en el cual se fundamenta el mismo, involucrando autores como: Toulmin (2007) en relación al análisis y funcionalidad de los argumentos, Camargo, Molina, Perry, & Samper (2014) respecto a la actividad demostrativa y a Krummheuer (1995) sobre la argumentación en el aula como fenómeno social. En segundo lugar, se estableció y adaptó la secuencia a trabajar en el aula, la cual consta de seis tareas; cada una de ellas corresponde a uno de los elementos teóricos que se pretendían desarrollar con los estudiantes.

Posteriormente la secuencia fue aplicada y se consolidaron las categorías que permitieron el análisis de los argumentos construidos por los estudiantes. Finalmente se analizó, de acuerdo a las categorías previamente establecidas, la información obtenida durante la aplicación de la secuencia. Esta información fue acopiada mediante videos de cada una de las sesiones de clase, de los cuales se realizaron transcripciones para facilitar el análisis y proponer así las conclusiones del estudio realizado.

## 3. Fuentes

Para la elaboración de este trabajo se utilizaron 30 fuentes bibliograficas publicadas en revistas académicas, capítulos de libros nacionales e internacionales, artículos que hacen parte de memorias de los Encuentros de Geometría, entre otros. Las referencias se agruparon de acuerdo a los aportes al trabajo de la siguiente manera:

- ❖ Fuentes relacionadas con la demostración matemática: Camargo, L., Molina, O., Perry, P., & Samper, C. (2014), Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006), Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013), Fiallo, L. J. E. (2010), Fischbein, E. (1982), Godino, J., & Recio, A. M. (1997), Godino, J., & Recio, A. M. (2001), Gutiérrez, Á. (2007), Gutiérrez, Á. (2005), Larios, victor O. (2006), Mariotti, M. A. (1997), Mariotti, M. A. (2006), Martin, G. W., & Harel, G. (1989), NCTM. (2003), Recio Martinez, A. (2001), Senk, S. L. (1985).
- ❖ Fuentes relacionadas con los procesos de argumentación en la actividad matemática: Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler, N. (2014), Gamboa, G., Planas, N., & Edo, M. (2010), Krummheuer, G. (1995).
- ❖ Fuentes relacionadas con el análisis de argumentos: Ambrosini, C., & Asti, V. C. (2009), Inglis, Ma., & Mejía, Ra. J. P. (2005), Knipping, C. (2008) y Toulmin, Stephen, E. (2007).
- ❖ Fuentes relacionadas con la importancia del proceso de visualización y el proceso de definir en matemáticas: Gal, H., & Linchevski, L. (2010), Gavilán, J. M., Sanchez, G., & Escudero, I. (2014).
- ❖ Fuentes relacionadas con metodologías de investigación, experimentos de enseñanza y anállisis de información: Gutiérrez, A. (2009), Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011), Planas, N. (2010) y Schoenfeld, a H., & Godino, J. (2000).
- ❖ Fuente relacionada con el diseño de la secuencia: Sua, C. (2013).

## 4. Contenidos

Este documento está constituido por seis capítulos, En el primero se presenta la justificación y delimitación de la problemática a abordar, la pregunta de investigación así como los objetivos que guían el trabajo y el reporte de los antecedentes de investigación revisados para la realización del trabajo. El segundo capítulo corresponde al marco teórico que fundamenta el trabajo, en términos del análisis de argumentos, la práctica demostrativa y la argumentación en el campo de la educación matemática. El tercer capítulo, de metodología, presenta la perspectiva sociocultural y la metodología de experimento de enseñanza en las cuales se enmarca este trabajo, se ubica el contexto de estudio del mismo y se determinan las categorías que guían el análisis de la información obtenida. En el capítulo cuatro se realiza el análisis de la información; acopiada durante la intervención el aula, teniendo en cuenta las categorías enunciadas anteriormente en este se da cuenta de los argumentos desarrollados por los estudiantes en los procesos de definir, conjeturar y justificar, en el trabajo en grupos y en la puesta en común y su tipificación como sustanciales o analíticos. El quinto capítulo sintetiza los resultados del análisis anterior atendiendo a los objetivos del trabajo enunciados en el primer capítulo. Finalmente en el sexto capítulo se presentan las conclusiones y algunos asuntos que vale pena revisar en futuros estudios; estos se han obtenido teniendo en cuenta los resultados en el análisis y los objetivos del estudio.

## 5. Metodología

Esta investigación se ubica en una perspectiva sociocultural al asumir la argumentación como un proceso social. Teniendo en cuenta que para este trabajo se diseñó y desarrolló una secuencia de enseñanza y se realizó una intervención en el aula para favorecer, por un lado los procesos de la demostración y por otro la construcción de argumentos por parte de los estudiantes en torno a la demostración matemática, este estudio se ubica en una investigación aplicada, específicamente en la metodología experimento de enseñanza. Se involucró un grupo de setenta estudiantes de grado séptimo y octavo quienes intervinieron en la secuencia de enseñanza y un investigador docente quien interactuó directamente con ellos y quien acopió la información de cada una de las sesiones, en este caso los argumentos construidos por los estudiantes, los cuales fueron analizados teniendo en cuenta las categorías de análisis formuladas previamente para obtener los resultados de la investigación.

## 6. Conclusiones

Las tareas propuestas a los estudiantes durante la secuencia de enseñanza, en las cuales se involucraron problemas abiertos, favorecieron la construcción de los argumentos por parte de ellos. El objetivo de los problemas propuestos en cada una de las tareas favoreció la construcción de determinado tipo de argumentos. El tipo de tareas donde tenían lugar problemas abiertos permitió a los estudiantes construir definiciones, hechos geométricos y favorecer una justificación para algunos de ellos; en consecuencia, favoreció la construcción de un sistema teórico local para la clase. Las tareas propuestas promovieron procesos de argumentación en los estudiantes durante los dos momentos de la clase: el trabajo grupal y la puesta en común de los resultados obtenidos. Respecto a la primera, cuando ellos tenían que abordar y resolver el problema de manera grupal, el grupo debía llegar a un consenso acerca de la solución del mismo y los motivos por los cuales habían obtenido tal resultado; igualmente, en la puesta en común, cuando las propuestas de un grupo eran presentadas y discutidas por los otros grupos, tenía lugar una discusión alrededor de su validez y de ahí, esta podía ser refutada o complementada. Dependiendo del objetivo de los problemas propuestos, distintos tipos de argumentos tuvieron lugar respecto al *soporte* involucrado, entendido este como la garantía o respaldo presente en el argumento. En los problemas que tenían como objetivo definir un objeto geométrico los estudiantes construyeron argumentos en la mayoría de los casos sin alguna garantía o respaldo, así como argumentos con un *soporte* empírico en los procesos de definir y conjeturar generalmente, mientras los problemas que tenían como objetivo formular una relación de dependencia y proveer la justificación a la misma favorecieron la construcción de argumentos con un respaldo teórico. En el estudio se pudo evidenciar que los estudiantes al abordar cada uno de los problemas de la secuencia siempre construyeron argumentos en dos de los procesos y en algunos casos en los tres.

Los momentos de la clase (trabajo grupal y puesta en común) favorecieron la construcción de argumentos por parte de los estudiantes en cuanto propiciaron un ambiente de interacción social, pero es en el momento de la puesta en común en el que hay mayor construcción de argumentos; esto se debe a que este era el momento en el que más se cuestionaba y se indagaba a los estudiantes frente a los resultados presentados. Como consecuencia de ello, los estudiantes buscaban la manera de validar, formular y corroborar y en algunos casos justificar las conjeturas a partir de la construcción de argumentos.

Teniendo en cuenta el tipo de soporte de los argumentos y el proceso en el que se construye, es posible concluir que en el desarrollo de las tareas propuestas se observar una evolución en los argumentos construidos. Cuando los estudiantes inician las tareas con los problemas relativos a las definiciones, ellos construyen en su mayoría argumentos de tercer nivel en los procesos de definir y conjeturar y en la medida que avanzan aumentan los argumentos de segundo y primer nivel en el proceso de justificar los cuales se desarrollan en las tareas relativas a los hechos geométricos.

En términos generales en la aplicación de la secuencia de enseñanza no es posible hablar de una evolución en la construcción de los argumentos por parte de los estudiantes. En primer lugar el número de tareas formadas por problemas enmarcados en definiciones de objetos geométricos y hechos geométricos de la secuencia, aplicadas en cada uno de los grados no fueron suficientes para concluir esto; en segundo lugar, las tareas que inician con un problema de definición y terminan con problemas de hechos geométricos en relación a determinado objeto geométrico, ocasionan una ruptura respecto a la tarea siguiente pues se inicia nuevamente con problemas de definición y problemas relativos a hechos geométricos respecto a otro objeto geométrico.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Elaborado por:** | Gómez Cuellar, Matilde | | |
| **Revisado por:** | Sua Flórez, Camilo | | |
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 22 | 01 | 2016 |

# Tabla de contenido

**TABLA DE CONTENIDO** ........ **12**

**INTRODUCCIÓN** ........ **1**

**JUSTIFICACIÓN** ........ **2**

JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA ........ 2

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN ........ 5

OBJETIVOS ........ 5

*Objetivo General* ........ *5*

*Objetivos Específicos* ........ *5*

REVISIÓN LITERARIA ........ 5

*La demostración en clase de matemáticas* ........ *6*

*Argumentación y argumentos de los estudiantes* ........ *6*

*Análisis y evaluación de argumentos* ........ *7*

**MARCO TEÓRICO** ........ **8**

ACERCA DE LOS ARGUMENTOS ........ 8

*Esquema de un argumento* ........ *9*

*Argumentos analíticos y sustanciales* ........ *11*

ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA ........ 14

*Conjeturar, justificar y definir* ........ *15*

*Las Tareas* ........ *16*

*Interacciones entre los miembros de la clase* ........ *16*

LA ARGUMENTACIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS ........ 17

**METODOLOGÍA** ........ **19**

PERSPECTIVA INVESTIGATIVA ........ 19

PRESENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA ........ 19

CONTEXTO DEL ESTUDIO ........ 20

FASES DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA ........ 21

*Fase De Planeación* ........ *21*

*Fase de Experimentación* ........ *29*

*Análisis Retrospectivo* ........ *30*

T1. VISUALIZACIÓN ........ 33

TAREA DE DEFINICIÓN DE CLASES DE ÁNGULOS ........ 39

T2. ÁNGULOS PAR LINEAL ..... 40
*T2. P1. (Definición de ángulo par lineal)* ..... *40*
*T2. P2. Hecho geométrico par lineal* ..... *50*
*T2. P3. (Demostración del HG. Par lineal recto)* ..... *54*
T.3. DE CIRCUNFERENCIA ..... 61
*T.3. P.1. (Definición de circunferencia)* ..... *61*
*T3. P2. (Definición de mediatriz de un segmento)* ..... *69*
*T3. P3. Hecho geométrico de Mediatriz* ..... *74*
**ANÁLISIS DE RESULTADOS ..... 82**
LOS ARGUMENTOS Y LAS TAREAS DESARROLLADAS ..... 82
*Grado séptimo* ..... *82*
*Grado octavo* ..... *84*
*Similitudes y diferencias séptimo y octavo* ..... *86*
ARGUMENTOS ANALÍTICOS Y SUSTANCIALES ..... 87
*Grado Séptimo* ..... *87*
*Grado octavo* ..... *90*
*Similitudes y diferencias séptimo y octavo* ..... *91*
ARGUMENTOS Y SOPORTE ..... 92
*Grado séptimo* ..... *93*
*Grado octavo* ..... *95*
*Similitudes y diferencias séptimo y octavo* ..... *96*
**CONCLUSIONES ..... 98**
EN CUANTO A LAS TAREAS ..... 98
EN CUANTO A LOS PROCESOS DE LA AD Y EL PROCESO DE DEFINIR ..... 100
EN CUANTO LOS MOMENTOS DE LA CLASE ..... 102
EN CUANTO A LA EVOLUCIÓN DE LOS ARGUMENTOS ..... 102
ENCUANTO A LA PREGUNTA Y A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN ..... 103
ENCUANTO A LA ORGANIZACIÓN Y AMBIENTE DE LA CLASE ..... 104
ENCUANTO AL DESARROLLO PROFESIONAL ..... 104
FUTURA PROYECCIÓN DE ESTUDIO ..... 105
**REFERENCIAS ..... 106**
**ANEXOS ..... 109**
ANÁLISIS DE GRADO OCTAVO ..... 109

*T.1. TAREA DE VISUALIZACIÓN* ........ *109*

*T.2. TAREA DEL PAR LINEAL* ........ *113*

*T2. P.1. (Definición de ángulo par lineal)* ........ *113*

*T.2.P.2. (Hecho geométrico par lineal )* ........ *118*

*T.3.P.3.  HG. Par lineal - recto* ........ *121*

*T.2. TAREA DE CIRCUNFERENCIA* ........ *127*

*T.3. P.1. (D. Circunferencia)* ........ *127*

*T.3. P.2. (Definición de mediatriz)* ........ *132*

# ÍNDICE DE ESQUEMAS

Esquema 1. Estructura básica del argumento ........ 9

Esquema 2. Estructura del argumento con exclusión y cuantificador modal ........ 10

Esquema 3. Estructura del argumento con cuantificador modal sin exclusión. ........ 10

Esquema 4. Argumento con todos sus componentes. ........ 11

Esquema 5. Ejemplo de argumento analítico ........ 12

Esquema 6. Ejemplo de argumento analítico. Tomado de Toulmin (2007) ........ 13

Esquema 7. Ejemplo de argumento sustancial. Tomado de Toulmin (2007) ........ 13

Esquema 8. Ejemplo de argumento sustancial ........ 14

Esquema 9. Actividad Demostrativa ........ 15

Esquema 10. Sistema teórico local previsto en la fase de planeación. ........ 28

Esquema 11. Argumento PCSa ........ 34

Esquema 12. Argumento PCSd ........ 34

Esquema 13. Argumento PCSa ........ 36

Esquema 14. Argumento PCSi ........ 36

Esquema 15. Argumento PCSb ........ 37

Esquema 16. Argumento PDSb ........ 37

Esquema 17. Argumento PCSi ........ 39

Esquema 18. Argumento PJAc ........ 40

Esquema 19. Argumento PJAc ........ 40

Esquema 20. Argumento GDSa ........ 41

Esquema 21. Argumento GDSd ........ 41

Esquema 22. Argumento GDSa ........ 43

Esquema 23. Argumento PCSe ........ 46

Esquema 24. Argumento PJSb ........ 48

Esquema 25. Argumento PJSb....................................................48
Esquema 26. Argumento GJAa....................................................51
Esquema 27. Argumento GJAa....................................................51
Esquema 28. Argumento GCSd....................................................52
Esquema 29. Argumento GCSe....................................................56
Esquema 30. Argumento GJSc....................................................56
Esquema 31. Argumento GJAc....................................................56
Esquema 32. Argumento PJAa....................................................60
Esquema 33. Argumento PJAa....................................................60
Esquema 34. Argumento PJAc....................................................61
Esquema 35. Argumento PJAc....................................................73
Esquema 36. Argumento PCAa....................................................81
Esquema 39. Argumento PCSd....................................................109
Esquema 40. Argumento PCSa....................................................111
Esquema 41. Argumento PDSi....................................................111
Esquema 42. Argumento PCSc....................................................113
Esquema 43. Argumento PJAc....................................................113
Esquema 44. Argumento GJAa....................................................121
Esquema 45. Argumento PJAa....................................................121

# INDICE DE TABLAS


Tabla 1. Preguntas y recursos de la tarea 1 ........ 22

Tabla 2. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 2 ........ 23

Tabla 3. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 3 ........ 24

Tabla 4. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 4 ........ 25

Tabla 5. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 5 ........ 25

Tabla 6. Recursos e instrucciones de la tarea 6 ........ 26

Tabla 7. Elementos teóricos que constituyen el sistema teórico local. ........ 27

Tabla 8. Cronograma de aplicación de las tareas. ........ 29

Tabla 9. Categorías y subcategorías I. ........ 31

Tabla 10. Categorías y subcategorías II. ........ 32

# ÍNDICE DE GRÁFICAS


Gráfica 1. Comportamiento de los argumentos durante el desarrollo de la tarea de visualización y D. Clases de ángulos y los problemas de las otras tareas, grado séptimo ....83

Gráfica 2. Comportamiento de los argumentos durante el desarrollo de la tarea de visualización y los problemas de las otras tareas, grado octavo ....85

Gráfica 3. Argumentos analíticos y sustanciales. Grado séptimo....88

Gráfica 4. Argumentos analíticos y sustanciales en los procesos de la AD en grado séptimo....89

Gráfica 5. Argumentos analíticos y sustanciales en los momentos de clase. Grado séptimo....89

Gráfica 6. Argumentos analíticos y sustanciales. Grado octavo ....90

Gráfica 7. Argumentos analíticos y sustanciales en los procesos de la AD. Grado octavo ....90

Gráfica 8. Argumentos analíticos y sustanciales en los momentos de clase. Grado octavo....91

Gráfica 9. Argumentos según el tipo de soporte. Grado séptimo....93

Gráfica 10. Argumentos analíticos y sustanciales de acuerdo al tipo de soporte. Grado séptimo ....94

Gráfica 11. Argumentos según el tipo de soporte en los procesos de definir, conjeturar y justificar. Grado séptimo ....94

Gráfica 12. Argumentos según el tipo de soporte. Grado octavo....95

Gráfica 13. Argumentos analíticos y sustanciales de acuerdo al tipo de soporte. Grado octavo ....95

Gráfica 14. Argumentos según el tipo de soporte en los procesos de la AD. Grado octavo ....96

Gráfica 15. Argumentos construidos durante problemas relativos a definiciones. Grado séptimo....99

Gráfica 16. Argumentos construidos durante problemas relativos a definiciones. Grado octavo ....99

Gráfica 17. Argumentos construidos durante problemas relativos a hechos geométricos. Grado séptimo .99

Gráfica 18. Argumentos construidos durante problemas relativos a hechos geométricos. Grado octavo ...99

Gráfica 19. Argumentos analíticos y problemas relativos a hechos geométricos. Grado séptimo.... 100

Gráfica 20. Argumentos analíticos y problemas relativos a hechos geométricos. Grado octavo .... 100

Gráfica 21. Argumentos sustanciales y problemas relativos a definición. Grado séptimo.... 100

Gráfica 22. Argumentos sustanciales y problemas relativos a definición. Grado octavo ............................ 100

Gráfica 23. Argumentos, problemas definición y procesos. Grado séptimo. ............................................... 101

Gráfica 24. Argumentos, problemas definición y procesos. Grado octavo .................................................. 101

Gráfica 25. Argumentos, problemas de hechos geométricos y procesos. Grado séptimo........................... 101

Gráfica 26. Argumentos, problemas de hechos geométricos y procesos. Grado séptimo........................... 101

Gráfica 27. Argumentos, en los diferentes momentos de la clase. Grado séptimo....................................... 102

Gráfica 28. Argumentos, en los diferentes momentos de la clase. Grado octavo ........................................ 102

# INTRODUCCIÓN

Este documento se realiza en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), ubicándose en la línea de investigación Argumentación y Prueba en geometría. La investigación de la que se informa, se realizó con un grupo de 70 estudiantes de grados séptimo y octavo del Colegio Distrital Hunza ubicado en la ciudad de Bogotá, con quienes se trabajó una secuencia de tareas diseñadas en el marco de un experimento de enseñanza. Se intervinieron y modificaron los procesos desarrollados en el aula con el fin de favorecer la argumentación de los estudiantes, acercarlos a la actividad demostrativa y acopiar, analizar y caracterizar los diferentes argumentos realizados por ellos. En el estudio se adoptó como marco teórico: en cuanto al análisis y funcionalidad de los argumentos, el trabajo realizado por Toulmin (2007); con relación a la actividad demostrativa el estudio realizado por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (*Æ.G);* finalmente se fundamentó en Krummheuer (1995) quien aporta teóricamente al estudio de la relación existente entre los argumentos y la educación matemática. Este documento está constituido por seis capítulos. En el primero, se presenta la justificación y delimitación de la problemática a abordar, la pregunta de investigación así como los objetivos que guían el trabajo y el reporte de la literatura revisada para la realización del trabajo. El segundo capítulo corresponde al marco teórico que fundamenta el trabajo, en términos del análisis de argumentos, la actividad demostrativa y la argumentación en el campo de la educación matemática. En el tercer capítulo se presenta la perspectiva sociocultural y la metodología de experimento de enseñanza, bases en las cuales se enmarca este trabajo; se ubica el contexto de estudio del mismo y se determinan las categorías de análisis que guían el estudio de la información obtenida. En el capítulo cuatro se realiza el análisis de la información acopiada durante la intervención en el aula, teniendo en cuenta las categorías enunciadas anteriormente, en este se da cuenta de los argumentos desarrollados por los estudiantes en los procesos de definir, conjeturar y justificar en el trabajo en grupal y en la puesta en común y su tipificación como sustanciales o analíticos. El quinto capítulo sintetiza los resultados del análisis anterior atendiendo a los objetivos del trabajo. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones y se proponen algunos asuntos que vale pena revisar en futuros estudios. Estas conclusiones se han obtenido teniendo en cuenta los resultados en el análisis y los objetivos del estudio; las mismas se presentan en cuatro apartados: en el primero se presentan las conclusiones a partir de las tareas propuestas en la secuencia, en el segundo apartado estas se relacionan con los procesos de definir y los procesos de la actividad demostrativa (conjeturar y justificar), en tercer lugar con los momentos de la clase y en cuarto lugar la evolución de los argumentos a partir del soporte empleado.

# JUSTIFICACIÓN

En este capítulo se sitúa el problema que se quiere atender dentro del campo de investigación, se ofrece al lector un panorama acerca del asunto que es objeto de estudio y se soporta la relevancia del mismo. Para ello, presentamos la justificación del estudio aludiendo en primer lugar a la importancia que tiene la demostración en la educación matemática; en segundo lugar se aborda la demostración matemática, particularizando el caso del nivel escolar y el campo de la geometría; posteriormente se presenta la argumentación como uno de los procesos importantes dentro de la demostración y finalmente se aborda el análisis y evaluación de los argumentos en el ámbito educativo.

Con base en el panorama ofrecido, se presenta la pregunta de investigación que delimita los asuntos que serán abordados, así como los objetivos que permitirán responder a la misma y orientarán el desarrollo de la investigación. Al final se presentan algunos referentes de la literatura que guardan relación con el objeto de estudio de esta investigación y aportan al desarrollo de la problemática mencionada.

## JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

La demostración en la educación matemática en los últimos años ha cobrado interés por parte de los investigadores. Por ejemplo, Recio (2001) propone una revisión de la interpretación formalista de la demostración matemática, la cual constituye dificultades significativas para su aprendizaje en los diferentes niveles educativos por su complejidad; este autor propone flexibilizar su significado, acudiendo a formas de argumentación más cercanas a los estudiantes y que son usadas por los matemáticos al hacer sus demostraciones. Otros autores presentan resultados de investigación en los que han encontrado que son muy pocos los estudiantes que realizan demostraciones con un nivel adecuado a causa de la dificultad que esta ocasiona por sus características y concepción. Ejemplo de estos trabajos son los de Fischbein (1982), Martin & Harel (1989) y Senk (1985), que son retomados por Recio (2002). Godino & Recio (1997) han analizando las características de la noción de demostración en diferentes contextos institucionales, manifestando que la superposición de estos significados en los niveles de enseñanza podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con la prueba matemática.Entre estos niveles se encuentra el escolar, en el cual se ha considerado que acercar a los estudiantes a los procesos de demostración es importante. Por ejemplo, para Gutiérrez (2007):

> Actualmente hay consenso internacionalmente mayoritario entre profesores de matemáticas y didactas matemáticos sobre la necesidad de que los estudiantes terminen la enseñanza obligatoria habiendo comprendido la importancia y necesidad de la demostración en matemáticas y habiendo desarrollado habilidades de razonamiento deductivo (p. 1).

De otro lado, en los estándares del NCTM (2003) se reconoce la demostración como uno de los aspectos fundamentales de las matemáticas, razón por la cual denominan uno de estos estándares como *Razonamiento y prueba*. Manifiestan que los programas en todos los niveles de educación matemática tendrían que formar a los estudiantes para que puedan plantear conjeturas matemáticas así como desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y hacer demostraciones. Camargo, Samper, y Perry (2006) apoyan la idea de que la demostración debe ser uno de los objetivos a tener en cuenta en la educación matemática en la escuela. Ellas manifiestan que "la escuela debe acercar a los estudiantes a las actividades propias de la comunidad matemática, estamos convencidos de que la demostración debe ocupar un lugar prominente en el currículo de matemáticas" (p.372).

Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la demostración en la escuela se han presentado en diversos campos de las matemáticas, manifiesta Fiallo (2011), quien menciona diferentes autores en diferentes campos de las matemáticas como, Harel (2001), Antonini y Mariotti (2007), Furinghetti y Morselli (2008), entre otros, en la teoría de números; Back y Wright (1999), Healy y Hoyles (2000) y Pedemonte (2008) en el álgebra; Boero, Consogno, Guala, y Gazzolo (2009) en probabilidad e Ibáñez y Ortega (2003, 2004) y Fiallo (2011) en trigonometría. De acuerdo a este autor, en el campo de la geometría se han desarrollado la mayoría de las investigaciones alrededor de la demostración, tal es el caso de Mariotti (1997), quien presenta un análisis de la naturaleza de la geometría y plantea la necesidad de entender los procesos mentales involucrados en el razonamiento geométrico, así como otros autores (v.g Gutiérrez, 2005; Larios, 2006; Camargo et al., 2006) quienes se han enfocado en el estudio de la demostración en geometría mediante el uso de software de geometría dinámica (SGD).

Teniendo en cuenta lo manifestado alrededor de la importancia de la demostración en la educación matemática y que muchos de los estudios realizados sobre su enseñanza han sido desarrollados en el campo de la geometría, es posible encontrar diferentes propuestas conducentes a introducir la demostración en este campo en los diferentes niveles escolares. Tal es el caso de las investigaciones realizadas por Mariotti y Bartolini-Bussi (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) y Richard y Fortuny (2000). Según menciona Gutiérrez (2009), estas investigaciones "han mostrado cómo una adecuada planificación de las tareas, acompañada de una gestión de la clase por el profesor coherente con los objetivos fijados, generan resultados positivos" (p. 66). Otro ejemplo a considerar es el trabajo realizado por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría [*Æ.G*], de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN] (Colombia), quienes proponen la *Actividad Demostrativa* [AD] como una aproximación metodológica para la enseñanza de la demostración.

Otros estudios realizados en el marco de la demostración en la educación matemática se han ocupado de los procesos de argumentación y la producción de argumentos al interior de la clase de matemáticas. Por ejemplo Godino y Recio (2001) invitan a tener en cuenta la argumentación en los estudios que se realizan sobre la demostración cuando manifiestan que "los estudios sobre la demostración en educación matemática deben enmarcarse dentro de la problemática más amplia de la evaluación y desarrollo de las distintas prácticas argumentativas en diversos contextos institucionales" (p. 406); Mariotti (2006) enfatiza en los diferentes enfoques de la demostración y presenta una distinción entre la argumentación y la demostración matemática: la argumentación se considera como cualquier medio teórico usado para convencer a otro de la verdad o falsedad de determinada afirmación, mientras la demostración es una secuencia lógica de afirmaciones que se obtienen de la validez teórica de una declaración. Álvarez, Ángel, Carranza, y Soler (2014) realizan una descripción detallada de dos procesos fundamentales en la actividad matemática: conjeturar y argumentar, resaltando la importancia del último proceso en las matemáticas cuando expresan que "el proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones". Finalmente, Gamboa, Planas, y Edo (2010) consideran que la argumentación matemática es parte esencial de la formación de los estudiantes en diferentes niveles escolares y por tal razón es necesario tenerla en cuenta en la formación de futuros profesores.

El análisis y evaluación de argumentos de los estudiantes al interior de la clase de matemáticas también ha sido relevante en el marco de la demostración en educación matemática. Por ejemplo, Inglis y Mejía (2005) plantean que el análisis y evaluación de argumentos se concentra en argumentos construidos para eliminar la duda en torno a una conjetura y presentan una perspectiva amplia de la argumentación matemática basada en el esquema de argumentos de Toulmin (2007)[1]. Estos autores citan a otros investigadores que han enfocado sus estudios en esta misma línea como son Harel y Sowder (1998), Healy y Hoyles (2000); Segal (1999) y Raman (2002), quienes se han centrado principalmente en el análisis de la construcción y la evaluación de los argumentos que producen los estudiantes para convencerse a sí mismos y persuadir a otros miembros de la clase (compañeros o profesores) sobre la validez de una afirmación. En este campo de investigación también se encuentra Knipping (2008), quien realiza un análisis de la estructura de los argumentos utilizando el modelo de Toulmin. Esta autora se centra en la racionalidad de los argumentos que se generan durante el proceso de demostración en la clase.

A partir del panorama investigativo presentado anteriormente, en el cual se puede observar la importancia de la argumentación en la demostración y de esta última en la educación matemática, específicamente en el campo de la geometría, se propone como asunto de investigación indagar acerca de la forma en que

[1] Es un modelo presentado por Toulmin (2007), para analizar la estructura y funcionalidad de argumentos en matemáticas. Él determina seis elementos estructurales en los argumentos, datos (D), conclusión (C), garantía(G), respaldo (R), cuantificadores modales (M) y condiciones de refutación o exclusiones (E). De este modelo se hará una presentación más detallada en el siguiente capítulo.

pueden favorecerse los argumentos elaborados por los estudiantes y con ello acercarlos a la demostración. Específicamente, analizamos los argumentos que los estudiantes producen en el marco de una clase de geometría gestionada a través de una aproximación metodológica para la enseñanza de la demostración y con ello identificamos si hay evolución de los mismos en función de su estructura. El análisis de estos argumentos permite determinar en qué medida la propuesta de intervención contribuye a la evolución de los argumentos realizados por los estudiantes.

## PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Como se ha mencionado, son diferentes los aspectos y los puntos de vista respecto a los procesos de argumentación y a la práctica demostrativa en matemáticas que han sido foco de interés en algunas investigaciones. Con el objeto de delimitar el eje temático de esta investigación, a continuación se plantea la pregunta que determina los aspectos involucrados y permite orientar el proceso de investigación:

*¿Cómo se favorecen los procesos de argumentación en estudiantes de nivel escolar a través de una aproximación metodológica específica para la enseñanza de la demostración en geometría?*

## OBJETIVOS

### *OBJETIVO GENERAL*

Desarrollar y analizar las prácticas argumentativas que producen los estudiantes de educación básica en la clase de geometría, en el marco de la *Actividad Demostrativa*.

### *OBJETIVOS ESPECÍFICOS*

1. Diseñar e implementar una propuesta de intervención en el aula que favorezca procesos de argumentación de los estudiantes de básica.
2. Elaborar categorías de análisis, con base en una revisión de literatura, que permitan caracterizar los argumentos elaborados por los estudiantes.
3. Caracterizar los argumentos realizados por los estudiantes a través de la implementación de la propuesta de intervención.

## REVISIÓN LITERARIA

En este apartado se realiza una síntesis de los aportes de las investigaciones revisadas que aportaron o fueron fundamento teórico del presente trabajo con el fin de acercar al lector a los diferentes elementos teóricos objeto de estudio: la demostración en clase de matemáticas, argumentación y argumentos de los estudiantes y el análisis y evaluación de argumentos.

### *LA DEMOSTRACIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS*

En cuanto a la práctica demostrativa se tiene en cuenta el trabajo realizado por el grupo Æ.G (Camargo, Molina, Perry, & Samper, 2014), quienes presentan una metodología para acercar a los estudiantes a la práctica demostrativa, en la cual se presentan dos procesos: conjeturar y justificar. Como se dijo anteriormente estos autores resaltan, entre otros planteamientos, la importancia del trabajo sobre las tareas y la interacción social en la clase. En este sentido también en Camargo et al. (2006) se realiza un acercamiento a la actividad demostrativa (que se denominara en adelante AD) como una alternativa para que la demostración sea más significativa en la enseñanza de las matemáticas y le permita a los estudiantes entender los diferentes roles de esta en las matemáticas. Camargo et al. (2014) destacan la justificación como uno de los componentes de la AD, mediante la cual es posible encadenar los argumentos para validar una conjetura formulada. Manifiestan que la argumentación realizada en la práctica debe ser llevada de manera consciente al salón de clase, teniendo en cuenta la validación en matemáticas, ellos también resaltan la importancia de la construcción de un sistema teórico local, a partir del cual se formula y se valida una conjetura.

De otro lado, el proceso de definir es tenido en cuenta en este trabajo por la naturaleza de las tareas propuestas. Al respecto se tiene en cuenta el trabajo realizado por Gavilán, Sanchez y Escudero (2014), quienes asumen una perspectiva sociocultural para identificar y caracterizar diferentes situaciones de aprendizaje matemático, cuando los estudiantes solucionan tareas en un contexto geométrico.

### *ARGUMENTACIÓN Y ARGUMENTOS DE LOS ESTUDIANTES*

Con relación a la argumentación, Godino y Recio (2001) manifiestan que "los estudios sobre la demostración en educación matemática deben enmarcarse dentro de la problemática más amplia de la evaluación y desarrollo de las distintas prácticas argumentativas en diversos contextos institucionales" (p. 406). En su estudio analizan los diferentes significados de la idea de demostración en diferentes contextos institucionales, acogiendo como nociones de partida situaciones de validación y las prácticas argumentativas correspondientes.

Otro autor que fue consultado y cuyo trabajo sirvió de sustento a esta investigación es Krummheuer (1995), quien se centra en el análisis de los argumentos producidos por un grupo de estudiantes en la clase de matemáticas. En este análisis él tiene en cuenta que la argumentación es un fenómeno social que se relaciona con la interacción que tiene lugar en el aula entre estudiantes y entre estudiantes y profesor. Para el análisis del aspecto funcional de los argumentos él recurre a la distinción entre argumentos sustanciales y analíticos de Toulmin (2007) y a una versión reducida del modelo de argumento creado por este autor, omitiendo el uso de la refutación y el calificativo modal. Krummheuer manifiesta que los estudiantes de los niveles básicos de educación realizan argumentos sustanciales, ya que el pensamiento de ellos se fundamenta en lo empírico, mientras los estudiantes de secundaria pueden elaborar argumentos sustanciales y analíticos atendiendo a que pueden ser capaces de realizar deducciones a partir de los datos presentados y dar así un respaldo teórico a su justificación. Toulmin (2007) por su parte propuso un esquema en el cual determina seis elementos de acuerdo a su función dentro del argumento: datos, conclusión, garantía, respaldo, cuantificador modal y refutación o exclusión, para analizar argumentos incluso aquellos que difieren de la lógica formal; también tipifica los argumentos en sustanciales y analíticos, estos últimos se usan en la demostración matemática.

#### *ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE ARGUMENTOS*

Desde el punto de vista de evaluación y análisis de los argumentos Inglis y Mejía (2005) presentan una perspectiva de la argumentación que tiene en cuenta las diferentes maneras por medio de las cuales estudiantes y matemáticos califican sus conclusiones y se sienten persuadidos por argumentos en matemáticas, su trabajo también se basa en el modelo de Toulmin (2007). La perspectiva propuesta por ellos permite el análisis de argumentos construidos para reducir el nivel de incertidumbre asociada a una conjetura y el análisis de diversos tipos de persuasión en la evaluación de los argumentos en matemáticas. Asti y Ambrosini (2009), quienes no se especializan en las matemáticas o en educación matemática, realizan un análisis exhaustivo de la argumentación, tema de interés en este trabajo. Para ello examinan la perspectiva lógica de análisis y evaluación de argumentos así como diferentes manifestaciones de lo que se ha llamado lógica informal o teorías de la argumentación, ellos exponen y evalúan la teoría de la argumentación de Toulmin y la teoría "Nueva retorica" de Perelman.

# MARCO TEÓRICO

A continuación mencionamos los aspectos teóricos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de la investigación. Estos se organizan en tres apartados de acuerdo a sus asuntos de estudio. El primero caracteriza y esquematiza los argumentos desde el punto de vista de Toulmin (2007) ya que el esquema funcional que él presenta de los argumentos favorece el análisis de los mismos; el segundo apartado presenta la AD, propuesta por el grupo *Æ.G,* vista como una aproximación metodológica para la enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría; finalmente, el tercer apartado aborda el análisis de la argumentación en el salón de clase, para ello tenemos en cuenta la propuesta teórica formulada por Krummheuer (1995) en la cual realiza un análisis de los argumentos producidos por los estudiantes de una clase de matemáticas y se reconoce la argumentación como un proceso social y funcional que puede ser intervenido con el fin llevar a los estudiantes a elaborar argumentos que atienden a la lógica matemática.

## ACERCA DE LOS ARGUMENTOS

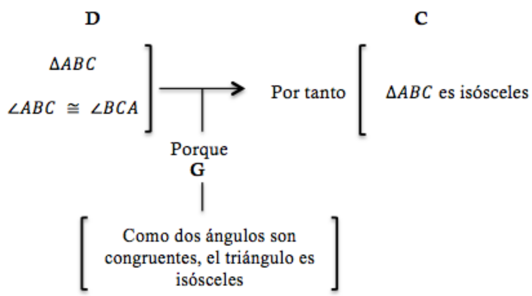
En primer lugar, teniendo en cuenta que mediante esta investigación se pretenden favorecer procesos de argumentación de los estudiantes dentro del contexto escolar, se retoman algunos aspectos del trabajo desarrollado por Toulmin (2007), quien propone un esquema mediante el cual determina la función de cada uno de los elementos del argumento y sus relaciones dentro de este, el esquema resulta útil para el análisis y evaluación de los argumentos el campo de la educación matemática. Este esquema ha servido también como punto de referencia para algunos autores (Krummheuer,1995; Álvarez et al., 2014; Inglis y Ramos, 2005), quienes se han enfocado en el análisis y evaluación de los argumentos en este campo.

La obra Toulmin es pertinente para este trabajo ya que permite realizar un análisis de los diferentes argumentos elaborados por los estudiantes en el marco de una conversación en la clase de matemáticas, Con el análisis se pretende elaborar una tipificación de los mismos y evidenciar si el ambiente de clase gestionado, en consideración a los asuntos abordados en el siguiente apartado, favorece la evolución de los argumentos utilizados por los estudiantes, partiendo de argumentos incompletos en su estructura, hasta alcanzar la formulación de argumentos que sean completos en este sentido, como sustento de alguna afirmación. Para comprender las ideas propuestas por Toulmin (2007) en relación a la naturaleza de los argumentos, en primer lugar se presenta el esquema propuesto por él que esquematiza la estructura de un argumento y la función de cada uno de sus componentes; en segundo lugar se presenta una caracterización de los argumentos, la cual atiende a la inclusión de argumentos que tienen lugar en algunos ámbitos científicos y cotidianos, y que por su naturaleza se alejan de un esquema formal lógico.

*ESQUEMA DE UN ARGUMENTO*

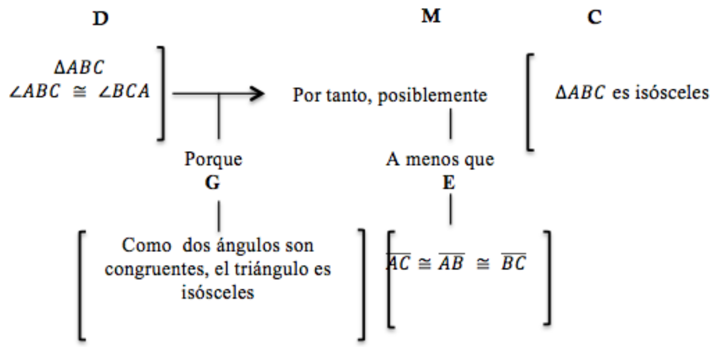
Respecto al primer asunto a tratar, un aspecto importante a tener en cuenta, para el análisis y manejo de los argumentos de los estudiantes, es el argumento en sí mismo y la funcionalidad de sus componentes, para lo que resulta útil la propuesta que Toulmin (2007) realiza. Particularmente, cuando una persona cuestiona el valor de verdad de la afirmación realizada por otra, el argumento realizado por la persona a quien se cuestiona, permite soportar o no que lo planteado es cierto, así como evidenciar la estructura del argumento empleado. Esto último faculta analizar los argumentos involucrados en relación a su estructura.

Para hacer referencia a la estructura de los argumentos, Toulmin (2007) manifiesta que para tener un argumento es necesario, por lo menos, contar con datos y una aserción que se apoye en los mismos, estos dos elementos son la parte inicial en la estructura del argumento. Respecto a los *datos (D)*, estos son los hechos que sustentan la conclusión y con los que se cuenta desde el principio; por otra parte, la *conclusión (C)* es la aserción, aquello que se deriva de un conjunto de datos asumidos. Cuando la conclusión es puesta en duda y se cuestiona la causalidad entre los datos y esta, es necesario recurrir a las *garantías (G)*, reglas o principios que permiten realizar inferencias para llegar de los datos a la conclusión, son enunciados hipotéticos, de carácter general, que actúan como puentes entre los datos y la conclusión (Toulmin, 2007, p. 134). Estos tres elementos iniciales permiten obtener un primer esbozo del esquema de un argumento, el cual ilustramos a continuación.



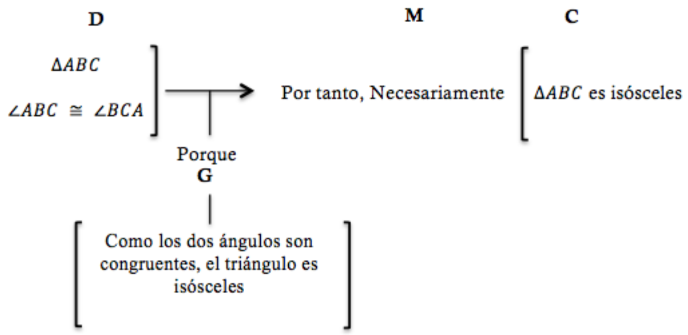

**Esquema 1. Estructura básica del argumento**

En el ejemplo presentado pueden observarse los datos (D) $\Delta ABC$ y $\angle ABC \cong \angle BCA$ que sustentan la conclusión (C) $\Delta ABC$ *es isósceles* a través de la garantía (G) *como los ángulos son congruentes el triángulo es isósceles*, la cual permite dar el paso de los datos a la conclusión. Los elementos presentados anteriormente no son los únicos que se involucran en la estructura de un argumento. Para Toulmin (2007) hacen parte también los *cuantificadores modales* (M), calificativos modales que indican la fuerza que dan las garantías al paso realizado y las *condiciones de refutación o exclusiones* (E), las cuales indican en qué casos la autoridad general de la garantía ha de dejarse de lado. Retomando el ejemplo anteriormente presentado, la estructura del argumento en atención a estos dos nuevos elementos, podría representarse de la siguiente forma:



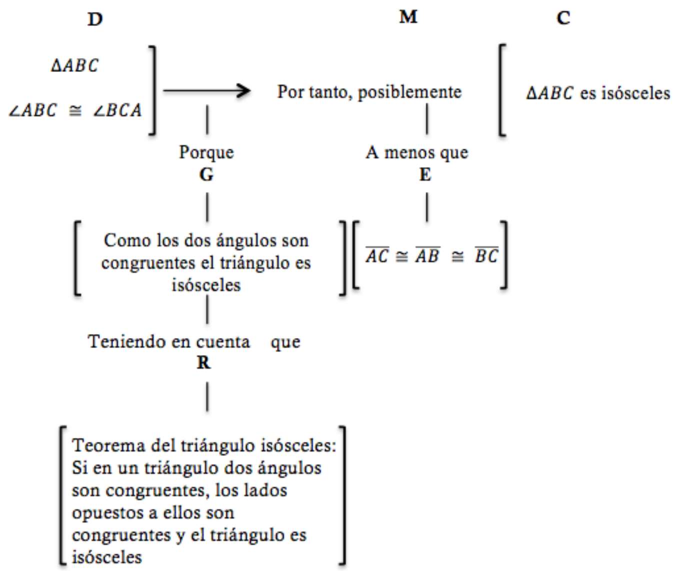

**Esquema 2. Estructura del argumento con exclusión y cuantificador modal**

En el ejemplo presentado, el cuantificador modal (M) empleado es <u>posiblemente</u> mientras que la condición de refutación (E) alude al caso en que los tres lados del triángulo sean congruentes. Esto tiene sentido si la definición de triángulo isósceles empleada es *un triángulo es isósceles si y solo si tiene un par de lados congruentes exactamente*. Sin embargo, si la definición empleada hubiese sido *un triángulo es isósceles si y solo si tiene un par de lados congruentes*, la condición de refutación no sería válida en tanto que el caso considerado se contempla dentro de la definición propuesta. En ese caso, el calificativo modal (M) sería <u>necesariamente</u>, obteniendo el siguiente esquema.




**Esquema 3. Estructura del argumento con cuantificador modal sin exclusión.**

Cabe la posibilidad que en la formulación de un argumento la garantía empleada sea cuestionada. En este caso, es necesario recurrir a un *respaldo (R)* que apoye la garantía. El *respaldo* se concibe como un enunciado categórico, es decir, un enunciado que afirma un resultado para el cual no hay restricción ni condición que lo invalide. Retomando nuestro ejemplo, la inclusión de este nuevo elemento se puede ilustrar de la siguiente forma.




**Esquema 4. Argumento con todos sus componentes.**

De esta forma se ha ilustrado el modelo propuesto por Toulmin alrededor de la estructura y funcionalidad de los componentes de un argumento, modelo que favorece el análisis y evaluación de los argumentos propuestos por los estudiantes, caracterizándolos y determinando posteriormente si el ambiente de clase gestionado favoreció la evolución de los argumentos de los estudiantes en función de su estructura.

### *ARGUMENTOS ANALÍTICOS Y SUSTANCIALES*

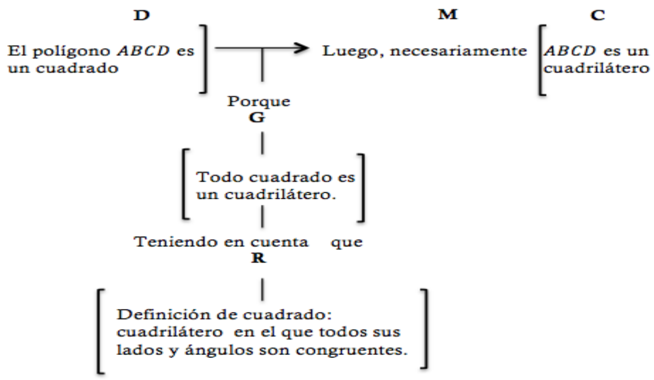
En cuanto al segundo asunto a tratar, Toulmin (2007) manifiesta que tanto aquellas personas que se dedican a estudiar la lógica formalmente, así como los científicos y personas en general, realizan argumentos denominados deductivos, según ellos, aun cuando este concepto es utilizado de manera diferente en cada caso. En el caso de los estudiosos de la lógica, un argumento es deductivo si este involucra una garantía en la cual la conclusión es explícita, mientras que en los otros casos, el argumento deductivo es aquel que involucra una garantía para la cual la conclusión no es explícita. A continuación se presenta un ejemplo que ilustra lo anteriormente mencionado.

| | |
|---|---|
| *En el marco legal colombiano, es posible argumentar, cuándo un ciudadano tiene cédula de ciudadanía.*<br>(D) José es colombiano y tiene 13 años.<br>(G) Toda persona menor de 18 años en Colombia es considerado menor de edad por tanto no tiene cédula de ciudadanía.<br>(C) Luego José no tiene cédula de ciudadanía. | *Un astrónomo puede argumentar cuándo será el próximo eclipse, a partir de sus observaciones.*<br>(D) Las observaciones realizadas de la posición de los cuerpos celestes en un momento específico.<br>(G) Registro de las posiciones pasadas de los cuerpos celestes y la ocurrencia de un eclipse.<br>(C) Fecha del próximo eclipse. |
| **Ejemplo 1. Argumento deductivo de los estudiosos de la lógica** | **Ejemplo 2. Argumento deductivo de un científico** |

Dentro de un esquema lógico formal, el primer ejemplo corresponde a un *argumento deductivo* ya que la conclusión se deriva de las premisas de los datos y la garantía. El segundo ejemplo, a pesar de ser considerado por el científico como deductivo, en el marco de un esquema lógico formal no lo es realmente, pues la aserción no se deriva en las premisas de los datos y la garantía. Con el fin de explicar la naturaleza de esta separación y dar mayor relevancia a aquellos argumentos que se presentan en la vida cotidiana en los cuales, para autores como Godino & Recio (2001), "se suele usar una argumentación informal, que es situacional, dependiente del contexto e incluso dependiente de la propia situación emocional del sujeto" (p. 410), Toulmin propone una distinción para los argumentos a través de dos categorías: *analíticos* y *sustanciales*. A continuación se ilustra cada una de las categorías anteriormente mencionadas con el fin de determinar cuándo un argumento es analítico y cuándo este es sustancial.

Argumentos Analíticos

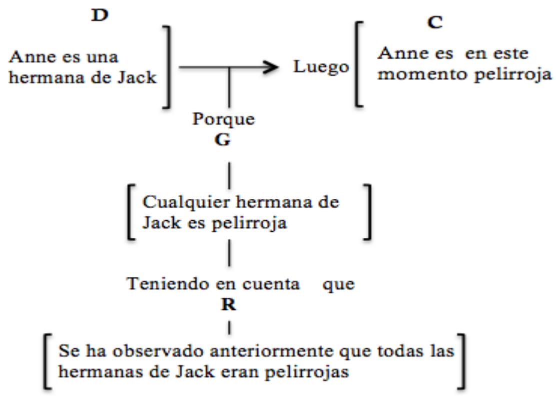
Considere el siguiente esquema de argumento




**Esquema 5. Ejemplo de argumento analítico**

En este, tanto la garantía como el respaldo contienen la información de la aserción. Para obtener la aserción es suficiente con reorganizar los componentes de los datos y la garantía o el respaldo, ya que estos elementos son los mismos de la aserción solo que esta no es general, por lo tanto ambos argumentos, expresados de la forma (D; G; luego C) y (D; R; luego C) tienen una *forma lógica* apropiada, lo que permite calificarlos como argumentos *formalmente válidos* (Toulmin, 2007, p.160). Según Toulmin, cuando para un argumento lo anteriormente mencionado es cierto, se dice que el argumento matemático es *analítico.*

Por otro lado, la garantía y el respaldo usados en el argumento son enunciados universales y atemporales, característica propia de los argumentos analíticos de acuerdo con lo manifestado por Toulmin (2007, citado en Ambrosini & Asti; 2009 ) cuando declara. "La conclusión en los argumentos analíticos, está fundamentada en principios universales, e inmutables" (p. 107). Otro ejemplo que permite ilustrar un argumento analítico, se presenta a continuación:

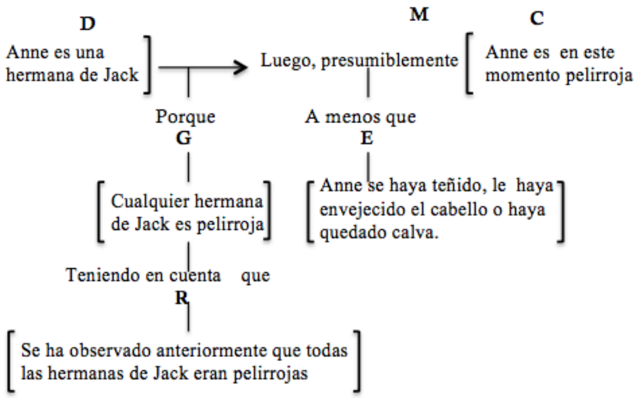



**Esquema 6. Ejemplo de argumento analítico. Tomado de Toulmin (2007)**

En el argumento anterior se ha comprobado que cada una de las hermanas de Jack es pelirroja, por tanto, se ha verificado específicamente que Anne es pelirroja. Aceptar el dato y la garantía o el dato y el respaldo, conllevan a aceptar también la conclusión. De igual manera que en el ejemplo anterior, los argumentos de la forma (D;G; luego C) y (D; R; luego C) son formalmente válidos, por lo tanto, este argumento también es analítico. En conclusión, entenderemos, de acuerdo a lo mencionado anteriormente, un argumento *analítico* como aquel en que el respaldo para la garantía que lo legitima, incluye explícita o implícitamente, la información trasmitida en la propia conclusión. Para Toulmin (2007) cualquier argumento que no atienda a esta tipificación se denominará *sustancial*, esto se presentará detalladamente a continuación.

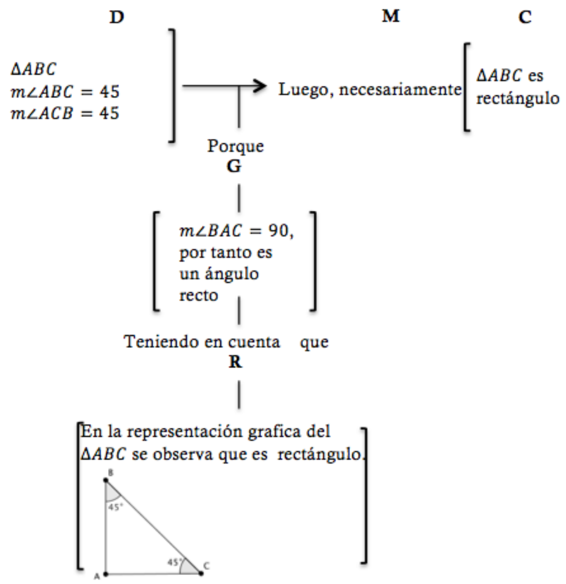
Argumentos Sustanciales

Para construir una idea frente a lo que es un argumento sustancial, consideremos el siguiente ejemplo.




**Esquema 7. Ejemplo de argumento sustancial. Tomado de Toulmin (2007)**

Este argumento es una variación del ejemplo anterior. En este argumento, como el respaldo en el que se basa la posibilidad de pasar del dato a la conclusión está fundamentado en una observación pasada, la garantía se limita a establecer una presunción sobre el color del cabello de Anne, pues con el correr del tiempo puede ocurrir que ella se haya tinturado, que el cabello haya envejecido o que haya quedado calva, lo que pone en tela de juicio la validez del argumento en ese momento. En este argumento la conclusión está fundamentada en un hecho particular y/o temporal y de acuerdo a lo manifestado por Toulmin (2007, citado en Ambrosini et al; 2009), este argumento se denomina *sustancial*. Otro ejemplo que permite ilustrar esta distinción se presenta a continuación.




**Esquema 8. Ejemplo de argumento sustancial**

En este argumento, se observa, por un lado que el respaldo no contiene explícitamente o implícitamente la información de la conclusión, ya que nada en la representación gráfica garantiza que el $\Delta ABC$ es rectángulo, por lo tanto el argumento de la forma (D; R; Luego C), no es formalmente válido y no es una tautología en consecuencia, se caracteriza como un argumento *sustancial* (Toulmin, 2007, p.167). De otro lado, el respaldo de la garantía es empírica ya que se limita a la observación de una propiedad aparente asociada a uno de los ángulos de la figura geométrica, característica de los argumentos sustanciales (Toulmin, 2007, citado en Ambrosini et al; 2009). En conclusión, teniendo en cuenta los dos ejemplos anteriores se entiende que un argumento es sustancial si el respaldo que apoya la garantía no contiene la información transmitida en la conclusión del argumento y/o si proporciona en su lugar datos o evidencias empíricas para apoyar la misma (Toulmin, 2007, p.167).

En los dos apartados anteriores, se han estudiado los argumentos sustanciales y analíticos desde el punto de vista de Toulmin (2007) y Ambrosini et al. (2009), tipificación pertinente en este trabajo ya que al realizar el análisis de los diferentes argumentos producidos por los estudiantes, en el marco de la comunicación que tenga lugar entre ellos, es posible identificar qué clase de argumentos realizan.

## ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

En este apartado se presenta la AD, aproximación metodológica para el aprendizaje de la demostración propuesta por el grupo Æ.G, de la UPN. En este capítulo inicialmente se presenta la AD como el conjunto de dos procesos: conjeturar y justificar; luego se caracteriza el tipo de tareas que se deben desarrollar para favorecer la AD al interior de la clase. Finalmente, se abordan asuntos relacionados a las interacciones en clase, resaltando en este punto tres tipos de interacciones (Camargo et al.; 2014), el rol del profesor en cada una y el rol del estudiante como participante en los procesos de conjeturar y justificar.

### *CONJETURAR, JUSTIFICAR Y DEFINIR*

En concordancia con lo afirmado por Camargo et al. (2014), la AD consta de dos procesos que se encuentran relacionados, el primero de estos es *conjeturar*, cuya finalidad es proponer enunciados de carácter general (conjeturas) y corroborarlos, a partir de la observación y verificación de propiedades, lo que proporciona un alto grado de certeza sobre la validez de las mismas. En este proceso se involucran acciones como detectar un invariante y verificarlo, formular una conjetura y corroborarla. El segundo proceso es *justificar*, mediante el cual la conjetura que inicialmente se formuló es validada dentro de un sistema teórico local[2]. En este proceso inicialmente se identifica la información, es decir, los elementos teóricos o empíricos que permiten validar la conjetura, lo que posibilita encadenar diferentes enunciados para construir argumentos que determinan la justificación de la conjetura.

Los procesos de conjeturar y justificar se encuentran apoyados por acciones heurísticas, como la visualización de figuras, que permite extraer información geométrica y la exploración de las representaciones de figuras geométricas y de los enunciados teóricos que son parte del conocimiento Camargo et al. (2014). El siguiente esquema de la AD presenta los procesos y acciones mencionados.


**Esquema 9. Actividad Demostrativa**

Aunque el proceso de definir no está contemplado en la AD, en este trabajo se tiene en cuenta al reconocer su importancia como un proceso fundamental en el quehacer matemático. *Definir* es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y es considerado como el proceso que permite establecer una definición, teniendo en cuenta que esta última prescribe el significado de una palabra o frase de forma específica en

[2] Se entiende como sistema teórico local, el conjunto de elementos conceptuales como definiciones, hechos geométricos, entre otros, que son construidos y aceptados por una comunidad.

términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas (Gavilán et al.; 2014). Este proceso permite la construcción de las definiciones que conforman el sistema teórico local.

***LAS TAREAS***

Para Camargo et al. (2014), las tareas desempeñan un papel importante en el marco de la AD, ya que les permite a los estudiantes participar de manera significativa. En estas se proponen problemas abiertos[3] que llevan a los estudiantes a explorar de manera empírica para comprender la situación, encontrar regularidades que les posibilitan establecer una conjetura a través de la formulación de un enunciado condicional, determinar elementos dentro de un sistema teórico local, para validarla y justificarla, crear soluciones y observar los diferentes puntos de vista que se han generado acerca de la conjetura, discutirlos y unificarlos, lo que favorece los procesos de argumentación y la emergencia de un sistema teórico local. Es importante que las tareas permitan cuestionar a los estudiantes, para que ellos expliciten y analicen sus concepciones y puedan, en consecuencia, construir colectivamente definiciones, teoremas y postulados que conformarán y permitirán ampliar un sistema teórico local de referencia.

***INTERACCIONES ENTRE LOS MIEMBROS DE LA CLASE***

En la manera como la AD es concebida para Camargo et al. (2014), las interacciones que se desarrollan al interior de clase (profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes) son de suma importancia, ya que les permiten a los estudiantes comunicar sus ideas, analizarlas críticamente y argumentar encadenando correctamente diferentes elementos de un sistema teórico para justificar y construir una demostración. Camargo et al. (2014) mencionan "interacciones de tres tipos a través de las cuales los estudiantes participan en la actividad matemática que tiene lugar en la clase" (p.29). El primer tipo de interacción corresponde al *trabajo de los estudiantes*, este se entiende como el momento en el cual ellos de manera individual o en parejas abordan las tareas propuestas por el profesor; el segundo tipo de interacción es la *conversación instruccional*, en la cual se construyen colectivamente los elementos geométricos abordados en la clase y se favorece la construcción de significados; en este momento se responden preguntas, se aceptan o rechazan conjeturas propuestas, se revisa la formulación de las mismas y se establece la definición del objeto que interviene en la definición. Finalmente, el tercer tipo de interacción, la *conversación matemática,* es un diálogo entre el profesor y estudiantes, o entre los estudiantes, sobre un tema específico de matemáticas, en la cual los estudiantes deben tener una posición definida frente a una idea matemática que pueden confrontar con otras.

El profesor, como experto, debe guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Al iniciar el curso debe dar a conocer las normas sociales y socio matemáticas (Yackel & Coob; 1996, citado en Camargo et al; 2014, p.

[3] Problemas abiertos: problemas que admiten varias soluciones. Según Camargo et al. (2014, p. 27), estos generan diversos puntos de vista y favorecen la argumentación.

28) que se tendrán en cuenta durante el desarrollo del mismo y controlar el cumplimiento de las mismas. Durante los tres tipos de interacciones ya mencionados, la participación del profesor debe corresponder a guiar el proceso, ya que es el representante de la comunidad de referencia, mientras los estudiantes son quienes construyen el conocimiento. En el *trabajo de los estudiantes*, el profesor pasa por los grupos, dialoga con ellos, se entera de qué están haciendo y los resultados que están desarrollando frente al problema propuesto (Camargo et al., 2014, p. 29). En la *conversación instruccional,* el profesor dialoga con uno o algunos de los estudiantes acerca del trabajo realizado por ellos, responde preguntas acerca del mismo, lo que les permite a ellos revisar la conjetura formulada, rechazarla, reformularla o aceptarla. Posteriormente, él se enfoca en administrar las propuestas de los estudiantes, controlar el uso correcto del los elementos del sistema teórico e institucionalizar el conocimiento (Camargo et al., 2014, p. 29).

Los estudiantes se deben involucrar de manera directa en el proceso. Son ellos quienes proponen, hablan sobre la elaboración de sus conjeturas, asumen una posición crítica acerca de los diferentes puntos de vista frente a la solución de un problema y participan directamente en la construcción colectiva tanto de los significados como del sistema teórico. La AD es pertinente en el marco de la investigación propuesta en este documento por sus características y propósitos, ya que se puede desarrollar en todos los niveles de la educación escolar (Camargo et al.; 2014). La aproximación metodológica descrita pretende que los estudiantes aprendan a demostrar en geometría, favorecer sus procesos de argumentación y demostración desde la interacción social, así como promover la comprensión de los conceptos matemáticos, la construcción de un sistema teórico y la validación de enunciados dentro del mismo sistema.

## LA ARGUMENTACIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS

En este apartado se realiza un acercamiento a la propuesta teórica planteada por Krummheuer (1995), la cual analiza la argumentación que tiene lugar en el salón de clase. Para ello, se habla en primer lugar de la argumentación como fenómeno social; posteriormente, se hace referencia al aspecto funcional de la argumentación y cómo lograr que un argumento sustancial se aproxime a uno analítico a partir de la intervención del profesor.

Para asumir la argumentación como un fenómeno social, Krummheuer (1995) realiza un análisis de esta a través de un experimento de clase. Para ello observa las prácticas argumentativas que tienen lugar en la interacción durante la clase de matemáticas. Krummheuer (1995), resalta la argumentación como un constructo social, ya que los participantes discuten la solución a una situación, tratan de explicar el razonamiento empleado, y negocian los procesos y operaciones desarrolladas así como la solución que de estas se obtiene. En consecuencia, la argumentación, vista como un discurso, se puede entender como un producto que no es propio del sujeto, sino que se modifica a partir de las interacciones que tienen lugar entre él y otros, en el marco de un proceso comunicativo.

Por otra parte, para el autor los procesos de argumentación no necesariamente están asociados a la lógica formal; suponer que siempre se presenta esta asociación, conlleva a pensar que no es posible hablar de procesos argumentativos en la educación escolar, pues muchas de las ideas y afirmaciones que se evidencian en este nivel no guardan relación directa con la lógica, ya que los estudiantes se basan generalmente en su experiencia, usando datos empíricos, por ejemplo, y no un soporte teórico, para llegar a una aserción. Con base en esto, se debe ampliar el significado de la argumentación y el de los argumentos, incluyendo aquellos que no necesariamente se enmarcan dentro de un esquema lógico de razonamiento. Para realizar esto, Krummheuer se apoya en la identificación propuesta por Toulmin (2001, citado por Krummheuer; 1995) que caracteriza los argumentos como *sustanciales* y *analíticos*.

Krummheuer resalta la importancia de los argumentos sustanciales, los cuales son los que utilizan los estudiantes en la escuela primaria, ya que en este nivel poseen un conocimiento matemático empírico-teórico principalmente; de otro lado, la habilidad de los niños para producir conclusiones de tipo analítico no está completamente desarrollada y aparecerá más tarde, atendiendo a lo manifestado por Piaget (citado por Krummheuer; 1995) en su teoría sobre el desarrollo de la causalidad. Sin embargo, estos argumentos *sustanciales*, deben ser el punto de partida para llevar a los niños a la realización de argumentos *analíticos*.

Finalmente, el autor destaca el aspecto funcional de la argumentación, el cual define desde el punto de vista de "qué tipo de declaraciones debe implicar necesariamente un argumento y cómo funcionan en relación con otras para la realización de una argumentación". Una argumentación se encuentra formada por una secuencia de sentencias las cuales tienen un rol determinado dentro de la misma. Krummheuer (1995) describe el aspecto funcional a partir del esquema argumentativo de Toulmin (2001, citado por Krummheuer; 1995), quien manifiesta que una afirmación (conclusión) debe tener como mínimo unos datos que la sustenten para ser considerada como argumento. El autor muestra como a partir de un argumento sustancial los estudiantes de su clase elaboran un argumento analítico. Para ello es necesario cuestionar los estudiantes sobre la validez de las diferentes declaraciones presentes en la argumentación, a través de preguntas que les permitan, con base en el sistema teórico construido previamente en clase, generar justificaciones y garantías que apoyen la validez de los datos y las justificaciones respectivamente.

Teniendo en cuenta la investigación realizada por este autor, en la cual el utiliza un esquema reducido del esquema de Toulmin (2007) para analizar argumentos en la clase de matemáticas, idea apoyada por Inglis y Mejía (2005), en este trabajo se utiliza dicho esquema ya que nos permite realizar un análisis más detallado de los argumento, según su estructura.

# METODOLOGÍA

El presente capítulo aborda la metodología del estudio. Para ello se tienen en cuenta cuatro secciones. En la primera se hare referencia a la perspectiva investigativa en la cual se enmarca el trabajo, En la segunda, se aborda y caracteriza el tipo de metodología a la que se aproxima. En la tercera, se presenta el contexto en el cual tuvo lugar la investigación. Finalmente se describen las fases de planeación, de experimentación y análisis retrospectivo de un Experimento de Enseñanza, metodología adoptada.

## Perspectiva Investigativa

Esta investigación se ubica en una perspectiva sociocultural, que tiene una concepción del conocimiento matemático como un proceso social y cultural. Aborda situaciones reales que se desarrollan en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El objetivo de aproximarse a las situaciones mencionadas, es intervenir y modificar procesos desarrollados en el aula. Esto, y lo manifestado por Schoenfeld & Godino (2000) cuando dice que, es propósito de una investigación aplicada el usar la comprensión de la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje para mejorar la instrucción matemática, permite ubicar este estudio dentro de los trabajos de investigación aplicada. Teniendo en cuenta que la perspectiva sociocultural aborda situaciones que se desarrollan en el contexto real, la alternativa más apropiada y pertinente a utilizar para interpretar y comprender la realidad social es la investigación cualitativa ya que esta permite realizar un análisis exhaustivo, detallado, de un asunto o actividad en particular, en este caso las interacciones en el aula.

## Presentación de la metodología

Por sus características este estudio se ubica en una Investigación de Diseño, ya que este tipo de investigación:

> Tiene como objetivo analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación. (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011, p.2)

En particular, el presente trabajo es un Experimento de Enseñanza, pues este tipo de investigación se basa en una secuencia de episodios de enseñanza, que es implementada con un grupo de estudiantes, lo que permite intervenir y modificar procesos de enseñanza y aprendizaje. Los participantes en este tipo de investigación son uno o más estudiantes, quienes intervienen en la secuencia de enseñanza y cuyas producciones son analizadas en determinado ambiente de aprendizaje, un investigador docente, que interactúa directamente con los estudiantes y hace parte del grupo de investigadores y un grupo de investigadores que apoyan al docente investigador durante el proceso de investigación. Este tipo de investigación se caracteriza por la intervención directa de los investigadores en el ambiente estudiado a través del profesor investigador, esto permite la adquisición de información de primera mano y la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador. Además, se distinguen diversos planos de acción, en la que todos los participantes del experimento construyen su conocimiento (Molina et al.; 2011).

El Experimento de Enseñanza se desarrolla en tres fases. La primera corresponde a la preparación. Allí se determina el problema y los objetivos de investigación, se indaga por el conocimiento previo de los estudiantes, se diseña la secuencia de intervenciones en el aula, se prevé la recolección de datos y se determina la trayectoria hipotética de aprendizaje. La segunda fase es la experimentación. En esta se evidencian tres partes: antes de cada intervención, en la que se revisa la preparación de la intervención, a partir de los datos obtenidos en la anterior; la segunda parte, cada intervención, en la que, si es necesario, se modifica la preparación durante la marcha y se recogen los datos. La última parte, después de cada intervención, es en la que se analizan los datos obtenidos y se revisan y reformulan si es necesario las hipótesis de investigación. La tercera fase corresponde al análisis retrospectivo de los datos recogidos en cada una de las intervenciones. El fin de un Experimento de Enseñanza es elaborar un modelo del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes. Este modelo empieza a ser esbozado durante las intervenciones, pero es concretado cuando se realiza el análisis retrospectivo de los datos.

## Contexto del estudio

El trabajo de investigación se desarrolló, con un grupo de 28 estudiantes de grado séptimo, y un grupo de 32 de grado octavo del colegio Distrital Hunza, ubicado en Suba Rincón (Bogotá). Las edades de los estudiantes estaban entre los 10 y los 17 años. Ellos pertenecen a familias de estrato 1 y 2, en la mayoría de los casos. La población escolar en la institución es flotante, ya que durante el año escolar constantemente están retirandose e ingresando estudiantes al colegio.

La secuencia tuvo lugar durante el año académico 2014, en la clase de geometría, con una intensidad horaria de 45 minutos semanales. Los estudiantes se organizaron en grupos de tres, organización que se procuró mantener durante todas las sesiones. En cuanto a los conocimientos previos que poseían los estudiantes en geometría, estos correspondían al reconocimiento de objetos geométricos básicos, a partir de algunas propiedades que identificaban generalmente mediante visualización, así cómo algunas relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre objetos geométricos y cálculo de perímetro, área y volumen mediante determinados algoritmos. Estos conocimientos corresponde a las temáticas estipuladas en las mallas curriculares institucionales para el área de geometría.

## Fases del experimento de enseñanza

Como la investigación se desarrolla mediante un Experimento de Enseñanza, describimos sus fases a continuación, haciendo referencia a los participantes en cada una y las diferentes actividades realizadas.

### *FASE DE PLANEACIÓN*

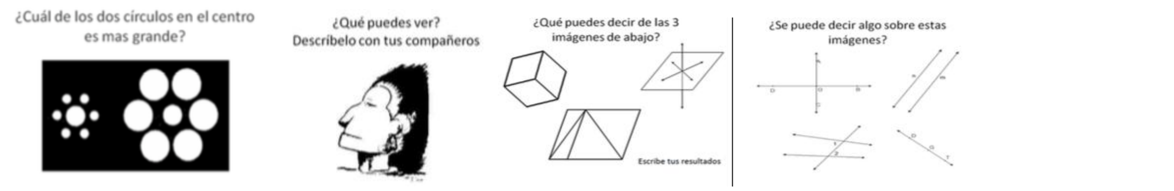
Esta fase se centró en la revisión y adaptación de una secuencia, que había sido realizada y trabajada, previamente por Sua (2013). La adaptación se realizó atendiendo a las características de la población escolar, el contexto social y los conocimientos previos de los estudiantes. También se tuvieron en cuenta los elementos conceptuales que se pretendían abordar y los objetivos a alcanzar con el desarrollo de la secuencia, tanto al interior de la clase de geometría como a nivel de la investigación. La secuencia fue adecuada con el objetivo de favorecer en los estudiantes procesos de argumentación, relacionados con la validación de las soluciones de problemas geométricos. También se buscó aportar a la formación de estudiantes críticos, capaces de solucionar problemáticas propias de su contexto y de comprender y respetar la opinión del otro. Estas ideas están en el Proyecto Educativo Institucional del colegio.

La trayectoria de enseñanza comprende una secuencia de seis tareas, a partir de la segunda tarea se plantean de 1 a 4 problemas para alcanzar el objetivo de la tarea. Se partió de un problema, a partir del cual los elementos teóricos involucrados en su desarrollo dieron lugar a otros problemas que se enfocaron en el desarrollo de estos elementos. Teniendo en cuenta que el diseño de la secuencia atiende a los aportes teóricos del grupo *Æ.G,* para cada tarea se formuló un problema abierto que favorecía la emergencia de afirmaciones y resultados que se acercaban a los objetivos de la tarea. (Sua, 2013, p. 25). Además del problema, las tareas contenían diferentes preguntas que guiaban a los estudiantes en la solución de este, el planteamiento de una conjetura y la construcción de la justificación de la misma.

Con la aplicación de la secuencia, además de favorecer procesos de demostración y argumentación, se quería que los estudiantes, a medida que abordaran las tareas e interactuaran con sus compañeros, el profesor y el conocimiento, construyeran un sistema teórico local en la clase de geometría y lo utilizaran en la solución de los problemas. La tarea 1 (T1. Visualización) tiene como objetivo el desarrollo de habilidades de visualización, permitiéndoles descomponer una figura y en ella reconocer otras, determinar sus propiedades y reconocer que una propiedad es válida, solo si esta se hace explícita a través del uso de una notación específica (congruencia, paralelismo, perpendicularidad); en la tarea 2 (T2. Ángulos par lineal) se proponen tres problemas, con el primero (P1) se pretende que los estudiantes construyan la *D. Ángulos par lineal*, con el segundo (P2) llegar al *HG. Par lineal* y con el tercero (P3) *HG. Par lineal-recto*, elementos teóricos asociados al sistema teórico local; con el desarrollo de la tercera tarea (T3. Circunferencia) la cual consta de cuatro problemas se pretende que los estudiantes construyan otros elementos del sistema teórico local, *D. Circunferencia, D. Mediatriz de un segmento, D. Punto medio de un segmento* y el *HG. Mediatriz,* así como favorecer los procesos de argumentación de los estudiantes, dentro del entorno de la AD; en cuarta (T4. Criterios de congruencia), el objetivo es que los estudiantes identifiquen la congruencia entre dos triángulos a partir los criterios de congruencia, construidos mediante el problema planteado en esta tarea; con el problema propuesto en la quinta tarea (T5. Reflexión axial) se proyecta que los estudiantes construyan la *D. Reflexión axial;* finalmente con la sexta tarea (T6. Justificar) se espera que los estudiantes formulen una conjetura y que utilicen los hechos geométricos y definiciones elaborados en las tareas anteriores (sistema teórico local ) en la siguiente tabla se describe la tarea.

Las tareas de la secuencia fueron diseñadas de tal manera que era necesario el uso de material concreto, por parte de los estudiantes, para la solución de los problemas, lo que les permite mayor acercamiento al mismo en cuanto al reconocimiento de objetos geométricos, propiedades y relaciones. A continuación presentamos cada una de las tareas propuestas y materiales utilizados. La primera tarea no propone un problema a solucionar, esta se centra en la visualización, la cual, "tiene evidentemente un papel importante en la comprensión de la geometría" (Gal & Linchevski, 2010, p.165), en la siguiente tabla se describe la tarea.

**Tabla 1. Preguntas y recursos de la tarea 1**

<table>
<tr><th colspan="2">T 1. VISUALIZACIÓN</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se presentan a los estudiantes una serie de imágenes y figuras que ellos deben observar, para responder posteriormente una pregunta, que se le realiza con el objetivo de que ellos desarrollen habilidades de visualización, permitiéndoles descomponer y componer una figura, identificar sus propiedades y reconocer que una propiedad es válida, solo si esta se hace explicita mediante una notación determinada.<br>

</td></tr>
<tr><td>Preguntas</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td>¿Cuál de los dos círculos en el centro es mas grande?<br>¿Los segmentos AB y CD están alineados?<br>¿Qué puedes ver?<br>Descríbelo con tus compañeros.<br>¿Qué puedes decir de las 3 imágenes de abajo?</td><td>Proyector<br>Diferentes imágenes geométricas y no geométricas para observar.</td></tr>
</table>

En T2 se plantea el primer problema (P1), en el cual se proponen dos conjuntos de ángulos: uno, corresponde a ángulos par lineal y el otro conjunto a ángulos no par lineal. Se le pide a los estudiantes que, a partir de la observación construyan la definición (DF) de ángulos par lineal, es decir, *dos ángulos son par lineal si comparten un rayo y los otros dos rayos determinan una recta*. Posteriormente, teniendo en cuenta esta definición, en el P2 se les propone que completen una tabla escribiendo las medidas de ángulos par lineal. Nuevamente se les pide que determinen qué regularidad observan, esto los llevará a la construcción del hecho geométrico (HG) del par lineal: *si dos ángulos son par lineal, la suma de sus medidas es igual a 180.* Luego en P3 se les pregunta sobre qué ocurre si en una pareja de ángulos par lineal uno de ellos es recto, situación que les permite la construcción del *HG del par lineal recto*, es decir, *si dos ángulos son par lineal y uno de ellos es recto, el otro ángulo también es recto.*

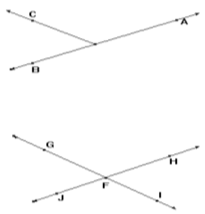
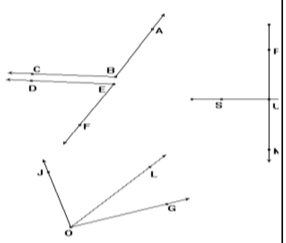
<table>
<tr><th colspan="3">T2. ÁNGULOS PAR LINEAL - P 1, P2 y P3</th></tr>
<tr><td>Observe las figuras y escriba la definición de ángulos par lineal.<br> <br>Son par lineal     No son par lineal</td><td colspan="2">A continuación, complete la tabla, registrando las medidas de los ángulos utilizados para formar el par lineal.<br><table><tr><td rowspan="2">Medidas de las parejas de ángulos que conforman par lineal</td><td>ángulo 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>ángulo 2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><th>PREGUNTAS</th><th>HG - DF</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>¿Qué son ángulos par lineal?<br>¿Observa alguna propiedad común para todas las parejas?<br>Si se tiene un ángulo recto, ¿qué se puede afirmar del ángulo que conforma lineal? Justifique su respuesta.</td><td>D. Ángulos par lineal<br>HG.. Par lineal<br>HG. Par lineal recto</td><td>Hojas de papel<br>Regla y transportador<br>Ángulos en cartón.</td></tr>
</table>

**Tabla 2. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 2**

En la T3, con P1 se les plantea a los estudiantes que dados dos puntos O y C ubiquen todos los puntos que estén a la misma distancia de C tal como lo está C. Luego se les pregunta sobre la solución dada, lo que les permite determinar la *DF de circunferencia* (*conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo C llamado centro).* Luego en P2, se les piden que ubiquen dos puntos A y B y un tercer punto C que cumpla la condición de estar a la misma distancia de A y B. Esto los lleva a la *DF de mediatríz de un segmento* (*m es la mediatriz del* $\overline{AB}$*, si esta conformada por los puntos que equidistan de A y B)* y *DF de punto medio* (*C se denomina punto medio del segmento* $\overline{AB}$ *si está entre A y B, y además equidista de A y B).*

Posteriormente en P3 se les pide que dibujen en papel los puntos A y B. Utilizando el compás, que construyan dos circunferencias del mismo radio, una con centro en el punto A y la otra con centro en el punto B de tal manera que ambas circunferencias tengan puntos en común para llegar al HG. de la mediatriz (*m es la mediatriz del* $\overline{AB}$ *si m es perpendicular* $\overline{AB}$ *y además contiene su punto medio).*

| T 3. CIRCUNFERENCIA – P1, P2 y P3 |
|---|

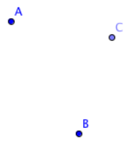
<table>
<tr><td>P1. Observe el punto O en el centro del siguiente recuadro, junto a él aparece un punto C a cierta distancia. Ubique un punto C' que esté a la misma distancia de O que el punto C.</td><td colspan="2">P2. Ubique dos puntos A y B utilizando las fichas suministradas. Ubique ahora un punto C que cumpla la condición de estar a la  misma distancia de A y B.</td><td colspan="2">P3. Dibuje los puntos A y B. Utilizando el compás, construya dos circunferencias del mismo radio, una con centro en el punto A y la otra con centro en el punto B con la condición que ambas circunferencias tengan puntos en común.<br>Utilizando colores, marque los puntos que son comunes entre dos circunferencias del mismo radio.<br>Repita la construcción anterior al menos con 7 circunferencias que tengan un radio distinto.<br>A partir del resultado de la primera actividad y los puntos resaltados con colores en la segunda actividad, formule alguna propiedad</td></tr>
<tr><td colspan="3">PREGUNTAS</td><td>HG - DF</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Cuántos puntos puede ubicar con esta condición?<br>Si encontró más de un punto con esta condición, cumplen una característica especial ¿Cuál es?<br>¿Cuál es la propiedad enunciada?<br>Al observar la recta obtenida, ¿puede afirmar sobre la existencia de alguna relación entre ésta y los dos puntos A y B? escriba la relación obtenida y justifíquela.</td><td>D. Circunferencia<br>D. Mediatriz de un segmento<br>D. Punto medio de un segmento<br>HG. Mediatriz</td><td>Lápiz y colores<br>Regla y compás<br>Tiras de lana<br>Fichas circulares (puntos) en foamy y en papel y hojas</td></tr>
</table>

**Tabla 3. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 3**

Con el P1 de la tarea cuatro, los estudiantes establecerán los criterios de congruencia. Se les facilitan diferentes triángulos con sus correspondientes ángulos y lados construidos en cartón, se les pide que construyan triángulos congruentes al dado en cartón, usando los lados y ángulos, teniendo en cuenta las condiciones dadas en la columna de casos de la tabla que se muestra a continuación.

**T4. CRITERIOE DE CONGRUENCIA – P1**

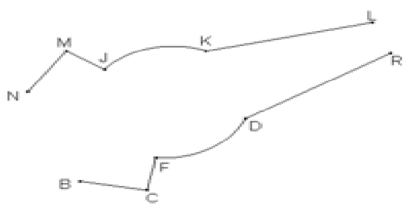
Observe el $\Delta ABC$. Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta las condiciones que se suministran.

| | Casos | ¿Cuántos triángulos se pueden construir diferentes al original? Bajo qué condiciones | ¿Corresponde a un caso anteriormente planteado? ¿Por qué lo puede decir? |
|---|---|---|---|
| Condiciones para construir el triángulo congruente | *2 tiras* | | |
| | *2 ángulos* | | |
| | *3 ángulos* | | |
| | *3 tiras y 1 ángulo* | | |
| | *3 tiras* | | |
| | *2 tiras y 1 ángulo* | | |
| | *1 tira y un ángulo* | | |
| | *1 tira y 3 ángulos* | | |
| | *1 tira y 2 ángulos* | | |

| PREGUNTAS PLANTEADAS EN LA TABLA | HG - DF | RECURSOS |
|---|---|---|
| ¿Cuántos triángulos se pueden construir diferentes al original?<br>Bajo qué condiciones<br>¿Corresponde a un caso anteriormente planteado?<br>¿Por qué lo puede decir? | HG Criterios de congruencia | Triángulos<br>Ángulos en cartón<br>Segmentos en cartón |

**Tabla 4. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 4**

En la tarea cinco, el P1 propone a los estudiantes agregar un segmento a la figura A y luego determinar su pareja en la figura T teniendo en cuenta una recta *m* (tabla 5 figura en el primer cuadro). Por otro lado, en P2 dados cuatro puntos construir la pareja de cada uno sin doblar la hoja. La solución a estos problemas los llevará a la construcción de la DF de reflexión axial. *Una transformación es una reflexión axial, con eje m, si a cada punto A del plano se le hace corresponder un punto A' de tal manera que AP=AP',* $P \in m$ *y m es mediatriz del* $\overline{AA'}$.

<table>
<tr><th colspan="3">T 5. REFLEXIÓN AXIAL – P1 y P2</th></tr>
<tr><td>Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas y diferencias entre las partes que componen cada figura.<br>

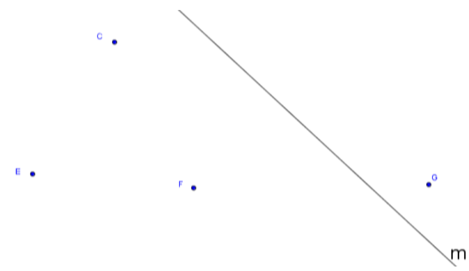
Añada hacia la izquierda un trozo rectilíneo más a la figura A (compuesta por los puntos N, M, J, K y L) a partir del punto N. Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la figura T (compuesta por los puntos B, C, F, D y R).</td>
<td colspan="2">En la siguiente imagen aparecen una recta m y cuatro puntos C, E, F y G. Construya la pareja de cada uno de tales puntos sin doblar la hoja.<br>
</td></tr>
<tr><th>PREGUNTAS</th><th>HG - DF</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>¿Cómo lo hizo?, descríbalo.<br>¿Qué relaciones encuentra entre la recta m y cada segmento trazado entre dos puntos correspondientes?</td><td>D. Reflexión axial</td><td>Regla, hojas, lápiz</td></tr>
</table>

**Tabla 5. Relación del problema, preguntas y recursos de la tarea 5**

En T6 (tabla 6), con P1 se pretende que los estudiantes formulen una conjetura y que utilicen los hechos geométricos y definiciones elaborados en las tareas anteriores (sistema teórico local –ver tabla 7-) para justificar la misma. Para este problema se cuentan con diferentes escenas en las cuales al realizar la actividad propuesta obtendrán una parejas de triángulos congruentes, teniendo en cuenta esto ellos deben establecer la conjetura y justificarla.

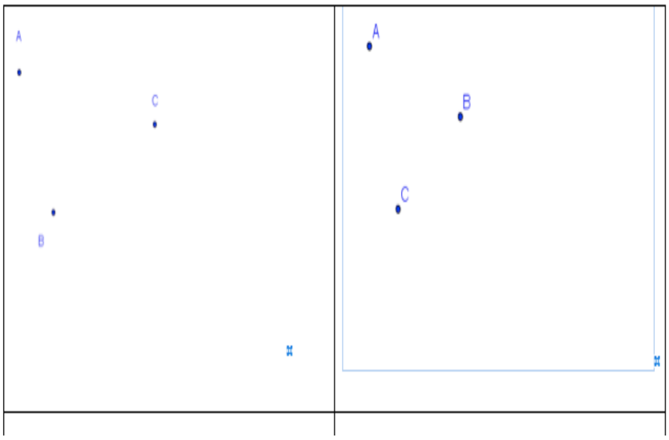
<table>
<tr><th colspan="3">T 6. JUSTIFICAR – P1</th></tr>
<tr><td colspan="2">A continuación se presentan algunas escenas y en cada una aparecen los puntos A, B y C. En cada escena construya la simetría central B' del punto B y la simetría central A' del punto A.<br><br>A medida que realiza la construcción de los puntos simétricos B' y A' con respecto a C, escriba los pasos seguidos y los conocimientos geométricos puestos en juego.<br><br>Observe cada una de las escenas, y utilizando el compás y la regla, establezca relaciones entre el $\overline{BC}$ y $\overline{B'C}$. A partir de lo observado, escriba una conjetura.<br><br>A continuación, en una tabla a tres columnas, justifíquela. Apóyense en los conocimientos geométricos utilizados para la construcción de los puntos B' y C'.</td><td>
</td></tr>
<tr><th>PREGUNTAS</th><th>HECHOS GEOMÉTRICOS- DEFINICIONES</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>¿Qué tengo?<br><br>¿Qué se?<br><br>¿Qué concluyo?</td><td>Todos los que hacen parte del sistema teórico local, construido durante la secuencia de enseñanza.</td><td>Hojas con las escenas<br><br>Papel acetato, marcadores<br><br>Lápices</td></tr>
</table>

**Tabla 6. Recursos e instrucciones de la tarea 6**

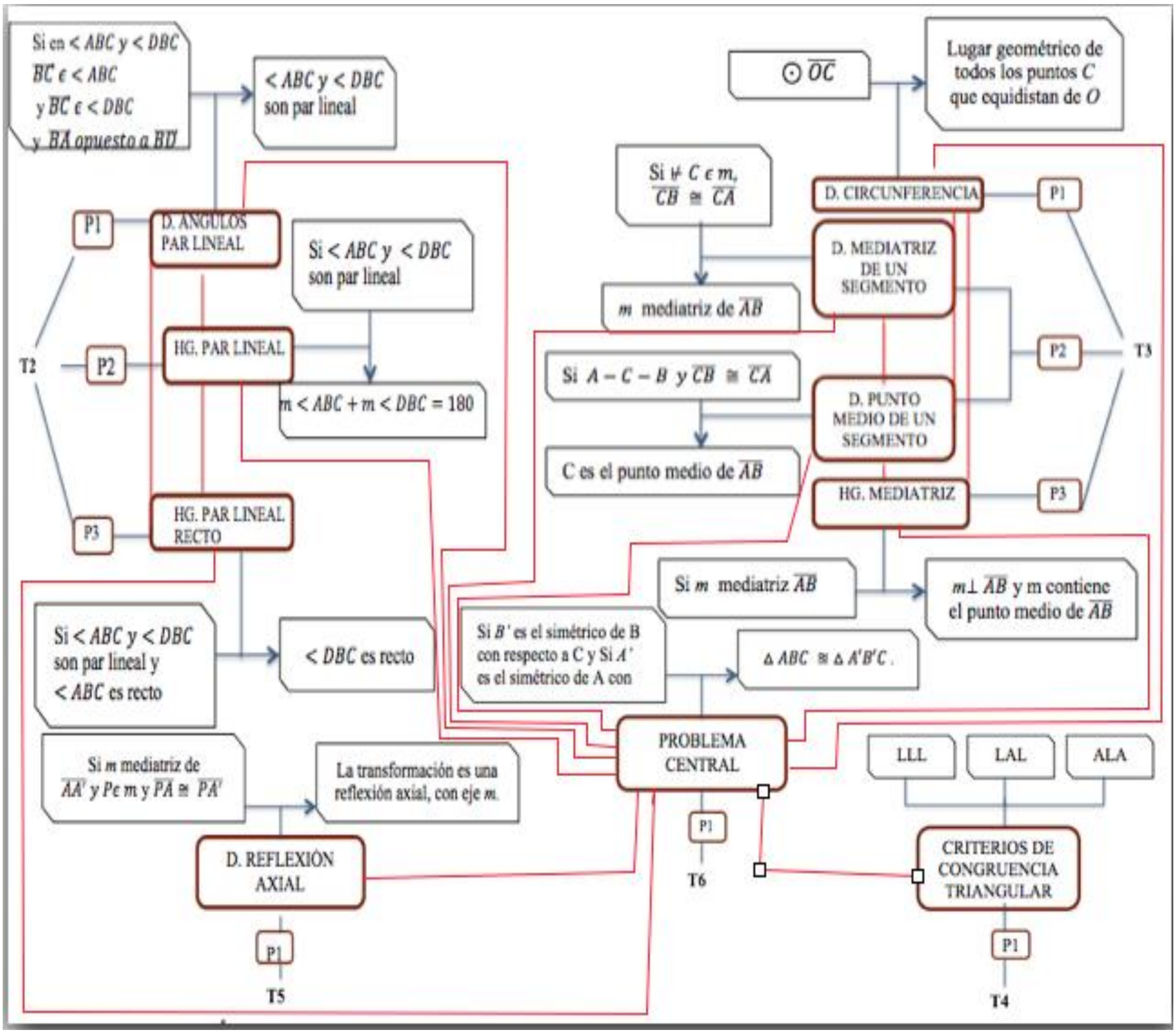
En la trayectoria de aprendizaje propuesta se plantea como hipótesis que, los estudiantes realizaran argumentos en la medida que se involucran en la AD y que estos irán evolucionando, ya que por un lado la secuencia propuesta les permitirá mediante la solución de los problemas descubrir propiedades que pueden validar, con elementos teóricos a los que han llegado en problemas anteriores. Y por otro lado, el acompañamiento del profesor y la interacción del estudiante con el profesor y sus compañeros , le permitirá que los argumentos sustanciales que inicialmente él propone se transformen en argumentos analíticos, así como un aumento de la construcción de argumentos analíticos por parte de los estudiantes en la medida que avanzan en el desarrollo de la secuencia.

En la siguiente tabla se presenta el sistema teórico local que se pretende desarrollar con la aplicación de la secuencia, de acuerdo a la parea y al problema.

| Tarea | Prob. | Elemento Teórico |
|---|---|---|
| T2 | P1 | **D. Ángulos par lineal:** Dos ángulos son par lineal si comparten un rayo y los otros dos rayos determinan una recta. |
| | P2 | **HG. Par lineal:** Si dos ángulos son par lineal, la suma de sus medidas es igual a180° |
| | P3 | **HG. Par lineal recto:** Si dos ángulos son par lineal y uno de ellos es recto, el otro ángulo también es recto. |
| T3 | P1 | **D. Circunferencia:** Circunferencia es el lugar geométrico de puntos C que equidistan de un punto fijo O llamado centro. |
| | P2 | **D. Mediatriz de un segmento:** m es la mediatriz del $\overline{AB}$, si esta conformada por los puntos que equidistan de A y B.<br>**D. Punto medio de un segmento:** C es punto medio del $\overline{AB}$ si está entre A y B, y además equidista de A y B. |
| | P3 | **HG. Mediatriz:** m es la mediatriz del $\overline{AB}$ si m es perpendicular $\overline{AB}$ y además contiene su punto medio. |
| T4 | P1 | **Criterios de congruencia triangular:** Dos triángulos son congruentes (3 lados y 3 ángulos congruentes) cuando se cumple una de las siguientes situaciones:<br>Si los lados de los triángulos son congruentes **(LLL)**<br>Si dos pares de lados correspondientes son congruentes y los ángulos entre ellos también son congruentes **(LAL)**<br>Si dos pares de ángulos son congruentes y los lados comunes a ellos también lo son **(ALA)** |
| T5 | P1 | **D. Reflexión axial:** Una transformación es una reflexión axial, con eje m, si a cada punto A del plano se le hace corresponder un punto A’ de tal manera que, las distancias AP y AP’ son iguales, P$\in$ m y la recta m es mediatriz del $\overline{AA'}$. |

**Tabla 7. Elementos teóricos que constituyen el sistema teórico local.**

En el esquema 10 se observa como se relacionan los problemas de cinco de las tareas planteadas, ya que como se dijo anteriormente la T1 (Visualización) no tiene por objetivo el desarrollo de ningún elemento teórico. También es posible en el esquema observar como cada uno de los elementos teóricos de una tarea se relacionan entre sí, pero los elementos teóricos de las tareas no se relacionan con los elementos teóricos de otra tarea, excepto en el caso de la T6 que propone el problema central el cual para ser desarrollado requiere de todos los elementos teóricos que se han desarrollado en las tareas anteriores.




**Esquema 10. Sistema teórico local previsto en la fase de planeación.**

Con el fin de acopiar los datos, que en una etapa posterior se analizaron, se decidió que los instrumentos usados para la toma de registros fueron: las hojas de trabajo de los estudiantes, las grabaciones de video de las clases y transcripciones de apartes de los videos. En cuanto a las hojas de trabajo de los estudiantes, son aquellas que contenían las tareas y fueron solucionadas por ellos. En estas es posible evidenciar el trabajo realizado por los estudiantes en los grupos, así como las estrategias que ellos utilizaron para solucionar la situación. Además permitieron tener acceso a la información, que en ocasiones, fue pasada por alto en la grabación e incluso en el desarrollo de la actividad.

Las grabaciones de video fueron realizadas por un estudiante del grupo. Se hacían desde el inicio de la clase, cuando la profesora presentaba la tarea a los estudiantes, hasta el momento en que finalizaba la puesta en común de las soluciones propuestas con toda la clase, se hizo mayor énfasis en los trabajos de los grupos y en la socialización final, fueron grabados 9 grupos en grado séptimo y entre 11 y 9 grupos de grado octavo, registrando los eventos en los cuales se observa la interacción entre los integrantes de cada grupo y la interacción entre el grupo y la profesora, también se buscaba registrar los razonamientos de los estudiantes en el momento de solucionar el problema, las justificaciones sobre el porqué utilizaban determinadas estrategias, elementos teóricos y relaciones entre los objetos geométricos, así como los aportes realizados por los estudiantes en el momento de llegar a una solución general del problema y la construcción de los elementos teóricos por el grupo. En cuanto a las transcripciones, estas se realizaron cuando en un fragmento de video se evidenciaban aspectos relevantes a tratar en la investigación, como los mencionados en el párrafo anterior.

### *FASE DE EXPERIMENTACIÓN*

El Experimento de Enseñanza se realizó en el Colegio Distrital Hunza, ubicado en Bogotá, con 50 estudiantes del grado 702 y 801 de la jornada tarde. La profesora que realizó la intervención en el aula es docente de esta institución. Realizando un balance entre lo planeado inicialmente y lo realmente ejecutado, el resultado fue el siguiente: la secuencia completa se proyectó para ser desarrollada entre abril y septiembre del año 2014. Desafortunadamente a causa del corto tiempo de la clase y de las actividades institucionales, sólo fue posible desarrollar las tres primeras tareas de la secuencia en grado séptimo, mientras en grado octavo se desarrollaron completamente las dos primeras tareas y sólo dos de los tres problemas de la tercera tarea. En la siguiente tabla se relacionan las tareas, las fechas en las que se aplicaron y el número de clases empleadas.

| **SESIÓN** | **FECHA** | | **Nº CLASES (45 minutos c/u)** | |
|---|---|---|---|---|
| | **Séptimo** | **Octavo** | | |
| 1. Visualización | 04-Abril/25-Abril | 21-Mayo/4-Jun | Cuatro | Tres |
| 2. Par lineal | 30-Abril/ 08-Agosto | 16- Jun/03-Sep | Once | Seis |
| 3. Circunferencia y mediatriz | 22-Ago/01-Nov | 17-Sep/5-Nov | Trece | Seis |

**Tabla 8. Cronograma de aplicación de las tareas.**

Después de cada tarea y de cada microanálisis fue necesario introducir otras tareas, que les permitieran a los estudiantes tener las bases conceptuales suficientes, para el desarrollo de las siguientes. Por ejemplo, después de la tarea de visualización, se diseñó y aplicó la tarea de *D. Clases de ángulos* a los estudiantes de grado séptimo, la cual les permitió recordar la definición de ángulo, su medida y su clasificación, dificultad observada en los conocimientos previos de estos estudiantes y que eran necesarios para abordar el problema de ángulos par lineal; esta tarea no se desarrollo con los estudiantes de octavo, ya que en los conocimientos que poseían no se observo esta dificultad. Otro problema que se presentó fue el mantener los mismos grupos durante todas las sesiones ya que a lo largo del año escolar se retiraron varios estudiantes e ingresaron otros, lo que llevó a modificaciones en los grupos. En cada sesión, la aplicación de la secuencia se desarrolló en el orden que se había planeado durante el diseño del Experimento de Enseñanza, evidenciando los tres momentos mencionados anteriormente.

#### *ANÁLISIS RETROSPECTIVO*

Teniendo en cuenta que mediante el Experimento de Enseñanza, se pretende favorecer los procesos de argumentación de los estudiantes, el análisis requiere tipificar los argumentos que ellos realizan, durante los procesos de conjeturar, justificar y definir. Este último, aunque no es un proceso de la AD como los otros dos, se incluye en la tipificación ya que en la secuencia varios de los problemas propenden por el establecimiento de una definición de los objetos geométricos involucrados. Este tipo de problemas se incluyeron en la secuencia diseñada dado el desconocimiento, por parte de los estudiantes, de los objetos geométricos presentes allí. Esta tipificación se realiza con el fin de evidenciar en qué momento estos son argumentos sustanciales y cuándo son argumentos matemáticos analíticos.

Teniendo en cuenta el objetivo del presente trabajo y el marco teórico en el cual se fundamenta, se crearon las categorías de análisis. Mediante estas se relaciona la AD con la tipificación de los argumentos propuesta por Toulmin (2007), relación respaldada por la investigación realizada por Krummheuer (1995), en la cual se muestra cómo los procesos de argumentación se presentan dentro de un marco de interacciones sociales que tienen lugar en el interior del aula de clases, en el cual se gestiona un ambiente con características afines con la AD propuesta por Camargo et al. (2014).

En la siguiente tabla, que presenta las categorías que se tuvieron en cuenta en el análisis de los datos. Se evidencian dos de los tres momentos de la clase mencionados en el apartado de la AD: trabajo grupal (G) y puesta en común (P); en ellos cuales se desarrollan los procesos de argumentación por parte de los estudiantes. En cada uno de estos momentos es posible evidenciar procesos de definir (D), conjeturar (C) y justificar (J), en los cuales los estudiantes realizan argumentos, que pueden ser sustanciales (S) o analíticos (A). Los argumentos construidos por los estudiantes fueron analizados de acuerdo con su estructura y características. A cada argumento analizado se le atribuye un código, formado por tres letras mayúsculas y una minúscula. En cada uno, la primera letra identifica el momento de la clase en el cual se realizó el argumento (G, P), la segunda hace referencia al proceso en el cual se presentó (D, C, J), la tercera letra corresponde al tipo de argumento realizado (A, S) y la cuarta letra (minúscula) corresponde a la tipicicación del argumento. Por ejemplo, el código GCSb indica que es un argumento que se realizó cuando los estudiantes estaban trabajando en grupo (G), durante el proceso de conjeturar (C), de tipo sustancial (S), incompleto pero con respaldo teórico (b).

| | Procesos | | Argumentos | Tipos de argumetnos | Códigos |
|---|---|---|---|---|---|
| TRABAJO GRUPAL (G) | Definicion (D) | | Sustanciales (S) | a. Incompleto sin garantía o respaldo (D, C) | GDSa |
| | | | | b. Con garantía teórica (D, G, C) | GDSb |
| | | | | c. Incompleto con respaldo teórico (D, R, C) | GDSc |
| | | | | d. Incompleto con garantía empírica ( D, G, C) | GDSd |
| | | | | e. Incompleto con respaldo empírico (D, R, C) | GDSe |
| | | | | f. El respaldo no explicita la conclusión (D, R,C) | GDSf |
| | | | | g. La garantía no explicita la conclusión (D,G, C) | GDSg |
| | | | | h. La garantía o el respaldo es la conclusión (D, C, C) | GDSh |
| | | | | i. La garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (D,G,C) | GDSi |
| | | | Analíticos (A) | a. La garantía está implícita (D,R,C) | GDAa |
| | | | | b. Incompleto sin respaldo (D, C) | GDAb |
| | | | | c. Se evidencia garantía y respaldo (D,G,R,C) | GDAc |
| | Actividad Demostrativa [AD] | Conjeturar(C) | Sustanciales (S) | a. Incompleto sin garantía o respaldo (D, C) | GCSa |
| | | | | b. Con garantía teórica (D, G, C) | GCSb |
| | | | | c. Incompleto con respaldo teórico (D, R, C) | GCSc |
| | | | | d. Incompleto con garantía empírica ( D, G, C) | GCSd |
| | | | | e. Incompleto con respaldo empírico (D, R, C) | GCSe |
| | | | | f. El respaldo no explicita la conclusión (D, R,C) | GCSf |
| | | | | g. La garantía no explicita la conclusión (D,G, C) | GCSg |
| | | | | h. La garantía o el respaldo es la conclusión (D, C, C) | GCSh |
| | | | | i. La garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (D,G,C) | GCSi |
| | | | Analíticos (A) | a. La garantía está implícita (D,R,C) | GCAa |
| | | | | b. Incompleto sin respaldo (D, C) | GCAb |
| | | | | c. Se evidencia garantía y respaldo (D,G,R,C) | GCAb |
| | | Justificar(J) | Sustanciales (S) | a. Incompleto sin garantía o respaldo (D, C) | GJSa |
| | | | | b. Incompleto con garantía teórica (D, G, C) | GJSb |
| | | | | c. Incompleto con respaldo teórico (D, R, C) | GJSc |
| | | | | d. Incompleto con garantía empírica ( D, G, C) | GJSd |
| | | | | e. Incompleto con respaldo empírico (D, R, C) | GJSe |
| | | | | f. El respaldo no explicita la conclusión (D, R,C) | GJSf |
| | | | | g. La garantía no explicita la conclusión (D,G, C) | GJSg |
| | | | | h. La garantía o el respaldo es la conclusión (D, C, C) | GJSh |
| | | | | i. La garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (D,G,C) | GJSi |
| | | | Analíticos (A) | a. La garantía está implícita (D,R,C) | GJAa |
| | | | | b. Incompleto sin respaldo (D, C) | GJAb |
| | | | | c. Se evidencia garantía y respaldo (D,G,R,C) | GJAc |

**Tabla 9. Categorías y subcategorías I.**

En la tabla de los ángulos es copia de la que realizaron los estudiantes durante la clase, en esta la pareja de ángulos en la tercera columna es incorrecta, error del estudiante que propuso la pareja y que posteriormente es corregido.

| | Proceso | | Argumento | Tipos de argumetnos | Cód |
|---|---|---|---|---|---|
| PUESTA EN COMÚN (P) | Definir (D) | | Sustanciales (S) | a. Incompleto sin garantía o respaldo (D, C) | PDSa |
| | | | | b. Con garantía teórica (D, G, C) | PDSb |
| | | | | c. Incompleto con respaldo teórico (D, R, C) | PDSc |
| | | | | d. Incompleto con garantía empírica ( D, G, C) | PDSd |
| | | | | e. Incompleto con respaldo empírico (D, R, C) | PDSe |
| | | | | f. El respaldo no explicita la conclusión (D, R,C) | PDSf |
| | | | | g. La garantía no explicita la conclusión (D,G, C) | PDSg |
| | | | | h. La garantía o el respaldo es la conclusión (D, C, C) | PDSh |
| | | | | i. La garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (D,G,C) | PDSi |
| | | | Analíticos (A) | a. La garantía está implícita (D,R,C) | PDAa |
| | | | | b. Incompleto sin respaldo (D, C) | PDAb |
| | | | | c. Se evidencia garantía y respaldo (D,G,R,C) | PDAc |
| | Actividad Demostrativa [AD] | Conjeturar(C) | Sustanciales (S) | a. Incompleto sin garantía o respaldo (D, C) | PCSa |
| | | | | b. Incompleto con garantía teórica (D, G, C) | PCSb |
| | | | | c. Incompleto con respaldo teórico (D, R, C) | PCSc |
| | | | | d. Incompleto con garantía empírica ( D, G, C) | PCSd |
| | | | | e. Incompleto con respaldo empírico (D, R, C) | PCSe |
| | | | | f. El respaldo no explicita la conclusión (D, R,C) | PCSf |
| | | | | g. La garantía no explicita la conclusión (D,G, C) | PCSg |
| | | | | h. La garantía o el respaldo es la conclusión (D, C, C) | PCSh |
| | | | | i. La garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (D,G,C) | PCSi |
| | | | Analíticos (A) | a. La garantía esta implícita (D,R,C) | PCAa |
| | | | | b. Incompleto sin respaldo (D, C) | PCAb |
| | | | | c. Se evidencia garantía y respaldo (D,G,R,C) | PCAc |
| | | Justificar(J) | Sustanciales (S) | a. Incompleto sin garantía o respaldo (D, C) | PJSa |
| | | | | b. Incompleto con garantía teórica (D, G, C) | PJSb |
| | | | | c. Incompleto con respaldo teórico (D, R, C) | PJSc |
| | | | | d. Incompleto con garantía empírica ( D, G, C) | PJSd |
| | | | | e. Incompleto con respaldo empírico (D, R, C) | PJSe |
| | | | | f. El respaldo no explicita la conclusión (D, R,C) | PJSf |
| | | | | g. La garantía no explicita la conclusión (D,G, C) | PJSg |
| | | | | h. La garantía o el respaldo es la conclusión (D, C, C) | PJSh |
| | | | | i. La garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (D,G,C) | PJSi |
| | | | Analíticos (A) | a. La garantía esta implícita (D,R,C) | PJAa |
| | | | | b. Incompleto sin respaldo (D, C) | PJAb |
| | | | | c. Se evidencia garantía y respaldo (D,G,R,C) | GJAc |

**Tabla 10. Categorías y subcategorías II.**

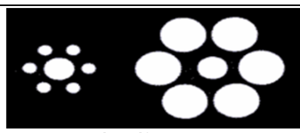
Para realizar el análisis de los datos inicialmente se tomó la información acopiada en grabaciones, transcripciones y las hojas de trabajo de los estudiantes correspondientes a cada una de las sesiones. Luego la información correspondiente a los argumentos se analizó a la luz de las categorías y subcategorías presentadas, posteriormente se representó está información en gráficas, diagramas y tablas, que permitieron un acercamiento más efectivo a los datos obtenidos para su interpretación y obtención de las conclusiones de la investigación, esto se evidencia en los dos siguientes capítulos.

# ANÁLISIS DE DATOS

El análisis retrospectivo de la información recolectada se apoyó fundamentalmente en todas las grabaciones de video de las sesiones de clase de los grados séptimo y octavo donde se implementó la secuencia presentada en el capítulo anterior. De estas grabaciones se elaboraron transcripciones de los diálogos sostenidos entre profesor y estudiantes en cada sesión de clase. Posteriormente se tuvieron en cuenta aquellos momentos de la AD considerados para la elaboración de las categorías de análisis: trabajo grupal y puesta en común. Decisión que atendía al foco de esta investigación, el cual era el análisis de los argumentos elaborados por los estudiantes al resolver las tareas propuestas. La información que se analizó de los fragmentos de transcripciones fueron los argumentos de los estudiantes a la luz de las categorías. En el análisis, cada estudiante se nombró con la letra E y un número para identificar intervenciones de distintos estudiantes. Cuando varios estudiantes intervenían al mismo tiempo, se utilizó la letra V, con la letra P se identificaron las intervenciones de la profesora. En este capítulo se presenta el análisis de todos los argumentos producidos por los estudiantes de grado séptimo, en cuanto al análisis de los argumentos producidos por los estudiantes de grado octavo es un anexo del trabajo de grado.

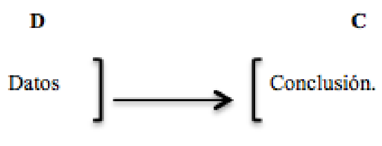
## T1. VISUALIZACIÓN

Esta tarea tiene como objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización, permitiéndoles descomponer una figura y en ella reconocer otras, determinar sus propiedades y reconocer que una propiedad es válida, solo si esta se hace explícita a través del uso de una notación específica (congruencia, paralelismo, perpendicularidad). En el desarrollo de la actividad los argumentos dados por los estudiantes, frente a las preguntas planteadas por el profesor, se producen cuando conjeturan al observar o comparar las figuras. A continuación se presenta el diálogo que tuvo lugar alrededor de la primera figura presentada a los estudiantes.

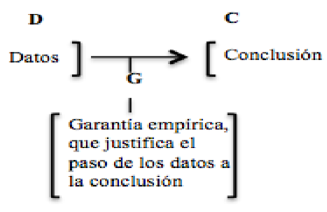
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | P | ¿Cuál de los dos círculos en el centro es más grande?, ustedes deben convencerme de cuál es o de cuál no es. |  Representación gráfica 1 |
| 2 | E1 | [Señala con su mano indicando cuál sería]. **Ese de ahí.** | |
| 3 | P | ¿Cuál? | |
| 4 | E2 | **El de la izquierda.** | |
| 5 | P | ¿Este? | |
| 6 | E3 | **Los dos.** | |
| 7 | E2 | No. | |
| 8 | P | Este es más cual, ¿Este? [Señalando uno de los círculos que rodean el otro en la figura de la derecha] | |
| 9 | E4 | Ese . | |
| 10 | P | ¿Este es el más grande? | |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | E4 | Sí. |
| 12 | P | De todos, pero dicen cuál de los círculos en el centro, o sea estamos comparando este círculo y este círculo. [señala los dos círculos que están en la mitad] |
| 13 | E1 | El de allá. Profe, borró un círculo. |
| 14 | P | ¿Este es el más grande? [señala el círculo de la izquierda]. |
| 15 | E4 | Sí. |
| 16 | P | Bueno, acabamos de borrar uno, bueno miremos a ver, ¿Por qué dicen que este es el más grande? |
| 17 | V | **Por el tamaño**. |
| 18 | E2 | **Porque está entre los chiquitos y el grande está entre los pequeños. Se puede visualizar que el de la izquierda es más grande que el de la derecha**. |
| 19 | P | El de la izquierda es más grande que el de la derecha. Bien, vamos a mirar. Entonces… |
| 20 | E3 | Profesora ya sé por qué. |
| 21 | P | Dime. |
| 22 | E3 | **El de allá está más lejos [señala la imagen de la derecha] y este está más cerquita [señala la imagen de la izquierda].** |
| 23 | P | Ah, este está más lejos y este está más cerca. |
| 24 | E4 | [dice algo, pero no se le entiende]. |
| 25 | P | A ver Sara, más fuerte lo que estás diciendo porque de pronto no queda en la grabación. |
| 26 | E4 | **Que posiblemente todos, el círculo de la derecha es más grande que el de la izquierda y los círculos grandes lo hace ver más chiquito.** |

Inicialmente estos argumentos se caracterizan por que sólo tienen datos y conclusión, como se puede observar en [2, 4 y 6]. Los estudiantes sólo respondieron a la pregunta ¿cuál de los dos círculos en el centro es más grande? [1], sin dar algún tipo de explicación, produciendo argumentos sustanciales incompletos sin respaldo o garantía **[PCSa]** (ver esquema 10). Sólo cuando la profesora les pregunta "¿Por qué dicen que este es el más grande?" [16], ellos empiezan a construir una garantía para justificar el paso de los datos a su conclusión, algunas de las repuestas se presentan en [17, 18 y 22], completando los diferentes argumentos con una garantía de tipo empírico, ya que se basa en la observación realizada por los estudiantes los que les permite construir argumentos **[PCSd]** es decir, argumentos sustanciales con garantía empírica. En [26] E4 realiza una garantía de tipo empírico aunque no se basa en la observación, si no en una suposición, este también es un argumento de tipo **[PCSd]** (ver esquema 11)**.**

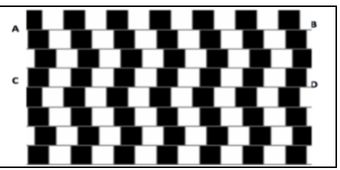



**Esquema 11. Argumento PCSa**




**Esquema 12. Argumento PCSd**

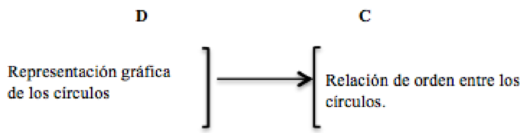
Para la siguiente figura se les pedía que determinaran qué puntos estaban más separados, *A* y *C* o *B* y *D*. La conversación que tuvo lugar en torno a esta figura se muestra a continuación.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | P | […] En esta diapositiva vamos a garantizar quién está más separado. Miremos los puntos *A* y *C* [Señala los puntos *A* y *C* de la imagen que se muestran en la diapositiva] y los puntos *B* y *D*. [Señala los puntos *B* y *D*]. |  |

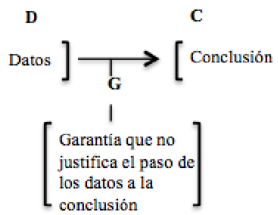
| | | |
|---|---|---|
| | | Representación gráfica 2 |
| 30 | **E1** | **Iguales.** |
| 31 | P | Si alguien quiere decir, levante la mano. [un estudiante levanta la mano] ¿Cuál está más separado? |
| 32 | **E2** | ***B* y *D*** |
| 33 | P | ¿*B*, *D* están más separados? |
| 34 | E5 | Sí. |
| 35 | E6 | No. |
| 36 | E7 | Iguales, son iguales. |
| 37 | P | O sea, si es más grande es porque están más separados. |
| 38 | E2 | No, están más separados *B* y *D*. |
| 39 | P | *B* y *D* están más separados. ¿Todos están seguros de eso?, ¿Tu que dices? [pregunta a E1] |
| 40 | E1 | Sin comentarios profe. |
| 41 | P | ¿*B* y *D* es el más grande? |
| 42 | V | Sí |
| 43 | **P** | **¿Sí? Resulta. A ver [E1] tú dices que son iguales ¿Por qué?** |
| 44 | **E1** | **Profe porque, es que digamos, uno mira así y uno cree que uno es el más grande que el otro, pero uno nunca sabe.** |
| 45 | P | ¿Cómo podrían? … ¿qué podríamos hacer para saber si son iguales o no? |
| 46 | E3 | Medir. |
| 47 | P | Medirlos, ¿cierto? Entonces ¿Quién viene y mide? |
| 48 | V | [Los estudiantes en su gran mayoría levantan la mano porque quieren medir] Yo, yo, yo quiero. [Pasa una estudiante a medir con una regla grande] |
| 49 | E | Es la de este [Señala la distancia entre *B* y *D*] |
| 50 | P | ¿Seguro? |
| 51 | **E3** | **Profe yo digo que están iguales.** |
| 52 | P | Porque dices que están guales. |
| 53 | **E4** | **Son iguales, porque están a la misma distancia y tienen el mismo número de casillas.** |
| 54 | P | Tienen el mismo número de casillas, de la misma distancia. |
| 55 | **E2** | **Profe, profe, yo digo que están iguales porque es que están como torcidos y se ve está más grande que la de allá.** |
| 54 | **E1** | [Los estudiantes hablan al mismo tiempo. En particular E1 quiere hablar] **profe, profe, por el cuadrado, entonces parece como si uno fuera más grande que el otro, pero… son iguales, porque entre los dos hay las misma cantidad de cuadrados.** |

En el caso de E1, él da a conocer sólo su conjetura [30], sin apoyo de alguna garantía, es decir un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PCSa]** (ver esquema 12). Cuando la profesora les pregunta por un motivo a tal afirmación, E1 empieza a elaborar una garantía, pero esta no justifica el paso de los datos a la conclusión [42, 54], lo que caracteriza un argumento sustancial en el que la garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión **[PCSi]** (ver esquema 13). Posteriormente, E1 expone otra garantía en la cual él justifica que hay la misma separación, por la cantidad de cuadrados entre los dos puntos, es decir, una garantía empírica que sí justifica la conclusión dada a partir de los datos, argumento sustancial con garantía empírica [**PCSd]**. E2 en [32], también realizó un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PCSa]**, a pesar de que al inicio E2 trató de defender su argumento, fue convencido de que E1 tenía razón [53]. E4 también desarrolla un argumento sustancial con garantía empírica [**PCSd]**, relacionado con el de E1, aunque en este caso el estudiante desde el inicio planteó su argumento con conclusión y garantía [51].

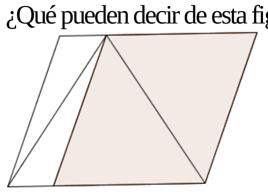
En la segunda parte de la clase se mostraron algunas representaciones gráficas de objetos geométricos, con las cuales se pretendía que ellos identificaran algunas propiedades geométricas que a primera vista allí estaban presentes y reconocieran la importancia de los convenios de notación para garantizar el cumplimiento de propiedades o relaciones geométricas. Por ejemplo, la intención de la primera representación gráfica era que los estudiantes identificaran propiedades de paralelismo, perpendicularidad, entre lo lados, congruencia entre los ángulos y los tipos de cuadriláteros.



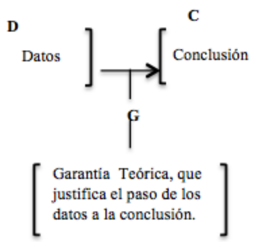

**Esquema 13. Argumento PCSa**



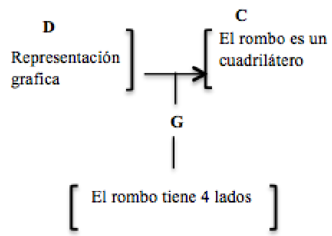

**Esquema 14. Argumento PCSi**

| | | |
|---|---|---|
| 55 | P | ¿Qué pueden decir de esta figura?  Representación gráfica 3 — En la clase pasada habían dicho que este era un rectángulo, pero habíamos dicho que para que fuera un rectángulo sus lados opuestos deben ser iguales y si nosotros miramos aparentemente podría ser, pero la otra condición es que los ángulos sean iguales, que sean de noventa grados perdón y estos ángulos no se ven de noventa grados. |
| 56 | **E1** | **Hay un cuadrado.** |
| 57 | **E2** | **No.** |
| 58 | P | Bueno, tú dices que un cuadrado (dirigiéndose a una E2), pero ella dice que no puede ser un cuadrado esta figura. |
| 59 | **E2** | **Porque nadie nos garantiza si tiene noventa grados.** |
| 60 | P | O sea, lo que está diciendo ella es que nada nos garantiza que aquí tengamos noventa grados, es más, ¿será que hay algo que nos garantice, que nos garantizaría que estos lados son iguales? |
| 61 | V | Midiéndolos. |
| 62 | P | No los podemos medir, en este momento debemos es solo mirar la figura y la figura por sí misma … |
| 63 | E1 | Profe ahí está corrida y arriba también. |
| 64 | P | Qué tal que esta mida nueve y este mida ocho. No lo podemos medir. Bueno parece, pareciera, ni siquiera como decía ella no es un cuadrado porque estos ángulos no se ven de noventa, pareciera. ¿Qué clase de figura es? |
| 65 | V | Un rombo. |
| 66 | P | Un rombo ya lo había dicho E1. |
| **67** | **E3** | **Pirámide.** |
| **68** | P | Ya habíamos visto que se ve una pirámide, pero ya hemos trabajado una figura, ¿esta figura parece un qué? |
| **69** | **E4** | **Cuadrado, cuadrilátero.** |
| **70** | P | Paralelo…, bueno es un cuadrilátero porque tiene cuatro lados. |
| **71** | **E5** | **Paralelogramo.** |
| **72** | P | Paralelogramo, parece, pero no, nada, nada ahí nos garantiza que sea un paralelogramo |
| **73** | **E4** | **El rombo, parece un cuadrilátero y el grande también.** |
| 74 | **P** | **¿Será que el rombo parece un cuadrilátero o es un cuadrilátero?** |
| 75 | **E6** | **Sí, el rombo es cuadrilátero, tiene cuatro lados.** |

En este momento de clase, los argumentos presentados por los estudiantes en la mayoría de los casos son sustanciales sin garantía o respaldo [**PCSa**], como se puede observar en el caso de E1, E3, E4 y E5 durante las intervenciones [56, 67, 69 y 71] respectivamente. Otro tipo de argumento que podemos observar es el realizado por E2 [57], quien manifiesta que el cuadrilátero sombreado no es un cuadrado y para ello utiliza como garantía el no cumplimiento de una propiedad del cuadrado en la figura [59]. Este último es ejemplo de un argumento sustancial con garantía teórica [**PCSb]** (ver esquema 14). E6, quien presenta una conclusión acompañada de una garantía teórica [75], que corresponde a una de las propiedades de la figura, también realiza un argumento Sustancial con garantía teórica [**PDSb]** ya que hace referencia a que un rombo es una figura geométrica que tiene cuatro lados (ver esquema 15).

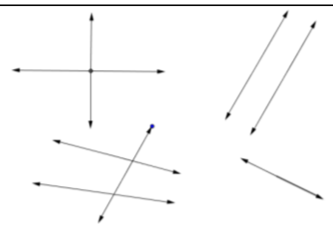



**Esquema 15. Argumento PCSb**



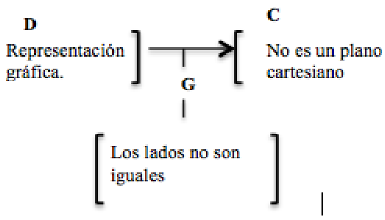

**Esquema 16. Argumento PDSb**

Otra representación gráfica presentada a los estudiantes en esta sesión de la clase, se observa en [76], es analizada en torno a la siguiente conversación. El objetivo de estas imágenes era que los estudiantes reconocieran relaciones entre rectas y los ángulos que se determinan entre rectas al intersecarse.

| | | |
|---|---|---|
| 76 | V | Ush [algunos estudiantes expresaron sorpresa al ver la siguiente imagen que la profesora estaba mostrando]  Representación gráfica 4 |
| 77 | P | Bueno, vamos a mirar. ¿Qué ven aquí? |
| 78 | Es | Una X, un plano cartesiano. |
| 79 | P | ¿Quién quiere hablar?, levante la mano. |
| **80** | **E1** | **Un plano cartesiano.** |
| 81 | P | ¿Un plano cartesiano? |
| **82** | **E2** | **No, porque los lados no están iguales.** |
| 83 | P | ¿Para que sea un plano cartesiano tienen que ser iguales? |
| 84 | Es | No. Profe es una cruz. |
| 85 | P | O sea ¿Que ven ahí ustedes? |
| **86** | **E3** | **Dos líneas paralelas. [refiriendose a la figura las de rectas que parecen ser perpendiculares]** |
| 87 | P | A ver ¿dos líneas paralelas? |
| 88 | Es | Sí. |
| 89 | P | ¿Qué son líneas paralelas? |
| 90 | E4 | Rectas. |
| 91 | P | Dos líneas rectas; y ¿qué tienen de especial las paralelas? |
| **92** | **E5** | **Que siempre son iguales las distancias entre las dos rectas.** |
| **93** | **E4** | **¿Qué un ángulo es igual a otro?** |
| 94 | P | No. Ah, escuchemos lo que dice **E5**. Dos líneas son paralelas si… |
| **95** | **E5** | **La distancia entre las dos es la misma.** |
| 96 | P | Si la distancia entre las dos siempre es la misma, es decir, por más que se prolonguen esas líneas rectas, hablamos de rectas que nunca se van a unir y que pasa con estas dos rectas, ¿estas rectas se unen o no se unen? [la profesora señala las dos rectas que dicen los estudiantes que se encuentran en cruz] |
| 97 | E | Sí. |

| | | |
|---|---|---|
| 98 | P | Claro que sí ¿en dónde? |
| 99 | E | En el centro. |
| 100 | P | En este punto *O*, bueno, entonces, estas dos lineas que se cortan, que se cruzan en el punto *O*, no son paralelas. Ahora, ¿qué más vemos en esta figura? |
| **100** | **E6** | **Ángulo.** |
| 101 | P | Ángulos, ¿cuántos ángulos vemos? |
| **102** | **E6** | **Cuatro.** |
| 103 | P | Cuatro ángulos. Listo. Ahora será que… ¿Qué podemos decir de esos ángulos? |
| **104** | **E7** | **Que depronto, ¿miden noventa grados?** |
| 105 | P | Depronto miden noventa grados, dice E7. ¿Será que miden noventa grados? |
| **106** | **E7** | **Depronto, nada lo garantiza.** |
| 107 | P | Parece, ¿cierto?, pero no hay nada que aquí nos diga: miden noventa grados. Parece que tienen noventa grados. |
| **108** | **E7** | **O sea, no es seguro, veo dos rectas. La línea de abajo está un poquito más cortica. Pero son dos rectas, sólo puedo decir eso.** |
| 109 | P | Sí, son dos rectas y bueno, de esta [señala las dos rectas de la parte suoerior derecha en la diapositiva], ¿Qué podemos decir? [señala las dos rectas que parecen ser paralelas]. |
| 110 | E7 | Dos rectas paralelas. Dos flechas. |
| 111 | P | E7dice que son paralelas. |
| **112** | **E7** | **Dos rectas que parecen paralelas, pero no se sabe.** |
| 113 | P | Parecían paralelas…pero nada lo garantiza. Bien, ¿Qué podemos decir de estas? [Señala la figura que se encuentra en la parte inferiro izquierda]. |
| 114 | E8 | Que están torcidas. |
| **115** | **P** | **¿Será que sí son paralelas?** |
| 116 | E9 | No. |
| 117 | E1 | Son líneas rectas. |
| **118** | **E5** | **A simple vista se ve que no.** |
| 119 | P | A simple vista tu ves que no, ¿por qué? |
| **120** | **E5** | **Porque esa distancia es mayor que esa [señala las distancias entre las dos rectas no secantes de la figura inferior izquierda de la diapositiva].** |
| 121 | P | Ah, aquí esta distancia es mayor que esta, [la profesora señala en la imagen la distancia mayor, que corresponde a la distancia que hay en la parte final izquierda de la recta] parece que sí. Resulta, esta recta es secante a estas dos [la profesora señala la recta secante] porque se cruzan en un punto, miren [la profesora señala los puntos de intersección de las dos rectas con la recta secante]. |

El primer argumento que se realiza en este diálogo está a cargo de E1, quien al observar la representación gráfica y atender a la pregunta realizada por la profesora, concluye que esta corresponde a un plano cartesiano [80], pero no presenta garantía para validar el paso de los datos a la conclusión, es decir un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[PCSa]**. E2 realiza también un argumento que contradice al anterior [82], para el que ofrece una garantía, la cual no valida el paso de los datos a la conclusión [**PCSi]**. Esto es, la garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión (ver esquema 16). E3 también elabora un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PCSa]** ya que él plantea su conclusión [86] pero no provee una garantía para su argumento. Ante este argumento la profesora pregunta "¿Qué son líneas paralelas?" [89], entonces, E4 plantea un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PDSa]** [92 y95]. E7, a partir del trabajo realizado durante la tarea llega a una conclusión [108], en la que manifiesta que únicamente puede decir que hay dos rectas en la figura que se está observando y expone una garantía empírica, no puede decir algo más de la representación gráfica ya que no hay notación que garantice alguna propiedad o relación geométrica, por tanto E7 realiza un argumento sustancial con garantía empírica [**PCSd]**. Posteriormente este estudiante realiza un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[PCSa]** [112], frente a la siguiente figura que se analiza (rectas aparentemente paralelas), en el cual expone solo una conclusión sin garantía alguna. Luego la profesora les pide que observen la representación gráfica inferior izquierda, ante lo cual E5 plantea un argumento sustancial con garantía empírica **[PDSd]** [118 y 120], en el cual concluyó que las rectas no son paralelas y realiza una garantía empírica asociada a que no se conserva la misma distancia entre las dos rectas.




**Esquema 17. Argumento PCSi**

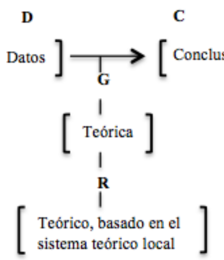
## TAREA DE DEFINICIÓN DE CLASES DE ÁNGULOS

Esta tarea no se hacia parte de las tareas inicialmente planeadas para la secuencia, esta es resultado de la necesidad de que los estudiantes de grado séptimo identificaran clases de ángulos, asunto que no conocían y primordial para abordar la siguiente tarea T2, . Esta tarea presenta dos situaciones, en la primera, debían determinar medidas de algunos ángulos dados; y en la segunda, clasificar los ángulos del punto anterior a partir de algunas definiciones dadas. Durante el trabajo grupal la profesora explicó a los estudiantes cómo utilizar el transportador para medir ángulos. En la puesta en común se leyeron las definiciones y se clasificaron los ángulos. La siguiente conversación tuvo lugar:

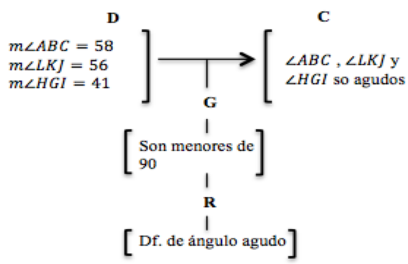
| | | |
|---|---|---|
| 122 | P | […] ¿Alguien quiere leer esa primera definición? |
| 123 | | [Hay silencio en los estudiantes, ninguno quiere leer] |
| 124 | P | A ver, E2 ¿la quieres leer?. ¿No?, la primera definición que tenemos aquí, que es la misma que está en el tablero. Ah allá, ¿tú la quieres leer? |
| 125 | E3 | A, B, C es agudo si la $m\angle\ ABC$ es menor de noventa. |
| 126 | P | […] Bien, entonces es agudo, si el $\angle\ ABC$, bueno el $\angle\ ABC$ es agudo, si la $m\angle\ ABC$ es menor que noventa. De los ángulos que ustedes tenían, ¿cuáles clasificaron como agudos? |
| **127** | **P** | **¿Cuáles fueron los … cuáles clasificaron como agudos?** |
| **128** | **E1** | **58, 56, 41.** |
| **129** | **P** | **¿Por qué clasificaron esos ángulos como agudos?** |
| **130** | **E1** | **Porque, pues, son menores de noventa y en la definición de agudo, dice que los agudos miden menos de noventa.** |
| 131 | P | [...] Si yo miro aquí la guía de E4 tiene que $m\angle\ LKJ$ es igual a cincuenta y seis. Me dices que ese lo clasificaron, ¿en qué? |
| **132** | **E4** | **En agudo.** |
| 133 | P | Agudo, entonces vamos a poner acá, $\angle\ LKJ$ es agudo y la medida es igual a cincuenta y seis [mientras |

| | | |
|---|---|---|
| | | escribe va hablando, "$m\angle LKJ = 56$, es un ángulo agudo"]. Este es agudo. Bien, ¿Quién quiere escribir otro ángulo agudo? |

Los estudiantes realizaron argumentos respaldados en sistema el teórico local que se que encontraba en construcción, para justificar la manera como clasificaron los ángulos de acuerdo a su medida**.** Por ejemplo, E1 llega la conclusión de que los ángulos cuya medidas son 58, 56 y 41 son agudos [127, 128, 129 y 130]. Inicialmente no da ningún tipo de garantía o respaldo, es decir elabora un argumento **[PDSa**]. Únicamente al ser cuestionado por la profesora ofrece como respaldo la información de las definiciones, en este caso la definición del ángulo agudo; es decir un respaldo teórico. Por tal razón este es un argumento analítico en el que se evidencia garantía y respaldo [**PDAc]** ( ver esquemas 17 y 18)**,** E4 plantea un argumento **[PDSa]** pues solo plantea una conclusión [132] sin garantía alguna.




**Esquema 18. Argumento PJAc**




**Esquema 19. Argumento PJAc**

## T2. ÁNGULOS PAR LINEAL

En esta tarea se proponen tres problemas, con los que se pretenden que los estudiantes construyan la *D. Ángulos par lineal*[4], con el segundo llegar al *HG. Par lineal*[5] y con el tercero *HG. Par lineal-recto*[6], elementos teóricos asociados al sistema teórico local.

### T2. P1. (DEFINICIÓN DE ÁNGULO PAR LINEAL)

En la T2.P1 se mostraron a los estudiantes representaciones gráficas de ángulos que son par lineal y de ángulos que no lo son. Ellos debían identificar particularidades que cumplen los ángulos par lineal y que no cumplen los ángulos que no lo son, para construir posteriormente la *D. Ángulos par lineal* con base en estas propiedades. Para iniciar el trabajo grupal se conformaron grupos de tres estudiantes, quienes en un primer momento debían abordar la tarea propuesta, para luego ser presentada durante la puesta en común. Para ello previamente la profesora había indicado y dado algunas generalidades respecto a lo que los estudiantes debían realizar. A continuación se presentan el diálogo con algunos de los grupos.

[4] ***D. Ángulos par lineal*****: Dos ángulos son par lineal si comparten un rayo y los otros dos rayos determinan una recta.**

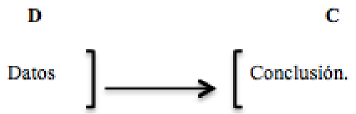
[5] ***HG. Par lineal*****: Si dos ángulos son par lineal, la suma de sus medidas es igual a180°.**

[6] ***HG. Par lineal- recto:*** **Si dos ángulos son par lineal y uno de ellos es recto, el otro ángulo también es recto.**

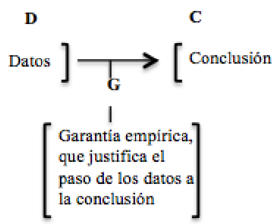
*Grupo 1*

| | | |
|---|---|---|
| 3 | P | Ustedes miran teniendo en cuenta, qué características tienen de especial estos que son par lineal y que no cumplen estos [señalando el conjunto de ángulos par lineal y el conjunto de ángulos no par lineal en la hoja] |
| 4 | **E1** | **Que tienen diferentes formas.** |
| 5 | P | Entonces, ¿Ya tienen cuál es? |
| 6 | **E1** | **Que tienen diferente forma y que miden ciento ochenta grados.** |
| 7 | P | **Y ¿a ti qué te garantiza qué miden ciento ochenta grados?** |
| 8 | **E1** | **Que ya los medí profe, alguien que me preste un transportador para medirlos.** |
| 9 | P | Pero si no tenemos transportador nos toca a simple vista, con lo que observamos. |
| 10 | E2 | Pues yo creo que… |
| 11 | P | Ustedes la clase pasada … |
| 12 | **E2** | **Están alineados** |
| 13 | P | ¿Qué quieres decir con que están alineados? |
| 14 | E1 | Es por ejemplo siempre están en línea recta [mueve el esfero sobre la hoja siguiendo la línea recta formada por los rayos opuestos]. |
| 15 | P | Bueno, ¿entonces cómo lo escribirías para decir que son par lineal? [se dirige a otro grupo] |

En el fragmento anterior, E1 da una idea poco clara para definir ángulos par lineal [4 y 6], es decir dos argumentos sustanciales sin garantía o respaldo **[GDSa]** (ver esquema 19), él presenta una garantía solamente cuando la profesora lo solicita, la cual se fundamenta en la observación realizada sobre las representaciones de los ángulos y por la medida determinada para cada uno de estos [8], E1 elabora así un argumento sustancial con garantía empírica [**GDSd]** (ver esquema 20), El argumento de E2 [12], por sus características es sustancial sin garantía o respaldo [**GDSa],** pues presenta solo como conclusión que son par lineal si están alineados.



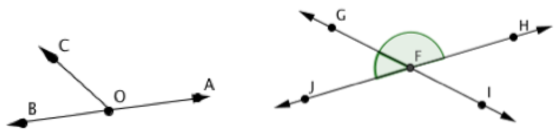

**Esquema 20. Argumento GDSa**




**Esquema 21. Argumento GDSd**

*Grupo 2*

Cuando la profesora se acerca al grupo un estudiante mide los ángulos de las representaciones gráficas correspondientes a los ángulos par lineal y manifiesta que son diferentes a las representaciones gráficas de los no par lineal, excepto a los ángulos formados por dos líneas rectas perpendiculares. en torno a esta idea se genera la siguiente conversación.

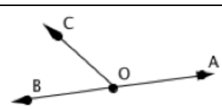
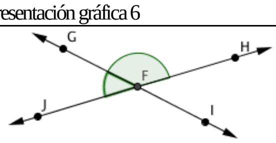
| | | |
|---|---|---|
| 17 | P | […]¿Serán las medidas?, sin tener en cuenta las medidas, ¿Qué puedes decir?, ¿Por qué esos son par lineal y por que estos no? [señalando los dos conjuntos] |
| 18 | E2 | Es que estos dos se parecen.   Representación gráfica 5 |

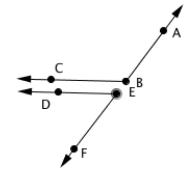
| | | |
|---|---|---|
| **19** | **P** | **¿En qué se parecen?** |
| **20** | **E2** | **Pues es que si quita uno, esta lineal [ se refiere a la figura de la derecha en el Esquema anterior y tapa con el transportador el $\overrightarrow{FI}$], queda igual a este [muestra la figura de la izquierda]** |
| **21** | **P** | **Y en estos de acá ¿no ocurre lo mismo? [hace referencia al conjunto de los ángulos no par lineal]** |
| **22** | **E2** | **No.** |
| **23** | **E1** | **<u>Para hacer dos o más ángulos utilizan una recta, una sola línea</u> [señala $\overleftrightarrow{BA}$], por ejemplo acá no utilizan una recta [señala el $\overrightarrow{OC}$ ], aquí si utiliza una línea [señala el rayo $\overrightarrow{FI}$ ]. Mmm para hacer este ángulo necesita de estas dos línea [señala $\overleftrightarrow{BA}$].** |

En este caso tenemos también un argumento que inicialmente era sustancial sin garantía o respaldo [**GDSa]** que elabora E2 [18]. Durante la conversación sostenida por los estudiantes en relación a las parejas de ángulos presentadas, el argumento que elabora E2 pasa a ser un argumento sustancial con garantía empírica [**GDSd]** [20]. Otro argumento **[GDSd]** es el que realiza E1 [23], en el cual el estudiante formula la conclusión (parte subrayada) y para validarla acude a las representaciones gráficas de los ángulos par lineal, es decir un soporte empírico.

*Grupo 3*

Este grupo encontró una particularidad en las representaciones gráficas de los ángulos par lineal y es que, según ellos, están formados por dos rectas que se cruzan en un punto, lo cual tratan de mostrar en el siguiente fragmento de la intervención.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25 | P | [..]¿Nada?[dirigiendos al grupo]. | |
| **26** | **E1** | **Pues yo he visto que son un par de líneas, son dos líneas que se unieron.** | |
| 27 | P | ¿Cuáles dos líneas? | |
| **28** | **E2** | **Señala $\overleftrightarrow{GI}$ y $\overleftrightarrow{JH}$.** | |
| 29 | E1 | Esta y esta, [señalando $\overleftrightarrow{CI}$ y $\overleftrightarrow{JH}$ ] . | |
| 30 | P | Y ¿alla en el otro? [refiriendose a la otra pareja de ángulos par lineal]. | |
| 31 | E1 | Pasa lo mismo profe, vea [Señala $\overleftrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{OC}$ ]. | |
| 32 | E2 | ¿Qué le parece profe? [señalando la primer pareja de ángulos par lineal]. | |
| 33 | P | Si, ¿por cuál se une? | |
| **34** | **E2** | **De la *A* a la *C* y de la *B* a la *C*. [Señalando los puntos *A* y *B* hacia el $\overrightarrow{OC}$ respectivamente].** |   Representación gráfica 6 |
| 35 | E1 | Igual acá [señala la otra pareja de ángulos par lineal]. |   Representación gráfica 7 |
| 36 | P | Entonces, ¿ahí cómo sería? | |
| 37 | E1 | La *F*, la *J*, *GI*. | |
| 38 | P | No, mira cuales ángulos están comparando. | |
| 39 | E2 | No ,mira, de la *G*. | |
| 40 | E1 | *GFH* y aquí *HFI*. | |

| | | |
|---|---|---|
| 41 | E3 | ¿No profe?. |
| 42 | E2 | No, porque no ve que acá no [señala los ángulos del conjunto no par lineal]. |
| 43 | P | ¿Ahí no lo cumple? |
| 44 | E2 | Acá no. |
| 45 | P | Y ¿en los otros? |
| **46** | **E3** | **En este no lo cumple [señalando la primera pareja de ángulos no par lineal], por que lo que me di cuenta es que acá pasan dos seguidas, [pasa dos veces el dedos sobre los rayos $\overrightarrow{OC} y\ \overrightarrow{GF}$ en los ángulos par lineal] mientras que acá no [describe los angulos de la figura].**   Representación gráfica 8 |

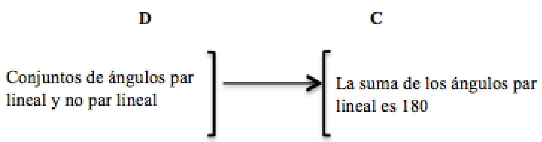
E1 plantea en [26] la conclusión frente a lo que han observado en las representaciones gráficas de los ángulos par lineal y no par lineal y expresa una garantía empírica basada en la observación de las características de cada pareja de ángulos [28 y 34], Es decir elabora un argumento sustancial con garantía empírica **[GDSd]**. Ante la conclusión elaborada por E1, los otros integrantes del grupo no están convencidos. Entonces E3 realiza también un argumento **GCSd** [46], en el que la conclusión es “acá pasan dos seguidas” (hace referencia a los rayos comunes en los ángulos par lineal) y para la garantía toma un ejemplo en el la representación grafica de los ángulos no par lineal en el cual no se cumple la condición (representación gráfica en [46]).

*Grupos 4 y 5*

En el siguiente fragmento de intervención, los estudiantes correspondientes a dos grupos, muestran sus conclusiones frente a lo que ellos piensan que son ángulos par lineal, después de haber observado y analizado las representaciones gráficas de los ángulos par lineal y los no par lineal.

| | | |
|---|---|---|
| 48 | P | […] Y ¿cómo escribes eso?, entonces para decir que eso es lo que deben cumplir, que por esa razón son par lineal, escribanlo [se dirige a otro grupo]. |
| **49** | **E1** | **[El estudiante muestra la definición construida por ellos]“Son los que tienen dos ángulos y pueden ser cruzados y medir lo que sea”. [grupo 4].Ven miramos [se dirige a otro grupo que la llama para mostrar su conjetura].** |
| **50** | **E2** | **Al sumar los ángulos suman ciento ochenta. [grupo 5].** |
| 51 | P | Ustedes creen que es esto, pues esperemos. |
| 52 | E1 | Ah bueno. |

Los estudiantes de los grupos 4 y 5 se limitaron únicamente a escribir la definición sin explicar que les permitía pasar de la observación de los conjuntos de ángulos a la conclusión dada, por tanto son argumentos incompletos sin garantía o respaldos el primero en el proceso de definir **[GDSa]** (ver esquema 21) y el segundo en el proceso de conjeturar **[GCSa]**.




**Esquema 22. Argumento GDSa**

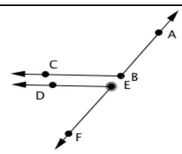
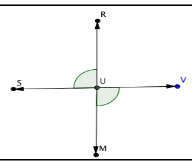
En la puesta en común los estudiantes, de manera colectiva, mediante el diálogo participativo, construyen la *D. Par lineal*. Los siguientes fragmentos corresponden a momentos de la puesta en común en los cuales ellos generaron diferentes argumentos en torno a esta definición. Se inició con la siguiente intervención en la cual la conjetura planteada hace referencia al *HG. Par lineal*.

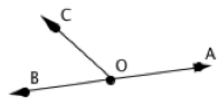
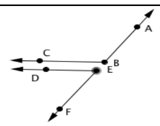
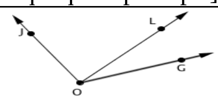
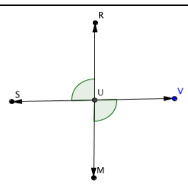
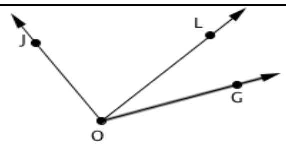
| | | |
|---|---|---|
| 53 | P | Ahora lo discutimos entre todos. […] Bueno, listos, vamos a hacer lo siguiente, vamos a mirar algunas de las definiciones, que ustedes dieron de qué son par lineal, entonces, ¿quién quiere empezar con su definición? |
| **54** | **E1** | **Qué al sumar los ángulos del par lineal suman ciento ochenta grados.** |
| 55 | P | ¿La suma de qué? |
| 56 | E1 | De los ángulos. |

Como se puede observar en el fragmento E1 en [54], solo realiza un argumento formado por la conclusión desprovista de garantía o respaldo, es decir un argumento [**PCSa]**. Continuando con la conversación durante la puesta en común, se tiene el siguiente fragmento.

| | | |
|---|---|---|
| 57 | P | […] Miremos otra definición [elige otro grupo]. |
| **58** | **E5** | **Los ángulos par lineal tienen diferentes ángulos a los que medimos.** |
| 59 | P | Los ángulos tienen diferentes ángulos a los que medimos, ¿a qué te refieres con eso?, ¿Qué nos quieres decir con eso? |
| **60** | **E5** | **Tienen ángulos de diferentes medidas.** |
| 61 | P | ¿Cuáles diferentes medidas?, es decir que esto, ¿tu lo puedes observar?, ¿qué esta medida es diferente de esta? [señalando $\angle BOC$y$\angle AOC$] ¿te dieron las medidas? |
| 62 | E5 | No profe. |

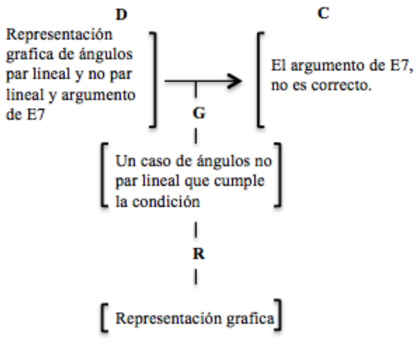
En este caso, E5 [58 y 60], ofrece una conclusión que se fundamenta en la medida de los ángulos, información que no hace parte de los datos proporcionados inicialmente, es decir, un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[PDSa]**. Una de las características que los estudiantes observaron en los ángulos par lineal fue un rayo común, en el siguiente momento de clase se analiza esto.

| | | |
|---|---|---|
| 63 | **E6** | **Los ángulos par lineal están unidos y algunos de los que no son par lineal están separados [leen la estudiante].** |
| 64 | P | Espera, bueno analicemos. Ellas tienen dos definiciones, analicemos la que teníamos antes. ¿Ustedes están de acuerdo en lo siguiente? qué los ángulos par lineal, parece que tienen diferente medida, mientras lo que no son par lineal tienen la misma medida, ¿Estos parece que tienen la misma medida? [señalando el conjunto de ángulos no par lineal]. |
| 65 | V | No. |
| 66 | P | No, no cierto no podríamos decir nada de la medida exacta porque no la tiene, entonces vemos que esa definición no nos sirve porque, primero no hay medidas para decir exactamente la medida es esa y en segundo lugar parece ser que en la mayoría de los á entonces esa no nos sirve, pero ellas tienen otra que es la siguiente: los ángulos par lineal están unidos y los que no son par lineal están separados. ¿Qué quieren decir con que están unidos?. Dime. |
| **67** | **E6** | **Están unidos en un punto.** |
| 68 | P | ¿Están unidos en un punto?, miremos, miremos a ver si esa condición es cierta, estos dos ángulos son par lineal están unidos en un punto, estos ángulos son par lineal están unidos en un punto [señalando los ángulos del conjunto de ángulos par lineal]. |
| 69 | E7 | Sí. |
| 70 | P | Están unidos en ese punto, ya, parece que de pronto la encontramos. Estos no son par lineal y no están unidos [señalando la gráfica 9], parece ser que hasta el momento debería ser la condición. Estos no son par lineal, ¿están unidos por un punto?[señala gráfica 10 ]     |

| | | |
|---|---|---|
| | | . Representación gráfica 9 Representación gráfica 10 |
| 71 | E3 | Sí. |
| 72 | P | O sea que ya no nos sirvió, ¿cómo la podríamos arreglar para que nos siga sirviendo? |
| 73 | E 2 | Profe digamos que, esos son par lineales, **porque digamos la *B*,*C* y la *O* ahí forman un ángulo la *C*,*O* y la *A* forman el otro, [señala los ángulos par lineal de la gráfica 11],** en cambio ahí ya no son par lineal [señala el $\angle SUR$ y el $\angle MUV$ gráfica 10].   Representación gráfica 11 |
| 74 | P | Bien, E2 esta diciendo, que aquí se forma un ángulo [señala el $\angle BOC$] y aquí se forma el otro ángulo [señalando a $\angle AOC$], pero entonces, ¿estan unidos por un punto? O ¿cómo sería? |
| 75 | E7 | Por un rayo. |
| 76 | P | ¿Por un qué? |
| **77** | **E 7** | **Son par lineal porque están unidos por un rayo.** |
| 78 | P | ¿Estos ángulos están unidos por un rayo?. Miremos Este sería el rayo [señalando al $\overrightarrow{OC}$], más bien no digamos unidos, digamos que comparten. ¿El $\angle BOC$ comparten rayo con $\angle AOC$? |
| 79 | E | No, ah sí. |
| 80 | P | ¿Y cuál sería ese rayo? |
| 81 | E 8 | $\overrightarrow{OC}$. |
| 82 | P | ¿En este hay algún rayo que se comparta?. |
| 83 | E9 | Sí. |
| 84 | P | ¿Cuál? |
| 85 | E | $F$ y $H$. |
| 86 | P | Bien, En este se comparte algún rayo [señala la figura]   Representación gráfica 12 |
| 87 | E | No. |
| 88 | P | O sea que esto no es par lineal, dime [se dirige a un estudiante que quiere participar]. |
| 89 | **E10** | **Pero en este de acá, comparten un rayo. [señala la siguiente figura].**   Representación gráfica 13 |
| 90 | P | Ahí miren aquí tenemos otro problema, comparten $\overrightarrow{OL}$ y estos no son par linea, [señalando la figura a la que se refiere E10] . |
| 91 | E11 | Profe y allá también mostrando la figura.   Representación gráfica 14 |
| 92 | P | ¿Aquí se comparte rayo? [señalando la figura anterior] . |
| 93 | E | No. |
| 94 | P | ¿Qué comparten estos dos ángulos? [señalando el $\angle SUR$ y el $\angle MUV$] |
| 95 | E10 | Vértice. |
| 96 | P | El vértice, cierto, un punto. O sea que tenemos un problema con este [señala nuevamente la figura] Es decir, ya tenemos una condición, pero nos hace falta otra o otras condiciones, para decir que sean par lineal, primero tenemos una que comparte un ángulo no que comparte un   Representación gráfica 15 |

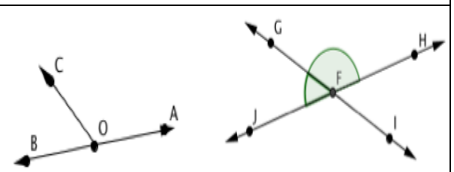
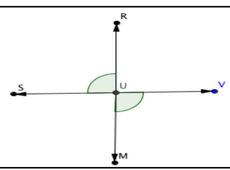
| | | |
|---|---|---|
| | | rayo. |
| 97 | E11 | Seño, pero lo que no entendí, vea, esos dos ángulos ¿no pueden tener la misma medida?, pero vea que, uno mirando y no, yo aquí mirando y no tienen la misma medida. |
| 98 | P | No, parece que no tiene la misma medida. |
| 99 | E11 | Pero sí. |
| 100 | P | Espera termina, ¿ya?, [el estudiante aprueba con la cabeza]. |

E6 realiza un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[PDSa]** [63 y 67], ya que él no justificó el paso de los datos su conclusión. E2 [73] realiza un argumento en el que la garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión **[PDSi],** mientras E7 [77] realiza un argumento sustancial con garantía teórica [**PDSb],** que aporta a la definición de ángulo par lineal que está en construcción, ante el argumento expuesto por E7 [77]. E10 [89] manifiesta no estar de acuerdo y lo garantiza ya que hay ángulos no par lineal que comparten un rayo, aquí el respaldo utilizado para este argumento es la representación gráfica 13, es decir realiza un argumento sustancial con respaldo empírico [**PCSe]** (ver esquema 22).



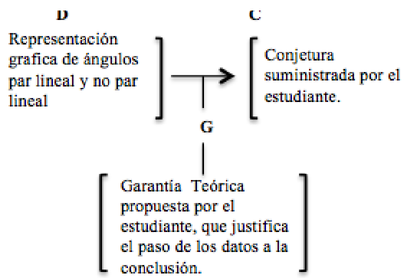

**Esquema 23. Argumento PCSe**

Otra de las características observada por los estudiantes en los ángulos par lineal es que los otros dos rayos (rayos opuestos) determinan una recta. En el siguiente fragmento de la puesta en común se presentan argumentos realizados por los estudiantes en torno a este hecho.

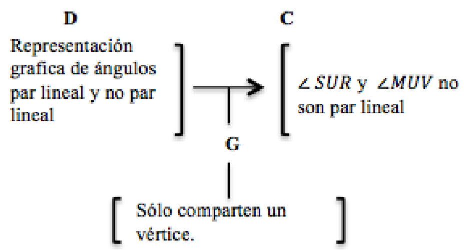
| | | | |
|---|---|---|---|
| **101** | **E10** | **Que los par lineal tienen una recta.** | |
| 102 | P | ¿Cuál recta?. Miremos. | |
| **103** | **E 2** | **Profe allí también hay rectas [señalando el conjunto de ángulos no par lineal].** | |
| 104 | P | Espera analizamos. | |
| **105** | **E2** | **Y en los dos hay rectas [refiriendose a los ángulos de ambos conjuntos].** | |
| 106 | V | Sí. | |
| **107** | **E10** | **[Niega con la cabeza] Porque rectas tienen infinito hacia los dos lados [señala los extremos de una recta $\overleftrightarrow{AB}$ en la primera pareja par lineal y $\overleftrightarrow{JH}$ en el segundo par lineal]. ¿Vea acá son infinitas?[Se refiere a la gráfica 15 intervención 96]** |  Representación gráfica 16 |
| 108 | P | Aja. Bueno ¿Cuáles serían? | |
| **109** | **E2** | **Vea acá son infinitas [señala la figura 17].** |  |

| | | |
|---|---|---|
| | | Representación gráfica 17 |
| **110** | **E10** | **Pero aquí arriba, no son par lineal, solo se comparte un segmento. [se refiere a la representación gráfica 17].** |
| 111 | P | Un punto, habiamos dicho. |
| **112** | **E10** | **Mmm, el vértice [refiriendose a *U*].** |
| 113 | P | Entonces tu dices que forman una recta, ¿cuál recta? |
| **114** | **E10** | **Esta [señala $\overleftrightarrow{AB}$, se refiere al primer par lineal, representación gráfica 11, intervención 73].** |
| 115 | P | ¿Y esa recta que la forman? |
| 116 | E10 | *AOB*. |
| 117 | P | *AOB* [señala los puntos] y estos. |
| 118 | E10 | *BOA*. |
| 119 | P | Y *BOA*, pero si nosotros partimos esta recta por el punto O, ¿qué tendríamos ahí? |
| 120 | E7 | Dos rayos. |
| 121 | P | ¿Y cómo son esos rayos? |
| 122 | E7 | Inician en un mismo punto. |
| 123 | P | $\overrightarrow{OA}$, ¿hacia donde va? |
| 124 | E10 | Hacia arriba. |
| 125 | E2 | En diagonal. |
| 126 | P | Hacia arriba y ¿ $\overrightarrow{OB}$? |
| 127 | E10 | Hacia abajo. |
| 128 | P | Hacia abajo, osea que estos rayos ¿cómo son?, uno hacia alla y el otro hacia alla. |
| 129 | E3 | Mayor. |
| 130 | E2 | De un lado para allá y el otro para allá [señala arriba y abajo]. |
| 131 | P | No, ¿cómo son esos rayos?, los rayos que forman una recta, [despues de un rato] ¿cómo son esos rayos? |
| 132 | E7 | Opuestos. |
| 133 | P | Opuestos, cierto, entonces, ¿qué condición tenemos?, miremos a ver, ¿aquí tenemos dos rayos opuestos? [señala ángulos par lineal]. |
| 134 | V | Sí. |
| 135 | P | ¿Aquí? [señala otros ángulos par lineal]. |
| 136 | V | Sí. |
| 137 | P | ¿Aquí? estos no son par lineal, entonces no nos interesan, [señalando dos de las parejas de angulos en el conjunto de ángulos no par lineal, pero hace enfasis en la otra pareja pues cumplia con la condición anterior de par lineal, tener un rayo común]. Este era el que cumplía la condición, ¿aquí tenemos rayos opuestos? |
| 138 | V | No. |
| 139 | P | No porque miren el $\overrightarrow{OJ}$ y $\overrightarrow{OG}$ hacia donde van, entonces no tenemos rayos opuestos. Dinos ¿cómo serían par lineal? |
| 140 | E7 | Si los ángulos par lineal tenian la condición de rayos opuestos y los que no son par lineal no. |
| 141 | P | ¿Cuál fue la primera condición que dimos? |
| 142 | E4 | Que se comparten. |
| 143 | P | ¿Qué comparten? |
| **144** | **E3** | **Un mismo rayo.** |
| 145 | P | Un rayo, entonces comparten un rayo. ¿La segunda condición a la que llegamos es?, ¿cuál es la segunda condición?, la que acabamos de decir. |
| **146** | **E3** | **Que tienen rayos opuestos.** |

En el diálogo de [101] a [114], se presentan dos procesos de argumentación. El más fuerte es realizado por E10 ya que construye argumentos correctos y en lo posible con una garantía teórica, quien concluye que si los ángulos son par lineal se puede identificar una recta [101], es decir, es un argumento **[PDSa]**. Ante esta afirmación E2 manifiesta no estar de acuerdo porque en los dos conjuntos de ángulos tanto par lineal como no par lineal se pueden identificar rectas [103 y 105]. Es otro argumento de tipo **[PCSa]**. E10 reafirma su conjetura y alude implícitamente a la notación de la representación gráfica de la recta (las flechas en los extremos de esta) y su significado [107], por lo tanto este es un argumento sustancial con garantía teórica [**PDSb]** (ver esquema 23). E2 sostiene que no es cierto lo que planteó E10, porque en algunos ángulos no par lineal también es posible identificar la recta (garantía) [103]; además recurre a una representación gráfica como respaldo de su argumento [109]. Realiza por lo tanto un argumento sustancial con respaldo empírico **[PDSe]**. E10 para defender su postura, ante la observación realizada por E2, produce otro argumento **[PJSb]** [110], [112] (ver esquema 24), ya que realiza una conclusión y su garantía es teórica y se basa en lo visto en clase para justificar que la figura de [109]; no representa ángulos par lineal ya que no comparten un rayo, sólo su origen[112]. E3 en [144] y [146] concluye que los ángulos par lineal comparten un rayo y tienen dos rayos opuestos, es decir plantea un argumento sustancial sin respaldo o garantía y alude a elementos conceptuales trabajados en clase **[PDSa].**



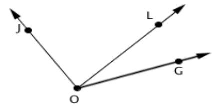
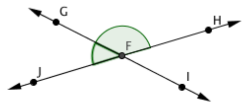

**Esquema 24. Argumento PJSb**




**Esquema 25. Argumento PJSb**

El siguiente fragmento presenta la última parte de la puesta en común respecto a esta definición.

| | | |
|---|---|---|
| 147 | P | Que los otros dos rayos son opuestos, cierto, A ver, escuchemos otra definición que escribieron de par lineal y fue el grupo que está atrás, Rozo lee tu definición, lee fuerte. |
| **148** | **E11** | **Son los que tienen sólo dos ángulos y son cruzados.** |
| 149 | P | ¿Ustedes han puesto atención a lo que teníamos aca? Leela, ¿qué quieren decir ustedes con que sean cruzados? |
| 150 | E11 | [Se acerca al tablero mientras la profesora le repite la pregunta y describe una X en el tablero]. |
| 151 | P | ¿Pero estos estan cruzados? [señala la primera pareja par lineal del tablero]. |
| 152 | E11 | Pueden ser que estan cruzados. |
| 153 | P | Ahí dice que ¿tienen cuántos? |
| **154** | **E12** | **Que sólo tiene, deben ser dos ángulos.** |
| 155 | P | ¿Los ángulos par lineal son sólo dos ángulos? |
| 156 | V | No. |
| 157 | P | Ella dice que son sólo dos ángulos, miremos ¿aquí cuántos ángulos tenemos? [señala en el tablero]. |
| 158 | E12 | Dos. |
| 159 | P | ¿Aquí? |
| 160 | E7 | Dos. |
| 161 | E5 | Cuatro. |
| 162 | P | Dos y son par lineal, ¡Ah!, sí, atrás dicen que tenemos cuatro, pero de los que tenemos aquí ¿Cuáles nos estan diciendo que son par lineal? |
| 163 | E5 | Dos. |
| 164 | P | Sólo dos. Si nosotros miramos los de abajo [tapa la parte superior de la segunda pareja par lineal], tendríamos otor par lineal [escribe en el tablero la última condición] |

| | | |
|---|---|---|
| **165** | **E5** | **Alla tienen dos ángulos [refiriendose a las representaciones gráficas de los ángulos no par lineal, específicamente a la tercera pareja de ángulos].**   Representación gráfica 18 |
| 166 | P | Es que para que sea par lineal ¿qué condiciones debe cumplir. |
| **167** | **E5** | **La de abajo comparte un rayo y tiene dos ángulos.** |
| 168 | P | Comparte un rayo y tiene dos ángulos, pero ¿cuál no cumple?, mira que son tres condiciones. |
| **169** | **E5** | **Que los otros dos rayos no son opuestos.** |
| 170 | p | Que los otros dos rayos no son opuestos. |
| 171 | E | Profe, sólo se utilizan cuatro. |
| 172 | p | Dime. |
| 173 | E | Sólo se utilizan 4. |
| 174 | P | ¿Cuatro qué? |
| 175 | E | Por ejemplo en la primera son cuatro y son cuatro, ¿no?, en la segunda sólo se utilizan cuatro. |
| 176 | P | Espera. |
| 177 | E | [Se acerca al tablero señalando las letras del primer par lineal] dice se utilizan cuatro y son cuatro, [luego señalande las letras del segundo par lineal] dice: se utilizan solo cuatro y son cinco. |
| 178 | P | ¡Ah!, las letras, eso depende de la manera como nombremos los ángulos, cierto, […] Bajamos el tono de la voz. Será ¿qué aquí?, aquí me hacen una pregunta ¿qué por qué solamente dos ángulos, aquí tienen en cuenta? [señalando la figura] .   Representación gráfica 19 ¿Será que hay más ángulos par lineal en este grupo de ángulos? |
| 179 | E | Sí hay más ángulos pero no son par lineal. |
| **180** | **P** | **¿Será que no hay más ángulos par lineal? [refiriendose a la figura anterior].** |
| 181 | E | Sí |
| 182 | P | ¿Cuáles?, pasa y señalalos. |
| **183** | **E7** | $\angle \boldsymbol{JFG}$ **y** $\angle \boldsymbol{JFI}$ |
| 184 | P | ¿Hay más par lineal, ahí? |
| 185 | **E7** | **No, ah sí, al reves.** |
| 186 | P | Pasa y señala si ves otro par lineal. |
| **187** | **E7** | **Pues yo digo que,** $\angle \boldsymbol{HFI}$ **y** $\angle \boldsymbol{GFJ}$ |
| 188 | P | Muetrales a todos [y le pide que nuvamente los señale] y entonces dí que parejas de ángulos par son lineal. |
| **189** | **E7** | $\angle \boldsymbol{HFI}$ **con** $\angle \boldsymbol{JFI}$ **y** $\angle \boldsymbol{HFG}$ **con** $\angle \boldsymbol{GFJ}$ **[los señala]. Son dos ángulos que tienen un rayo común y otros dos opuestos.** |
| 190 | P | Bueno como ya tocaron, dejamos ahí para la próxima clase. |

E11 [148] plantea un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PDSa]**; A pesar de habérsele cuestionado, no presenta garantía para su argumento. E12 también plantea un argumento como el anterior **[PDSa]** [154] cuando manifiesta que al hablar de ángulos par lineal se hace referencia a dos ángulos. E5 realiza un argumento sustancial con garantía empírica **[PDSd]** [165], en el cual manifiesta que en las representaciones gráficas de los ángulos no par lineal. También se hace referencia a dos ángulos, pero la profesora lo cuestiona ya que se están hablando de ángulos par lineal y en este fragmento emerge un argumento de E5 en el cual concluye que la figura [165] no es un par lineal y como garantía expone que cumple sólo dos de las tres condiciones para ser un par lineal [167] y [169]. Este es un argumento sustancial con garantía teórica [**PJSb].** El último argumento que se presenta en esta sección corresponde al realizado por E7, en el cual manifiesta que en la figura [178], se pueden identificar más ángulos par lineal [183, 187 y 189]. Para este argumento presenta un respaldo teórico basado en la *D. Par lineal* [189], por lo tanto es un argumento **[PJAa]**. A partir de este diálogo se construye el primer elemento del sistema teórico local *"Dos ángulos son par lineal si comparten un rayo y los otros dos rayos determinan una recta*"

*T2. P2. HECHO GEOMÉTRICO PAR LINEAL*

La profesora presenta el problema a los estudiantes, quienes se organizan en los mismos grupos de la clase anterior para su desarrollo. En el momento de trabajo grupal, los estudiantes contaban con ángulos elaborados en foamy. Entre ellos debían determinar parejas de ángulos par lineal, para completar con ellos una tabla y realizar la conjetura que respondía a la pregunta ¿observa alguna propiedad común para todas las parejas?. Los primeros argumentos creados en torno a la actividad estaban relacionados con la pregunta de si los arreglos de ángulos eran par lineal. Los datos correspondían a los ángulos en foamy y sus medidas. Los argumentos generados en el trabajo de los grupos fueron los siguientes:

*Grupo 1*

El siguiente grupo de trabajo empieza a realizar diferentes arreglos de dos ángulos y a mirar si cumplen o no las condiciones de un par lineal.

| | | |
|---|---|---|
| 49 | P | Yo les voy a entregar una bolsita con ángulos y ustedes deben formar ángulos par lineal y aquí en este lugar van a escribir las medidas de los ángulos que son par lineal, del primero y el segundo, y responder la pregunta, ¿observa alguna propiedad común para todas las parejas?, escriban, aquí escriben que propiedad común observan. |
| **50** | **P** | **[…]¿Estos son par lineal?** |
| **51** | **E1** | **Sí, porque, comparten un mismo rayo, forman una recta y tiene dos ángulos opuestos. [hace referencia a la recta que forman los rayos opuestos en los ángulos].**  Ilustración 1 |
| 52 | P | Rayos opuestos. Listo entonces, anoten las medidas y busquen más ángulos par lineal. [va a otro grupo]. |
| 53 | E2 | ¿Qué números son estos? |

El manifiesta que la pareja de ángulos seleccionada sí es par lineal y como respaldo utiliza las condiciones de la *D. par lineal* [51]. En este argumento analítico con la garantía implícita **[GJAa]**, se observa que la conclusión es justificada a partir de un elemento del sistema teórico local construido en clase (ver esquema 25).

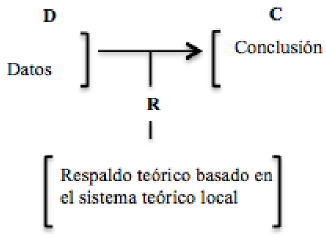
*Grupo 2*

Este grupo muestra su arreglo de ángulos a la profesora y explica porque consideran que esa pareja de ángulos si es un par lineal.

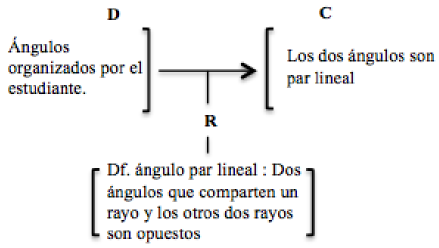
| | | |
|---|---|---|
| **54** | **P** | **[Cambia de grupo]. Bueno, ¿esos ángulos son par lineal?** |
| **55** | **E2** | **Sí, porque comparten un rayo y la línea recta.** |
| 56 | P | Ya ¿Cuántos tienen? |

| | | |
|---|---|---|
| 57 | E | Son dos. |

E2 realiza un argumento analítico con garantía implícita **[GJAa]** [55], que en cuanto a los datos y a la conclusión es similar al anterior, al igual utiliza la *D. par lineal* como garantía (ver esquema 26).




**Esquema 26. Argumento GJAa**




**Esquema 27. Argumento GJAa**

*Grupo 3*

El grupo ya ha encontrado y organizado las diferentes parejas de ángulos par lineal y presentan a la profesora su conclusión frente a la propiedad común que encontraron en estas.

| | | |
|---|---|---|
| 63 | E | Profe. |
| 64 | P | Listo, bueno, ¿ya los anotaron atrás? |
| 65 | E | No porque sólo había uno nuevo. |
| 66 | P | Ah, solo con respecto al anterior pero ya los tienes acá.  Ilustración 2 |
| 67 | E | Si ya tenemos casi todos, pero no se podían más. |
| 68 | P | Bueno listo, entonces, acá tienen las medidas. ¿Cuál fue la conclusión que ustedes sacaron? |
| **69** | **E1** | **Que todos sumados, suman ciento ochenta.** |
| 70 | P | ¿Qué todos sumados qué? |
| 71 | E1 | Que dos ángulos sumados, suman ciento ochenta. |
| 72 | P | ¿Qué de los dos ángulos? |
| **73** | **E1** | **La suma de la medida de los dos ángulos es ciento ochenta.** |

En está intervención la profesora tiene como meta que los estudiantes utilicen los conceptos y enunciados matemáticos de manera correcta, lo que permiten favorecer la construcción de argumentos posteriormente. Teniendo en cuenta lo anterior, E1 construye dos argumentos [**GCSa]** [69 y 73]**,** es decir, sustanciales sin garantía o respaldo. En los dos argumentos expresa lo mismo pero en el segundo la idea es más clara y el uso del lenguaje mejoró en relación con el primero.

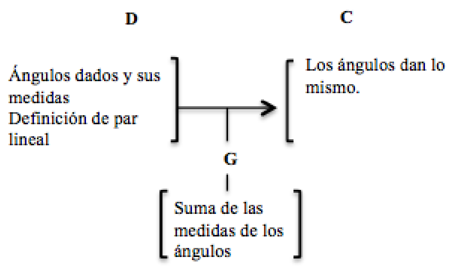
*Grupo 5*

Los estudiantes de este grupo se centran en las medidas de los ángulos para luego establecer una relación entre estas.

| | | |
|---|---|---|
| 94 | P | Ya la mayoría han ubicado ángulos par lineal y tienen las medidas de esos ángulos. En el cuadro, quiero que revisen esas medidas y miren si se puede establecer una relación entre ese par de medidas. ¿Han encontrado alguna relación entre esas medidas? |
| 95 | E1 | Sí pero no se como explicarlo. |
| 96 | P | ¿Qué han encontrado? |
| 97 | E1 | Porque vea profe. |

| | | |
|---|---|---|
| **98** | **E2** | **Escriba ahí ciento cinco y setenta y cinco.** |
| **99** | **E1** | **Profe, acá, este de ochenta y este de cien.** |
| 100 | E3 | Vea este de setenta y cinco. |
| 101 | P | Espérate y ya, déjalo hablar. |
| **102** | **E1** | **Cogimos uno de cincuenta y yo dije con uno de cien, no no, entonces yo dije búsquenme uno de cuarenta y uno de ciento cuarenta. Pues yo pensaba que darían como lo mismo [refiriendose a la suma de las medidas de los ángulos], y pues digamos ahí uno que digamos son más anchos y otros son más angostos entonces ahí quedaría el par lineal.** |
| 103 | P | Bueno y cómo se llama un ángulo, que tu dices, este es más cerradito y este es como más abierto, cuando vimos definición de ángulos ¿recuerdas como se llamaban? […] Tarea recordarlo, pero miremos aquí, que dicen de estos ángulos, que relación pueden establecer entre las medidas, ¿puedes establecer una relación? |
| 104 | E1 | Sí pero no se cómo decirlo. |

Durante esta conversación el E1 realiza un argumento, en el cual utiliza un lenguaje poco claro. El estudiante provee una conclusión, son par lineal si uno es más angosto (agudo) y otro más ancho (obtuso). También realiza una garantía basada en un ejemplo (el par lineal formado por un ángulo de cuarenta y uno de ciento cuarenta) Según el estudiante este ejemplo sirve pues al sumar las medidas de los dos ángulos el resultado siempre es lo mismo. Se observa en el argumento que la garantía es empírica y no justifica el paso de los datos a la conclusión por tanto es un **[GCSi].** (ver esquema 27)**.**




**Esquema 28. Argumento GCSd**

*Grupo 5*

Este grupo presenta una propiedad la propiedad común que observaron en cada una de las parejas de ángulos par lineal.

| | | |
|---|---|---|
| **106** | **E1** | **Comparando los de nosotros siempre hay un ángulo que es mayor a cien y el otro es menor de cien, Siempre es un ángulo que es menor** |
| 107 | P | Encontraron que uno es mayor de cien y el otro menor de cien. |
| 108 | E1 | Sí. |
| 109 | E2 | Para poder ser un par lineal |
| 110 | P | ¿Será esa la condición?, ¿qué más observan ahí? |
| 111 | E2 | Profe, profe mire, se puede repetir el número sí?, ¿sí o no se puede repetir? |
| 112 | P | No. |
| **113** | **E1** | **Sí, son diferentes los ángulos.** |

El primer argumento presentado por E1 en [106] es de tipo **[GCSa]** ya que presenta solo la conjetura desprovista de garantía o respaldo. en el caso del segundo argumento construido por E1 en [113] también es un argumento sustancial [**GCSa]**.

Para la puesta en común, estudiantes de los diferentes grupos pasaron a escribir los siguientes datos, en una tabla en el tablero, una vez completaron la tabla se seleccionó uno de los estudiantes, quien escribió la conclusión. (En la tercera pareja de datos se observa un error, el cual será abordado posteriormente).

| **Angulo 1** | **100** | **140** | **130** | **130** | **120** | **105** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Angulo 2** | **80** | **40** | **50** | **15** | **60** | **75** |

En los argumentos se puede observar que la conjetura dada por los estudiantes fue siempre la misma desde el inicio de la puesta en común lo que selo que se hizo fue escribirla cada vez mejor mediante un lenguaje claro y completo, para obtener el *HG. Par lineal*.

| | | |
|---|---|---|
| 116 | P | [Dirigiéndose a todo el grupo] Vamos a mirar qué descubrieron, qué encontraron. Para empezar, vamos a completar esta tabla que ustedes tienen en su cuaderno, entonces, como todos los grupos tienen sus tablas, pues, pueden pasar, cada uno por lo menos a escribir una pareja. |
| 117 | E | Pasan diferentes estudiantes a escribir una pareja de ángulos par lineal para completar la tabla. |
| 118 | P | Fíjense que no estén repetidos. |
| 119 | E1 | Profe yo quiero hacer, ese que quedo mal. |
| 120 | P | Ahora miramos […] Bien ya tenemos todos los ángulos. Había una parte que decía leámoslo exactamente. [toma las hojas y lee] Observas alguna propiedad común para todas las parejas, escríbalo. |
| **121** | **E2** | **Todos los ángulos dan ciento ochenta.** |
| 122 | P | ¿Cómo así que todos los ángulos dan ciento ochenta? |
| **123** | **E2** | **Porque, ciento cinco con este da ciento ochenta y el que está acá sumado con este también.** |
| 124 | P | Ustedes dicen que. |
| **125** | **E3** | **Profe que la sumatoria de los ángulos dan ciento ochenta es que los dos forman ángulos llanos y esos miden 180.** |
| 126 | P | ¿De los ángulos? |
| 127 | E3 | De los grados de los ángulos. |
| 128 | P | Esperen ¿qué es lo que estamos sumando de los ángulos?. |
| 129 | E4 | Las medidas. |
| 130 | P | Las medidas, entonces ¿cómo nos quedaría esa conclusión? |
| **131** | **E5** | **Que todas las medidas sumadas da ciento ochenta.** |
| 132 | P | ¿Las medidas de qué? |
| **133** | **E5** | De los ángulos. |
| 134 | P | A ver, dilo bien y completo |
| **135** | **E5** | **Profe que la suma de las medidas de los ángulos dan ciento ochenta** |
| 136 | P | ¿De cuáles ángulos? |
| 137 | E2 | De los par lineales- |
| 138 | P | ¿Quién lo escribe aquí en el tablero? [Varios levantan la mano, la profesora elige uno] |
| 139 | E6 | [El estudiante pasa a escribir en el tablero]. |
| 140 | P | Vayan pensando si tienen algo que mejorar a la definición que el va a escribir. |
| 141 | E6 | Escribe:La medida de todos los ∡ [ángulos] par lineal al sumarse da ciento ochenta. |
| 142 | P | Listo, ¿ustedes que opinan de la definición de E6? él escribe, "La medida de todos los ángulos par lineal al sumarse dan ciento ochenta grados". ¿Qué le faltaría, que le arreglarían? |
| 143 | E7 | La medida. |
| 144 | P | La medida entonces pase y escríbalo. Gracias. |
| 145 | E7 | [Pasa y lo escribe nuevamente].<br>"Al sumar las dos medidas de los ángulos par lineal es de ciento ochenta". |
| 146 | P | Listo, miremos la definición [se lee la definición], ¿de acuerdo o no de acuerdo? |
| 147 | E6 | No. |
| 148 | P | ¿por qué? |
| 149 | E6 | Porque depende. Sí, pero no, está mal redactado, o sea. |
| 150 | P | ¿Qué quedó mal redactado? |
| 151 | E6 | Que digamos, es de ciento ochenta grados no. Si no que el resultado es de ciento ochenta. |
| 152 | P | Bueno si, entonces, arreglémoslo. |
| **153** | **E7** | **[Arregla la definición]. "Al sumar las dos medidas de los ángulos par lineal el resultado es de ciento** |

| | | |
|---|---|---|
| | | **ochenta"** |
| 154 | P | Todos deben tener la definición escrita en la hoja […] ¿Alguien más tiene otra conclusión al respecto? |
| **155** | **E1** | **Que la que hizo E4 está mal.** |
| 156 | P | Ahí miren aquí hay una observación y la habían hecho desde antes y la habíamos olvidado, una de las que pasaron a escribir dicen que esta mal ¿por qué esta mal? |
| **157** | **E1** | **Porque al sumar la medida de los ángulos no da ciento ochenta.** |
| 158 | P | A ver E1 ¿Qué podrías corregir para que cumpliera la condición? |
| **159** | **E1** | **Ciento cincuenta y treinta.** |
| 160 | P | Pero ya lo teníamos, ¿cuál nos falta? |
| **161** | **E** | **Ciento quince y sesenta y cinco.** |
| 162 | P | Bien, ahí esta dejamos para la próxima clase. |

E2 inicialmente presenta una conclusión [121] sin aludir a un respaldo o garantía, es decir un argumento **[PCSa]**. Luego de ser cuestionado por la profesora para justificar el paso de los datos a esta, señala dos medidas de ángulos par lineal escritos en la tabla [123]; por tanto, este es un argumento sustancial con garantía empírica [**PCSd]**. E3 realiza un argumento **[PJAc]** en el cual la conclusión "la sumatoria de los ángulos da ciento ochenta" tiene una garantía "forman ángulos llanos" y alude a la definición de ángulos llano como respaldo [125], el argumento construido por E5 en [135] es nuevamente un argumento **[PCSa]** y la conjetura final escrita por E7 en [153], es un argumento incompleto sin garantía o respaldo **[PJSa]**, pues en este momento se le dio mayor importancia a la construcción de la conjetura y no a su justificación.

Finalmente se tiene el argumento de E1, quien detectó un error en uno de los datos de la tabla [119], realiza una conclusión [155] y presenta una garantía teórica (*HG. Par lineal*) para justificarla [157], es decir presenta un argumento sustancial con respaldo teórico [**PJSb]**.

***T2. P3. (DEMOSTRACIÓN DEL HG. PAR LINEAL RECTO)***

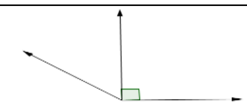
Este corresponde al tercer problema de la tarea 2 en el cual se introduce al estudiante en la AD, para ello se utiliza para ello la tabla a tres columnas (¿qué sé?, ¿qué uso? y ¿qué concluyo?). Inicialmente la profesora explica lee y explica la actividad y luego los estudiantes trabajan en grupo.

Mediante el trabajo de los grupos los estudiantes debían responder a la pregunta: si se tiene un ángulo recto, ¿qué se puede afirmar del ángulo que conforma par lineal?. Luego, los argumentos planteados durante la conversación tienen como datos dos ángulos par lineal y uno de ellos es recto.

*Grupo 1*

En el trabajo realizado por este grupo, ellos parten de los datos dados para determinar su conclusión y defenderla mediante la representación gráfica de un par lineal.

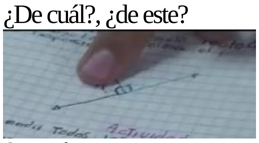
| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | Vamos a continuar con el último ejercicio que tenían acá [revisa y lee la guía]. **Si tiene un ángulo recto ¿qué se puede afirmar del que conforma el par lineal?**. Justifica tu respuesta. Entonces, van a empezar a trabajar en esa pregunta, deben escribir lo que piensan, decir por qué, explicar por qué, entonces, empiecen. [se acerca a un grupo] ¿Qué tienen? |
| **2** | **E2** | **Si es ángulo recto es de noventa grados, el otro ángulo también debe ser de noventa grados.** |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | P | ¿Por qué debe ser de noventa grados? |
| **4** | **E2** | **Porque digamos, si es menor no sería par lineal.** |
| 5 | P | ¿Por qué? |
| **6** | **E2** | **Porque, digamos este es el recto…, digamos si es así no quedaría par lineal [realiza la representación gráfica en la hoja].**  Representación gráfica 20 |
| 7 | P | Tu dices que si este es el de noventa [señalando el ángulo que tiene la marca] y este es menor [señalando el otro] no que da par lineal y ¿si es mayor?, piénsenlo y ahora paso [se dirige a otro grupo] |

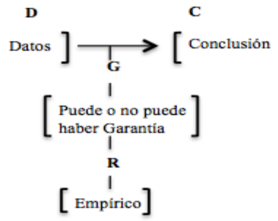
En este diálogo, E2 realiza dos argumentos para responder a la pregunta planteada [1], en el primero en [2] (parte subrayada), sólo se evidencian los datos (un ángulo recto) y la conclusión realizada por E2 "es de noventa grados", un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**GCSa]**, inmediatamente este pasa a ser parte de los datos del segundo argumento, en el cual se evidencia una conclusión [2] (parte no subrayada), una garantía [4] que alude a la *D. par lineal,* es un **[GJSb]** E2 al ser cuestionado nuevamente agrega a su argumento un respaldo empírico basado en la representación gráfica de la estudiante [6], es decir realiza un argumento sustancial con respaldo empírico [**GCSe]** (ver esquema 28).

*Grupo 2*

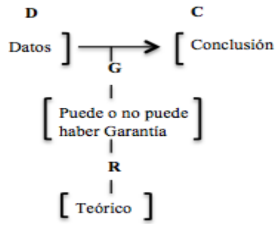
En el trabajo del siguiente grupo se observó que ellos aludían a datos que no hacían parte de los dados en el problema inicialmente, sin dar explicación de cómo llegaron a estos.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | E1 | Profe. |
| 9 | E2 | Mire a ver si esta bien. |
| 10 | P | Bueno qué pueden decir del otro ángulo? |
| 11 | E1 | ¿De cuál?, ¿de este?  Ilustración 3 |
| **12** | **E2** | **Pues que, el ángulo par lineal, eh… , si en este lado mide noventa grados, en la otra parte del ángulo, tiene que también medir noventa grados, porque los par lineales siempre terminan en ciento ochenta grados.** |
| 13 | P | ¿Cómo así los par lineal siempre terminan en ciento ochenta grados? |
| **14** | **E2** | **Que al sumarlos siempre.** |
| 15 | P | ¿Al sumar qué? |
| **16** | **E2** | **Los ángulos, la medida total es ciento ochenta grados.** |

E2 realiza un argumento [12] en el que usa información que no se explicita en los datos, (noventa grados), para validar su conclusión el estudiante alude a la *D. par lineal* y al *HG. par lineal*, no define exactamente que elemento usa en el respaldo, en este argumento no se evidencia la garantía, por lo tanto este es un argumento sustancial con respaldo teórico [**GJSc]** (ver esquema 29).




Esquema 29. Argumento GCSe



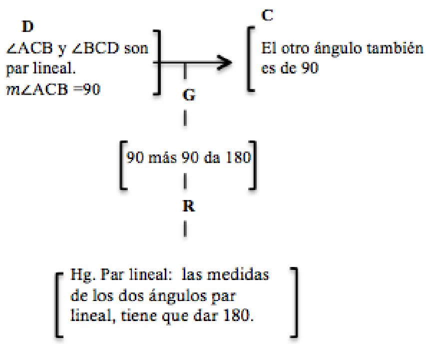

Esquema 30. Argumento GJSc

*Grupo 3*

Este grupo se basa en el *HG. Par lineal* para dar respuesta a la pregunta planteada inicialmente, En él siguiente fragmento se observan los argumentos en torno a esta tarea.

| | | |
|---|---|---|
| 17 | P | Listo, [se dirige a otro grupo]. ¿Qué tienen ustedes? |
| **18** | **E1** | **Es recto, la medida de los ángulos par lineal siempre tienen que dar ciento ochenta grados,** una de la reglas, tienen un rayo en común. |
| 19 | P | Sí, los ángulos par lineal tienen un rayo en común, ¿Qué más?, ¿pero que pueden decir del otro ángulo?, si un ángulo es de noventa ¿Qué pueden decir del otro? |
| **20** | **E2** | **Pues, se puede decir que el otro ángulo también es de noventa, porque al sumarlos debe dar ciento ochenta.** |
| 21 | P | ¿Al sumar qué? |
| **22** | **E2** | **Noventa más noventa da ciento ochenta, las medidas de los dos ángulos par lineal, tiene que dar ciento ochenta.** |

El primer argumento que se observa es E1 quien plantea su conclusión y ofrece un respaldo basado en el *HG Par lineal* [18]. Es decir es, un argumento analítico con garantía implícita **[GJAa].** E2 realiza un argumento donde, a diferencia del grupo anterior, en la conclusión hay únicamente información explícita en los datos [19]; es decir, es otro argumento analítico con garantía implícita **[GJAa],** pero al ser cuestionado por la profesora [21], agrega al esquema la garantía y define correctamente el respaldo, es decir, plantean un argumento analítico en el cual se evidencia garantía y respaldo **[GJAc]** (ver esquema 30).




Esquema 31. Argumento GJAc

*Grupo 4*

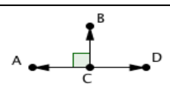
El argumento que se observa en el siguiente fragmento del trabajo de este grupo, también se fundamento en el *HG. Par lineal* elemento del sistema teórico local en construcción.

| | | |
|---|---|---|
| 23 | P | […] ¿Qué tienen? |
| **24** | **E1** | **<u>Cuando se suman los dos ángulos par lineal siempre da ciento ochenta</u>. Cuando un ángulo tiene noventa grados el otro también tiene que tener noventa grados por que al sumar debe dar ciento ochenta.** |
| 25 | P | Bien, listo. |

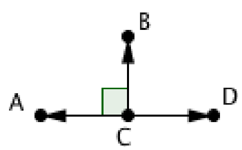
En este grupo E1 plantea dos argumentos [24]. En el primero (parte subrayada), los datos que posee son dos ángulos par lineal, de lo que concluye que el resultado de la suma de la medidas de los ángulos es ciento ochenta, un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[GJSa],** respecto al segundo argumento el estudiante cambia los datos iniciales, en lugar de un ángulo recto trabaja con uno de noventa grados [24] para plantear la conclusión, él presenta una garantía que hace referencia al *HG. Par lineal*, es decir un argumento analítico con garantía implícita **[GJAa].**

<u>Puesta en común</u>

En la puesta en común se da un cambio en la notación y el uso de símbolos en la escritura matemática, ya que en este momento se enfatizó en la manera correcta de escribir matemáticamente. El siguiente argumento se presenta durante la puesta en común, cuando la profesora trata de recordar el nombre del hecho geométrico (*HG. par lineal*) que los estudiantes utilizan para comprobar la conjetura.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 40 | P | En clases anteriores. ¿de dónde sacan esto? Al sumar las medidas de dos ángulos el resultado es ciento ochenta. Ustedes coinciden y a muchos grupos yo les pregunté y todos apuntaban a lo mismo. Ah porque el otro debe ser recto, deben medir noventa porque son par lineal y si son par lineal se cumple que al sumar la medida de sus ángulos el resultado es ciento ochenta, pero ¿por qué dicen esos? ¿algo nos garantiza que eso se a así? | |
| 41 | E1 | El resultado | |
| 42 | P | Pero tendríamos que medirlos y no estamos midiendo | |
| **43** | **E4** | **Porque tienen dos rayos opuestos y si se quita el otro rayo mide ciento ochenta. [señalando la grafic en el tablero]** |   Representación gráfica 21 |

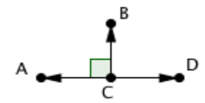
La garantía utilizada por E4 [43] para explicar el *HG par lineal* es la representación gráfica, la *D. Par lineal* y su experiencia, es decir es una garantía empírica. Luego este es un argumento sustancial con respaldo empírico [**PCSd**]. Los argumentos que se analizan a continuación se presentaron durante la demostración del *HG. Par lineal recto*.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 58 | P | Ustedes dicen el otro debe que ser recto y aquí ahí una explicación [señala, lo que no está subrayado en el tablero], de porque debe ser recto. […]. Para hacer la demostración, vamos a usar un cuadro de tres columnas. En la primera ¿de qué vamos a partir?, de qué se. En la segunda ¿qué uso? y en la tercera ¿qué concluyo?. Qué se, es lo que hemos aprendido hasta el momento, qué uso son la herramientas que nos permiten llegar a donde queremos llegar, en este caso de lo que nos dan, ¿qué sabemos? | |
| 59 | E1 | Que son par lineal y uno es recto. | |
| 60 | P | Ah bueno hay dos cosas, que son par lineal y que uno es recto. Voy a hacer una representación gráfica de la situación pues para que sea más fácil. Entonces hasta el momento sabemos que tenemos dos ángulos par lineal, a estos démosle nombre, digamos |   Representación gráfica 22 |

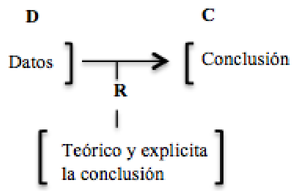
| | | |
|---|---|---|
| | | que sea A, B, C y D y sabemos que un ángulo es recto, ¿cierto?[ realiza la figura].<br>Entonces, que se sabemos dos cosas, primero, que dos ángulos son par lineal, ¿cuáles ángulos son par lineal? |
| **61** | **E9** | **∠ACB y ∠BCD son par lineal** |
| 62 | P | ∠ACB y ∠BCD son par lineal [lo escribe en el tablero], bueno, ¿de eso puedo concluir algo? |
| **63** | **E5** | **Que tienen que sumar ciento ochenta las dos medidas, por el par lineal.** |
| 64 | P | Ah que las dos medidas de los ángulos deben sumar ciento ochenta grados, o sea que si yo se esto [señala lo escrito en la primera columna] puedo concluir que las medidas de los dos ángulos suma ciento ochenta [lo empieza a escribir en el tablero] ¿la medida de qué? |
| 65 | V | De los dos ángulos. |
| 66 | P | Pero escribámoslo matemáticamente ¿cómo nos quedaría? |
| 67 | E8 | La medida de noventa por noventa. |
| 68 | P | No, volvamos al inicio habían dicho que si los ángulos son par lineal la suma de la medida de los ángulos da ciento ochenta grados y yo les digo ¿cómo lo escribimos matemáticamente? |
| **69** | **E9** | **Medida del ∠ACB y la medida ∠BCD.** |
| 70 | P | ¿y? |
| 71 | E9 | La sumatoria. |
| 72 | P | Bueno la sumatoria, ¿pero cómo podemos expresar? |
| 73 | E9 | Más. |
| 74 | P | ¿Qué más? |
| 75 | E | El ∠BCD |
| 76 | P | ¿Más el ángulo? |
| **77** | **E9** | **Medida del $\angle ACB$ Mas la medida $\angle BCD$, es igual a ciento ochenta** |
| 78 | P | Bien, entonces la medida de los dos ángulos da ciento ochenta grados, ¿qué nos garantiza que esa medida da ciento ochenta grados? |
| 79 | E6 | El transportador profe. |
| 80 | P | No el transportador, Nosotros ante trabajamos en algo ¿En qué fue? |
| **81** | **E4** | **Por que si se quita el rayo que no es contrario los dos rayos contrarios suman ciento ochenta grados. [señalando la gráfica en el tablero (ver representación grágica 22)]** |
| 82 | P | Bueno eso sería una representación grafica, ¿pero qué nos garantiza esto?, nosotros hicimos un trabajo previo, que nos decía esto, si tengo dos ángulos que son par lineal la suma de sus medidas da ciento ochenta ¿cierto?, pero ¿qué nos garantiza eso? |
| 83 | E8 | Que comparten el mismo rayo. |
| 84 | P | Pero eso no lo dan cuando dice que son par lineal, aquí nos dan una herramienta grafica, pero nosotros también trabajamos otra cuando trabajaron con los ángulos. |
| **85** | **E1** | **Eso ángulos suman ciento ochenta, son par lineal y como la suma de los par lineal es ciento ochenta. [se refiere a las $m\angle ABC$ y $m\angle BCD$]** |
| 86 | P | Que la suma de las dos medidas es ciento ochenta, ¿eso como se llama?, miren que nosotros ya lo manejamos, ya lo trabajamos pero a eso debemos darle un nombre y creo que ya le habíamos dado un nombre y decíamos que ese era el HG ¿qué? |
| 87 | E5 | Par lineal. |
| 88 | P | Bueno el hecho geométrico del par lineal. Bien, ¿qué se? que los dos ángulos son par lineal, ¿qué uso? el HG. par lineal y ¿qué nos permite concluir ese HG par lineal? Que la suma de la medida de los dos ángulos da ciento ochenta. […] |

El primer argumento que se observa durante la puesta en común es el realizado por E9, quien parte de unos datos [61]. y A partir de ellos obtiene una conclusión [77]. Pero a pesar de que la profesora cuestiona sobre lo que le permite dar esta conclusión, él no presenta garantía alguna, por tanto este es un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PCSa]**. E5 plantea un argumento sustancial con garantía empírica [**PCSb]** [63], ya que manifiesta que la suma de las medidas de los ángulos debe ser 180 y como garantía alude a ángulos par lineal pero no dice exactamente qué elemento teórico le permite pasar de los datos a la conclusión. E4 asume como conclusión que los ángulos suman ciento ochenta, expone una garantía empírica [81] y presenta un respaldo gráfico (representación gráfica 22) para ello, es decir un argumento sustancial con respaldo empírico **[PCSe]**, E1 realiza un argumento analítico **[PJAc]** ya que presenta como conclusión: $m\angle ABC$ y $m\angle BCD$ suman ciento ochenta, una garantía son par lineal y un respaldo alude al *HG. Par lineal* [85].

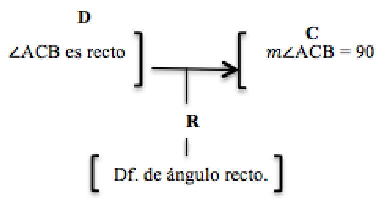
| | | |
|---|---|---|
| 88 | P | […] Aparte de esto ¿qué más sé? |
| **89** | **E1** | **Qué un ángulo es recto [Refiriendose a ∠ACB].** |
| 90 | P | Que un ángulo es recto, en este caso ¿cuál es el ángulo recto? |
| **91** | **E6** | **El $\angle ACB$ [indicando que es recto]** |
| 92 | P | Entonces eso es lo que se, eso lo vamos a colocar aquí, el ∠ACB es recto y si el $\angle ACB$ es recto ¿qué puedo concluir? |
| 93 | E4 | Que el BCD también por que se aplica lo de ciento ochenta. |
| 94 | P | No, porque mira que a eso es a lo que vamos a llegar al final, entonces, ¿qué puedo concluir? Si el ∠ACB es recto ¿qué sabemos de un ángulo cuando es recto? |
| **95** | **E6** | **Que cuando un ángulo es recto mide exactamente noventa grados.** |
| 96 | P | Ah, entonces podemos decir que este ángulo mide noventa grados, dilo. |
| **97** | **E1** | **La medida del ∠ACB es de noventa grados.** |
| 98 | | Bien, y ¿qué nos permite decir que si este ángulo es recto su medida es noventa? |
| 99 | E4 | Por la definición de los ángulos. |
| 100 | P | ¿En este caso qué definición? |
| **101** | **E1** | **Definición de ángulo recto.** |
| **102** | **E4** | **Se puede definir que el otro ángulo es recto porque se le quita los noventa a ciento ochenta.** |
| 103 | P | Estamos muy cerca, pero antes de llegar a ese punto, aquí [señala la columna de que se] que me sirva para tener esos noventa grados y para poder tener la operación que tu dices que quitar noventa grados, entonces, ¿qué se? |
| **104** | **E6** | **La definición del otro ángulo, eh… coinciden la propiedades del ángulo de noventa grados y por lo tanto ese también es de noventa grados, eh… y por otro lado los dos tienen que llegar a la suma de que los dos dan ciento ochenta grados.** |
| 105 | P | Pero mira que tu estas dando esta parte final, yo les estoy diciendo ¿ahora que más se? aparte de esto que tengo acá ¿qué más se? [señala la primera columna de la tabla]. |
| 106 | E4 | Que tiene que dar ciento ochenta. |
| 107 | P | Listo, dilo matemáticamente, ¿qué tiene que dar ciento ochenta? |
| 108 | E4 | Los grados. |
| 109 | P | ¿Los grados? |
| 110 | E4 | La medida del ángulo. |
| 111 | P | ¿De un ángulo o cómo sería? |
| 112 | E4 | De la suma de los ángulos. |
| 113 | P | La medida, organízalo y dilo. |
| **114** | **E6** | **La suma de las medidas de los ángulos tiene que dar ciento ochenta.** |
| 115 | P | Es algo que ya sé, entonces voy a escribirlo acá en lo que se, o sea ya se esto ya lo se, entonces, la medida del *∠ACB* más la medida *∠BCD* es igual a ciento ochenta [lo escribe en el tablero], ahora sólo sé eso o sé algo más. |
| 116 | E7 | Que se podrían restar con los noventa grados del *∠ACB*. |
| 117 | P | Pero, eso sería la operación que tendrías que hacer, pero, ¿qué más se? aparte de lo que tenemos aquí. |

| | | |
|---|---|---|
| **118** | **E6** | **Para poder comprobar que el otro ángulo también es de noventa grados [se refiere a ∠*BCD*], a ciento ochenta se le resta la medida del ∠ACB que es noventa grados.** |
| 119 | P | Sí, es lo mismo que esta diciendo E4, pero para poder hacer la operación, miren que yo no puedo decir, ¡ah! es que esto es así ponerlo aquí sin tener algo que nos garantice esa operación, por eso tengo que tener algo que me permite utilizando lo que se concluir lo que ustedes están diciendo, que es que al restar noventa, que ahorita lo vamos a organizar bien y lo vamos a decir matemáticamente nos va a llevar a que el otro ángulo es de noventa. Ya tenemos que sabemos esto [señala la columna del qué se? ¿con sólo esto yo puedo hacer la recta que esta planteando E4? o ¿falta algo? |
| 120 | E4 | La medida. |
| 121 | P | ¿La medida de qué? |
| 122 | E7 | Las medidas de los ángulos, del segundo ángulo. |
| 123 | P | ¿Del segundo ángulo?, ¿conocemos algo más de las medidas de los ángulos? |
| 124 | E2 | Que son par lineal. |
| 125 | P | Pero ya lo tenemos acá. |
| 126 | E1 | Que el ∠ACB es recto. |
| 127 | P | Eso ya lo tenemos aquí, ¿qué más sabemos de ese ángulo? |
| **128** | **E7** | **Yo te digo, que al quitar el $\overrightarrow{CB}$, ∠ACD es de ciento ochenta**   Representación gráfica 23 |
| 129 | P | Sí, que es lo que decía E4 gráficamente, que si yo quito este rayo [señala el $\overrightarrow{CB}$] me queda un ángulo de ciento ochenta, pero mire que no estamos en este momento trabajando con medidas de ángulos de ciento ochenta, pero de lo que ya teníamos ¿qué más se?, miren la tabla que teníamos. [Se acabo el video] |

E1 durante la puesta en común construye un argumento analítico con garantía implícita [**PJAa]** (ver esquemas 31 y 32), ya que se parte de unos datos [89], se plantea una conclusión [97] y presenta un respaldo teórico, en cual se basa en el sistema local en construcción [101]. Otro argumento lo realiza E4 en [102], él presenta una conclusión y una garantía teórica, es decir un argumento **[PCSb].**

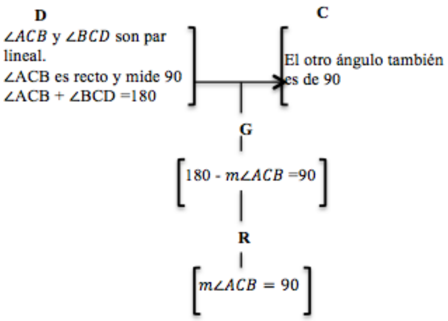



**Esquema 32. Argumento PJAa**




**Esquema 33. Argumento PJAa**

E6 en ese momento de la justificación ya ha ido enriqueciendo los datos con diferentes elementos teóricos, como el hecho de que los $\angle ACB$ y $\angle BCD$ son par lineal, $\angle ACB$ es recto y mide noventa grados [91] y [95] y que la suma de las medidas de los ángulos tiene que dar ciento ochenta [114]. A partir de ello concluye que $\angle BCD$ mide noventa [118] y para justificar su conclusión presenta una garantía teórica y un respaldo teórico [118], es decir un argumento analítico en el que se evidencia garantía y respaldo [**PJAc]** (ver esquema 33).




**Esquema 34. Argumento PJAc**

## T.3. DE CIRCUNFERENCIA

Esta tarea está formada por tres problemas mediante los que se pretende que los estudiantes construyan otros elementos del sistema teórico local, *D. Circunferencia*[7], *D. Mediatriz de un segmento*[8], *D. Punto medio de un segmento*[9] y el *HG. Mediatriz*[10].

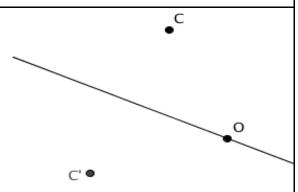
### T.3. P.1. (DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA)

En este problema se pretende realizar un acercamiento a la *D. de circunferencia,* para ello los estudiantes deben ubicar puntos *C'*, de tal manera que todos estén a la misma distancia de *O* como lo está el punto C, estos puntos fueron elaborados en foamy y en papel.

En el trabajo grupal los grupos parten de sus observaciones sobre la construcción realizada por ellos para dar solución al problema planteado. Los argumentos que surgieron a manera grupal se presentan a continuación en cada una de los fragmentos de diálogo de los grupos.

*Grupo 1*

En el trabajo de este grupo se observa que los estudiantes construyen una recta auxiliar que contiene a *O* para ubicar los puntos que cumplen la condición dada.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | P | [Se acerca a un grupo] Bueno, ¿Cómo van?, ¿Qué punto están ubicando? | |
| 3 | E1 | Apenas este [señala en la hoja el punto]. | |
| 4 | P | Y ¿Cómo hicieron para ubicarlo? | |
| 5 | **E1** | **Yo tracé una línea verticalmente en la hoja y que pasa por *O*, por la mitad y… y acá [señalando la distancia entre *C* y la línea que trazó] me dieron… igual que de acá a acá [señalando la distancia entre el punto construido (*C*')  y la línea], o sea, medí acá, ¿Si? [señalando la distancia entre *C* y la línea] y para que quedara igual [señalando la distancia entre la línea y el nuevo punto *C*'], <u>y después medí acá y me dio lo mismo [mostrando con la escuadra la medida de</u> la distancia entre *O* y el punto creado].** | <br>Representación gráfica 24 |
| 6 | P | Es decir que este, póngale *C'*, ¿*C'* está a la misma distancia de qué punto? | |

---

[7] *D. Circunferencia*: **Circunferencia es el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto fijo C llamado centro.**

[8] *D. Mediatriz de un segmento*: **m es la mediatriz del AB, si esta conformada por el conjunto de los puntos que equidistan de A y B.**

[9] *D. Punto medio de un segmento*: **C se denomina punto medio del segmento AB si está entre A y B, y además equidista de A y B.**

[10] *HG. Mediatriz*: **m es la mediatriz del AB si m es perpendicular AB y además contiene su punto medio.**

| | | |
|---|---|---|
| 7 | E2 | Del punto *O*. |
| 8 | P | ¿De *O*? miremos. |
| 9 | E 2 | No. |
| 10 | P | ¿No? |
| 11 | E 2 | No, del punto *O*, tienen la misma distancia que este. [se refiere a la distancia de *C* a *O*]. |
| 12 | P | O sea, ¿Éste está a la misma distancia que éste? [distancia entre *C* y *C'*]. |
| **13** | **E2** | **No, este y este [señalando *O* y *C'*], tienen la misma distancia que éste y éste [señalando *O* y *C*] .** |
| 14 | P | Ah, eso sí, este y este tienen la misma distancia que este y este [señalando la distancias de *C* y *C'* a *O*], listo, y,¿será qué pueden trazar más puntos ? |
| 15 | E1 | Sí. |
| 16 | P | Y ¿Para qué utilizan esta línea recta que trazaron [señalándola en la hoja]?, ¿por qué ese proceso garantiza que *C* y *C`* equidistan de *O*? |
| 17 | E1 | Para medir, yo lo medí, o sea, para que equivalga. |
| 18 | P | Bueno listo, traten y ya ahoritica pasamos [la profesora abandona el grupo]. |

En el trabajo de este grupo E1 traza una recta auxiliar que pasa por *O* y ubica *C'* a la misma distancia de *C* respecto a la recta y concluye que si traza una recta que pasa por *O* y se toma la distancia de *C* a esta recta y se ubica un punto *C'* a la misma distancia de la recta que *C* entonces *C* y *C'* equidistan de *O* (ver representación gráfica 24 en [5]). Como garantía recurre a la medida (parte subrayada) [5]; es decir, presenta un argumento sustancial con garantía empírica **[GCSd].** E2 en [13] plantea un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[GDSa],** pues manifiesta que *C* y *C'* equidistan de *O* pero no justifica por qué.

*Grupo 2*

La intervención del siguiente grupo se caracteriza por que los estudiantes modifican la condición planteada inicialmente ya que manifiestan que la distancia de *C* a *O* también debe ser la misma que de *C* a *C'*, pero no la tienen en cuenta en el momento de resolver el problema.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 77 | E1 | Mide igual de *O* a *C*, de *C* a *C'* y de *C* a *C'* [señalando las distancias de, de *C* a *C'* y de *C'* a *O*] y también miden igual de *C'* a *O*, los otros no los alcancé a hacer porque acá [Señala que el espacio de la hoja no le fue suficiente] . | |
| 78 | P | ¿Por qué tuviste en cuenta ésta distancia de acá a acá? [señalando la distancia entre *C* y *C'*]. | |
| 79 | E1 | Pues porque dice que otro punto que tuviera la misma distancia que de acá a acá. | |
| 80 | P | ¿Qué dicen ustedes?, ¿Creen que hay más puntos o solo con esos? | |
| 81 | E1 | Yo creo que solo son esos porque no alcanzo a hacer más con la misma distancia [señalando con sus dedos las distancias]. |  Ilustración 4 |
| 82 | P | ¿Y por qué no alcanzas? | |
| 83 | E2 | Porque esto está acá. | |
| 84 | E1 | Por las letras. | |
| 85 | P | Ah, ¿Por las letras?, ¿Pero si no hubiera letras, si alcanzaría? | |
| 86 | E1 | Mmm [afirmando]. | |
| 87 | P | Entonces hagan otros. | |
| 88 | E1 | ¿Así queden encima de las letras? | |
| 89 | P | Sí, no importa, no importa. | |
| **90** | **E1** | **Y quedará como un círculo.** | |
| 91 | P | ¿Tú dices que quedara como un círculo? | |
| 92 | E1 | Yo creo que sí. | |

| | | |
|---|---|---|
| **93** | **P** | **¿Tú crees que sí?, ¿por qué queda un círculo?** |
| **94** | **E1** | **Los puntos estan a igual distancia de *O*.** |
| 95 | P | Entonces mira [señala una de las preguntas de la hoja] ¿Cuántos puntos pueden ubicar con esta condición? |
| 96 | E1 | Mmmmm, ¿Más o menos seis? |
| 97 | P | ¿Serán seis? |
| 98 | E2 | Yo diría que más. |
| 99 | P | […] Luego dice la otra pregunta, si encontró más de un punto, o sea ustedes ya tienen por lo menos 4, con esta condición, estos puntos cumplen una característica especial, ¿Cuál es? [silencio], ¿Cuál es esa característica que tienen? |
| 100 | E1 | Mmmm, ¿Que todos parten del punto *O*? |
| 101 | P | Que todos parten del punto *O*, ¿Qué otra característica? |
| **102** | **E3** | **Que todos parten de *O* y ellos también miden lo mismo. [Se refiere a que los puntos que ubicaron estan a la misma distancia de *O*].** |

Durante el trabajo en este grupo se pueden observar tres argumentos. El primero realizado por E1, quien de la observación de los puntos ubicados por ellos deduce que se forma un círculo [90]. Es un argumento de tipo **[GCSa]**; al nombrar el círculo en realidad E1 se está refiriendo a una circunferencia y al preguntarle el por qué de su conclusión presenta una garantía empírica que nace de la observación y la condición dada [94], por tanto este es un argumento sustancial con garantía empírica [**GCSd]**. El estudiante E3, se basa en el proceso de ubicación de los puntos que cumplen la condición enunciada, para obtener su conclusión [102] y plantear así un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**GCSa]**.

*Grupo 3*

En el siguiente fragmento de la conversación del grupo de observa que los estudiante parten de una cantidad finita de puntos hasta llegar a una cantidad infinita mediante la cual es posible determinar una circunferencia.

| | | |
|---|---|---|
| 121 | P | Listo, empecemos, ¿Cuántos puntos han encontrado? |
| **122** | **E10** | **Diez.** |
| 123 | P | ¿Diez? Y¿pueden encontrar más? |
| **124** | **E10** | **Sí.** |
| 125 | P | Y ¿Cuántos? |
| 126 | E10 | Eee, depende de cuantos ubiquemos. Porque se puede ubicar, se puede digamos poner uno acá, [coloca tres puntos seguidos en la hoja], pero con la misma distancia de *O*, la misma regla. |
| **127** | **P** | **[…], entonces tú dices que puedes encontrar muchos,Si encontró un punto con esta condición, estos puntos cumplen una característica, ¿Cuál es?, ¿Qué característica cumplen estos puntos?** |
| **128** | **E10** | **Que tienen la misma medida.** |
| 129 | P | Que tienen la misma medida, ¿Con respecto a qué? |
| 130 | E11 | Al punto *O*. |
| 131 | P | Con respecto a *O*, ¿Cierto? Y ¿Qué más?, ¿Alguna otra característica? |
| 132 | E12 | Pues que es un círculo ¿No? |
| 133 | P | Bueno, pero dilo duro. |
| **134** | **E12** | **Bueno, que se puede diferenciar como si fuera un círculo.** |
| 135 | P | ¿Que pueden diferenciar un círculo?. O sea, ustedes dicen que cumplen dos características entonces. Bien, entonces uno que tienen siempre la misma distancia y la otra que forman un círculo, bueno listo, gracias [se retira del grupo]. |

Uno de los argumentos que se puede evidenciar en el diálogo del grupo es el realizado por E10. Él plantea una conclusión [122] pero no presenta una garantía para la conclusión, por tanto es un argumento **[GDSa],** es decir sustancial sin garantía o respaldo. Posteriormente, ante la pregunta de la profesora [127], E10 plantea la conclusión expresada en [128], nuevamente un argumento **[GDSa]**. E12 también realizó un argumento **[GCSa]**, en el que únicamente se evidencia la conclusión [134] que obtiene de observar los puntos ubicados de acuerdo a la condición. Durante el trabajo de la puesta en común los estudiantes utilizan los puntos en foamy para realizar la construcción en el tablero. Posteriormente, como se puede observar en el fragmento de este diálogo a partir de las preguntas de la profesora llegan ellos a la formulación de la *D. Circunferencia*.

| | | |
|---|---|---|
| 137 | P | ¿Quién quiere pasar?, entonces E8, pasa [el estudiante pasa y mide con la escuadra la distancia entre los puntos y usa la misma para poner otro] A ver, vamos a poner aquí atención y ustedes me cuentan si están, o no están de acuerdo con lo que hace E8.   Ilustración 5 |
| 138 | E8 | Ya. |
| 139 | P | ¿Podemos encontrar otro punto *C*? |
| 140 | V | ¡Sí, uuuuuu!. |
| **141** | **E8** | **Muchos Profe.** |
| **142** | **E13** | **Profe demasiados.** |
| **143** | **E1** | **No profe, nada más se puede ubicar tres** |
| 144 | E14 | Profe yo creo que queda como un círculo. |
| 145 | E15 | Buuu, y ¿Cuál es la idea? |
| 146 | P | ¿Por qué crees que solo se pueden ubicar tres? |
| **147** | **E1** | **Porque deben quedar de igual distancia todos.** |
| 148 | P | ¿De qué? |
| 149 | E1 | Ah bueno de… |
| 150 | P | ¿De igual distancia de dónde a dónde? |
| **151** | **E1** | **Del punto O al punto C y del punto C al otro C'.** |
| 152 | P | O sea que tu mides que esta distancia sea igual a esta [señala en el tablero la distancia de C a O y de C' a O], y ésta igual a esta, ¿Alguna otra condición tú le pones? |
| 153 | E1 | Y que los puntos también tienen que tener la misma distancia. |
| 154 | P | Ahh, es que tú estás diciendo que esta distancia también tiene que ser la misma que esta [señalando las distancias entre los puntos C']. |
| 155 | E1 | Pero esa ya no es la misma. |
| 156 | P | Pero miremos en la definición que tenemos, qué es lo que nos pide el ejercicio, Observe el punto O, en el centro del siguiente recuadro, junto a él aparece un punto C, a cierta distancia Ubique un punto C' que esté a la misma distancia de O que el punto C. […]. |

Los primeros argumentos que surgen son los realizados por E8 y E13 en [141] y [142], los cuales por su estructura corresponden a **[PDSa]**, ya que ellos no presentan garantía o respaldo alguno en sus estructura. Durante la puesta en común, una de las discusiones que se presentó en torno a la ubicación de los puntos fue si la distancia entre los puntos C' debía ser la misma distancia que entre O y C, ya que durante el trabajo grupal fue una de las consideraciones realizada por un grupo, el cual trató de defender su posición durante la puesta en común.

El argumento planteado por E1, surge de una mala interpretación de la condición planteada en la actividad. En la conclusión E1 manifiesta que solo es posible ubicar tres puntos [143] y la garantía que expone E1 [147 y 151] se fundamenta en el cumplimiento de la condición, lo que determina un argumento sustancial **[PCSd].** En el siguiente momento de la puesta en común los argumentos que generaron los estudiantes están relacionados también con la cantidad de puntos que se pueden ubicar.

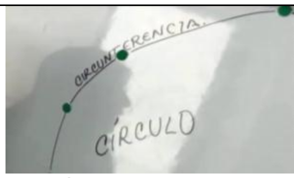
| | | |
|---|---|---|
| 157 | P | […] Entonces, eee, E8 va a ubicar otro, [espera que lo ubique] listo, ¿Todavía no?, ¿Alguien le quiere ayudar a E8? |
| 158 | E2 | Yo. |
| 159 | E8 | Ay profe, ya que alguien me ayude. |
| 160 | P | E2 Pasa. |
| 161 | E14 | Profe, corrió el punto *O*. |
| 162 | P | A ver, escuchemos allá, ¿Dime? |
| **163** | **E10** | **Con la condición que nos piden podemos ubicar más puntos que solo esos, se pueden ubicar más.** |
| 164 | P | Más puntos cierto, ahí van tres, seis, ¿Alguien quiere pasar a ubicar más puntos? |
| **165** | **E10** | **Porque se podría más cerca.** |
| 166 | P | ¿A qué te refieres con más cerca? |
| **167** | **E10** | **Cada vez más juntos.** |
| 168 | P | Según lo que tenemos ahí ¿Cuántos puntos podemos ubicar? |
| 169 | E | Uuuuu. |
| 170 | P | Pero uuuu, ¿Qué es? |
| **171** | **E13** | **Demasiados.** |
| 172 | P | Demasiados. |
| **173** | **E1** | **Por ahí unos cuarenta.** |
| 174 | P | ¿Cuarenta? |
| 175 | E2 | Mas. |
| 176 | E6 | Profe, creo que uno puede pegar más los puntos y así da muchísimo más de cuarenta, porque uno puede pegar digamos un punto al lado del otro. |
| 177 | P | Que queden bien juntos, listo, o sea que tú dices que muchísimos puntos, y tú que dices [preguntándole a E10] |
| **178** | **E10** | **Se puede dibujar una circunferencia completa, con todos los puntos.** |
| 179 | P | O sea, tu puedes hacer una circunferencia completa con esos puntos ¿Ustedes están de acuerdo con ella? |
| 180 | V | Sí. |
| 181 | P | Supongamos como dice E6 [176], ponemos muy juntitos estos puntos ¿podrían formar esa circunferencia?. |
| 182 | V | Uuuuu. |
| 183 | P | ¿Será que nosotros podemos dar un número exacto de los puntos? |
| 184 | V | No. |
| 185 | P | ¿Por qué no?, o más bien, ¿Quién dice que si? Y ¿Quién dice que no? |
| 186 | E5 | Yo digo que sí. |
| 187 | P | ¿Tú por qué dices que sí?. |
| 188 | E5 | Porque a lo que la uniéramos toda los podríamos contar. |
| 189 | E6 | No, pero desde antes. |
| 190 | P | Ah, bien, espera, tú dices que si ponemos todos los puntitos juntos ya los podemos contar, ¿Cierto? Y E6 ¿Qué dice? |
| 191 | E6 | Profe, pues yo digo que no, porque la idea es saber antes de ponerlos todos. |
| 192 | P | Tu que dices E1. |
| 193 | E1 | Profe pues yo digo pues sí, lo mismo que dice E5, eee, se puede formar toda. |
| 194 | P | Bueno, bien, podremos formar una circunferencia y creo que teníamos, que tenían ustedes en la hojita una pregunta ¿Cuántos puntos se pueden ubicar con esta condición? Era la primera, entonces, estaban diciendo que muchos puntos, y había una segunda pregunta que está relacionada con lo que algunos ya han mencionado y dice, si encontró más de un punto con esta condición, estos puntos cumplen una característica especial, ¿Cuál es la característica especial? |
| 195 | E | Que forman un círculo. |
| 196 | E6 | Una circunferencia. |

En torno a esta conversación, E10 realizó un argumento sustancial con garantía empírica **[PDSd]**. Él observa que se pueden ubicar muchos puntos C’ que equidistan de O, plantea la conclusión [163].

La garantía que genera para explicar el paso de los datos a la conclusión es empírica, fundamentada en la observación de los puntos ubicados [165 y 167]. Respecto a la cantidad de puntos ubicados, E13 y E1 en [171 y 173] plantean argumentos incompletos sin garantía o respaldo **[PDSa],** en los que se observa sólo una conclusión frente a la cantidad de puntos. E10 también plantea, que con los puntos ubicados es posible dibujar una circunferencia completa [178], conclusión para la que no presenta garantía alguna, es decir realiza un argumento **[PCSa].**

Teniendo en cuenta que algunos estudiantes aludían al hecho que los puntos formaban una circunferencia y otros que un círculo, la mayoría de los argumentos que se generaron en torno a esto se evidencian en el siguiente diálogo.

| | | |
|---|---|---|
| 197 | P | Bueno, ¿un círculo o una circunferencia?, vamos a mirar aquí [une los puntos que tiene en el tablero con el marcador]. |
| 198 | E5 | Profe eso parece un huevo. |
| 199 | P | Bueno, entonces esto que tenemos acá ¿ya es la circunferencia?, algunos de ustedes decían: un círculo, una circunferencia ahora yo les pregunto, esto ¿Qué es? [Señalando la circunferencia], vamos a mirar aquí, dicen que un círculo o una circunferencia, nuevamente repito la pregunta ¿Qué es esto? [señalando la circunferencia] . |
| 200 | E2 | Un círculo. |
| **201** | **P** | **Y entonces ¿Cuál es la circunferencia? Y bueno, y entonces ¿Qué es una circunferencia? y ¿cuál es la circunferencia aquí?, ¿cuál será el círculo y cuál la circunferencia?** |
| **202** | **E10** | **La unión de todos los puntos.** |
| **203** | **P** | **La unión de todos los puntos tú dices que es ¿Qué?** |
| **204** | **E10** | **La circunferencia.** |
| 205 | P | La circunferencia. |
| 206 | E14 | Profe, le falta la medida que hay para que de él círculo. |
| 207 | P | ¿La parte de la medida?, o sea que tú dices que ésta distancia [marca $\overline{OC}$], a ver, espera, escuchemos allá, tú dices que eso es ¿Qué? |
| 208 | E10 | El radio. |
| 209 | P | ¿Ustedes qué opinan, los demás qué opinan?, ¿Esto qué es?, ¿Radio? o ¿Qué es? |
| 210 | Es | Radio. |
| 211 | P | Tú también dices que este es un radio de la circunferencia. |
| 212 | E2 | Sí profe. |
| 213 | P | Sí, exactamente, este es un radio de la circunferencia, o sea que aquí en este caso no podemos hablar ni de círculo ni de circunferencia, este sería un radio, lo vamos a borrar por el momento, porque pues no lo vamos a necesitar. |
| 214 | E6 | Profe, ¿La circunferencia no es la unión de varios puntos? |
| 215 | P | ¿Dime? |
| 216 | E6 | ¿La circunferencia no es la unión de varios puntos? |
| 217 | P | Eso es lo que estamos mirando, por favor quienes escuchamos, no discutimos la respuesta que da la otra persona hasta que no de la palabra |
| 218 | E6 | Profe, círculo sería la figura ¿No? |
| 219 | P | O sea tú dices que, o sea ¿cuál?, ¿Puedes señalar aquí el círculo? |
| **220** | **E6** | **Pues sí, la circunferencia sería la unión de los puntos, pero el círculo, la figura que forman.** |
| 221 | P | Por eso, pasa y señalas aquí y miramos [el estudiante se dirige al tablero], tú dices que la circunferencia es la unión de los puntos ¿Cuál es la unión? |
| **222** | **E6** | **Pues cuando, digamos así profe, cuando hay artos puntos unidos [señalando la circunferencia], sería la circunferencia, y la, el círculo sería la, la figura que forma [señala con su mano el interior de la circunferencia].** |
| 223 | P | La figura que forma, bueno, gracia E6, ¿Ustedes que opinan? |
| 224 | E | Sí. |
| 225 | P | ¿Será que sí?, bueno, entonces, resulta que la circunferencia siempre es, como decían ustedes, la unión de |

| | | |
|---|---|---|
| | | los puntos, es decir esto [señalando en el tablero], la forma de la, de esta circunferencia pues nos la da la condición que teníamos antes, recuerdan ¿Cuál era la condición para poner cada punto? |
| 226 | E6 | La misma medida. |
| 227 | P | La medida que hay entre *O* y *C*, o sea, la medida que hay entre *O* y *C* y esta medida que hay entre *O* y *C'*, ¿Cómo es que nos decía aquí E10 que la llamábamos? |
| 228 | E | Radio. |
| 229 | P | El radio, entonces, y lo mismo Sánchez también dijo que era un radio, entonces, esta es la circunferencia, esto [la señala] y lo que está dentro, esto [colocando su mano en el tablero, al interior de la circunferencia], la región del plano limitada, esto es el círculo, esto es círculo [lo escribe en el círculo] y esto es la circunferencia [lo escribe al borde de la circunferencia]   Ilustración 6 Entonces ¿Qué podemos decir que es una circunferencia? ¿Quién me da una definición de circunferencia? Eee, E1. |
| **230** | **E1** | **La unión de los puntos** |
| 231 | P | ¿La unión de los puntos?, ¿Faltará algo?, tú ¿Qué dices? |
| 232 | E2 | Los puntos *C*. |
| 233 | P | O sea, la unión de los puntos *C*, bueno, de *C* con todos los *C'* que teníamos, tú ¿Qué dices? |
| **234** | **E10** | **La unión de los puntos con la condición que nos ponen.** |
| 235 | P | Y ¿cuál es esa condición? |
| 236 | E10 | La medida entre *O* y *C*. |
| 237 | P | E1, tú ¿Qué dices? |
| **238** | **E14** | **Pues lo mismo yo iba a decir, al unir los puntos da una circunferncia.** |
| 239 | P | ¿Lo mismo?, a ver ¿Qué es la circunferencia?, la unión, dicen aquí [Señalando los estudiantes que intervinieron] que la unión entre todos los puntos *C*. |
| **240** | **E14** | **Porque, la medida que de *O* a *C* es igual a las medidas de *O* a los otros puntos.** |
| 241 | P | ¿Dime? |
| **242** | **E14** | **La medida, porque si uno coge también otra medida o más larga o más corta que la otra la otra no quedaría con esa forma.** |
| 243 | P | No quedaría con esa forma ¿cierto?, es decir que, ustedes dicen que la circunferencia es la unión de todos los puntos que cumplen la condición, y ¿cuál era la condición? |
| 244 | E1 | La misma medida del punto a *O*. |
| 245 | P | La misma medida del punto *C* al punto *O* debe estar en todos lados igual, o sea que los radios ¿Cómo deben ser? |
| 246 | E | Iguales. |
| 247 | P | Iguales ¿cierto? colócale pausa por favor. |

E10 afirma que la unión de puntos *C'* que equidistan de *O* dan origen a una circunferencia [202 y 204]. Él no presenta ninguna garantía, lo que determina un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PDSa]**, E6 complementa el argumento anterior con su conclusión [220], a la que le agrega que es un círculo, y presenta una garantía empírica para este argumento [222], mediante la cual explica como a partir de todos los puntos ubicados es posible determinar una circunferencia y un círculo, aludiendo para ello a la gráfica en el tablero, es decir genera un argumento sustancial [**PDSd]**. E1 y E10 en [202] y [204] respectivamente plantean argumentos sin garantía o respaldo **[PDSa].**

E14 realiza un argumento sustancial con respaldo empírico **[PDSe].** En este caso él determina que la unión de los puntos *C'* que equidistan de *O* dan origen a una circunferencia [238], plantea la garantía en [240] y un ejemplo que no cumple la condición [242], respalda su argumento. Finamente para establecer la *D. circunferencia* tiene lugar la siguiente conversación.

| | | |
|---|---|---|
| 248 | P | […]Esta vez vamos a definir qué es una circunferencia, según lo que encontraron con las respuestas y la actividad que hicieron. |
| **249** | **E10** | **La unión de muchos puntos con la misma distancia.** |
| 250 | P | Bien, entonces tú dices que es la unión de muchos puntos. |
| 251 | E10 | Con la condición igual. |
| 252 | P | Con una condición, bien, es decir, un conjunto de puntos, vamos a llamar ese conjunto de puntos Lugar geométrico, entonces es un lugar geométrico [escribe en el tablero] de puntos, que cumplen ¿Qué condición? |
| **253** | **E10** | **La medida de *O* a *C*.** |
| 254 | P | Bueno, la medida de *O* a *C*, bien, pero miremos aquí. |
| 255 | E1 | ¿El lugar geométrico de puntos? |
| 256 | P | Sí, el lugar geométrico de puntos. Lo que dice E10 es muy cierto, cumplen una condición, y ella dice que es la distancia de *O* al punto *C*, es decir que todos esos puntos ¿*A* qué distancia están de *O*? |
| 257 | E5 | Pues a la misma distancia que *C*. |
| 258 | P | A la misma distancia que *C*. O sea que la distancia de acá a acá, debe ser la misma que de acá a acá [señalando los puntos], entonces tenemos: lugar geométrico de puntos que, ¿qué podemos decir de esos puntos? Que. |
| **259** | **E10** | **Al unirse forman una circunferencia.** |
| **260** | **E15** | **Una circunferencia.** |
| **261** | **E16** | **Todos deben medir lo mismo que de *C* a *O*.** |
| 262 | P | ¿Qué tendríamos hasta el momento de circunferencia? |
| **263** | **E14** | **Todos los puntos *C'*, no, lugar gemoetrico de los puntos *C'* que tiene lamisma distancia de *C* a *O*.** |
| 264 | P | A *O* ¿Cierto?, o sea que podemos decir, lugar geométrico de puntos que se encuentran a la misma distancia de *O* [escribe en el tablero]. Resulta que esto que tenemos acá es la definición de circunferencia, ustedes recuerdan cuando escribimos, cuando hicimos una tabla y en la tabla, escribíamos simbólicamente y en lenguaje matemático cómo se, cómo era el triángulo, como era el ángulo, lo mismo ocurre con la circunferencia, entonces para la circunferencia vamos a usar el siguiente lenguaje matemático. Vamos a decir, para simbolizar circunferencia es de esta forma [en el tablero dibuja $\odot$], la circunferencia de centro, ¿Cuál es el centro de esa circunferencia? |
| 265 | E | *O*. |
| 266 | P | Bien, de centro *O*, y ¿Cuál sería el radio de esa circunferencia? |
| 267 | E | *C*, de *O* a *C*. |
| 268 | P | De *O* a *C*, muy bien, eso sería el radio [lo dibuja], de radio $\overline{OC}$, esto significa circunferencia, circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OC}$, ustedes se acuerdan qué quería decir esto cuando escribíamos así $\overline{OC}$ ¿a qué hace alusión? |
| 269 | E10 | Al rayo, ¿un segmento? |
| 270 | P | Un segmento, muy bien, listo, entonces, con esto definimos circunferencia, ustedes recuerdan ¿qué utilizábamos para hacer definiciones?, recuerdan las hojitas que ustedes, las fichitas que tenían que traer ¿qué usábamos para las definiciones?.[La profesora junto con los estudiantes realiza el diagrama de definición para la circunferencia]. |

E10 realiza un argumento sustancial sin garantía o respaldo [**PDSa]** para determinar qué es una circunferencia [249], la cual complementa a lo largo del diálogo [253 y 259], E15 y E16 también plantean argumentos sustanciales **[PDSa]** en torno a los puntos ubicados en el tablero. Posteriormente E14 presenta un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[PDSa]** mediante el cual plantea la *D. de circunferencia* como el "lugar geométrico de los puntos *C*` que tiene la misma distancia de *C* a *O*' [263]. Esta tarea terminó con la definición de circunferencia y la realización del respectivo diagrama de definición.

***T3. P2. (Definición de mediatriz de un segmento)***

Con el desarrollo de este problema los estudiantes construyen la *D. Mediatriz de un segmento*, para ello se les proporciona una bolsa con puntos en papel, de los que deben tomar dos y marcarlos como *A* y *B* y luego ubicar todos los puntos que equidistan de estos dos, finalmente responder las preguntas planteadas, ¿Cuántos puntos puede ubicar con esta condición? y si encontró más de un punto con esta condición, cumplen una característica especial, ¿cuál es?. En el trabajo grupal después de la construcción realizada con los puntos dados, los estudiantes generan argumentos a partir de la observación sobre las propiedades de los puntos ubicados por ellos, según la condición y teniendo en cuenta las preguntas a responder.

*Grupo 1*

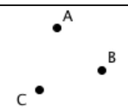
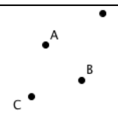
Para ubicar los puntos este grupo usan una regla con el fin de garantizar que los puntos que ubican cumplen la condición dada, en el siguiente fragmento de la conversación se presentan los argumentos que ellos generaron.

| | | |
|---|---|---|
| 9 | P | […] A ver listo cuéntenme que es están haciendo. |
| 10 | E1 | De acá acá. |
| 11 | P | ¿Cuál es *A* y cual es *B*? |
| 12 | E | [Señalan simultáneamente puntos diferentes] y los nombran A. |
| 13 | P | Pónganse de acuerdo, bueno *A* y *B* y ahora ¿qué van a hacer? |
| 14 | E1 | Medir la distancia entre *A* y *B* [Miden la distancia entre los dos puntos, usando la regla], seis.  Ilustración 7<br>Ahora, ponemos que tenga la misma distancia, de acá acá seis y de acá acá seis [señalando los puntos naranja y blanco tomando desde estos una medida de seis], de acá y acá y ubica un punto. |
| 15 | P | Listo, ¿será que pueden ubicar otro punto qué este a la misma distancia?, ¿será qué pueden ubicar otro punto que este a la misma distancia? |
| 16 | E2 | Sí. |
| 17 | P | ¿Cuál? |
| 18 | E3 | Acá, acá [midiendo 6cm desde cada uno de los puntos A y B al lugar opuesto del punto que habían ubicado inicialmente] y luego lo ubicaron.<br> Ilustración 8 |
| 19 | P | Listo ¿será qué pueden ubicar más puntos? |
| **20** | **E2** | **Sí.** |
| 21 | P | ¿Cuáles? |
| **22** | **E2** | **Muchos.** |
| 23 | P | Ustedes dicen que muchos, ¿por qué? |
| **24** | **E2** | **Pues porque si uno mira entre estos dos puntos [señala los dos que acaban de ubicar] se pueden poner artos puntos, muchos,como en la circunferencia.** |

En este grupo los estudiantes realizan un argumento sustancial con garantía empírica [**GCSd**], ya que E2 plantea su conclusión frente al número de puntos que se pueden ubicar y equidistan de *A* y *B* [20] y [21] y para dar fuerza al argumento plantea una garantía [24] empírica basada en observación.

*Grupo 2*

Los estudiantes de este grupo encontraron únicamente dos puntos *C* que cumplen y esto ocurrió por que ellos modificaron la condición dada por, la distancia de *A* a *C* congruente con la distancia de *B* a *C* debe ser congruente a la distancia de *A* a *B*, además ubicaron los puntos *C* sin garantizar de alguna manera el cumplimiento de la condición dada. Los argumentos que realizaron los estudiantes en este fragmento de la intervención se analizan posteriormente.

| | | |
|---|---|---|
| 25 | P | Discútanlo y ya paso [cambia de grupo]. ¿Cuéntanos? |
| 26 | E1 | En la hoja dice que tenemos un punto *A* y un punto *B*, que tengo que ubicar un punto *C* a la misma medida de *A* y *B* o sea de *B* a *C* tiene que haber lo mismo y de *A* a *C* tiene que haber lo mismo que de *A* a *B*. |
| 27 | P | Bien, que de *A* y *B* sea la misma distancia a *C* y dice ¿qué tiene que ser la misma distancia de *A* a *B*? o ¿no dice nada de eso? [lee nuevamente la guía], ¿será que hay más puntos? |
| 28 | E1 | Yo creo. |
| 29 | P | ¿cuáles? |
| 30 | E1 | Se puede colocar otro acá, que este a la misma distancia de *B* y de *A* [ubica un punto *C* que se encuentra a la misma distancia de *A* y *B*]<br><br><br>Representación gráfica 25 |
| 31 | P | ¿Hay más? |
| 32 | E1 | Se puede ubicar otro aquí. [Ubica otro punto que equidista de *A* y *B]*<br><br><br>Representación gráfica 26 |
| 33 | P | Miremos, La distancia de acá a acá [distancia del punto a A] es la misma distancia de acá a acá [distancia del punto a B] |
| 34 | E1 | No creo. |
| 35 | P | No, cierto. |
| **36** | **E1** | **Yo creo que sólo se pueden ubicar esos dos.** |

Teniendo en cuenta que la manera como interpretaron el problema limitó las posibilidades de ubicar los puntos *C*, E1 realiza un **[GDSa]** [36], argumento sustancial sin garantía o respaldo. A pesar de que se les leyó nuevamente el problema ellos no cambiaron nada en su construcción y E1 se limita a dar el argumento anterior.

*Grupo 3*

Este grupo encontró una cantidad limitada de puntos, como se observa en el fragmento de su conversación con la profesora.

| | | |
|---|---|---|
| 83 | P | […] ¿Cuántos puntos encontraron? |
| **84** | **E1** | **tres.** |
| 85 | P | ¿Cuáles? |
| 86 | E1 | Señala los tres puntos. |
| **87** | **P** | **[Ratifica] este, este y este ¿será que hay más?** |
| **88** | **E1** | **No creo.** |

El realiza E1 un argumento **[GDSa]** [84], este únicamente consta de la conclusión, que alude a la cantidad de puntos encontrados y ubicados por los estudiantes.

Los argumentos realizados durante la puesta en común, son en torno a la presentación del trabajo de los grupos con el fin de construir y unificar la *D. Mediatriz de un segmento.*

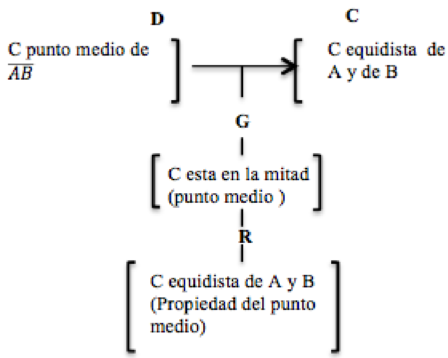
| | | |
|---|---|---|
| 89 | P | Bien vamos a retomar el ejercicio que habían trabajado la clase pasada. Si recuerdan con los punticos de papel que tenían, entonces, decía ubica dos puntos *A* y *B* utilizando las fichas suministradas, ubique ahora un punto *C*, que cumpla la condición de estar a la misma distancia de *A* y *B*, bueno ¿quién quiere contarnos que fue lo que hizo?, Pase. |
| **90** | **E1** | **Pues, digamos aquí esta el punto [ubica el punto *B* en el tablero], a la misma distancia que están estos dos [señala la distancia entre *A* y *B* y ubica *C*] esta *C* y aquí [ubica otro *C*]**  Ilustración 9 |
| **91** | **P** | **¿Cómo sabe que esta a la misma distancia?** |
| **92** | **E1** | **Porque lo medí con la regla.** |
| 93 | P | Bueno tu dices que lo mediste con una regla y más o menos acá los ubicaste, o sea ¿cuál distancia mediste? |
| **94** | **E1** | **[La estudiante señala la distancia de *B* a *A*] de aquí a quí y digamos, de *B* a *C*, de *B* a acá [señala a *A*] y de acá a acá [señala la distancia de *A* a *C*]** |
| 95 | P | Es decir, a ver miren lo que está haciendo E10, ella dice, como nos dicen que ubiquemos un punto *C* ella ubico pues dos y en el ejercicio decía un punto *C* que este a la misma distancia de *B*, es decir que la distancia de *B* a *C* sea igual a la distancia de *C* a *A* y ella ubico este punto [señalando el segundo punto *C* ubicado por Angie], ¿este punto cumple la condición? |
| **96** | **E2** | **No, está muy pegado a la *A*.** |
| 97 | P | ¿Y este punto cumple la condición? [señalando el otro punto *C*] |
| 98 | V | La opinión esta repartida entre los estudiante, unos dicen que si y otros que no. |
| 99 | P | Puede ser cierto, sería medir. |
| 100 | E1 | [mide las distancias con la regla iniciando por la distancia de *A* a *B*, luego organiza los puntos C de tal manera que la distancia entre cada punto y *A* y *B*, sea igual a la distancia de *A* a *B* ] |

El primer argumento que se presenta es el realizado por E1 quien ubica dos puntos *C* y concluye que estos se encuentran a la misma distancia de *A* que de *B* [90], hacen uso de la regla para ubicar cada punto *C* de acuerdo a la condición dada y es esta la garantía que utiliza cuando se le pregunta [91] qué garantiza el cumplimiento de la condición, E1 manifiesta que midió con la regla [92] y encontró que las distancias eran iguales [94], obtenieen de esta forma un argumento sustancial con garantía empírica [**PCSd]**. E2 en [96] concluye que el punto ubicado por E1 no cumple la condición planteada y presenta una garantía empírica obtenida de la observación “esta muy pegado a la A” [96], por sus características esté es un argumento sustancial **[PDSa].** En el siguiente fragmento de la puesta en común los estudiantes continúan ubicando puntos que cumplen la condición, por tanto los argumentos giran en torno a esto.

| | | |
|---|---|---|
| 101 | P | ¿Alguien tiene más puntos que cumplan esa condición?. Pasa. |
| **102** | **E3** | **Este[Mide con la regla y ubica el punto medio entre *A* y *B*], como está en la mitad de los dos puntos, este equidista ¿así se dice? de *A* y *B*.** |
| 103 | P | Vamos a ver [midiendo con los dedos la distancia entre *A* y el nuevo punto *C* ubicado y entre este punto y *B*] esta distancia más o menos es la misma, esta a la misma distancia ¿será que hay más puntos?, ¿alguien la clase pasada encontró más puntos?, [Revisa si los puntos *C* ubicados hasta el momento cumplen la condición, llegando a la conclusión, junto con los estudiantes, de que los dos primeros puntos no la cumplen] ¿cómo podemos hacer par que estos dos puntos cumplan la condición? |
| 104 | E4 | Arreglando bien las medidas. |
| 105 | P | ¿cómo podríamos arreglar las medidas? |

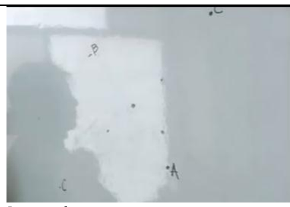
| | | |
|---|---|---|
| 106 | E11 | Volviendo a medir. |
| 107 | P | Pasa, miren que por lo que falla es mínimo. |
| 108 | E4 | Mide nuevamente las distancias usando los dedos y organiza los puntos |
| 109 | P | Bueno, entonces, tenemos tres puntos, pero algo que acabo de darme cuenta y creo que era lo que me estabas diciendo antes, que tu mides la distancia de *B* a *A* cierto y esa distancia tu la trasladas aquí [señala la distancia de *B* al segundo *C* ubicado inicialmente] y también la tras ladas aquí [señala la distancia de este *C* a *A*], entonces. ¿Será necesario que esta distancia se a igual a la distancia de *B* a *A*. |
| 110 | E11 | Sí |
| 111 | P | Miremos el ejercicio que dice: ubique dos puntos ¿tenemos los dos puntos? [señala *A* y *B*] si, utilizando las fichas suministradas ubique ahora un punto *C* ¿pero qué condición debe cumplir *C*? La condición es estar a la misma distancia de *A* y *B*, o sea ¿nos están diciendo que esa distancia [de *C* a *B* o a *A*] debe ser igual a la distancia de *A* a *B*?. Nos dice estar a la misma distancia de *B* que de *A* [señala las distancias de *C* a *A* y a *B*, respectivamente], pero de esta no nos dicen nada [señala la distancia de *A* a *B*]. Entonces no es necesario que tenga esta distancia [de *A* a *B*], teniendo en cuenta, que sólo es mirar que la distancia de acá a acá [de *B* a *C*] sea igual a la distancia de [*C* a *B*]. |
| 112 | E5 | ¿Se pueden ubicar puntos dentro del círculo? |
| 113 | P | Pasa. |
| 114 | E5 | Una medida de acá acá pero que este dentro del círculo [señala la distancia de *B* y *A* a otro posible *C*, mide con sus dedos y ubica otro punto, él se refiere a un círculo que no ha se ha construido]  Ilustración 10 |
| 115 | P | Miren que José ubica otro punto, ¿Esta distancia de acá acá es esta misma distancia? [mostrando la distancia de *B* al nuevo punto y de *A* al nuevo punto] |
| **116** | **E5** | **Son las mismas [organiza bien el punto, mide y le muestra que las distancias son iguales].** |
| 117 | P | Bueno, ¿Alguien puede ubicar otro punto?. |
| 118 | E | Al otro lado. |
| 119 | P | Pasa. |
| **120** | **E6** | **Si [Mide con sus dedos y ubica el simétrico del último punto ubicado con respecto a $\overline{AB}$]** |
| 121 | P | ¿Alguien puede ubicar otro?, pasa. |
| 122 | E5 | ¿Profe no se puede hacer un cuadro dentro del círculo? |
| 123 | P | Pero yo no veo el círculo. |
| 124 | E7 | Pasa y ubica un punto entre el punto medio de $\overline{AB}$ y *A*. |

En [102], E3 ubica el punto medio entre *A* y *B* y garantiza la equidistancia aludiendo a una de las propiedades de punto medio, por lo tanto este es un argumento **[PJAc]**, es decir, se verifica la propiedad de equidistancia, mediante un argumento analítico en el que se evidencia garantía (G) y respaldo (R) (ver esquema 34).



**Esquema 35. Argumento PJAc**

E5 manifiesta que los puntos ubicados por él se encuentran a la misma distancia de *A* y *B* y para validar esto presenta una garantía empírica, el medir con los dedos [116]. Es un argumento **[PCSd].** Oro argumento de esta categoría es el realizado por E6, quien manifiesta que sí se pueden ubicar más puntos con esa condición y como garantía presenta la ubicación de otro punto [120]. Es decir, es un argumento sustancial provisto de conclusión y garantía empírica. En el siguiente fragmento la conversación se desarrollo entorno a las características y propiedades que los estudiantes observaron en el conjunto de puntos y se estableció la *D. Mediatriz de un segmento.*

| | | |
|---|---|---|
| 125 | P | Miremos este punto, miren que nos dice que tenga la misma distancia y mira esta tan grande y esta; entonces este no nos sirve y lo borra.  Ilustración 11 |
| **126** | **E8** | **Profe con esos puntos se podría hacer una línea infinita [refiriendose a todos los puntos que equidistan de A y de B].** |
| **127** | **p** | **Escuchen lo siguiente que están diciendo aquí. Tu dices que se podría hacer una línea infinita ¿por qué?** |
| **128** | **E8** | **Por que podríamos otro punto entre los puntos del centro y duplicarlo hacia los lados.** |
| 129 | p | Pasa. |
| **130** | **E3** | **O sea como esto podríamos poner digamos otro acá y otro acá y queda una línea infinita [señala otros puntos *C* entre los que ya están].**  Ilustración 12 |
| 131 | p | O sea ¿qué cuántos puntos podemos ubicar con esa condición? |
| 132 | V | Uhhh, infinitos. |
| 133 | p | Infinitos, entonces, como ustedes tienen unas preguntas en su guía, que dice ¿cuántos puntos pueden ubicar con esta condición? |
| **134** | **E3** | **Infinitos.** |
| 135 | p | Infinitos, ya vimos que infinitos, si habían puesto tres, cuatro o dos, arréglenla por que ya vimos que son infinitos, vean aquí habían puesto uno y tu decías que aquí podríamos poner otro [poniendo más puntos que cumplen la condición en el tablero] y E8 que aquí pasa como paso con la circunferencia, ¿qué fue lo que paso con la circunferencia |
| 136 | E9 | Que pusimos artos punticos hasta que lograra quedar la circunferencia. |
| 137 | p | Bien, entonces infinitos puntos y había otra pregunta que prácticamente ya la respondieron, si encontró más de un punto con esa condición, cumple una característica especial ¿cuál es? |
| **138** | **E10** | **Que los puntos *C* forman una línea recta porqué están a la misma distancia de *B* que de *A*.** |
| 139 | P | Bueno esa es la condición. |
| 140 | E1 | Profe, uniendo los puntos hasta infinito podrían formar una recta |
| 141 | P | Bien, que esos puntos forman una línea recta, es decir, como decía E8 nosotros podemos trazar una recta de esta forma. Bueno aquí va a quedar un punto que no quedo exactamente a la misma distancia. [traza la recta]. Bien esta recta, Ah, ustedes recuerdan ¿así como esta trazada es una recta o le falta algo? |
| 142 | V | Las flechitas. |

| | | |
|---|---|---|
| 143 | P | Las flechas que indican el sentido de la recta, ¿cierto?, está recta recibe un nombre especial y creo que ustedes no la habían trabajado antes, es llamada mediatriz, entonces ¿qué es la mediatriz?  Ilustración 13 |
| **144** | **E1** | **La unión de puntos.** |
| 145 | p | La unión de puntos, ¿cuántos puntos? |
| **146** | **E1** | **Infinitos.** |
| 147 | P | La unión de puntos infinitos que forman una recta, pero ustedes recuerdan ¿cómo habíamos definido circunferencia?, ¿qué decíamos que era ese conjunto de puntos? |
| 148 | V | Un lugar geométrico. |
| **149** | **P** | **Entonces, la mediatriz es el lugar geométrico de puntos, digamos de todos los puntos ¿qué, qué?** |
| **150** | **E11** | **Que se encuentran a la misma distancia de *B* que de *A*.** |
| **151** | **p** | **Dilo completo.** |
| **152** | **E11** | **Lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de *B* que de *A*.** |
| 153 | P | Que se encuentran … de *B* y de *A*, esto es la mediatriz de $\overline{AB}$, entonces, tarea, no quiere decir que ya hemos terminado, si no para que no se me olvide después, escribirlo en las gráficas que utilizamos para definición. |

E8 concluye que todos los puntos *C* que equidistan de *A* y de *B* forman una recta y para esto presenta una garantía [126] y [128]. Es decir, su argumento, el cual consta de una conclusión y su garantía empírica es **[PCSd].** E3, complementa el razonamiento de E8; plantea un **[PCSd],** en el que el paso de los datos a la conclusión [134] es corroborado de manera empírica [130]. E10 realiza un argumento mediante el cual justifica que los puntos *C* forman una línea recta porque cada uno equidista de *A* y de B, es decir una garantía teórica, por tanto es **[PJSb]** [138]. E1 concluye que la mediatriz es la unión de infinitos puntos [144 y 146], es decir un argumento **[PDSa].** Finalmente E11 concluye que la mediatriz es *"lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de B que de A"* [152], es decir un **[PDSa].**

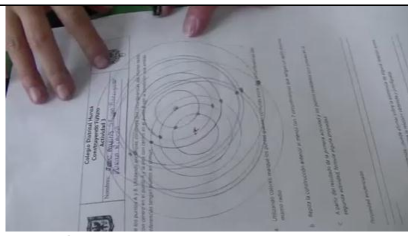
### ***T3. P3. HECHO GEOMÉTRICO DE MEDIATRIZ***

Como es objeto de este problema es determinar además de la *D. Circunferencia* y de la *D. Mediatriz* otros elementos del sistema teórico local, se propone a los estudiantes mediante el trazo de diferentes circunferencias de centro *A* y *B* en parejas de igual radio, marcar los puntos comunes entre cada pareja (puntos de la mediatriz de $\overline{AB}$), para determinar una propiedad de los puntos de la mediatriz y la relación entre $\overline{AB}$ y su mediatriz para establecer el *HG. de mediatriz* y la *D. Punto medio de un segmento*.

En el trabajo grupal los estudiantes presentaron problemas al realizar la construcción geométrica de la mediatriz de un segmento, razón por la cual, con la mayoría de los grupos fue necesario realizar un acompañamiento particular del proceso de construcción, ya que si este no era realizado de la manera adecuada, difícilmente se podía llegar al resultado esperado, razón por la que ellos no realizaron argumentos en torno al objetivo del problema por lo que de los argumentos producidos sólo se presenta el trabajo de uno de los grupos, relativo al proceso de construcción.

*Grupo 1*

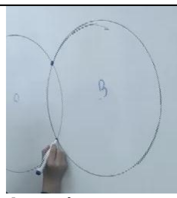
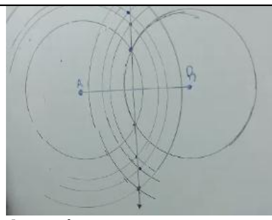
Los argumento que surgen en la siguiente conversación, versan en torno a qué figura forman los puntos ubicados por ellos.

| | | |
|---|---|---|
| **24** | **P** | **[Se dirige a otro grupo] Vamos a empezar, listo, dice aquí a partir del resultado de la primera actividad y los puntos resaltados con colores, que aquí tienes con lápiz, formula una propiedad, ¿qué propiedad evidencias aquí? [señala los puntos de intersección]**  Ilustración 14 |
| **25** | **E1** | **Los puntos forman línea recta.** |
| 26 | P | Bueno esta línea recta, ¿qué forma una línea recta? |
| **27** | **E2** | **Puntos.** |
| 28 | P | ¿Cuáles?, ¿Los que se forman de donde? |
| **29** | **E1** | **De acá hasta [señala los puntos de las intercecciones] y de las círcunferencias que uno hace, tiene que dar una línea para ver si esta bien, por que si no le da la línea esta mal.** |
| 30 | P | O sea tu ves una línea recta, listo, pero ¿qué propiedad puedes decir que se evidencia ahí?, piénsalo y dice la otra ¿al observar la recta obtenida, que puede afirmar sobre una relación entre esta recta y los puntos A y B? ¿qué pasa con estos dos puntos? |
| **31** | **E3** | **Que se unen para hacer una línea recta.** |
| 32 | P | ¿Qué relación hay de esta recta con estos dos puntos? |
| **33** | **E3** | **Que al tener los dos de la misma medida [señala las circunferencias] le da la línea recta, si fuera sólo uno no sabríamos.** |

E1 genera un argumento sustancial sin garantía o respaldo **[GCSa]** formado únicamente por la conclusión. Como se puede observar en [25], otro argumento que plantea este estudiante es uno sustancial con garantía empírica **[GCSd]** en el cual la conclusión hace referencia a la construcción de las circunferencias, lo cual está bien si los puntos de intersección de las circunferencias pertenecen a una misma recta [29]. Para esto establece una garantía empírica obtenida de la observación y el trabajo realizado, "por que si no le da la línea esta mal" [29]. E3 presenta una conclusión en la cual manifiesta que los puntos de intersección de dos circunferencias de igual radio generan una recta y plantea para ello una garantía empírica [33] **[GCSd]**.

Los argumentos producidos durante la puesta en común fueron el resultado de la construcción realizada por los estudiantes y el uso de los elementos del sistema teórico local construido.

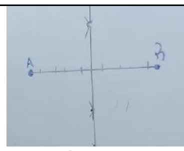
| | | |
|---|---|---|
| 34 | P | Bueno, vamos a mirar la hoja. Decía, dibuje los puntos *A* y *B*. Utilizando el compás, construya dos circunferencias del mismo radio una con centro en el punto *A* y otra con centro en el punto *B*, con la condición que ambas circunferencias tengan puntos en común. Utilizando colores marque los puntos que son comunes entre las dos circunferencias. Listo, E1 pase, ¿Qué es lo primero que hay que hacer?, Marcar el punto *A* y el punto *B*, más grande E1. |
| 35 | E1 | Hace los puntos en el tablero y los nombra *A* y *B*. |

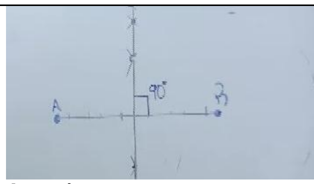
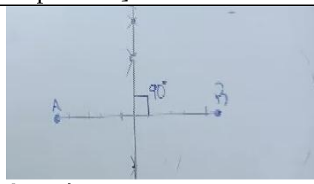
| | | |
|---|---|---|
| 36 | P | Lo siguiente que hay que hacer, es trazar dos circunferencias con el mismo radio y cumplir la condición de tener puntos en común. |
| 37 | E1 | Hace las circunferencias, en el tablero. |
| 38 | P | ¿Cuáles serían los puntos que hay en común? |
| 39 | E1 | El estudiante los marca.  Ilustración 15 |
| 40 | P | ¿Están de acuerdo? ¿Qué quiere decir qué un punto es común a las dos circunferencias? |
| **41** | **E1** | **Que tengan el mismo punto en ambas circunferencias.** |
| 42 | P | Bien, luego dice el ejercicio, repite la construcción anterior al menos con siete circunferencias, es decir, que nos toca ir variando el tamaño de esta circunferencia, siempre el centro ¿cuál debe ser? |
| 43 | V | *A* y *B*. |
| **44** | **P** | **Los puntos *A* y *B*, entonces vamos a trazar otra circunferencia, [traza varias circunferencias y se marcan los puntos de intersección], a partir del resultado de la primera actividad y los puntos resaltados con colores, en la segunda actividad, formule alguna propiedad ¿qué podemos decir de estos puntos? [señala los puntos de intersección].** |
| **45** | **E2** | **Que forman una línea, una recta.** |
| 46 | P | Que por ellos pasa una recta, bien, ahora tenemos una recta ¿qué más podemos decir? |
| 47 | E3 | Profe, ¿no hacen falta las flechas? |
| 48 | P | Las flechas para indicar que es una recta, bien ¿qué más podemos decir de esa recta, teniendo en cuenta la actividad que hicimos anteriormente? ¿qué actividad fue la que hicimos antes de esta?, este es el punto *A*, el punto *B*. |
| **49** | **E4** | **De *A* a *B* hay una línea, traza el $\overline{AB}$.** |
| 50 | P | E4 dice que tracemos una línea de *A* a *B* y ¿ahí que se nos formaría? |
| **51** | **E1** | **Un radio.** |
| **52** | **E3** | **Una cruz.** |
| 53 | P | Pero bueno, antes de eso miremos, ¿qué relación y teniendo en cuenta la actividad anterior, que relación hay entre esta línea recta y este segmento [los señala respectivamente].  Ilustración 16 |
| 54 | E4 | ¿qué comparten un mismo rayo?, no. |
| **55** | **E3** | **Que se cruzan en un punto, ahí el de el centro.** |
| **56** | **P** | **¿pero qué podemos decir de este punto [señala un punto en la recta] con respecto a este y con respecto a este [subraya los extremos de $\overline{AB}$].** |
| 57 | E5 | ¿Qué forman un círculo? |
| **58** | **E6** | **Que todos los puntos están a la misma distancia de *A* y *B* [se refiere a los puntos intersección].** |
| 59 | p | ¿y eso qué quiere decir?, ¿qué podemos decir de esa línea?, ustedes ¿recuerdan que vimos la clase anterior a iniciar esta guía? Cuando teníamos que ubicar puntos que estuvieran a la misma distancia de *A* y de *B* y nosotros ubicamos diferentes puntos, esa fue la actividad anterior ¿qué definimos en esa actividad anterior? |
| **60** | **E6** | **Que con esos puntos se forma una línea. [Recta que pasa por todos los puntos intersección].** |
| 61 | P | Y esa línea ¿qué es? [señala la línea que forman los puntos]. |
| **62** | **E2** | **Un rayo y común a los par lineal** |
| **63** | **E6** | **La mediatriz.** |
| 64 | P | La mediatriz, esta línea recta es la mediatriz, porque esta formada por todos los puntos que equidistan de *A* y de *B*. Ahora volviendo a este [señala la grafica de las circunferencias] ¿qué podemos decir de esa línea que se forma ahí? |
| **65** | **E3** | **Que también es la mediatriz, midan de los puntos a A y B, da lo mismo.** |

Los datos de los cuales parten los estudiantes para realizar sus argumentos en este momento de clase son los son los puntos $A$, $B$ y los puntos de intersección entre las circunferencia de centro $A$ y $B$ y sus observaciones frente a esta construcción.

En el argumento sustancial de E1 sin garantía o respaldo **[PDSa]**. Él concluye que un punto es común a dos circunferencias si está en ambas [41]. Solo una conclusión desprovista de garantía, E2 evidencia su conclusión frente a los puntos hallados [45] sin garantía que valide cómo pasa de los datos a la conclusión, es decir nuevamente un **[PCSa]**. Otro argumento es el realizado por E4 [49] en el cual concluye que por $A$ y $B$ pasa una recta y como garantía de ello pide el trazo de la misma, es decir un argumento sustancial **[PCSd]**. Dos argumentos sustanciales **[PCSa]** son presentados por E1 y E3 [51 y 52] en los cuales solo se evidencia una conclusión, E3 realiza un argumento **[PDSd]**, él manifiesta que $\overline{AB}$ y la recta formada por los puntos se cruzan en un punto y expone como garantía ese punto de manera empírica "ahí el de el centro" [55]. Dos argumentos [**PJSa]** son el realizados por E2 quien concluye que la recta forma un rayo común a los ángulos par lineal que se pueden observar [62] y E6 manifiesta que los datos de su argumento [58] son los puntos que equidistan de $A$ y $B$, a partir de los cuales plantea la conclusión, estos forman una recta llamada mediatriz [60] y [63]. Pero no plantea una garantía o respaldo para este argumento, finalmente E3 presenta un argumento en el que explica porque es la mediatriz, aludiendo a su definición, un argumento analítico **[PJAa]**.

En el siguiente fragmento de la puesta en común se discute la formación de ángulos par lineal entre $\overline{AB}$ y su mediatriz.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 66 | P | […] Ahora vamos con la siguiente. Al observar la recta obtenida que puede observar sobre la existencia de alguna relación entre esta y los dos puntos A y B?. Voy a borrar las circunferencias para que queden solo las rectas. ¿qué relación hay entre esta recta y estos dos puntos? [señala la recta y los puntos $A$ y $B$]. |   Ilustración 17 |
| 67 | E7 | Que los ángulos pueden ser par lineal. | |
| 98 | P | ¿Será qué si pueden ser par lineal? | |
| 69 | E7 | Sí, cumplen las tres condiciones. | |
| **70** | **E3** | **Se forma una cruz como un plano cartesiano.** | |
| **71** | **E7** | **Que tiene cuatro ángulos y dos son par lineal, pueden ser los dos de arriba o los dos de abajo, dos y dos mire rayo común y la recta.** | |
| 72 | P | ¿qué más podemos decir de esos ángulos?, ¿qué clase de ángulos serían estos ángulos que tenemos aquí? | |
| **74** | **E8** | **Son ángulos rectos.** | |
| 75 | P | ¿Porqué son rectos? | |
| **76** | **E8** | **Al parecer miden noventa grados [nada lo garantiza]** | |

| | | |
|---|---|---|
| 77 | P | Al parecer mide noventa grados, o sea que ustedes dicen que este puede medir noventa grados [marca el ángulo, en la grafica], y **si este mide noventa grados ¿cuánto mediría este?.**   Ilustración 18 |
| **78** | **E8** | **Noventa para formar ciento ochenta.** |
| 79 | P | Noventa ¿por qué? |
| **80** | **E8** | **Ciento ochenta porque la suma de las medidas de los ángulos par lineal es ciento ochenta grados.** |
| 81 | P | Espere que hay dos respuestas, E9 dice que mide ciento ochenta. |
| 82 | E9 | Sí sumamos profe. |
| 83 | P | ¿Si sumamos cuales E1? |
| 84 | E1 | Los de los dos lados [hace referencia a un par de ángulos par lineal]. |
| 85 | P | Este y este [señala los ángulos en el plano inferior].   Ilustración 19 |
| **86** | **E1** | **Hay si da ciento ochenta.** |
| **87** | **P** | **¿Entonces este cuánto mide?** |
| **88** | **E1** | **Noventa también.** |
| 89 | P | ¿Y por qué podemos decir que mide noventa? |
| **90** | **E1** | **Porque si una medida tiene noventa la otra medida también debe tener noventa, por que son par lineal.** |
| 91 | P | Dejamos aquí para la próxima clase[…]. |

E3 plantea un argumento sustancial **[PDSa]** [70]; es una conclusión desprovista de garantía y respaldo. E7 argumenta que en la construcción [53] se observan cuatro ángulos, de los cuales los dos de arriba o los dos de abajo pueden ser par lineal [71]; alude a la *D. Par lineal* como respaldo; es decir, formula un argumento [**PJAa]**. Inicialmente E8 realiza un argumento **[PCSa]** en el cual plantea la conclusión, no plantea una garantía teórica para este, pues en la representación gráfica (ver ilustración 17) nada lo garantiza; Para responder a la pregunta planteada por la profesora E8 [77], él manifiesta que el otro ángulo mide "noventa para formar ciento ochenta" [78] y alude al *HG. Par lineal* [180], para explicar el paso de los datos a su conclusión, por tanto este es un argumento [**PJAa]**, E1 también realiza un argumento [**PCSa]** [86], en el cual la conclusión es que las dos medidas de los ángulos dan ciento ochenta. Un argumento más elaborado realizado por este estudiante tiene lugar en [88], donde se observa una conclusión [88] y una garantía teórica [90] **[PJSb]**.

En el siguiente fragmento de la puesta en común los estudiantes observan características y relaciones entre la mediatriz de $\overline{AB}$ y los puntos *A* y *B*, las cuales expresaron mediante los argumentos que en este se generaron.

| | | |
|---|---|---|
| 91 | P | […] [En la siguiente clase] habían dos preguntas, aunque ya habíamos avanzado en la primera, decía ¿qué propiedad evidencia? ¿qué obteníamos qué? |
| 92 | E6 | La mediatriz. |

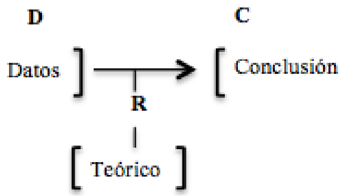
| | | |
|---|---|---|
| 93 | P | ¿La mediatriz de qué? |
| 94 | E6 | ¿De $\overline{AB}$? |
| 95 | P | La mediatriz de $\overline{AB}$, vimos que la recta que se encontraba entre los puntos que se formaban de las circunferencias que se cruzaban y que eran de igual radio nos daban origen a la mediatriz y estábamos viendo que relación había entre esta recta y estos dos puntos. [Señala la mediatríz de $\overline{AB}$ y los puntos *A* y *B*]. |
| **96** | **E10** | **Que pasa por el punto medio [refiriendose a que la mediatríz $\overline{AB}$ pasa por su punto medio]** |
| 97 | P | Es cierto pasa por el punto medio, ¿pero qué otra relación cumple?, ¿qué relación hay entre esta recta y estos dos puntos? |
| **98** | **E10** | **Que los puntos tienen la misma distancia del punto *A* y *B*.** |
| 99 | p | Y eso lo cumple todos los puntos por eso es la mediatriz. |
| **100** | **E3** | **Que la mediatriz, puede formar un plano cartesiano.** |
| 101 | P | ¡Ah!, bueno se puede formar un plano cartesiano, ¿qué más podemos decir de la mediatriz? |
| **102** | **E11** | **Forman dos pares de ángulos par lineal, de los cuales uno es un ángulo recto** |
| 103 | P | Forman dos pares de ángulos par lineal y dice E11 que este forma un ángulo recto, ¿cuántos ángulos rectos se formarían? |
| 104 | E2 | Cuatro |
| 105 | P | Cuatro bien y es decir, ¿entre qué se formarían ángulos rectos?, ¿entre la recta mediatriz y que más? |
| 106 | E5 | La $\overleftrightarrow{AB}$. |

En cuanto a la relación existente entre la mediatriz del $\overline{AB}$ y los puntos *A* y *B* surgen lo siguientes argumentos. E10 realiza dos argumentos sustanciales **[PJSa].** En el primero [96] manifiesta que la mediatriz del $\overline{AB}$ pasa por el punto medio de este y en el segundo [98] que todos los puntos de la mediatriz de $\overline{AB}$ equidistan de *A* y *B*, pero en ninguno de los dos argumentos propone garantía o respaldo alguno, E3 propone un argumento sustancial **[PCSa]** en el que plantea que la mediatriz de $\overline{AB}$ y este segmento forman un plano cartesiano [100]. E11 plantea que estos dos elementos geométricos forman dos pares de ángulos par lineal y uno de los ángulos es recto; es un argumento [PJSa] ya que usa elementos del sistema teórico, pero no propone garantía o respaldo [102]. El siguiente es fragmento final de la puesta en común, en el cual se plantea la *D. Punto medio de un segmento* y el *HG. Mediatriz.*

| | | |
|---|---|---|
| 107 | P | La recta que pasa por *A* y *B*, o podemos decir también por el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$. ¿Qué podemos decir de este segmento y esta recta? Si forman ángulos de noventa grados |
| **108** | **E3** | **Se cruzan.** |
| 109 | P | ¿Cómo se cruzan esas rectas? |
| **110** | **E3** | **Por un mismo punto.** |
| 111 | p | Por un punto y ¿cuál es ese punto? |
| **112** | **E3** | **El punto medio. <u>Porque si ve que esta en la mitad de $\overline{AB}$ y en la mediatriz.</u>** |
| **113** | **P** | **[Marca el punto medio en la grafica] y hay algo que también es importante, porque miren que si** |

| | | |
|---|---|---|
| | | **nosotros trazamos esta recta [describe una recta no perpendicular a $\overline{AB}$], esta recta se cruza por el punto medio pero ¿es mediatriz?** |
| 114 | V | No. |
| 115 | P | No cierto. |
| **116** | **E9** | **No, porque los puntos no tiene la misma distancia que de *A* y *B* [se refiere a los puntos de la recta que pasa por el punto medio de *A* y *B* no es perpendicular a $\overline{AB}$].** |
| 117 | P | No tendría la misma distancia de cada punto a *A* que de *B* ¿pero entonces cómo son este segmento y esta recta?, se cruzan en un punto y ¿son qué? |
| 118 | V | Son ángulos par lineal, son ángulos rectos. |
| 119 | P | ¿Cómo se llama cuándos dos rectas o una recta y un segmento se cruzan formando ángulos rectos?[…] Recordemos, ¿si dos rectas no se cruzan cómo se llaman? |
| 120 | E12 | Paralelas. |
| 121 | P | ¿Si dos rectas se cruzan formando ángulos rectos? |
| **122** | **E12** | **Perpendiculares, entonces la mediatriz y el segmento son perpendiculares** |
| **123** | **P** | **¿Por qué puedes afirmar eso?** |
| **124** | **E12** | **Porqué se cruzan y forman ángulos de noventa.** |
| 125 | P | Entonces tenemos, Si A y B ¿qué son A y B? |
| 126 | E8 | Son dos puntos. |
| **127** | **P** | **Son dos puntos. La mediatriz de $\overline{AB}$¿por dónde pasa la mediatriz?** |
| **128** | **E8** | **Por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.** |
| 129 | P | [Continua escribiendo] la mediatriz pasa por el punto medio … |
| 130 | P | Por el punto medio del $\overline{AB}$ y ¿qué más podemos decir de la mediatriz? […] y ¿es qué? |
| 131 | E13 | Perpendicular. |
| 132 | P | ¿Perpendicular a qué? […] dilo completo. |
| **133** | **E13** | **La mediatriz pasa por el punto medio y es perpendicular a $\overline{AB}$** |
| 134 | P | [termina de escribir el hecho geométrico en el tablero] Eso es lo que tenemos dejemos ahí para la siguiente clase. |

E3 realiza un argumento relacionado con el punto medio. Él manifiesta que la mediatriz y el $\overline{AB}$ se cruzan en su punto medio [108], [110] y [112] y presenta una garantía teórica [112] (subrayada) relacionada con la definición del punto medio del $\overline{AB}$; es decir, es un argumento sustancial con respaldo teórico **[PJSc]**. Luego la profesora con el objetivo de hacer énfasis de que no todas las rectas que pasan por el punto medio $\overline{AB}$ son una mediatriz de $\overline{AB}$, plantea a los estudiantes un ejemplo donde la recta que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ no es perpendicular a este segmento [113]. Ante esto E9 manifiesta que esa recta no es una mediatriz [116] y ofrece como garantía que todos sus puntos no equidistan de A y B [116]; es un argumento sustancial con garantía teórica [**PJSb]**. E12 plantea una conclusión **[**122] y una garantía teórica [124] en la que alude a la definición de perpendicularidad, Por tanto el realiza un argumento analítico con garantía implícita [**PCAa]** (ver esquema 35).




**Esquema 36. Argumento PCAa**

E8 en [127] y [128] realiza un argumento sustancial sin respaldo o garantía [**PJSa],** a pesar de hacer uso de elementos del sistema teórico local sólo presenta una conclusión sin ninguna garantía que la apoye. Finalmente está el argumento [**PJSa]** de E13 en el cual plantea como conclusión que la mediatriz pasa por el punto medio y es perpendicular al $\overline{AB}$ [133], *HG. Mediatriz.* Al finalizar la tarea se logró el propósito que se había planteado, por un lado la construcción de los tres elementos del sistema teórico local, *D. Circunferencia, D. Mediatriz, D. Punto medio* y *HG. Mediatriz.*

# ANÁLISIS DE RESULTADOS

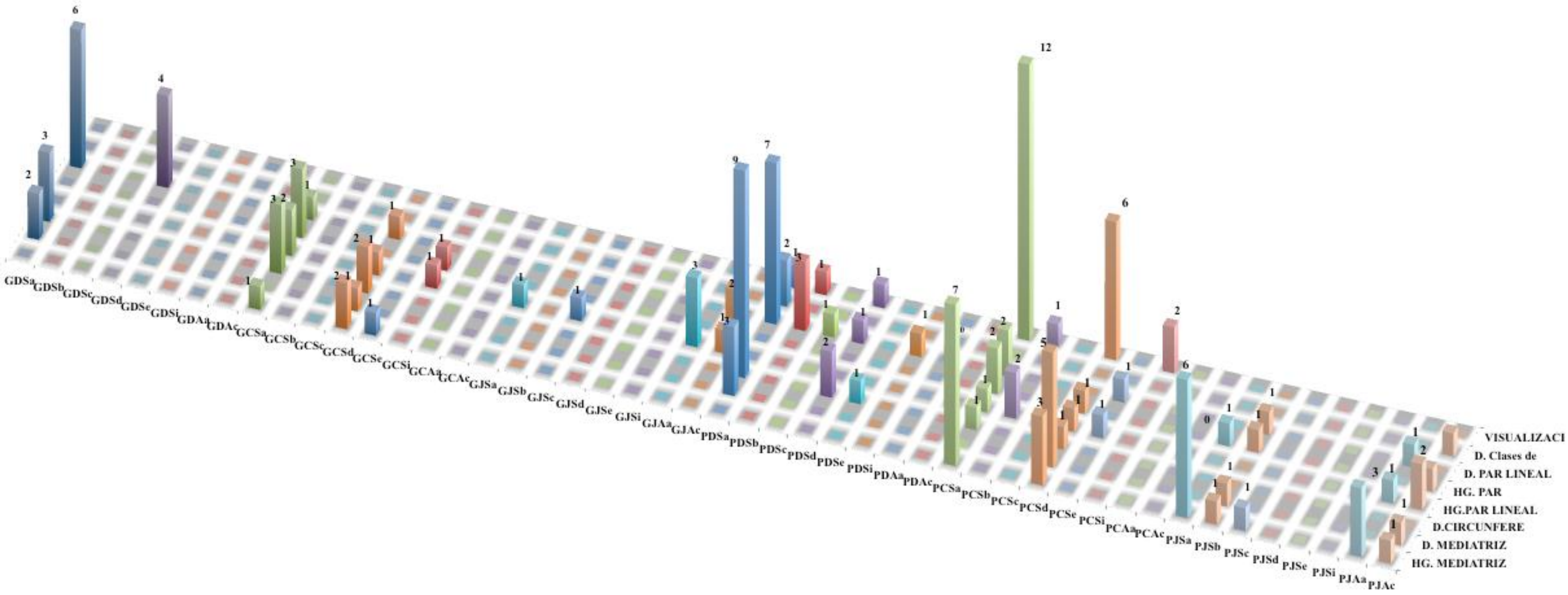
En este capítulo se presenta un análisis de los resultados obtenidos en el anterior capítulo. En esta parte involucramos los resultados obtenidos tanto para este grado séptimo como para octavo, de forma tal que podamos realizar un análisis comparativo entre lo ocurrido en cada uno, caracterizando diferencias y similitudes entre ellos. El análisis que se realiza contempla tres apartados, teniendo en cuenta en todo momento la evolución de los argumentos a lo largo de las sesiones de clase. Particularmente se considerarán los siguientes aspectos (i) la aparición de cada tipo de argumento considerado en las categorías de análisis; (ii) los argumentos analíticos y sustanciales presentes en cada una de las tareas, considerando la aparición de estos argumentos en los distintos momentos de la clase, así como de acuerdo a los procesos involucrados en cada tarea (conjeturar, justificar o definir); y finalmente, (iii) los tipos de respaldo utilizados al elaborar argumentos.

## LOS ARGUMENTOS Y LAS TAREAS DESARROLLADAS

En el siguiente apartado se analiza el comportamiento de los argumentos elaborados por los estudiantes de grado séptimo y octavo a lo largo de cada una de las tareas desarrolladas durante la implementación de la secuencia. Se utiliza un diagrama de barras para cada grado (ver gráfica 1 y 2). En cada gráfico los distintos tipos de argumentos contemplados en las categorías de análisis se representan por colores, mostrando su frecuencia para cada tarea.

### *GRADO SÉPTIMO*

En el siguiente gráfico se presentan los argumentos realizados por los estudiantes de grado séptimo de acuerdo a la descripción dada en el anterior párrafo. En la gráfica 1 se observa una mayor concentración de argumentos en la puesta en común. Estos se encuentran a la derecha del argumento [GJAa]. También se observa que tanto en la puesta en común [P] como en el trabajo grupal [G], aquellos que presentan mayor frecuencia son los argumentos sin respaldo o garantía en los procesos de definir y conjeturar [GDSa, PDSa, GCSa y PCSa]. En el momento de la puesta en común se realizaron la mayoría de los argumentos analíticos, son argumentos del tipo PDAa, PCAa, GCAa, PCAc y GCAc.




**Gráfica 1. Comportamiento de los argumentos durante el desarrollo de la tarea de visualización y D. Clases de ángulos y los problemas de las otras tareas, grado séptimo**

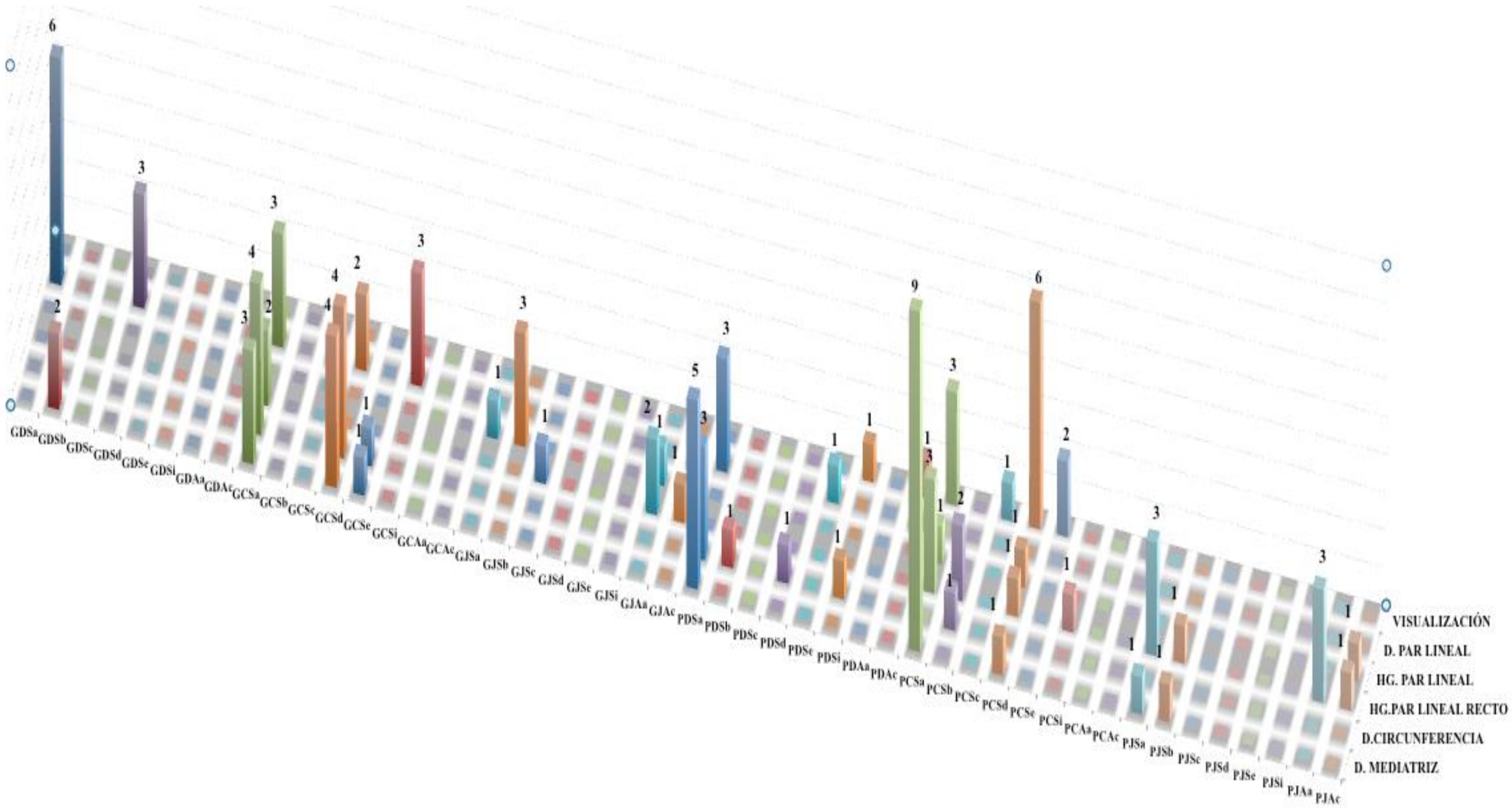
De acuerdo a la gráfica 1, los argumentos desarrollados en el proceso de justificación en su mayoría se presentaron en la puesta en común (ejemplo de estos son PJSa, PJSb, PJSc, PJSd). Por el contrario, la producción de argumentos asociados a la justificación durante el trabajo grupal fue mínima. Los argumentos [GJSa, GJSb, GJSc, GJSd] no tuvieron una frecuencia notable, algunos incluso nula en todo momento. Los argumentos analíticos tuvieron mayor frecuencia en el proceso de justificar que en los de definir y conjeturar cuando el momento de la clase correspondía a la puesta en común. Además, los argumentos analíticos para el caso de la puesta en común mostraron una mayor frecuencia con respecto a los argumentos analíticos elaborados dentro del trabajo grupal.

En cuanto a los argumentos relacionados con el proceso de definir se observa que estos tienen una mayor frecuencia en el momento de la puesta en común. Ejemplo de ello son los argumentos PDSa, PDSb, PDSc, PDsd, PDSe, PDSi y PDAa, mientras en el momento de trabajo grupal únicamente los estudiantes construyeron dos tipos de argumentos [GDSa y GDSd]. También los argumentos con mayor frecuencia en este proceso en los dos momentos de la clase [P] y [G] son aquellos que no presentan garantía o respaldo [GDSa y PDSa].

En cuanto a las tareas es posible decir que la de visualización sólo conllevó a la generación de argumentos en la puesta en común, en la mayoría de los casos sin respaldo [PCSa] o con garantía empírica [PCSd]. El problema correspondiente al *HG. Par lineal –recto* es el único que conduce a una diversidad de argumentos de acuerdo al tipo. En los momentos en los cuales los estudiantes deben definir (*D. Par Lineal, D. Circunferencia, D. Mediatriz*) sobresalen con mayor frecuencia los argumentos sustanciales. Por su parte, los problemas relacionados con los hechos geométricos (*HG Par Lineal, HG Par lineal–recto, HG Mediatriz*) conducen a la mayor cantidad de argumentos analíticos. Finalmente, en la tarea D. *Clase de ángulos* se presentan la menor cantidad de argumentos, apenas tres, dos de ellos sustanciales [PDSa] y un analítico [PJAc].

#### ***GRADO OCTAVO***

En la siguiente gráfica se presentan los argumentos realizados por los estudiantes de grado octavo durante la aplicación de la secuencia. En esta, predominan los argumentos PDSa, PCSa y GCSa, es decir aquellos que carecen de garantía o respaldo y que se realizaron en el proceso de definir o conjeturar; le siguen en frecuencia aquellos que presentan una garantía o respaldo empírico en este mismo proceso [PCSd y GCSd]. En cuanto a los momentos de la clase, se observa que es durante la puesta en común que se desarrolló la mayor cantidad de argumentos de diversos tipos, a diferencia del trabajo grupal, donde se generaron menos argumentos y la mayoría de estos fueron sustanciales sin garantía o respaldo o con garantía empírica [GCSa y GCSd].




Gráfica 2. Comportamiento de los argumentos durante el desarrollo de la tarea de visualización y los problemas de las otras tareas, grado octavo

Para los procesos de definir, conjeturar y justificar, se evidencia que la mayoría de los argumentos se desarrollaron durante el proceso de conjeturar, es decir aquellos que inician por GC y PC, seguido de los argumentos durante el proceso de justificar la categoría de estos inicia con GJ y PJ, mientras la presencia de los argumentos durante el proceso de definir fue mínima, la categoría de estos inicia con GD y PD. En la gráfica 2, con relación a las tareas, en la de visualización solo se desarrollaron argumentos durante la puesta en común, con mayor frecuencia en los argumentos sustanciales con garantía empírica [PCSd] y en los argumentos sin ningún tipo de garantía o respaldo [PCSa], las tareas correspondientes al *HG. Par lineal* y *HG. Par. Lineal –recto*, presentan más diversidad de argumentos según el tipo y es en estas tareas en las que se desarrollan los argumentos analíticos.

Respecto a los problemas de *D. Par lineal, D. Circunferencia* y *D. Mediatriz* se observa una mayor frecuencia en los argumentos sustanciales sin algún tipo de garantía o respaldo [GCSa y PCSa] en los dos momentos de la clase (trabajo grupal y puesta en común) en el proceso de conjeturar, además en estos problemas los estudiantes construyeron los argumentos enmarcados en el proceso de definir.

#### *SIMILITUDES Y DIFERENCIAS SÉPTIMO Y OCTAVO*

En los siguientes párrafos se mencionan los aspectos que son particulares a cada grado y aspectos comunes entre los dos grupos respecto al anterior análisis. En grado séptimo se presentó una mayor cantidad de argumentos, esto se debe a dos motivos principalmente: por un lado, para este grado se aplicaron dos tareas adicionales con respecto a octavo, la tarea *D. Clases de ángulos* y la del *HG. Mediatriz*. Por otro lado, el tiempo que se pudo destinar para trabajar en el desarrollo de cada tarea fue mayor en séptimo que en octavo, lo cual facilitó un trabajo más detallado, con mayor posibilidad de cuestionar a los estudiantes acerca de sus respuestas.

De otro lado, en grado séptimo los estudiantes realizaron argumentos del tipo PJSc y PJSd que no realizaron los estudiantes del otro grado. Por el contrarío, en octavo se realizaron argumentos que no se elaboraron en séptimo, como GCAa, GJSb y PCSc. Grado séptimo presentó la mayor frecuencia de argumentos [PCSa] y grado octavo de [GCSa] durante la aplicación de la secuencia.

En ambos grupos se observa que la mayor cantidad de argumentos se realizaron durante la puesta en común. esto debido a que en ese momento hubo mayor interacción. En donde los estudiantes deben explicar el razonamiento realizado en la ejecución de la tarea y responder a los cuestionamientos efectuados por estudiantes y profesora respecto a sus afirmaciones realizadas, lo que los lleva a completar, cambiar, reestructurar y generar más argumentos. Esto último es evidencia, en concordancia con lo manifestado por Krummheuer (1995), de que la argumentación es un constructo social.

Además, en ambos casos, para la tarea de visualización solo se presentaron argumentos durante la puesta en común, resultado de la naturaleza y objetivo de esta, pues para el desarrollo de la misma no se contempló el trabajo grupal. En esta tarea las frecuencias más altas las tienen los argumentos sin garantía o respaldo o argumentos con un respaldo empírico. Esto se debe en primer lugar a que las tareas que tienen como meta la visualización y la definición de objetos geométricos, atendiendo a lo manifestado por Álvarez et al. (2014), "se centran en el proceso de observar el objeto matemático para identificar sus características y las relaciones que se establecen entre ellas o identificar elementos necesarios para poder formular una conjetura" (p. 77), lo que lleva a realizar argumentos con las características anteriores. En segundo lugar, esto se debe también a que los estudiantes en ese momento no poseían elementos teóricos necesarios que les permitieran elaborar mayor cantidad de argumentos con respaldo o garantía teórica.

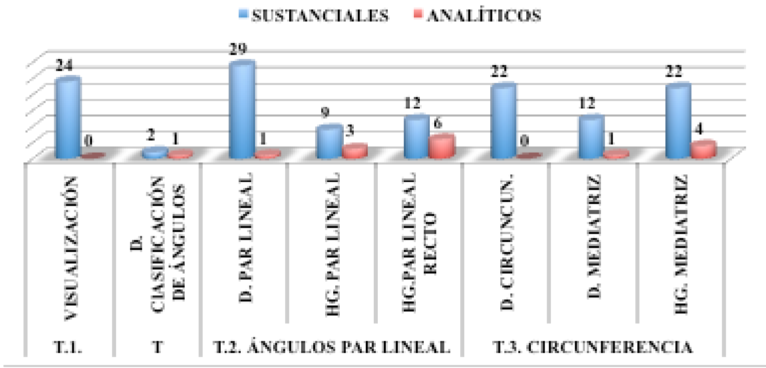
En las tareas correspondientes a la justificación de hechos geométricos se observó mayor construcción de argumentos analíticos. Esto es resultado, en primer lugar, de que en el momento de desarrollar estas tareas los estudiantes ya conocían algunos elementos del sistema teórico local; en segundo lugar, la tarea solicitaba que los estudiantes validaran, generalizaran o justificaran su demostración; ellos debían elaborar argumentos convincentes que estuvieran fundamentados en sistema teórico reconocido y aceptado por la comunidad de la clase.

## ARGUMENTOS ANALÍTICOS Y SUSTANCIALES

En este apartado se analizan los argumentos analíticos y sustanciales a lo largo de las tareas de la secuencia. Se tienen en cuenta la presencia de estos de acuerdo a los procesos de conjeturar y justificar, así como de acuerdo a los momentos de la clase (puesta en común y trabajo en grupo).

### *GRADO SÉPTIMO*

En la gráfica 3 se observa el comportamiento de los argumentos sustanciales y analíticos en el desarrollo de cada tarea. En la tarea de visualización todos los argumentos realizados son de tipo sustancial. En la tarea de *D. Clases ángulos* se realizaron tres argumentos: uno analítico y dos sustanciales; en la tarea de par lineal durante la construcción de la *D. Par lineal* se hicieron veintinueve argumentos sustanciales y uno analítico. En los problemas posteriores correspondientes a la justificación del *HG. Par lineal* y el *HG. Par lineal - recto* se observa que los argumentos analíticos aumentan. Este mismo patrón se observa en la tarea de circunferencia (donde se incluían *D. circunferencia, D. mediatriz y el HG mediatriz*), al inicio de esta predominan los argumentos sustanciales pero en la medida que se avanza en su desarrollo, aumentan el número de argumentos analíticos realizados por los estudiantes.

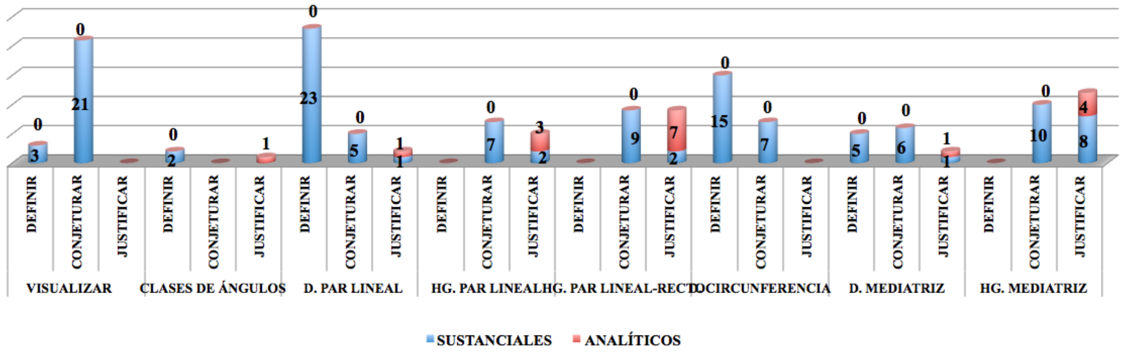



**Gráfica 3. Argumentos analíticos y sustanciales. Grado séptimo**

La producción de argumentos analíticos y sustanciales en relación a los procesos de definir, conjeturar y justificar se presenta en la gráfica 4. En la tarea de visualización, la mayoría de los argumentos además de ser sustanciales fueron realizados durante el proceso de conjeturar, unos pocos en el proceso de definir y ninguno en el proceso de justificar, mientras que en la rarea de D. *Clasificación ángulos* dos de los tres argumentos eran sustanciales y se presentaron durante el proceso de definir y uno analítico que se desarrolló en el proceso de justificar. En la tarea par lineal inicialmente en la *D. Par lineal* (T3. P1), los argumentos se encuentran en su mayoría en el proceso de definir, unos pocos en conjeturar y dos en el proceso de justificar. Sólo uno de los argumentos construidos es analítico en el proceso de justificar; el resto de los argumentos construidos es sustanciales. Los argumentos en los problemas *HG par lineal y HG par lineal-recto* exhiben un aumento sobre los argumentos analíticos durante el proceso de justificar, con los argumentos sustanciales ocurre lo contrario ya que presentan una disminución en el proceso de justificar.

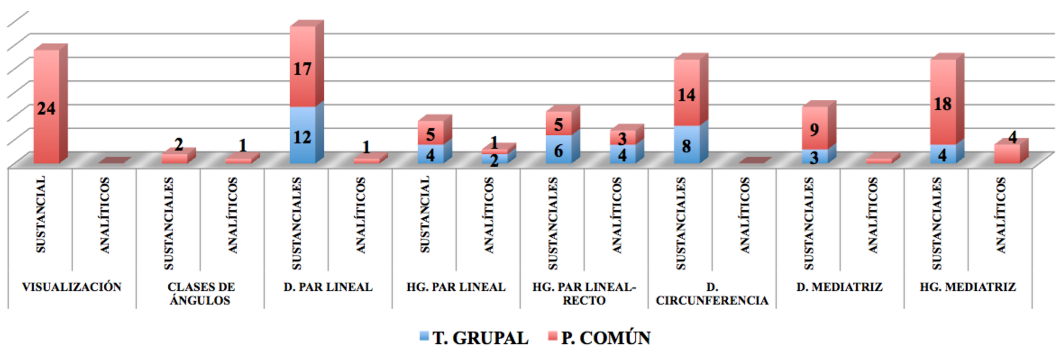
En la tarea relativa a la circunferencia (*D. circunferencia, D. mediatriz y el HG mediatriz*) nuevamente hay una frecuencia inicial alta de argumentos sustanciales y la mayoría en el proceso de definir y de conjeturar. Luego, durante la realización del problema relativo a la definición de la mediatriz se realiza un argumento analítico en la justificación; pero aún la mayoría de argumentos se caracterizan por ser sustanciales y tener presencia en los procesos de definir y conjeturar. Finalmente, en el problema del *HG. Mediatriz* se observa que la cantidad de argumentos en el proceso de definir es nula mientras, en los otros dos procesos difieren solo en dos argumentos y mientras en el proceso de conjeturar solo hay argumentos sustanciales, una tercera parte de los argumentos en el proceso de justificación son analíticos.

Respecto a los momentos de la clase (puesta en común y trabajo grupal), el comportamiento de los mismos se representa en la gráfica 5. En el desarrollo de todas las tareas, la mayor frecuencia siempre se presentó en los argumentos sustanciales los cuales fueron realizados en la mayoría de los casos durante la puesta en común.




**Gráfica 4. Argumentos analíticos y sustanciales en los procesos de la AD en grado séptimo**

En la tarea de visualización, similar a lo mencionado anteriormente, los argumentos se desarrollaron en la puesta en común, pues en esta no hubo espacio para el trabajo en grupo. En la tarea *D. Clases ángulos* los tres argumentos fueron desarrollados en la puesta en común ya que el trabajo de los grupos se centró apenas en la medición de los ángulos. En los problemas relacionados con definir (*D. Par lineal, D. Circunferencia y D. Mediatriz*) se evidencia una mínima producción de argumentos analíticos realizados en la puesta en común. En cuanto a los problemas de los hechos geométricos (*HG. Par lineal, HG. Par lineal–recto y HG. Mediatriz*) la cantidad de argumentos analíticos aumentaron respecto a los realizados en los problemas de definir. Además, estos argumentos se realizaron en ambos momentos de la clase (trabajo en grupo y puesta en común) pero con mayor frecuencia en el trabajo grupal para el *HG. Par lineal y HG. Par lineal–recto* mientras en el *HG. Mediatriz* los argumentos analíticos fueron realizados en su totalidad durante la puesta en común.

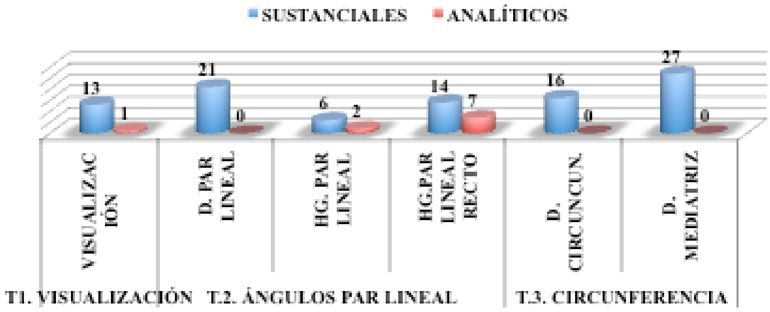



**Gráfica 5. Argumentos analíticos y sustanciales en los momentos de clase. Grado séptimo**

Lo anteriormente presentado corresponde al análisis de los datos obtenidos en el grado séptimo. A continuación se realiza un análisis similar teniendo en cuenta lo ocurrido en el grado octavo.

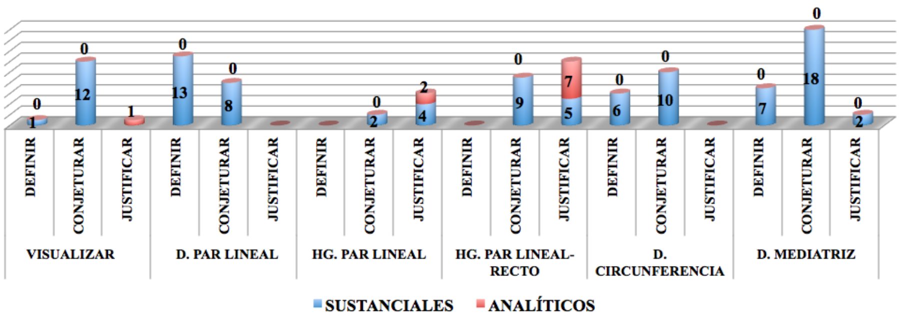
*GRADO OCTAVO*

En cuanto al comportamiento de los argumentos sustanciales y analíticos, en la gráfica 6 se observa que prevaleció la construcción de argumentos sustanciales a lo largo de la aplicación de las tareas, en cuanto a los argumentos analíticos se observa que en la tarea de visualización tuvo lugar uno, en la tarea de par lineal cuando se inicia con la *D. Par lineal* no se realizaron argumentos analíticos, pero al abordar el problema del *HG. Par lineal* y el *HG. Par lineal-recto* se observa que este tipo de argumentos aumenta. En la tarea de circunferencia, donde se desarrollaron los problemas *D. Circunferencia y D. mediatriz,* los estudiantes no realizaron argumentos analíticos.



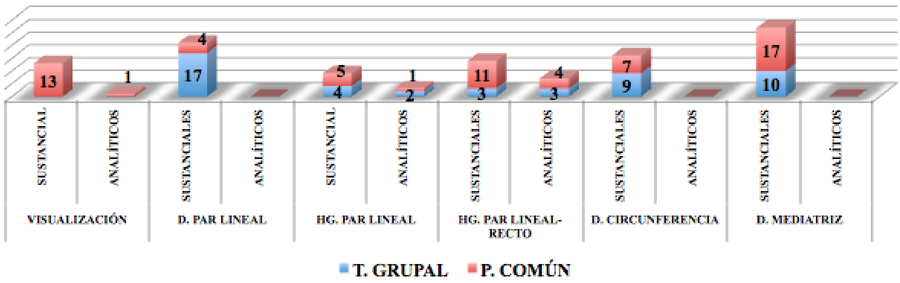

**Gráfica 6. Argumentos analíticos y sustanciales. Grado octavo**

En cuanto al comportamiento de estos argumentos, durante los procesos de definir, conjeturar y justificar, en la gráfica 7 se observa que prevalecen los argumentos para el proceso de conjeturar sobre el de definir y justificar. La mayoría de estos argumentos son de tipo sustancial. Los argumentos en el proceso de conjeturar se evidencian en todas las tareas y problemas mientras los argumentos en el proceso de definir se evidencian sobre todo en los problemas relativos a definiciones (*D. Par lineal, D. Circunferencia y D. Mediatriz*) y los argumentos en el proceso de justificar fueron construidos en los problemas relativos a los hechos geométricos (*HG. Par lineal y HG. Par lineal recto*) y es en estos problemas en el marco de la justificación que se observan argumentos analíticos.




**Gráfica 7. Argumentos analíticos y sustanciales en los procesos de la AD. Grado octavo**

La relación de los argumentos analíticos y sustanciales con los momentos de la clase (trabajo grupal y puesta en común) se presenta en la gráfica 8. En este grado, igual que en séptimo, en la tarea de visualización todos los argumentos se presentaron durante la puesta en común ya que este fue el único momento que tuvo lugar en esta tarea. De los 14 argumentos realizados por los estudiantes uno era analítico, los demás sustanciales. En los problemas de *D. Par lineal* y *D. Circunf*erencia la mayoría de los argumentos se realizaron en la trabajo grupal, mientras en el de *D. Mediatriz* la mayor frecuencia de argumentos se presentó en la puesta en común. En los tres problemas mencionados todos los argumentos fueron sustanciales. En las dos tareas relativas a los hechos geométricos (*HG. Par lineal y HG. Par lineal–recto*) la mayor tendencia la presentan los argumentos que se realizaron durante la puesta en común. También se observa que todos los argumentos analíticos excepto uno, desarrollados durante la aplicación de la secuencia en este grado, se produjeron durante estas dos tareas y la mayoría de estos también en el momento de la puesta en común.




**Gráfica 8. Argumentos analíticos y sustanciales en los momentos de clase. Grado octavo**

***SIMILITUDES Y DIFERENCIAS SÉPTIMO Y OCTAVO***

A continuación se realiza un paralelo de los argumentos analíticos y sustanciales entre los dos grados teniendo en cuenta las frecuencias en las tareas, la producción de estos de acuerdo a los procesos de definir, conjeturar y justificar y los momentos de la clase. Para ello inicialmente se observarán particularidades de cada grado y luego se tomarán los aspectos comunes entre ambos grados.

En grado séptimo se observa que en seis de las ocho secciones se producen argumentos analíticos, es decir en un 75% de las sesiones, mientras en octavo en solo tres de las seis, es decir un 50%. En la tarea de visualización en grado séptimo no se realizaron argumentos analíticos, en los problemas de *D. Par lineal* y *de D. Mediatriz* se realizó un argumento analítico para cada uno, mientras en octavo ocurrió lo contrario; en la tarea de visualización se realizó un argumento analítico pero para los problemas de *D. Par lineal* y *D. Mediatriz* no hicieron argumentos analíticos. En la tarea de *D. Par lineal* en el proceso de justificar se realizaron argumentos analíticos y sustanciales, mientras para octavo en este problema para este proceso no se realizó ningún tipo de argumento, en el problema del *HG. Par lineal recto* en grado séptimo en el proceso de conjeturar no se realizaron argumentos analíticos, mientras en grado octavo sí.

Los aspectos comunes entre los dos grados se presentan a continuación. En la tarea de visualización y en los problemas relativos a definiciones se observa una frecuencia representativa en cuanto a los argumentos sustanciales y una frecuencia mínima para los analíticos, esta situación responde al objetivo y naturaleza de la tarea. En la tarea de visualización el objetivo era favorecer habilidades de visualización, identificar propiedades de figuras y reconocer que una propiedad es válida, solo si esta se hace explicita mediante una notación determinada. Para los problemas de definición el objetivo era construir una definición vía observación y reconocimiento de invariantes en las representaciones gráficas dadas y construcciones realizadas por los estudiantes, lo que los llevó no solo a definir sino también a conjeturar y producir más argumentos sustanciales que analíticos en estos dos procesos.

De otro lado, en los problemas correspondientes a los hechos geométricos (*HG. Par lineal, HG. Par lineal–Recto* y *HG. Mediatriz)* en los dos grados se observa un incremento en los argumentos analíticos, situación que responde por un lado a que el objetivo de estos problemas era justificar una conjetura a partir de los elementos del sistema teórico local creado hasta el momento; por otro lado, al momento de enfrentar estas tareas los estudiantes ya conocían algunos elementos del sistema teórico local construido por ellos, lo que favoreció también la realización de argumentos dentro del proceso de justificación. Otro aspecto común en los grupos es que en el momento de la clase en el que más se favorece la construcción de argumentos es en la puesta en común.

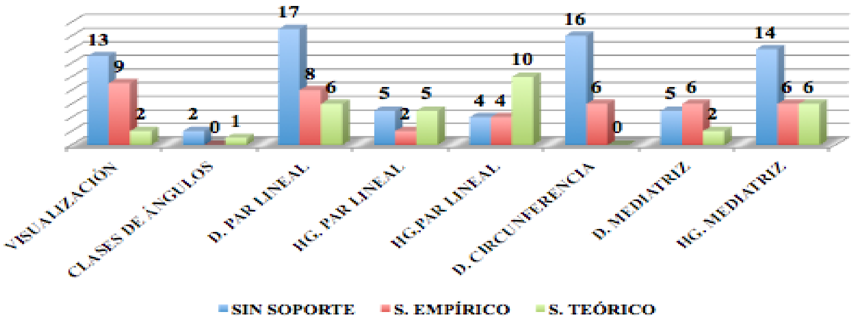
## ARGUMENTOS Y SOPORTE

Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo es analizar la evolución de los argumentos construidos por los estudiantes, en este apartado se analiza en ambos grados la frecuencia de los argumentos según el tipo de *soporte* para cada uno (sin soporte teórico o empírico, con soporte empírico y con soporte teórico), es necesario aclarar que se entiende por *soporte*, el respaldo o la garantía usados para justificar o validar una conclusión durante el desarrollo de las tareas. Se toma la decisión de analizar los argumentos según el *soporte* ya que estos dan fuerza al argumento y determinan la estructura necesaria para los mismos en conjunto con los datos y la conclusión de acuerdo a lo manifestado por Toulmin (2007), aún más si este *soporte* es teórico.

Por sus características, un argumento sustancial puede ser un argumento sin *soporte*, con *soporte* empírico o con *soporte* teórico, mientras que un argumento analítico cuenta con *soporte* teórico únicamente. Los argumentos sustanciales fundamentan su conclusión en evidencia empírica, mientras los analíticos en premisas universales e inmutables (Ambrosini & Asti; 2009). No se vio necesario discriminar en este momento del análisis los soportes de acuerdo a su naturaleza (garantía o respaldo) ya que se quiere determinar si el estudiante sólo se conforma con elaborar una conclusión con base en unos datos (argumentos sin soporte), o ve la necesidad de respaldar esa conclusión, siendo este respaldo de corte empírico o con base en elementos teóricos (argumentos con soporte). En este análisis se tendrá en cuenta el comportamiento de los argumentos según el *soporte* atendiendo a si son analíticos o sustanciales, en consideración a los procesos de la AD y los momentos de clase.

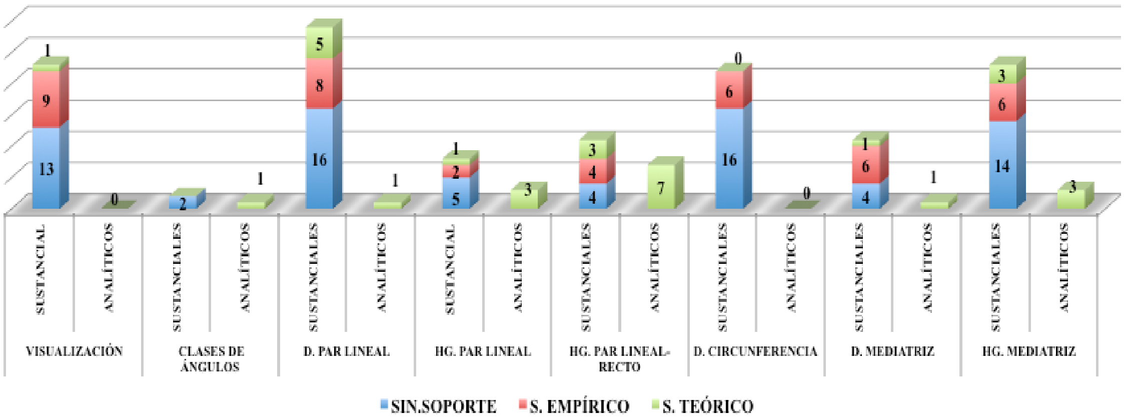
### *GRADO SÉPTIMO*

El comportamiento de los argumentos que tuvieron lugar en grado séptimo se presenta en la gráfica 9. Allí se observa en términos generales que los argumentos más construidos por los estudiantes fueron aquellos que carecen de *soporte* (categoría terminada en *Sa*); luego se encuentran aquellos con *soporte* empírico (categoría terminada en *Sd* y *Se*) y por último están aquellos con *soporte* teórico (categoría terminada en *Sb*, *Sc*, *Aa* y *Ac*). Los argumentos sin *soporte* tienen mayor frecuencia en la gráfica, exceptuando la tarea de los dos hechos geométricos de par lineal (*HG. Par lineal y HG. Par lineal-recto*) y el problema *D. Mediatriz*. También se observa que en la medida que se avanza en los problemas de una tarea, la cantidad de argumentos con *soporte* teórico aumentan. Por ejemplo, en el caso de las tarea de par lineal en el momento de realizar el P.1correspondiente a la *D. Par lineal,* de los argumentos construidos el 20% corresponde a argumentos teóricos; en el siguiente problema, que hace referencia al *HG. Par lineal* (P.2) , el 41% son teóricos y en la última parte de esta tarea correspondiente P.3 al *HG. Par lineal–recto* los argumentos teóricos han aumentado a un 55%. Algo similar ocurre con la tarea de la circunferencia, durante el desarrollo del P.1 de esta tarea correspondiente a la *D. Circunferencia* no hay argumentos teóricos, en el P.2 relativo a la *D. Mediatriz* un 15% correspondía a esta tipificación y en el P.3 correspondiente al HG. Mediatriz el porcentaje era de un 23%. En las tareas de visualización y clasificación de ángulos esta observación no aplica pues no son tareas compuestas por diferentes problemas.



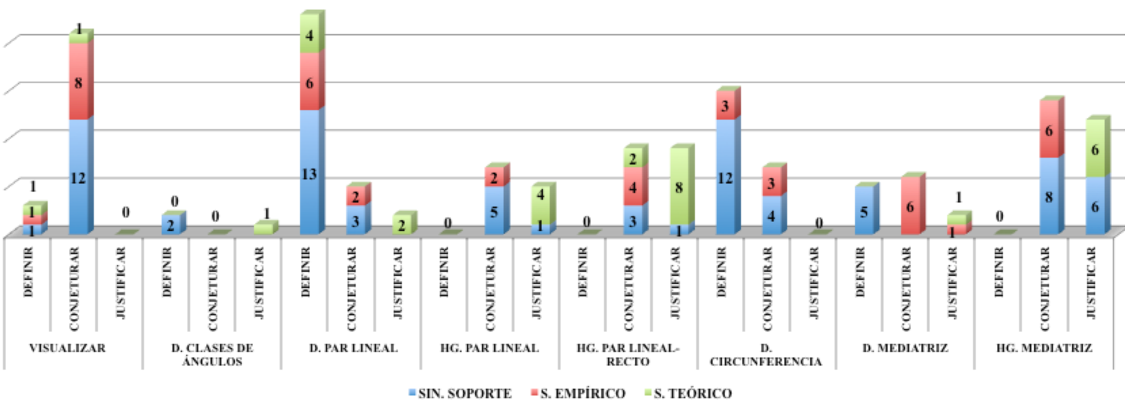

**Gráfica 9. Argumentos según el tipo de soporte. Grado séptimo**

En este párrafo se interpreta la gráfica 10 en la cual se relacionan los argumentos analíticos y sustanciales con el tipo de *soporte* implementado en cada uno. En primer lugar todos los argumentos analíticos corresponden a la tipificación de argumentos teóricos con *soporte* teórico, en todos los argumentos sustanciales prevalecen aquellos que carecen de *soporte*, seguido de los argumentos con un *soporte* empírico, la cantidad de argumentos con *soportes* teóricos son mínimos en el caso de los argumentos sustanciales. En los problemas asociados a la formulación de HG se favoreció la construcción de argumentos con *soporte* teórico y por tal razón la producción de argumentos analíticos.




**Gráfica 10. Argumentos analíticos y sustanciales de acuerdo al tipo de soporte. Grado séptimo**

De los argumentos que se construyeron en el grado séptimo, como se puede observar en la gráfica 11, la mayoría estaban en los procesos de definir y conjeturar. Estos argumentos se caracterizan por no tener *soporte*, son muy pocos los argumentos con *soporte* teórico en este caso. En cuanto al proceso de justificar, una cantidad significativa de los argumentos construidos allí cuentan con *soporte* teórico; y por el contrario es mínima la cantidad de argumentos con *soporte* empírico. En la mayoría de los casos, este proceso está presente sobre todo en el momento de trabajar con los hechos geométricos, mientras en el momento de formular definiciones prevalecen los argumentos construidos en el proceso de definir, la mayoría de ellos sin ningún tipo de *soporte*.

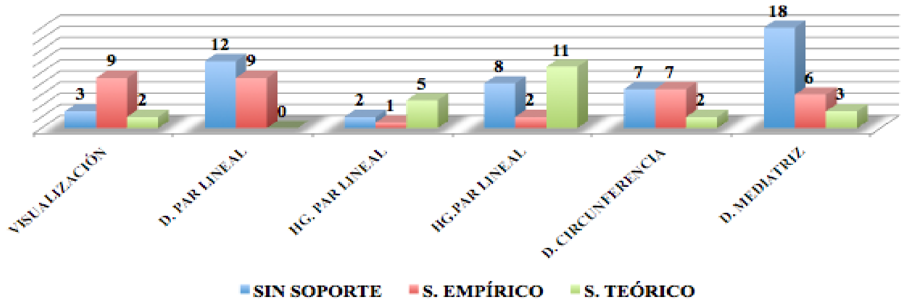



**Gráfica 11. Argumentos según el tipo de soporte en los procesos de definir, conjeturar y justificar. Grado séptimo**

A continuación se realiza un análisis similar al anterior teniendo en cuenta el los resultados obtenidos según esta tipificación de los argumentos en grado octavo.

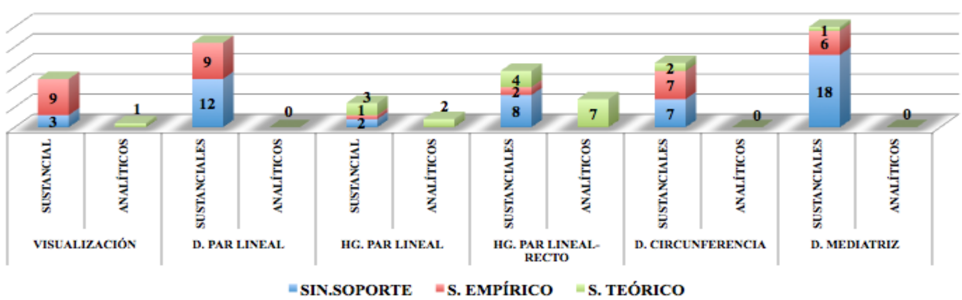
### *GRADO OCTAVO*

En la gráfica 12, en la cual se relacionan los argumentos según el tipo de *soporte* con las tareas propuestas, se observa que los estudiantes de grado octavo, en su mayoría, construyeron argumentos sin algún tipo de *soporte* y los que menos tuvieron presencia eran aquellos con *soporte* teórico. De otro lado se observa que los argumentos sin *soporte* tienen mayor frecuencia en el problema de la *D. Mediatriz,* en la *D. Par lineal* y la *D. Circunferencia;* en el *HG. Par lineal* y el *HG. Par lineal – recto* se observa que los argumentos más construidos por los estudiantes fueron aquellos con *soporte* teórico. En la tarea de visualización se presentan mayor frecuencia los argumentos con *soporte* empírico.



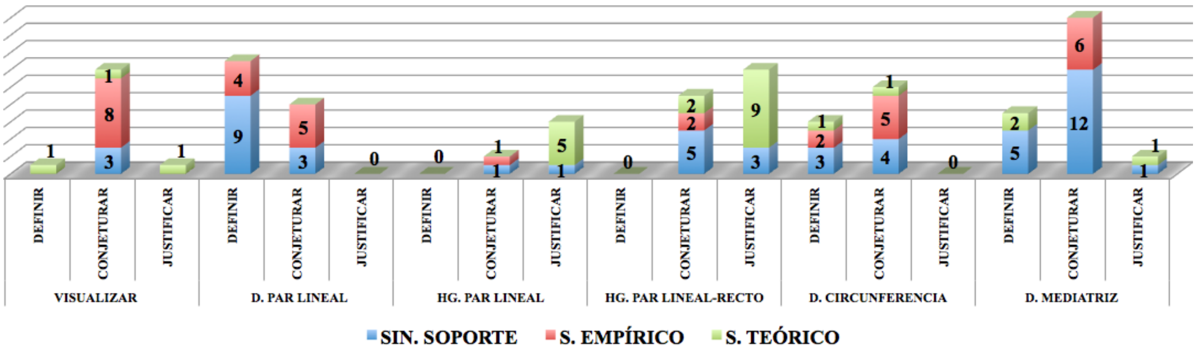

**Gráfica 12. Argumentos según el tipo de soporte. Grado octavo**

En cuanto a la relación existente entre los argumentos analíticos y el tipo de *soporte* la gráfica 13 presenta la siguiente información: la mayoría de los argumentos sustanciales construidos por los estudiantes carecen de *soporte* y muy pocos poseen un *soporte* teórico, estos se construyeron con mayor frecuencia en la tarea de visualización y en los problemas relativos a la construcción de la *D. Par lineal, D. Circunferencia* y *D. Media*triz, en estos no se construyeron argumentos analíticos. Todos los argumentos analíticos construidos por los estudiantes poseen *soporte* teórico. También es posible observar que los problemas correspondientes a los hechos geométricos se caracterizan por tener una cantidad significativa de argumentos con *soporte* teórico, entre ellos los analíticos.




**Gráfica 13. Argumentos analíticos y sustanciales de acuerdo al tipo de soporte. Grado octavo**

El comportamiento de los argumentos según tipo de *soporte* en los procesos de definir, conjeturar y justificar se puede observar en la gráfica 14. En las tareas de definiciones se realizaron una cantidad notable de argumentos en los procesos de definir y conjeturar. Estos argumentos se caracteriza por que carecen de *soporte* o poseen un *soporte* empírico, mientras en los procesos de justificación la construcción de argumentos es casi nula. En los problemas de los hechos geométricos la construcción de argumentos se centra en el proceso de justificar, la mayoría de los estos poseen un *soporte* teórico. En conclusión, los problemas de justificación de hechos geométricos favorecen la construcción de argumentos con *soporte* teórico, mientras en la tarea de visualización y en los problemas de definición se observa que la mayoría de los argumentos no poseen *soporte* o el *soporte* es empírico.




**Gráfica 14. Argumentos según el tipo de soporte en los procesos de la AD. Grado octavo**

***SIMILITUDES Y DIFERENCIAS SÉPTIMO Y OCTAVO***

Teniendo en cuenta la información en este apartado y estableciendo una relación entre los dos grados es posible afirmar que, en los dos grados, el porcentaje de los argumentos con *soporte* teórico realizados durante cada tarea es propenso a aumentar, a pesar de que en la tarea de circunferencia (*D. Circunferencia, D. Mediatriz* y *HG. Mediatriz*) para el grupo de octavo no se aplicó el problema del *HG. Mediatriz*. Los argumentos en los procesos de definir y conjeturar, para ambos grados en su totalidad corresponden a argumentos sin *soporte* o con *soporte* empírico en la mayoría de los casos y muy pocos con un *soporte* teórico. En cuanto a los argumentos construidos en el proceso de justificar en el caso de ambos cursos hay una frecuencia significativa de argumentos con un *soporte* teórico, en especial para los problemas relativos a los hechos geométricos.

En los dos grupos se observa que en la tarea de visualización y en los momentos de formular definiciones se construyeron mayor cantidad de argumentos sin *soporte* o con un *soporte* empírico, mientras en el momento de justificar los hechos geométricos se construyó una cantidad sobresaliente de argumentos con *soporte* teórico. En todas las tareas prevalecen los argumentos sustanciales sin *soporte* o con *soporte* empírico y por la naturaleza y estructura de los argumentos analíticos, estos siempre tienen un *soporte* teórico. En la tarea de visualización y en los momentos de definir objetos geométricos el proceso de conjeturar se caracteriza por un buen número de argumentos sin *soporte* o con *soporte* empírico. En los momentos de trabajar alrededor de hechos geométricos se observa que en la mayoría de los casos en la justificación aumenta el número de argumentos construidos por los estudiantes porcentualmente en comparación con los construidos al conjeturar, también en este proceso se observan argumentos sin *soporte* o con *soporte* teórico en la mayoría de los casos.

En términos generales en la aplicación de la secuencia de enseñanza se observa que la hipótesis planteada es cierta, pues se favoreció la construcción de argumentos por parte de los estudiantes y de otro lado se observa una evolución en los argumentos construidos por ellos al interior de cada tarea. No fue posible determinar una evolución en términos generales en el desarrollo completo de la secuencia, ya que en primer lugar el número de tareas formadas por problemas en marcados en definiciones de objetos geométricos y hechos geométricos de la secuencia, aplicadas en cada uno de los grados no fueron suficientes para concluir y de otro lado como se puede observar en las gráficas anteriores las tareas que inician con un problemas de definición y termina con problemas de hechos geométricos en relación a determinado objeto geométrico, ocasiona un ruptura respecto a la tarea siguiente pues inicia nuevamente con problemas de definición para luego continuar con problemas relativos a hechos geométricos respecto a otro objeto geométrico.

# CONCLUSIONES

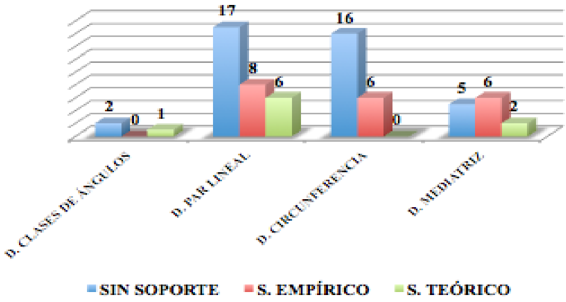
En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación y algunos asuntos que vale pena revisar en futuros estudios. Se considera en este punto tanto el análisis realizado en el anterior capítulo como los objetivos considerados para el desarrollo de este estudio. La información aquí presentada se ha organizado en ocho apartados en los cuales se presentan: en primer lugar, las conclusiones relacionadas con las tareas propuestas; en segundo lugar, con los procesos de definir y de la AD (conjeturar y justificar); en tercer lugar, con los momentos de la clase; en cuarto lugar, la evolución de los argumentos; en quinto, en cuanto a la pregunta y a los objetivos de investigación, en sexto lugar , en cuanto a la organización y ambiente de la clase; séptimo, en cuanto al desarrollo profesional y octavo, futura proyección de estudio.

## EN CUANTO A LAS TAREAS

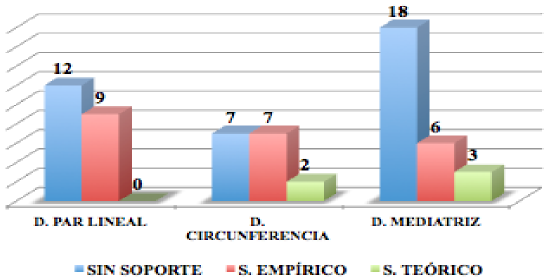
Las tareas propuestas a los estudiantes que involucraron problemas abiertos favorecieron la construcción de argumentos por parte de ellos; Este asunto tiene relación con lo manifestado por Camargo et al. (2014) y Lamper (1990, citado en Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013). Para los primeros autores, los problemas abiertos generan diferentes puntos de vista y favorecen la argumentación; el segundo autor manifiesta que los problemas que incluyen la observación de patrones conducen a la elaboración de argumentos empíricos inductivos y a explicaciones deductivas sobre por qué un patrón continúa. Los problemas abiertos permitieron a los estudiantes construir definiciones, hechos geométricos y favorecer una justificación para algunos de ellos*;* en consecuencia, favoreció la construcción de un sistema teórico local.

Las tareas propuestas promovieron procesos de argumentación en los dos momentos de la clase, durante el trabajo grupal, cuando los estudiantes tenían que abordar y resolver el problema, pues el grupo debía llegar a un consenso acerca de la solución del mismo y los motivos por los cuales habían obtenido tal resultado. Y en la puesta en común, cuando las propuestas de un grupo eran presentadas y discutidas por los otros grupos, tenía lugar una discusión alrededor de su validez y de ahí, esta podía ser refutada o complementada. Durante la puesta en común, los estudiantes construían diferentes argumentos para exponer su posición respecto a lo que se estaba discutiendo, lo que soporta las ideas de Krummheuer (1995) cuando afirma que “la argumentación se ve como un fenómeno social, en el cual los individuos tratan de ajustar sus intenciones e interpretaciones al presentar verbalmente la razón de ser de sus acciones” (p.229) y Camargo et al. (2014) quienes aseguran que “la argumentación tiene carácter social y cobra sentido cuando hay necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha” (p. 82).

Por otro lado, dependiendo del objetivo de los problemas propuestos en nuestro estudio, distintos tipos de argumentos tuvieron lugar respecto al *soporte* involucrado, entendido este como la garantía o respaldo presente en el argumento. En los problemas que tenían como objetivo definir un objeto geométrico los estudiantes construyeron argumentos en la mayoría de los casos sin alguna garantía o respaldo, así como argumentos con un *soporte* empírico (ver gráficas 15 y 16). Esto se debe a que en este tipo de problemas los estudiantes debían observar el objeto geométrico representado, identificar características, relaciones e invariantes y con base en esto formular la definición del mismo.

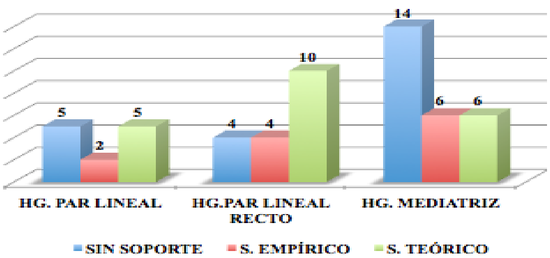



**Gráfica 15. Argumentos construidos durante problemas relativos a definiciones. Grado séptimo**

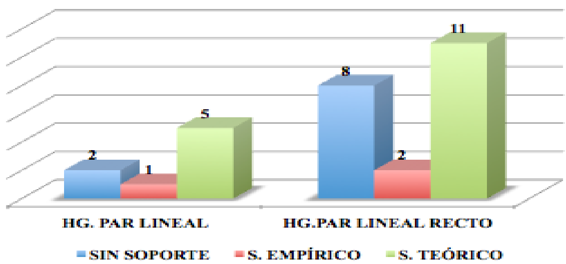



**Gráfica 16. Argumentos construidos durante problemas relativos a definiciones. Grado octavo**

Respecto a los problemas que tenían como objetivo formular una relación de dependencia y proveer la justificación a la misma, se favoreció la construcción de argumentos con un respaldo teórico (gráficas 17 y 18). Lo que contribuyó a que el número de argumentos construidos con soporte teórico fuera considerablemente alto.

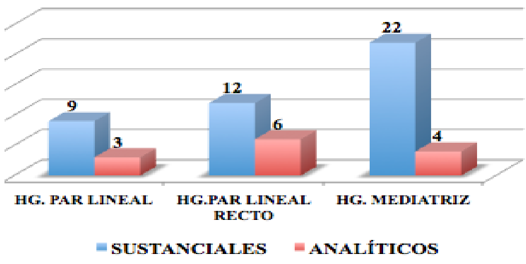



**Gráfica 17. Argumentos construidos durante problemas relativos a hechos geométricos. Grado séptimo**

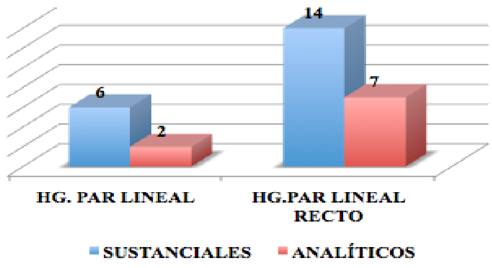



**Gráfica 18. Argumentos construidos durante problemas relativos a hechos geométricos. Grado octavo**

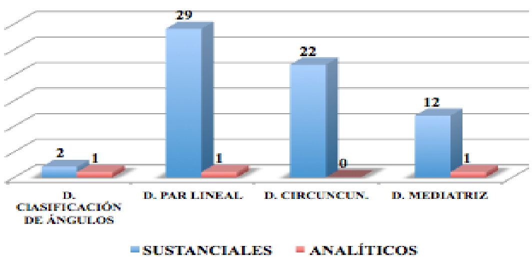
Como consecuencia de lo anterior, teniendo en cuenta que todo argumento analítico tiene únicamente *soporte* teórico, es que los problemas relativos a los HG se favoreció la construcción de argumentos de este tipo por parte de los estudiantes (gráficas 19 y 20), aun cuando su presencia no fue mayor a la de los argumentos de tipo sustancial. mientras que los problemas relativos a definición promovieron la construcción de argumentos sustanciales significativamente (gráficas 21 y 22).



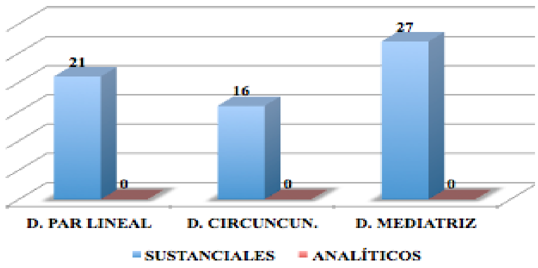

**Gráfica 19. Argumentos analíticos y problemas relativos a hechos geométricos. Grado séptimo**




**Gráfica 20. Argumentos analíticos y problemas relativos a hechos geométricos. Grado octavo**




**Gráfica 21. Argumentos sustanciales y problemas relativos a definición. Grado séptimo**

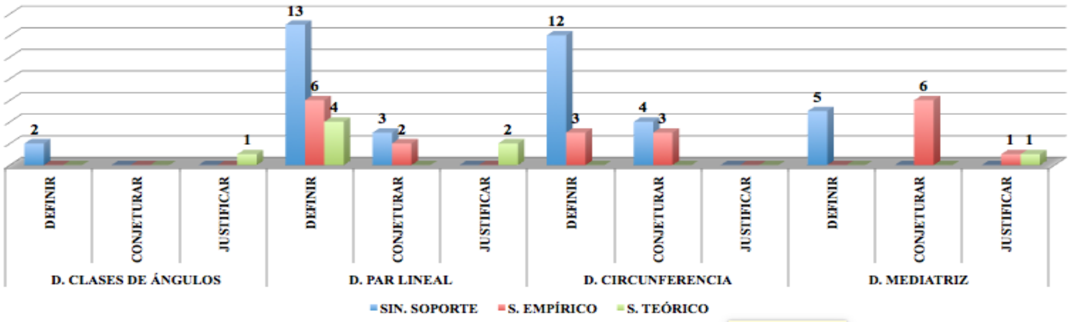



**Gráfica 22. Argumentos sustanciales y problemas relativos a definición. Grado octavo**

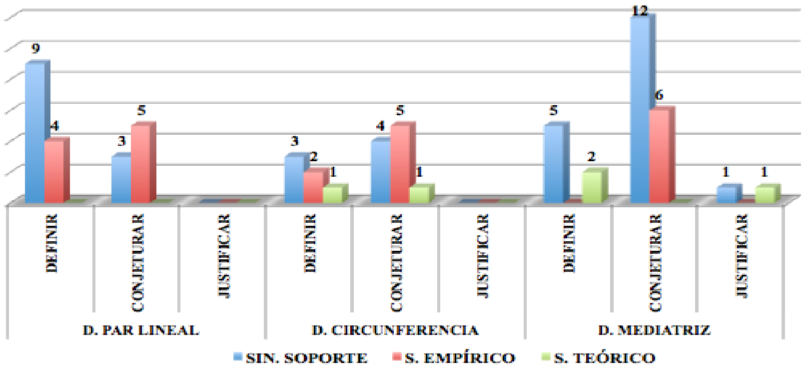
## EN CUANTO A LOS PROCESOS DE LA AD Y EL PROCESO DE DEFINIR

Como se dijo anteriormente, en este estudio se analizaron los argumentos construidos en los procesos de la AD (conjeturar y argumentar) y en el proceso de definir el cual fue necesario involucrar, teniendo en cuenta que varias de las tareas o problemas propuestos en la secuencia se encuentran relacionados con este. En el estudio se pudo evidenciar que los estudiantes al abordar cada uno de las tareas o los problemas de la secuencia siempre construyeron argumentos en dos de los procesos y en algunos casos en los tres; esto se debe, de acuerdo con lo manifestado por Camargo et al. (2014), a que los procesos de la AD están relacionados entre sí.

Pero cada problema teniendo en cuenta su objetivo favoreció la construcción de argumentos en determinado proceso. Los problemas que presentaban a los estudiantes representaciones gráficas de algún objeto geométrico o solicitaban que estas fueran construidas y con base en estas establecer una definición, se caracterizaron por promover argumentos en los procesos de definir y conjeturar. De estos puede decirse que tuvieron una notable presencia aquellos argumentos sin soporte y con garantía empírica (ver gráficas 23 y 24).

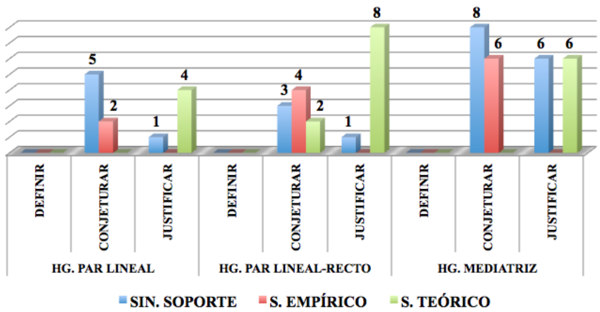



**Gráfica 23. Argumentos, problemas definición y procesos. Grado séptimo.**

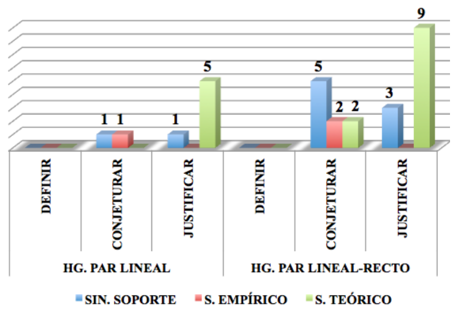



**Gráfica 24. Argumentos, problemas definición y procesos. Grado octavo**

Mientras en los problemas relacionados con hechos geométricos (*HG. Par lineal, HG. Par lineal recto* y *HG. Mediatriz*) en los cuales los estudiantes debían argumentar para validar una conjetura, se favoreció la construcción de argumentos en el proceso de justificar. Los estudiantes se enfocaron en construir argumentos dentro del sistema teórico que ellos edificaban, en la mayoría de los casos construyeron argumentos apoyados en una garantía o respaldo teórico y aún más si lo que debían hacer era demostrar la conjetura (gráficas 25 y 26).




**Gráfica 25. Argumentos, problemas de hechos geométricos y procesos. Grado séptimo.**

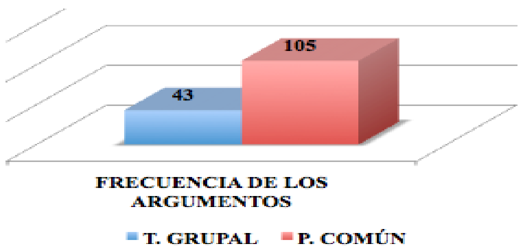



**Gráfica 26. Argumentos, problemas de hechos geométricos y procesos. Grado séptimo.**

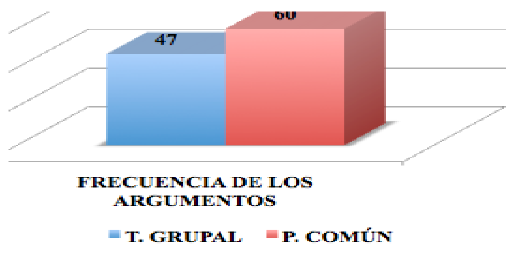
En conclusión, aunque en cada una de las tareas y problemas propuestos los estudiantes construyeron argumentos en los dos o tres procesos, el objetivo de la tarea o problema propuesto favorece la construcción de argumentos en determinado procesos.

## EN CUANTO LOS MOMENTOS DE LA CLASE

Los momentos de la clase (trabajo grupal y puesta en común) favorecieron la construcción de argumentos por parte de los estudiantes en cuanto propiciaron un ambiente de interacción social, Pero es en el momento de la puesta en común en el que hay mayor construcción de argumentos (gráficas 27 y 28). Esto se debe a que este era el momento en el que más se cuestionaba y se indagaba a los estudiantes frente a los resultados presentados. Como consecuencia de ello los estudiantes buscaban la manera de validar, formular y corroborar y en algunos casos justificar las conjeturas a partir de la construcción de argumentos. Lo dicho corresponde a lo manifestado por Fiallo et al. (2013), las acciones que propician el ambiente en el que se indaga, favorecen en los estudiantes la construcción de argumentos deductivos, ya que se eleva la capacidad para construir argumentos matemáticos.




**Gráfica 27. Argumentos, en los diferentes momentos de la clase. Grado séptimo**




**Gráfica 28. Argumentos, en los diferentes momentos de la clase. Grado octavo**

## EN CUANTO A LA EVOLUCIÓN DE LOS ARGUMENTOS

El tipo de problemas propuestos a través de las tareas favorecieron una evolución respecto al uso y tipo de argumentos involucrados por los estudiantes. En relación a su uso, se observó una evolución en cuanto a los argumentos construidos por ellos para eliminar toda duda sobre una conjetura o su justificación, manifestada por sus compañeros o profesora.

Consideramos que un argumento se puede clasificar en uno de tres niveles, teniendo en cuenta si permite alcanzar completamente, parcialmente o no el siguiente objetivo: eliminar toda duda frente a la validez de una conjetura, esto es, determinar si lo que se reporta en la conjetura es verdadero o no, y permite explicar el paso de un conjunto de datos a la conclusión. En el primer nivel se encuentran los argumentos que tienen un *soporte* teórico y alcanzan completamente el objetivo planteado anteriormente, son deductivos, corresponden a las categorías [*GJAa, GJAc, PJAa y PJAc*] y son analíticos. En un segundo nivel están los argumentos que tienen un *soporte* teórico y conciernen a las categorías terminadas en [*Sb y Sc*] que permiten alcanzar de manera parcial el objetivo planteado inicialmente y en el tercer nivel los argumentos que no tienen ningún tipo *soporte* o con *soporte* empírico y cuyas categorías terminan en [*Sa, Sd, Se, Si*] y que permiten alcanzar el objetivo de manera parcial o no alcanzarlo, los argumentos en estos dos últimos niveles corresponden a los argumentos sustanciales según (Toulmin, 2007, p.167). Desde este punto de vista el argumento más evolucionado corresponde a un argumento de primer nivel y el menos evolucionado es el de tercer nivel.

Al analizar los tipos de argumentos presentes en las interacciones entre los miembros de la clase, se observa un cambio de nivel en los argumentos al interior de cada tarea, en la que tenían lugar problemas relativos a formular definiciones así como hechos geométricos. Como se puede observar en el desarrollo de las mismas, al iniciar la tarea en los primeros problemas (relativos a definiciones) los estudiantes construyeron sobre todo argumentos sin algún tipo de *soporte* o con un *soporte* empírico, es decir argumentos de tercer nivel, estos se enmarcan en la mayoría de los casos en los procesos de conjeturar y definir muy pocos en el de justificar ya que se involucra acciones como detectar invariantes, para definir o formular la conjetura y corroborarla las cuales son acciones propias de esto procesos, según Camargo et al. (2014). en la medida que los estudiantes avanzaban en la tarea y abordaban los problemas relativos a los hechos geométricos, se incrementaba la construcción de argumentos con *soporte* teórico, de segundo y tercer nivel, en cuanto a los argumentos de segundo nivel presentan una frecuencia considerable los enmarcados en el proceso de definir y los argumentos de primer nivel únicamente fueron construidos en el proceso de justificar ya que en estos los estudiantes debían justificar la conjetura dentro de un sistema teórico, para ello debían elegir los elementos a utilizar y organizarlos de manera deductiva para validar la misma, es decir se produce una argumentación deductiva la cual es propia del proceso de justificar (Camargo et al.; 2014).

## ENCUANTO A LA PREGUNTA Y A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Respecto a la pregunta de investigación, se concluye que la metodología propuesta por el grupo Æ.G de la Universidad Pedagógica Nacional, implementada en este trabajo, favoreció por un lado la enseñanza y aprendizaje de la demostración en clase de geometría, y por otro los procesos de argumentación de los estudiantes.

Ya que son procesos de la AD , conjeturar y justificar los cuales se desarrollan en la interacción social, en este caso, entre los estudiantes y entre el profesor y los estudiantes; ellos debieron desarrollar diferentes argumentos que les permitieron, formular la conjetura, validarla y justificarla a la luz del sistema teórico local que se estaba desarrollando en clase la clase. Estos argumentos debían ser reformulados o corregidos cada vez que eran cuestionados, situación que como ya se dijo favoreció los procesos de argumentación de los estudiantes.

Los argumentos construidos por los estudiantes durante la intervención en el aula fueron analizados y tipificados, a través de las categorías construidas previamente teniendo en cuenta los referentes teóricos que permitirían el análisis de los argumentos. Es decir se respondió y alcanzaron los objetivos propuestos inicialmente.

## ENCUANTO A LA ORGANIZACIÓN Y AMBIENTE DE LA CLASE

El ambiente de clase favoreció por un lado el acercamiento a la demostración por parte de los estudiantes, así como la construcción de argumentos realizados por ellos, el tipo de tareas formadas por problemas abiertos dieron la posibilidad a los estudiantes de idear la solución al problema así como contemplar y asumir una posición frente a las soluciones dadas por sus compañeros, lo que los llevo a generar diferentes argumentos, muchas veces desde sus vivencias usando garantías o soportes empíricos o teóricos que no se habían trabajado en clase pero que ellos los conocían de otros momentos.

Las acciones de la profesora llevaron a los estudiantes a argumentar, pero no logro que para los estudiantes el justificar fuera un proceso espontaneo, ya que ellos generalmente se limitaban a construir argumentos sin ningún tipo de soporte, es decir, argumentos cuya categoría termina en *SA*, como se puede observar a lo largo de la aplicación de la secuencia, los estudiantes aludían al soporte generalmente cuando eran cuestionados sobre la validez de su argumento por un compañero o por la profesora. Siempre la profesora a provechó los argumentos propuestos por los estudiantes, sin importar en que nivel estuvieran con el fin de guiarlos a la construcción de argumentos de primer y segundo nivel, pues como manifiesta Krummheuer (1995) , los argumentos sustanciales deben ser el punto de partida para llevar a los estudiantes a construir argumentos analíticos. El acompañamiento constante de la profesora le permitió a los estudiantes la construcción de diferentes argumentos, en los procesos de definir, conjeturar y justificar , los cuales fueron analizados a la luz de las categorías enunciadas en el capítulo de metodología y llevar a cabo este estudio.

## ENCUANTO AL DESARROLLO PROFESIONAL

El desarrollo de este trabajo originó un cambio en la visión que se tenía de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el ámbito escolar, en cuanto a su importancia en la enseñanza de las matemáticas ya que es determinante en del desarrollo de procesos fundamentales en la educación matemática como el definir, el conjeturar, el justificar y el argumentar. Y en cuanto a la posibilidad de abordar a temprana edad en el colegio la demostración en la clase de matemáticas, lo cual es posible si se planea un ambiente de clase que favorezca la actividad demostrativa.

Enriqueció la labor como docente ya que permitió identificar y usar prácticas pedagógicas diferentes a las usuales, que atienden a las necesidades y motivación de los estudiantes lo que favorece sus procesos de aprendizaje. A demás mediante las grabaciones fue posible identificar actuaciones que en lugar de favorecer procesos de aprendizaje en los estudiantes, surtían en efecto contrario y de las cuales no se tenia conciencia que ocurría hasta que no fueron observados los videos. Los conocimientos a nivel pedagógico y matemáticos afianzados y adquiridos en torno al desarrollo de la maestría.

## FUTURA PROYECCIÓN DE ESTUDIO

Teniendo en cuenta los resultados del análisis de los datos, un posible asunto en el que se podría profundizar en una futura investigación, sería la evolución y el comportamiento de los argumentos que construyen los estudiantes a lo largo de una secuencia completa. Asunto que no pudo ser concluido en este estudio ya que como se manifestó en el apartado anterior no fue posible aplicar en su totalidad todas las tareas planeadas para la secuencia, en los dos grupos de estudiantes con los que se realizó el estudio, pero este puede ser de utilidad para ello, ya que el marco teórico y parte de los resultados obtenidos pueden ser el punto de partida. Otra cuestión que queda por resolver y puede ser pregunta de investigación para futuros estudios es ¿ Cómo hacer para que los estudiantes hagan del proceso de justificar una práctica cotidiana en la clase de matemáticas?

# REFERENCIAS

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler, N. (2014). Actividades Matemáticas : Conjeturar y Argumentar. *Números*, *85*, 75–90. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf

Ambrosini, C., & Asti, V. C. (2009). Argumentación: el Escenario Informal. In Educando (Ed.), *Argumentos y Teorías. Aproximación a la Epistemología* (1a ed, pp. 72 – 161). Buenos Aires.

Camargo, L., Molina, O., Perry, P., & Samper, C. (2014). Innovación en el aula de geometría de nivel universitario. In Universidad Pedagógica Nacional (Ed.), *Geometría Plana* (1st ed., pp. 14 – 36). Bogotá.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, *Especial*, 371–383.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas, *31*(2), 181–205.

Fiallo, L. J. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. *Journal of Chemical Information and Modeling*. Valencia.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 16. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/40248127.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analizing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Retrieved from http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-010-9232-y#page-2

Gamboa, G., Planas, N., & Edo, M. (2010). ArgumentacionMatematica: Practicas escritas e interpretaciones. *SUMA*, *64*, 35–44.

Gavilán, J. M., Sanchez, G., & Escudero, I. (2014). Aprender a definir en Matemáticas : estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de Las Ciencias*, *3*, 529–550.

Godino, J., & Recio, A. M. (1997). Significados de la demostración en educación matemática. In *Proceedings of the 21th International Conference of PME* (pp. 313–321). Finland.

Godino, J., & Recio, A. M. (2001). Significados Institucionales De La Demostración. Implicaciones Para La Educación Matemática. *Ensenanza de Las Ciencias*, *19*(3), 405 –414.

Gutiérrez, A. (2009). Perspectiva de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Investigación En La Escuela*, *69*, 61 – 72.

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. In Gómez Alexander & M. Torralbo Bernardo; (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 27–44). Cordoba.

Gutiérrez, Á. (2007). Geometría, demostración y ordenadores. In *Actas de las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*.

Inglis, Ma., & Mejía, Ra. J. P. (2005). La Fuerza De La Aserción Y El Poder Persuasivo En La Argumentación En Matemáticas. *Revista EMA*, *10*(1998), 328–353.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 427–441. http://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Lawrence Erlbaum Associates (Ed.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229 – 270). New Jersey.

Larios, victor O. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar*. *Recuperado de http://es.scribd.com/doc/35231051/Demostrar-es-un-problema-o-el-problema-es- demostrar.*

Mariotti, M. A. (1997). Proceedings of the European Research Conference on Mathematical EducationNo Title. In *Justifying and proving: figural and conceptual aspects.* (pp. 21 – 26).

Mariotti, M. A. (2006). Demostración y demostrar en educación matemática. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173–204).

Martin, G. W., & Harel, G. (1989). Proof Frames.pD. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 41 –51.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Ensenanza de Las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (S. A. de E. M. Thales, Ed.). Sevilla.

Planas, N. (2010). Las Teorías Socioculturales en la Investigación en Educación Matemática: Reflexiones y Datos Bibliométricos. In A. Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163–195). Lleida: Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.164.

Recio Martinez, A. (2001). La demostración en matemática. una aproximación epistemológica y didáctica. In U. de Cordoba (Ed.), *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Cordoba.

Schoenfeld, a H., & Godino, J. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática. *Notices of the American Mathematical Society*, *47*(3), 641–649.

Senk, S. L. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher*, *78*, 448 – 456.

Sua, F. J. C. (2013). *Acciones del Profesor que Promueven la Actividad Demostrativa a la Luz de la Práctica Racional (tesis de maestría)*. Pedagógica Nacional. Colombia.

Toulmin, Stephen, E. (2007). *Los Usos de la Argumentación*. (M. Mórras & V. Pineda, Eds.) (Peninsula). Barcelona: (Obra original publicada 2003).

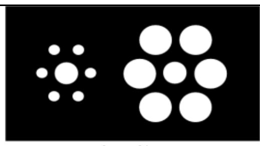
# ANEXOS

## ANÁLISIS DE GRADO OCTAVO

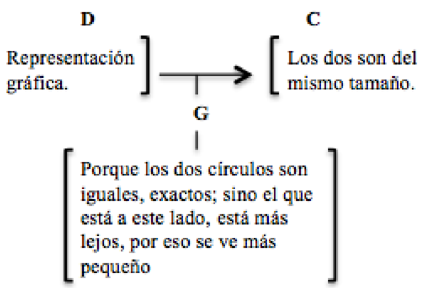
### *T.1. TAREA DE VISUALIZACIÓN*

Inicialmente los argumentos presentados por los estudiantes, se fundamentan en lo que pueden observar en la figuras, dejando de lado las propiedades y relaciones geométricas.

El siguiente fragmento de clase evidencia el momento en el cual se les presenta la siguiente figura a los estudiantes, quienes debían decidir ¿cuál circulo del centro es más grande?.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | P | […] Los dos círculos en el centro, de este y de este [Señala con la mano las dos figuras que están comparando] Entonces quien quiera hablar levanta la mano |  Representación gráfica 27 |
| **2** | **E1** | **Los dos son del mismo tamaño.** | |
| 3 | P | ¿Tú piensas que los dos son del mismo tamaño? | |
| 4 | E1 | Sí profe, ¿puedo decir por qué? | |
| 5 | P | Puedes decir por qué. | |
| **6** | **E1** | **Porque los dos círculos son iguales, exactos; si no el que está a este lado [señala la figura de la derecha] está más lejos, por eso se ve más pequeño.** | |
| 7 | P | Dices que este está más lejos, y por eso se ve más pequeño. | |
| 8 | E1 | Sí. | |
| 9 | P | ¿Y el de allá está más cerca? [Hace referencia a la figura de la izquierda].<br>Bueno, ¿tú qué dices? [Señala a otro estudiante]. | |
| **10** | **E2** | **Pues yo creo que, o sea que ahí ambos se ven iguales, sino que juegan con la mente de uno porque hacen las bolas más grandes para que este se vea pequeño [señala la figura de la derecha], y hacen las bolas más pequeñas para que se vea grande [señala la figura de la izquierda], entonces son iguales.** | |

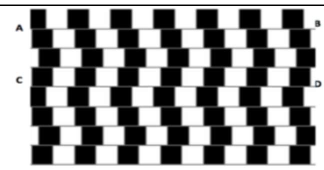
El argumento que E1 realiza es un argumento sustancial con garantía empírica **[PCSd]** (ver esquema 1) en el cual en la conclusión [2], responde a la pregunta y la garantía para validar su respuesta [6], está fundamentada en una observación.




**Esquema 37. Argumento PCSd**

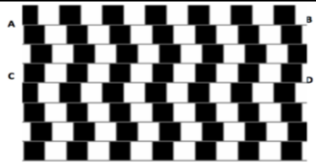
El argumento expuesto por el E2, también es un argumento sustancial con garantía empírica **[PCSd]**, ya que posee conclusión y una garantía fundamentada en la observación y las creencias del estudiante [10].

La figura siguiente y los argumentos que se generaron en torno a esta se muestra en el siguiente momento de clase.

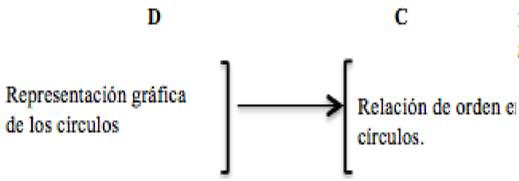
| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | P | […]¿Cuál está más separado *A* y *C* o *B* y *D*? Ubiquémonos qué son. *A* y *C* [los señala con la mano] y *B* y *D* [los señala con la mano], son dos puntos ¿Cuáles estarán más separados? Quien quiera hablar levanta la mano. |  Representación gráfica 28 |
| 16 | **E3** | ***B, D.*** | |
| 17 | P | Tú dices que *B* a *D*, ¿y tú? [señala a otro estudiante]. | |
| **18** | **E1** | ***A* a *C.*** | |
| 19 | E2 | *B* a *D*. | |
| **20** | **E5** | ***A* a *B*** | |
| **21** | **E6** | **Iguales.** | |
| 22 | P | ¿Tú piensas que son iguales? ¿Por qué? | |
| 23 | E6 | [Guarda silencio]. | |
| 24 | P | Tú dices que están más separados *B* y *C* [repitiendo lo que dijo otro estudiante]. Espera ¿*B* a *D*? O ¿*B* a *C*? | |
| 25 | E7 | *B* a *C*. | |
| 26 | P | No porque mira, estamos comparando esta distancia, la distancia que hay de *B* y *D*, esta distancia, y la distancia que hay de *A* a *C*. | |
| 27 | E7 | ¡Ah…! | |
| 28 | P | ¿Entonces? ¿Tú que dices? | |
| **29** | **E8** | ***B* a *D*** | |
| 30 | P | ¿Por qué? | |
| **31** | **E8** | **Porque acá [señala con la mano a la figura] en la mitad está más separado.** | |
| 32 | P | ¿Sí? ¿Tú qué dices? [señala a otra estudiante]. | |
| **33** | **E9** | **Que son iguales, porque ahí se ve que están más salido las del centro [Más corrido hacia la derecha]** | |
| 34 | P | Tú dices que se ve más grande [señala la distancia entre *B* y *D*] porque esto está más salido. ¿Sí? | |
| 35 | E9 | Sí. | |

Para iniciar E1, E3, E5 y E6 presentan argumentos [**PCSa]** en [18, 16, 20 y 21] respectivamente, es decir, argumentos sustanciales sin garantía o respaldo (ver esquema 2), en los cuales los estudiantes exponen su conclusión frente a la pregunta realizada por la profesora pero no presentan garantía para su argumento, a pesar de ser cuestionados por ella, posteriormente los estudiantes E8 y E9 realizan argumentos sustanciales con garantía empírica **[PCSd]**, E8 presenta su argumento [29], para el cual realiza una garantía basa en la observación, E9 presenta un argumento en el que la conclusión difiere de la realizada por E8, pero la garantía ofrecida es la misma.

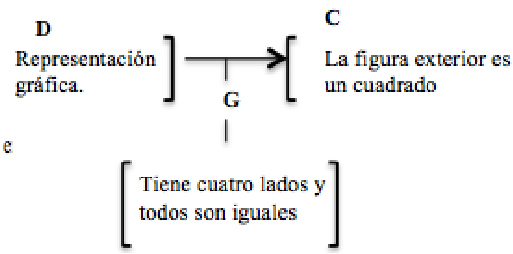
El siguiente fragmento de clase corresponde a la conversación que se desarrollo en torno a la figura de la tercera diapositiva.

| | | |
|---|---|---|
| 15 | P | […]¿Cuál está más separado *A* y *C* o *B* y *D*? Ubiquémonos qué son. *A* y *C* [los señala con la mano] y *B* y *D* [los señala con la mano], son dos puntos ¿Cuáles estarán más separados? Quien quiera hablar levanta la mano.   Representación gráfica 29 |
| 16 | **E3** | ***B, D.*** |
| 17 | P | Tú dices que *B* a *D*, ¿y tú? [señala a otro estudiante]. |
| **18** | **E1** | ***A* a *C*.** |
| 19 | E2 | *B* a *D*. |
| **20** | **E5** | ***A* a *B*** |
| **21** | **E6** | **Iguales.** |
| 22 | P | ¿Tú piensas que son iguales? ¿Por qué? |
| 23 | E6 | [Guarda silencio] |
| 24 | P | Tú dices que están más separados *B* y *C* [repitiendo lo que dijo otro estudiante]. Espera ¿*B* a *D*? O ¿*B* a *C*? |
| 25 | E7 | *B* a *C*. |
| 26 | P | No porque mira, estamos comparando esta distancia, la distancia que hay de *B* y *D*, esta distancia, y la distancia que hay de *A* a *C*. |
| 27 | E7 | ¡Ah…! |
| 28 | P | ¿Entonces? ¿Tú que dices? |
| **29** | **E8** | ***B* a *D*** |
| 30 | P | ¿Por qué? |
| **31** | **E8** | **Porque acá [señala con la mano a la figura] en la mitad está más separado.** |
| 32 | P | ¿Sí? ¿Tú qué dices? [señala a otra estudiante] |
| **33** | **E9** | **Que son iguales, porque ahí se ve que están más salido las del centro [Más corrido hacia la derecha]** |
| 34 | P | Tú dices que se ve más grande [señala la distancia entre *B* y *D*] porque esto está más salido. ¿Sí? |
| 35 | E9 | Sí. |

E1 afirma que la figura de afuera es un cuadrado [38] y para ello presenta una garantía teórica [44] y [46], aludiendo a propiedades del cuadrado, pero estas no son suficientes y necesarias para garantizar que la figura sea un cuadrado, es decir plantea aun argumento sustancial en el que la garantía no justifica el paso de los datos a la conclusión un **[PDSi]** (ver esquema 3)



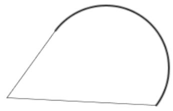

**Esquema 38. Argumento PCSa**




**Esquema 39. Argumento PDSi**

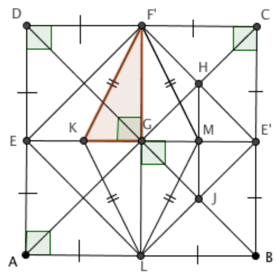
Otro argumento relacionado con la figura en discusión, es el de E10 quien también sostiene que la figura es un cuadrado [48], pero acude a lo que él ve, para proponer una garantía [50] y un respaldo empírico[54], por tanto realiza un argumento sustancial con respaldo empírico **[PCSe],** E11 quien proporciona una conclusión [56], que contradice los argumentos anteriores y realiza una garantía empírica [58], basada en lo que él observa, presenta un argumento de tipo **[PCSd]**.

La siguiente figura que se analiza es una composición de polígonos en torno a la cual surgió la siguiente intervención, con el fin de aclarar que es un polígono.

| | | |
|---|---|---|
| 60 | P | [Se dirige al tablero y realiza un contraejemplo de polígono] .<br>¿Este es un polígono?  Representación gráfica 30 |
| **61** | **E7** | **Nooooo. Esa figura no es un polígono.** |
| 62 | P | ¿Por qué no es un polígono? |
| **63** | **E7** | **Porque no todas sus líneas son rectas.** |
| 64 | P | Porque no todas sus líneas son rectas. O Sea que no es un polígono, entonces ¿qué es un polígono? |
| **65** | **E7** | **Los lados, hay uno que no cumple.** |

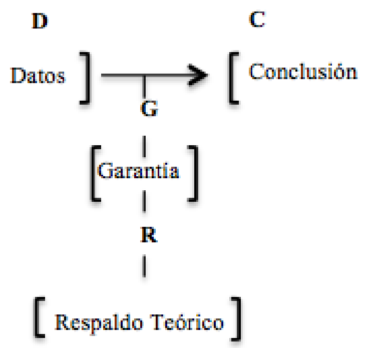
En torno a esta discusión surge el argumento analítico en el que se evidencia tanto la garantía como el respaldo [**PCSe]**, E7 quien plantea su conclusión [60], una garantía [63] y como respaldo empírico lo observado en la representación gráfica 4 [65].

Observemos ahora la intervención realizada acerca de la composición de polígonos que se abordo dentro de esta tarea de visualización.

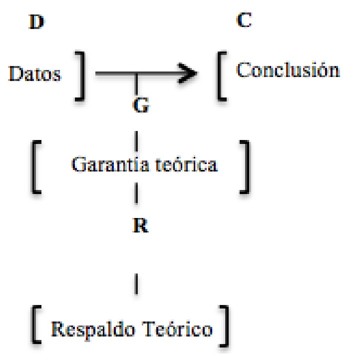
| | | |
|---|---|---|
| 80 | E8: | […]Este triángulo, otro triángulo, en todas las esquinas hay triángulos [señala nuevamente con la regla].   Representación gráfica 31 |
| 81 | P | En todas las esquinas hay triángulos, bien. |
| 82 | P | ¿Y qué podemos decir de los triángulos? Por ejemplo, de este triángulo que vemos acá y este triángulo [señala los dos triángulos de la parte superior]. |
| **83** | **E13** | **Son iguales esos triángulos.** |
| 84 | P | Ah bueno. Tú dices que son iguales, ¿por qué son iguales? |
| **85** | **E13** | **Porque es un cuadrado y lo partieron por la mitad y tienen la mismas medidas.** |
| **86** | **E10** | **El polígono grande es un cuadrado por que las esquina miden noventa grados.** |
| 87 | P | E13 dice que es un cuadrado. ¿Hay algo que nos garantice que esa figura es un cuadrado?<br>¡Ay! Miren lo que dice E10. Tú dices que es un cuadrado porque… |
| **88** | **E10** | **Porque las esquinas miden noventa grados.** |
| 89 | P | ¿Cómo se llaman esas esquinan? |
| 90 | E | Vértices. |
| 91 | P | Estos punticos se llaman vértices, pero esto ¿cómo se llama? [Señala el ángulo del cuadrado]. |
| 92 | E14 | Ángulos. |
| 93 | P | Tú dices [Oscar] que todos los ángulos tienen noventa grados, pero ¿qué nos garantiza en esta figura que todos los ángulos tienen noventa grados? |
| **94** | **E10** | **Por los cuadritos verdes.** |
| 95 | P | Listo, vamos con la primera parte. ¿Será suficiente que un cuadrilátero tenga ángulos de noventa grados para decir que es un cuadrado? |
| 96 | E11 | [señala con la regla tres triángulos rectángulos más, al señalar el siguiente triángulo la profesora lo interrumpe]. |
| 97 | P | Ah pero espera, ¿tú me dices que este es triángulo rectángulo? (refiriendose al triángulo sombreado en la figura]. |
| **98** | **E11** | **Sí ese triángulo es rectángulo.** |
| 99 | P | ¿Podríamos garantizar que es rectángulo o no es rectángulo el triángulo? (refiriendose al triangulo sombreado]. |
| 100 | E11 | Sí. |
| 101 | P | ¿Por qué? [señala a un estudiante]. |

| | | |
|---|---|---|
| **102** | **E11** | **Porque el ángulo mide noventa grados, [se refiere a $\angle F'GK$]** |
| 103 | P | Bueno, pero ¿por qué tu dices que este [señala el ángulo del triángulo] también mide noventa? |
| **104** | **E11** | **Porque hay como un cuadrado.** |

El E13 realiza un argumento sustancial con garantía empírica [**PCSd],** él determina que los cuatro triángulos de las esquinas del cuadrado son iguales [83] y proporciona una garantía empírica que parte de la observación realizada en la figura [85], De otro lado E10 realiza otro argumento en el cual se tiene la conclusión y para ella plantea una garantía teórica [86], que no garantiza el paso de los datos a la conclusión y respalda esta garantía con la notación presente en la figura [94], es decir uno argumento sustancial con respaldo teórico [**PCSc]** (ver esquema 4). E11 realiza un argumento analítico en el que se observa tanto la garantía como el respaldo **PJAc** (ver esquema 5) en el cual plantea una conclusión [98], una garantía [102] y un respaldo teórico [104], con base en lo observado.




**Esquema 40. Argumento PCSc**




**Esquema 41. Argumento PJAc**

### *T.2. TAREA DEL PAR LINEAL*

Esta tarea tiene como objetivo, permitir a los estudiantes la construcción de la *D. Ángulos par lineal, el HG. Par lineal, El HG. Par lineal - recto* elementos del sistema teórico local, para ello se plantean tres problemas abiertos, que promueven la discusión, situación que favorece la producción de argumentos.

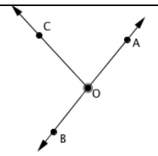
### *T2. P1. (DEFINICIÓN DE ÁNGULO PAR LINEAL)*

En este sección se presentan a los estudiantes representaciones gráficas de ángulos que son par lineal y de ángulos que no lo son, ellos deben identificar mediante observación particularidades que cumple el conjunto de ángulos par lineal que no cumplen el otro conjunto de ángulos, para construir posteriormente la *D. Ángulos par lineal*.

En trabajo grupal, los argumentos que producen los estudiantes en torno a este elemento teórico, se apoyan inicialmente, en los dos conjuntos de ángulos dados (datos de los argumentos).

*Grupo 1*

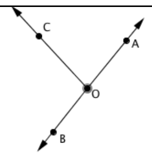
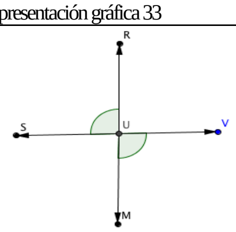
El trabajo realizado por este grupo se enfoca en analizar y comparar las representaciones gráficas planteadas, para determinar qué son ángulos par lineal.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | Ustedes tienen que son par lineal, ¿por qué son par lineal? |
| **2** | **E1** | **Porque dos ángulos par lineal, cuando son adyacentes y se intersecan.** |
| 3 | P | ¿Se intersecan? Bueno, vamos a mirar lo siguiente; […] estos son par lineal [señala la parte izquierda de la hoja], y esto no son par lineal [señala la parte derecha de la hoja]. A demás de ser adyacentes ¿qué características cumplen estos [señala los ángulos par lineal] que no tiene estos [señala los ángulos no par lineal]? |
| **4** | **E2** | **Que se intersecan.** |
| **5** | **E3** | **Que tiene una línea recta ¿no? Estos tienen una línea recta [señala los ángulos par lineal] y estos no.** |
| 6 | P | Entonces, ¿qué otra condición de cumplir? |
| 7 | E2 | Debe tener una línea ¿recta? |
| 8 | P | Bueno, tenemos que se forma una línea recta. Una línea recta ¿por qué está formada? |
| **9** | **E3** | **Rayos.** |
| 10 | P | ¿Cuántos rayos?, ¿entonces completo como quedaría? |
| **11** | **E3** | **Dos.** |
| 12 | P | ¿Cuáles? |
| **13** | **E3** | **Acá uno y acá el otro [señalando con su dedo el $\overrightarrow{OB}$ y el $\overrightarrow{OA}$]** |
| 14 | P | Ah entonces hay dos rayos, ¿cómo quedaría la definición, completa?   Representación gráfica 32 |
| **15** | **E1** | **Los ángulos parlineal tienen una recta, formada por dos rayos.** |
| 16 | P | Una recta, ¿cierto? Y, ¿qué pasa con el otro rayo? |
| 17 | E4 | Forma un ángulo. |
| 18 | P | Bueno, forma un ángulo, pero ¿qué podemos decir? ¿Esto qué es? [Señala $\overrightarrow{OC}$]. |
| **19** | **E1** | **Eso es un rayo, ¿no? [Se refiere a $\overrightarrow{OC}$]** |
| 20 | P | Un rayo, ¿cierto?o sea, ¿qué tiene de especial este rayo [señala el $\overrightarrow{OC}$] respecto a los ángulos? |
| **21** | **E4** | **Que un rayo [Se refiere a $\overrightarrow{OC}$] forma dos ángulos.** |
| 22 | P | ¿Un rayo forma los dos ángulos? ¿Cómo lo podemos decir mejor? |
| **23** | **E4** | **Que este rayo [se refiere a $\overrightarrow{OC}$] forma aquí un ángulo y aquí el otro ángulo[señala $\angle BOC$ y $\angle AOC$].** |
| **24** | **E1** | Acá también, terminan en punta. **Yo creería que para ser par lineal debe tener dos ángulos**, ¿no? |

Los estudiantes E1, E2 y E3 proponen tres argumentos sustanciales sin garantía o respaldo [**GCSa]** en [2, 4 y 5] respectivamente, en los cuales se evidencia únicamente la conclusión obtenida a partir de los datos sin ninguna garantía, E3 plantea un argumento sustancial **[GCSd]** en el cual la concluye que los ángulos par lineal están formados por dos rayos opuestos [9 y 11] y plantea una garantía empírica al mostrar lo que observa en la representación gráfica [13]. Otro argumento **[GDSa]** realizado por E3 es en el que concluye que en los ángulos par lineal se observa una recta formada por dos rayos [15], pero no presenta garantía o respaldo alguno, E1 plantea otro argumento de esté tipo [19] al concluir que $\overrightarrow{OC}$ es un rayo. E4 plantea un argumento sustancial **[GCSd]**, una conclusión "un rayo forma dos ángulos" [21] y una garantía empírica cuando señala los ángulos que forma [23], finalmente E1 manifiesta que dos ángulos forman los par lineal [24], sin garantía o respaldo alguno, es decir un argumento sustancial **[GDSd].**

*Grupo 2*

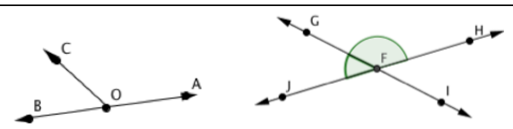
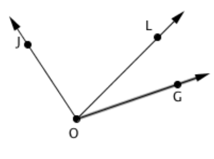
Los argumentos de los estudiantes en está conversación surgen de la observación de las diferentes representaciones gráficas de los ángulos par lineal y los no par lineal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | P | ¿Qué es par lineal? [Conversa con un nuevo grupo de estudiantes] | |
| **2** | **E5** | **Siempre están unidos por un vértice, sus líneas son infinitas, no tienen comienzo ni fin.** | |
| 3 | P | Bueno, miremos la primera parte. Siempre están unidos por un vértice. ¿A qué se refieren con eso? ¿Qué más ven? | |
| **4** | **E6** | **Que está compuesto por varios rayos.** | |
| 5 | P | ¿Cuántos? | |
| **6** | **E6** | **Tres. […]Este, este y este [señala el rayo $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y el rayo $\overrightarrow{OA}$, respectivamente].** |   Representación gráfica 33 |
| 7 | P | Entonces tenemos que hay dos ángulos y vamos a decir por qué son par lineal. Ustedes decían que están unidos por un vértice; miremos acá [señala los contra ejemplos]. Nos dicen que estos no son par lineal, pero ¿estos están unidos por un vértice? |   Representación gráfica 34 |
| 8 | E | ¡sí! | |
| 9 | P | Y no son par lineal, entonces no es una condición necesaria, que estén unidos por un vértice. Ah, estos están unidos, ¿Y cómo están unidos estos ángulos? [se refiere a los ángulos par lineal $\angle BOC$ y $\angle AOC$, representación gráfica 7]. | |
| 10 | E5 | Por el vértice. | |
| 11 | P | ¿Solo por el vértice?<br>Ya vimos que no nos sirve solo el vértice. Miremos este de acá $\angle SUR$ y $\angle MUV$ [Se refier a la figura en la intervención 7].<br>¿Por qué será que los dos ángulos marcados no son par lineal? | |
| **12** | **E5** | **Porque no tiene la misma medida.** | |
| **13** | **E6** | **Porque no comparten la letra y el vértice.** | |
| 14 | P | Pero mira que si, ¿este vértice es común a los dos? [Señala el punto *U*].<br>Pero, ¿qué comparten estos dos, [señala los dos ejemplos de ángulos par lineal], que no comparten estos dos [señala los dos ángulos opuestos por el vértice, $\angle SUR$ y $\angle MUV$]. | |
| 15 | E6 | Un lado. | |
| 16 | P | Un lado, ¿cierto? Entonces ya tenemos otra condición. Son par lineal ¿si qué? | |
| **17** | **E6** | **Sí comparten un lado.** | |
| **18** | **P** | **Sí, comparten un lado, ¿cómo se llama ese lado?** | |
| **19** | **E6** | **Rayo C.** | |
| | P | Bueno, ¿quién más ya escribió algo? [Se dirige a todos los grupos de trabajo]. | |

Los argumentos generados por los estudiantes E5 y E6 [2 y 4] se caracteriza por una conclusión obtenida, de la observación de los datos por parte de los estudiantes, es decir, argumentos sustanciales sin garantía o respaldo **[GDSa],** E6 realiza un argumento sustancial **[GDSd]** en el cual plantea que los ángulos par lineal están compuestos por varios rayos [4] y presenta una garantía empírica [6]. Los datos de los dos argumentos que se realizaron posteriormente, corresponden a la representación gráfica 8 y fueron generados para responder a la pregunta ¿por qué los ángulos marcados no son par lineal? [11], E5 asumen como conclusión que $\angle SUR$ y $\angle MUV$ no son par lineal y proporciona una garantía [12] que no justifica el paso de los datos a la conclusión, es decir un argumento sustancial [**GCSi]**, en cuanto a E6 realiza también realiza un argumento **[GCSi]** en el cual la conclusión es la misma de E5, pero la garantía propuesta por él [13] tampoco permite validar el paso de los datos a la conclusión. Otro argumento de E6, en el cual los datos que tiene en cuenta, son las representaciones gráficas de ángulos par lineal, a partir de los cuales plantea su conclusión [17 y 19] pero no realiza una garantía para validar el paso de los datos a la conclusión, es decir hace un argumento [**GDSa]**.

*Grupo 3*

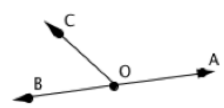
Los argumentos que surgen en está conversación se fundamentan en las observaciones realizadas por los estudiantes sobres las diferentes representaciones gráficas de los ángulos, como en los grupos anteriores.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | P | [Se encuentra con un nuevo grupo de trabajo]. Bueno, ¿ustedes a qué llegaron? [Respecto a qué son ángulos par lineal] | |
| 2 | **E7** | **Es cuando tiene un vértice en común, el vértice sería casi en la mitad [señalando la $\overleftrightarrow{AB}$] Por qué ¿si ve que aquí hay una línea como en la mitad? [señala el segundo ejemplo de ángulos par lineal]** |   R<br>epresentación gráfica 35 |
| 3 | P | Listo, esos dos son par lineal. Entonces ahora si, ¿a qué llegaron ustedes? Cuando comparten un vértice, ¿qué más? | |
| **4** | **E7** | **Tiene un vértice en común y tienen tres lados.** | |
| 5 | P | Bueno, ¿y cómo llamamos esos lados de un ángulo?<br>Por ejemplo este, ¿cómo se llama este objeto geométrico? [señala $\overrightarrow{OC}$]. | |
| **6** | **E7** | **Un rayo. Ah este es un rayo en común. [señala $\overrightarrow{OC}$].** | |
| 7 | P | Sí.<br>Ahora miremos este [señala un contraejemplo].<br>Este, ¿tiene un rayo en común? |   Representación gráfica 36 |
| 8 | E7 | Sí. | |
| 9 | P | Entonces ahí tenemos un rayo en común, ¿cuál sería el rayo en común? | |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | E7 | $\overrightarrow{OL}$. |
| 11 | P | $\overrightarrow{OL}$, ¿cierto?<br>Bueno tienen un rayo en común, pero debe haber otra condición para que sea par lineal. Por ejemplo qué diferencia hay entre estos ángulos y estos de acá [comparación entre los ángulos $\angle HFI\ y\ \angle HFG$ [par lineal] y los ángulos $\angle JOL\ y\ \angle LOG$ [no par lineal]] |
| 12 | E9 | Mmm ya sé. |
| 13 | P | ¿Qué? |
| **14** | **E9** | **Que este es llano [recta AB, ejemplo 1] y estos no son llano [contraejemplo de ángulos $\angle \boldsymbol{JOL}\ \boldsymbol{y}\ \angle \boldsymbol{LOG}$]** |
| 15 | P | Ah, tú hablas de llanos. ¿A qué te refieres que sea llano? |
| **16** | **E9** | **Es una recta.** |
| 17 | P | Ah, o sea ¿qué pasa […] [la interrumpe un estudiante]. |
| **18** | **E9** | **Porque este no es recta [hace referencia a los $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{OJ}}$ del contraejemplo]** |
| 19 | P | ¿Y esos dos rayos que forman? [Se refiere a $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{OB}$]. |
| 20 | E7 | Una recta. |
| 21 | P | Una recta, o sea que los otros dos rayos, ¿qué forman? [hace referencia a los $\overrightarrow{OG}$ y $\overrightarrow{OJ}$ del contra ejemplo] |
| 22 | E8 | Es que esta recta está partida, no es recta. |

Los argumentos generados por este grupo de estudiantes se caracterizan por el uso de un vocabulario no matemático, El E7 plantea en su conclusión [2] que los par lineal tienen un vértice en común y utiliza como garantía lo que observa en la gráfica, es decir un argumento **[GDSd]**, posteriormente en [4 y 6], el estudiante cambia su argumento, ya que observa que los ángulos par lineal no comparten sólo un vértice sino un rayo a demás agrega que son los que tienen tres lados, pero no presenta una garantía por lo tanto es **[GDSa].** E9 [14] genera un argumento en el que tiene en cuenta dos aspectos, cuando un ángulo es par lineal y cuando no, relacionándolos con llano y no llano, para justificar crea dos garantías [16 y 18], que no justifican el paso de los datos a la conclusión, por el uso incorrecto de las expresiones llano y recta, por lo tanto este es un argumento **[GCSi].**

El siguiente intervención corresponde al momento de la puesta en común realizada en el marco de la *D. Par lineal.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | P | [Inicio de otra sesión de clase]<br>La clase pasada nosotros estábamos trabajando, mirando cómo definíamos ángulos par lineal y alguno ya habían dado su definición.<br>Entonces, si yo tengo dos ángulos $\angle ACB$ y $\angle BCD$<br>Ustedes trabajaron en las hojas y dieron algunas conclusiones para esos ángulos, entonces ¿qué conclusiones tienen? | <br>Representación gráfica 37 |
| **2** | **E1** | **Los par lineal comparten un lado.** | |
| 3 | P | Entonces una condición, comparte un rayo, ¿qué otra condición debemos tener para que sean par lineal? | |

| | | |
|---|---|---|
| | | Ya tenemos que comparten un rayo, en este caso el $\overrightarrow{OC}$. Ahora ¿qué pasa con los otros dos rayos?, ¿qué pasa con los rayos $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$? |
| 4 | E1 | Que van en diferente [realiza con las manos un movimiento opuesto]. |
| 5 | P | Que van en diferentes direcciones y ¿qué forman? |
| **6** | **E3** | **Esos son rayos opuestos y forman una recta porque estan en diferentes direcciones y son infinitos.** |
| 7 | P | Entonces otra condición, los otros dos rayos son opuestos forman una recta. ¿Nos falta alguna otra condición? ¿cuántos ángulos estábamos comparando para ser par lineal? |
| 8 | E3 | Dos. |
| 9 | P | ¿Cuáles eran los dos rayos? Miren que aquí los nombrábamos, $\angle ACB$ y $\angle BCD$ acuérdense que los ángulos siempre los nombramos dejando el vértice en el centro. Dos ángulos son par lineal ¿si qué? |
| **10** | **E1** | **Son par lineal si comparten un rayo y forman una recta.** |
| 11 | P | Bien. Los ángulos, pero escribámoslo simbolicamente. ¿Alguien quiere pasa a escribirlos?]. |
| 12 | E2 | Yo. |
| 13 | P | Pasa. |
| 14 | E2 | [Se levante del pupitre y se dirige al tablero]. Los $\angle ACB$ y $\angle BCD$ |
| 15 | P | Bueno, ¿qué vamos a decir de esos ángulos? |
| **16** | **E2** | **Los $\angle ACB$ y $\angle BCD$ son dos ángulos par lineal si comparten un rayo y los otros dos rayos son opuestos y forman una recta.** |

En la puesta en común es posible observar dos argumentos del E1 [2 y 10] y para los cuales no presenta ninguna garantía, o sea argumentos **[PDSa],** E3 [6] plantea una conclusión la cual valida mediante una garantía que se fundamenta en los resultados obtenidos en el trabajo en grupo y en lo que el puede observar, es decir plantea un argumento **[PDSd],** finalmente el argumento de E2, mediante el cual establece la *D. Ángulos par lineal* [16], tampoco posee garantía por lo tanto es **[PDSa].**

***T.2.P.2. (HECHO GEOMÉTRICO PAR LINEAL )***

El objetivo de esta tarea es el permitir a los estudiantes construir otro de los elementos del sistema teórico local, el *HG. Par lineal*, para ello inicialmente la profesora presenta la actividad y entrega a los estudiantes el material concreto (ángulos en foamy de diferentes medidas) con el cual van a trabajar, quienes se organizan en los grupos de la clase anterior.

Los datos de los argumentos que se generan entorno a esta conversación, se apoyan en la diferentes parejas que armaron los estudiantes y la *D. Ángulos par lineal*.

*Grupo 1*

En el trabajo de este grupo de puede observar que usan los elementos teóricos trabajados en clases anteriores, para conseguir el propósito de la tarea.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | […] ¿han conseguido alguna pareja de ángulos par lineal? |
| **2** | **E1** | **Esta pareja [refiriendose al arreglo que realizo, un ángulo de cuarenta y cinco y uno de ciento treinta y cinco]** |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | P | Entonces miremos la conclusión, ¿por qué son par lineal? |
| **4** | **E1** | **Este es el rayo común [señalándolo en la pareja de ángulos par lineal].** |
| **5** | **P** | **Y ¿qué más?** |
| **6** | **E1** | **Tienen direcciones opuestas, tiene rayos opuestos.** |
| 7 | P | Son rayos en direcciones opuestas. ¿qué medida tienen esos ángulos?, este es de [señalando uno de los ángulos] |
| 8 | E2 | Cuarenta y cinco. |
| 9 | P | ¿y este? |
| 10 | E2 | Ciento treinta y cinco. |

E1 realiza un argumento en el que plantea su conclusión [2], dos ángulos que miden cuarenta y cinco y ciento treinta y cinco son par lineal y para validar el paso de los datos a la conclusión ofrece un respaldo fundamentado en la *D. Ángulos par lineal* [4 y 6], es decir este es un argumento analítico que se fundamenta en el primer elemento del sistema teórico local estudiado un [**GJAa]** (ver esquema 7)

*Grupo 2*

El dialogo que se presenta de este grupo también se fundamenta en el análisis de casos particulares de ángulos par lineal escogidos por ellos.

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **E1** | **[Organiza una pareja de ángulos] ciento cinco y noventa y cinco.** |
| 2 | P | Ciento cinco y noventa y cinco, miremos si cumplen las dos condiciones, miremos |
| **3** | **E1** | **Sí porque comparten un rayo y esta conformado por una recta.** |
| 4 | P | ¿Tu estas segura que esta es una recta? |
| 5 | E1 | Pues profe, si nos sale mal. Entonces no es. |
| 6 | P | No no son cierto. |
| 7 | E1 | ¿Y el otro? |
| 8 | P | ¿Cuál otro tenían? |
| **9** | **E2** | **Ciento quince y sesenta y cinco.** |
| 10 | E | No lo arme todavía. |
| 11 | V | Organizan los ángulos. |
| 12 | P | ¿Son o no son? |
| **13** | **E2** | **Si son par lineal y este si cumple las condiciones para ser par lineal.** |
| 14 | P | Si a bueno, entonces como son anótelos ahí, busquen más (cambia de grupo). |

E1 para realizar su argumento tiene como datos dos ángulos que miden ciento cinco y noventa y cinco [1], de los cuales él concluye que son par lineales y proporciona una garantía teórica [3 ], en la cual alude a la *D. Ángulos par lineal,* que permite invalidar la conclusión dada por el estudiante, teniendo en cuenta los componente y sus características este es un argumento **[GJSb]**, también se presenta el argumento de E2, en el cual nuevamente se parte de una pareja de ángulos [9] datos para los que proporciona una conclusión y una garantía teórica [13], luego es un **[GJSb]**.

*Grupo 3*

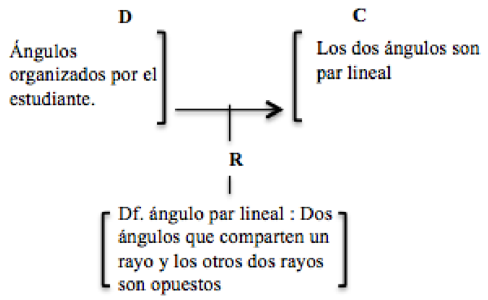
En la conversación con los estudiantes de este grupo de observa que ellos no solo usaron la *D. Par lineal* si no que también obtuvieron otras conclusiones a partir de las medidas de las parejas de ángulos.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | Bueno, no todos les dieron, ¿cuáles tienen? |
| **2** | **E1** | Este, este, este y este.<br><br>Ilustración 20 |
| 3 | P | ¿Son o no son par lineal, por qué son par lineal? |
| **4** | **E1** | **Porque dos rayos son opuestos, un rayo es común, porque la suma de sus ángulos es ciento ochenta.** |
| 5 | P | Ah ¿Todos los que eran par lineal te dieron ciento ochenta? |
| 6 | E1 | Sí. |
| 7 | P | Ah, bien y entonces aquí donde dice, observa la propiedad común para las parejas ¿qué podemos decir de esas parejas de ángulos?, además de ser par lineal. |
| 10 | E1 | Que los dos median, ah la suma de los dos es ciento ochenta. |
| 11 | P | ¿La suma de los dos que? |
| 12 | E1 | Umm, la medida. |
| 13 | P | La medida, entonces, ¿cómo nos quedaría mejor la conclusión? |
| **14** | **E1** | **La suma de las dos medidas da ciento ochenta, de los ángulos que conforman el par lineal.** |

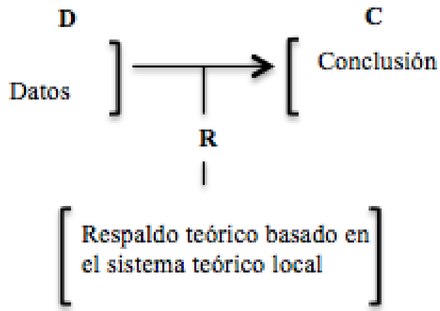
E1 para realizar su argumento usa como datos tres parejas de ángulos que ha construido [2], posteriormente en la intervención asume como conclusión que las tres parejas son parejas par lineal y proporciona la garantía del argumento [4] en la que alude a la *D. Par lineal* y a la suma de las mediadas de cada pareja de ángulos, es decir hay información que no es necesaria en el argumento, teniendo en cuenta lo anterior este es un argumento **[GJSb]**. Luego este estudiante presenta otra conclusión [14], partiendo de las configuraciones de ángulos y la *D. Ángulos par lineal*, es decir, un argumento **GJSa**.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | Bien, ¿qué conclusión sacamos?, ¿qué podemos observar de cada pareja? |
| **2** | **E1** | **Que al sumar los dos ángulos da ciento ochenta porqué son par lineal.** |
| 3 | P | ¿Qué al sumar qué? |
| 4 | E2 | Los dos ángulos. |
| 5 | P | ¿Los ángulos o que de los ángulos? |
| **6** | **E2** | **Las medidas de los ángulos da ciento ochenta.** |
| 7 | P | ¿De los ángulos qué? |
| 8 | E2 | Par lineal. |
| 9 | P | Par lineal, dilo completo. |
| **10** | **E2** | **La suma de la medida de dos ángulos par lineal es ciento ochenta.** |
| 11 | P | La suma es ciento ochenta, concluyen en las hojitas y dejamos ahí para la próxima clase. |

En la puesta en común de este curso se obtienen dos argumentos el primero de E1 realiza un argumento **[PJAa]**, en el cual a partir de los datos de la tabla en el tablero obtiene una conclusión y una garantía teórica basada en la *HG. Par lineal* [2], el (ver esquema 8)**,** E6 hace un argumento **[PCSa]** [6], en el cual solo presenta su conclusión, que perfecciona hasta llegar a la conclusión [10], que hace referencia al *HG. Par lineal.*




Esquema 42. Argumento GJAa




Esquema 43. Argumento PJAa

### *T.3.P.3. HG. PAR LINEAL - RECTO*

El objetivo de está tarea es el de conjeturar y demostrar el *HG. Par lineal - recto* e introducir al estudiante en la AD usando la tabla a tres columna (¿qué se?, ¿qué uso? y ¿qué concluyo?) Propuesta, por grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría *Æ.G,* de la Universidad Pedagógica Nacional. Para ello inicialmente la profesora lee y explica la actividad y luego los estudiantes trabajan en grupo.

Los argumentos realizados por los estudiantes, en el trabajo grupal, durante esta conversación se apoyan en la información de la actividad (Dos ángulos par lineal y uno de ellos es recto).

*Grupo 1*

En el desarrollo de esta conversación se observa que los estudiantes tienen en cuenta el HG. Par lineal.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | Si en dos ángulos par lineal, uno de ellos es recto, ¿qué pasaba con el otro? |
| **2** | **E1** | **Es recto.** |
| 3 | P | También es recto, ¿por qué? |
| **4** | **E** | **Porque la suma de dos ángulos par lineales da ciento ochenta, la suma de las medidas.** |

El argumento que presenta el estudiante es de tipo **[GJAa]**, ya que se evidencia una conclusión [2] frente a los datos y esta es respaldada teóricamente mediante un elemento ya construido en el sistema teórico local [4].

*Grupo 2*

En esta conversación los estudiantes tienen en cuenta los diferentes elementos teóricos locales para determinar el *HG. Par lineal – recto.*

| | | |
|---|---|---|
| 6 | P | [Se dirige a otro grupo] ¿A qué conclusión llegaron? |
| **7** | **E1** | **Profe como tenemos dos angulos par lineal y uno recto, el otro es recto.** |
| 8 | P | Eso es lo que nos dan, pero ¿por qué dices que el otro tambien es recto? |
| **9** | **E1** | **Como antes vimos que dos ángulos par lineal suman ciento ochenta, el otro es recto** |
| 10 | P | ¿Ustedes que opinan? |
| **11** | **E2** | **Sí, el otro ángulo es de noventa** |
| 12 | P | ¿Por qué? |

| | | |
|---|---|---|
| **13** | **E3** | **Si el otro ángulo no fuera de noventa, si es mayor o menor no formarían una recta y entonces no serian angulos par lineal, pero tienen que ser par lineal por que ahí dice que son par lineal.** |
| **14** | **E1** | **Mire profe, porque un angulo recto mide noventa grados y como al sumar los ángulos par lineal de ciento ochenta, noventa más noventa es ciento ochenta.** |
| 15 | P | Escribanlo. [se dirige a otro grupo] |

En este grupo E1 identifica los datos de su argumento (parte subrayada) [7], allí mismo el estudiante plantea su condición, en este momento desprovista de garantía por tanto es un [GCSa], argumento que después completa el estudiante [9], anexando como respaldo *HG. Par lineal*, lo que determina un argumento [GJAa], posteriormente E2 también plantea un argumento [11], en el cual manifiesta su conclusión frente a los datos, sin garantía o respaldo alguno, por lo tanto es un [GCSa], E3 realiza un argumento [13], en el cual la conclusión coincide con la planteada E2 anteriormente, pero en su razonamiento contempla la posibilidad de que el ángulo tuviera una medida diferente de noventa, lo cual contradice uno de los datos planteados inicialmente, ya que no cumple con las condiciones de ángulos par lineal, por tanto el otro ángulo debe ser de noventa, es decir un [GJSc], finalmente E1 realiza un argumento [GCAa] [14], el cual pasa a ser parte de los datos de su argumento original, a demás agrega una garantía teórica, lo que determina un argumento [GJAc].

En la puesta en común en el marco de este diálogo, los estudiantes se apoyan en que se tienen dos ángulos par lineal y que uno de ellos es recto, estos son los datos de los argumentos que ellos realizaran.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | Recuerdan la tercera pregunta que tenían en el taller del otro día, decía que en dos ángulos par, el $\angle ABC\ y\ \angle CBD$ y si uno de ellos es recto, ¿qué pasaba con el otro?. |
| **2** | **E1** | **Es recto.** |
| 3 | P | Entonces, vamos a demostrar eso pero lo vamos a demostrarlo paso por paso, entonces, vamos atener en cuenta tres columnas la primera es ¿qué se?, ¿qué uso? Y ¿qué concluyo?, En ¿qué se? es lo que tenemos lo que conocemos, ¿en este momento que conocemos?, ¿tenemos cuántos ángulos? |
| 4 | E | Dos. |
| 5 | P | […]¿Qué tienen de especial esos dos ángulos? |
| 6 | E2 | Que son par lineal |
| 7 | P | Son par lineal, entonces, [escribe en el tablero] $\angle ABC\ y\ \angle CBD$ son par lineal, ¿si son par lineal qué puedo decir de esos dos ángulos? |
| 8 | E2 | Miden ciento ochenta. |
| 9 | P | ¿Qué mide ciento ochenta de esos ángulos? |
| **10** | **E2** | **¿La medida de los dos ángulos?, la suma de la medida de los dos ángulos es ciento ochenta.** |
| 11 | P | La suma de la medida de los dos ángulos, cierto y ¿para decir eso que nos sirve?, ¿qué vimos nosotros?, ¿qué nos permitía decir que la suma de la medida de dos ángulos par lineal es ciento ochenta?, a eso le colocamos un nombre, ¿qué nombre le colocamos?¿cómo lo llamábamos?. |
| 12 | E | ¿A qué? |
| 13 | P | A lo que decíamos que suma de la medida de dos ángulos par lineal es ciento ochenta. |
| **14** | **E3** | **Adyacentes, porque la suma de los adyacentes es ciento ochenta.** |

El primer argumento que se genera es un **PCSa** [2], ya que se presenta únicamente una conclusión a partir de los datos, luego este mismo estudiante a partir de estos datos [10] concluye, el *HG. Par lineal*, el cual se había trabajado en unas clase anteriores, pero nuevamente no presenta garantía alguna para su argumento por lo tanto realiza un [**PJSa],** este argumento inmediatamente entra a ser parte de los datos para el argumento que genera E3 [14], en el cual plantea la conclusión y la garantía teórica respectiva, es decir un **[PCSb].**

En la siguiente conversación de la puesta en común se presenta los argumentos que se analizan a continuación.

| | | |
|---|---|---|
| 15 | P | Pues son adyacentes pero no en este momento no, eso que utilizamos lo llamamos hecho geométrico, a ese hecho geométrico ¿qué nombre le pusimos?, porque hay muchos hechos geométricos. |
| 16 | E2 | Hecho geométrico par lineal. |
| 17 | P | Hecho geométrico par lineal [lo escribe en el tablero en la columna de qué uso] por ese hecho geométrico par lineal ¿qué es lo qué puedo decir? |
| 18 | E4 | Que la medida de suma de los dos ángulos es ciento ochenta |
| 19 | P | ¿De qué ángulo? |
| 20 | E | De $\angle ABC$ y $\angle CBD$ |
| 21 | P | [La profesora continúa, escribiendo en el tablero] $m\angle ABC + m\angle CBD$= 180, listo ahora esta es la primera parte, a demás de esto [señala la primera columna] ¿que sé de lo que me han dado acá? [Señala la conjetura], que los dos ángulos son par lineal y ¿qué mas sé de esos ángulos? |
| **22** | **E2** | **Uno es recto [refiriendose a $\angle CBD$]** |
| 23 | P | Que hay uno que es recto ¿cuál? |
| 24 | E5 | CBD |
| 25 | P | $\angle CBD$ es recto, eso es otra cosa que sé [lo escribe en el tablero], si el $\angle CBD$ es recto ¿qué quiere decir? |
| **26** | **E2** | **Mide noventa grados** |
| 27 | P | ¿Qué nos permite decir que ese ángulo mide noventa grados? |
| **28** | **E2** | **El cuadrito [refiriéndose a la notación de ángulo recto]** |
| 29 | E5 | El hecho geométrico |
| 30 | P | El hecho geométrico no. Bueno en la figura este cuadrito, pero ¿qué nos permite decir que si un ángulo es recto mide noventa grados? |
| 31 | E6 | ¿La clasificación de los ángulos? |
| 32 | P | La clasificación según las medidas. |
| **33** | **E7** | **La definición.** |
| 34 | P | ¿Pero en este caso la definición de qué? |
| **35** | **E7** | **Del ángulo recto.** |
| 36 | P | Que un ángulo que mide exactamente noventa grados es recto, está es la definición pero, entonces, tenemos que el ángulo es recto, ¿por la definición qué podemos decir? |
| 37 | E2 | Que la medida del $m\angle CBD$ es igual a noventa grados. |
| 38 | P | Que la medida del $m\angle CBD$ es igual a noventa, en este momento ¿Qué se?, el HG. Par lineal, la def. de ángulo recto, otras definiciones y además esto que he podido concluir acá, también ya lo se, entonces, [escribe en el tablero en la columna de ¿qué se?] $m\angle ABC + m\angle CBD$= 180 y también se que $m\angle CBD$= 90, de estos dos elementos que se, ¿qué puedo concluir? |
| **39** | **E8** | **Como la suma de los dos ángulos de noventa grados da ciento ochenta, da un par lineal.** |
| 40 | P | Pero aquí nos están dando la medida ¿de cuál ángulo? De $\angle CBD$, de este no tenemos la medida [señala el ángulo $\angle ABC$], todavía, es a lo que tenemos que llegar, debemos determinar cuánto es esta medida y lo debo determinar a partir de lo que se en este momento esto y esto [señalando los dos últimos elementos de la columna de ¿qué se?] . |

| | | |
|---|---|---|
| **41** | **E3** | **Al sumar ciento ochenta, el otro sería de noventa. ¿no profe?** |
| 42 | P | ¿Por qué? |
| **43** | **E3** | **Porque, lo más lógico noventa más noventa ciento ochenta** |

Otro argumento realizado por E2 es un **[PJSi]**, en el cual el estudiante determina de que parte [22], es decir los datos, que concluye [26] y la garantía usada la cual es el significado de cierta notación en la gráfica “el cuadrito” [28], el problema de esta garantía es que reafirma lo que se tiene en los datos (que $\angle CBD$ es recto), pero no justifica el paso de los datos a la conclusión, luego E7 asumen los datos y la conclusión de E2 pero su garantía se fundamenta en la D. de ángulo recto [33] y [35],es decir, un argumento **[PJAa].**

E8 plantea un argumento **[PCSa]** [39], en el cual parte de unos datos (parte subrayada) para dar sólo una conclusión. E3 plantea una conclusión [41], y una garantía teórica [43], una operación que relaciona el HG. par lineal y $m\angle ABC$, lo que le permite llegar a su conclusión, por lo tanto realiza un **[PJSb].**

A continuación se analizan los argumentos de otro fragmento de la conversación, en el cual se pretende determinar $m\angle ABC$.

| | | |
|---|---|---|
| 44 | P | Pero bueno tengo un noventa y el otro noventa ¿de dónde sale? |
| 45 | E5 | La mitad de ciento ochenta es noventa, de todo esto la mitad es noventa, resulta ser un numero par, entonces la mitad es noventa. |
| 46 | P | Tu dices que la mitad de ciento ochenta es noventa. |
| **47** | **E5** | **Y todo esto, si es noventa el único número que se podría sumar para que diera ciento ochenta es noventa.** |
| 48 | P | Porque que el único número que podría servir es noventa. |
| **49** | **E5** | **Porque si ya nos esta diciendo que noventa, eso es la mitad y ya la otra mitad sería igual, porque si pusiéramos un número más, la suma sería un número más.** |
| 9 | P | Bueno, bien por el razonamiento, ese nos sirve para el siguiente paso, si, en esta parte ¿qué puedo hacer con estos dos elementos que tengo? [señalando en el tablero $m\angle ABC + m\angle CBD =$ 180 y $m\angle CBD$=90]. |
| 50 | E10 | Restar. |
| 51 | P | Restar ¿cómo? o miremos aquí, dime. |
| **52** | **E10** | **Hacer una ecuación.** |
| 53 | P | Hacer una ecuación ¿por qué? |
| **54** | **E10** | **Averiguar que es lo que falta.** |
| 55 | P | Si lo que faltaría es lo que vamos averiguar, pero recuerden que vamos paso por paso, antes de averiguar que es lo que falta miremos aquí, esto es la $m\angle CBD$ y ¿cuál es la medida de ese ángulo? |
| 56 | E10 | Noventa. |
| 57 | P | Noventa, ¿qué podemos hacer para tener una sola ecuación? |
| 58 | E11 | Restar. |
| 59 | P | Eso es resolver la ecuación, ¿qué podemos hacer para tener una sola ecuación? |
| 60 | E11 | X + 90 =180. |
| 61 | P | Ah, X que sería este [refiriéndose a la $m\angle ABC$] ¿por qué noventa? |

| | | |
|---|---|---|
| 62 | E11 | Porque es la $m\angle CBD$. |
| 63 | P | Y aquí lo que hacemos al pasar este noventa a esta ecuación ¿qué es? |
| 64 | E1 | Pues descartamos. |
| 65 | P | No. |
| 66 | E4 | Remplazar. |
| 67 | P | Pero generalmente no se dice reemplazar, busca otra palabra ¿qué? |
| 68 | E9 | Sustituir. |
| 69 | P | Entonces, por sustitución, si hago la sustitución ¿qué me quedaría? |
| 70 | E9 | Quedaría X. |
| 71 | P | No sustituyamos la X dejemos $m\angle ABC$. |
| **72** | **E7** | **$m\angle ABC$+90=180.** |
| 73 | P | Listo, bueno tengo esto [señala $m\angle ABC + 90 = 180$] esto fue lo que concluimos, entonces, esto ya lo sabemos, vamos a ponerlo acá [lo escribe en la columna de ¿qué se?] y entonces viene lo que estaban diciendo hace un rato ¿qué hacemos? |
| **74** | **E7** | **Pues ahí, 180 – 90 para hallar el otro. [hace referencia a $m\angle ABC$].** |
| 75 | P | Ah, con esto que tenemos podemos decir que 180- 90 y entonces ¿qué estamos haciendo ahí? |
| 76 | E7 | Sustituyendo. |
| 77 | P | No, porque sustituimos aquí [señala el paso anterior]. |
| 78 | E | Cambiar signos. |
| 79 | E12 | Permutando. |
| 80 | P | Permutar no. |
| **81** | **E7** | **Estamos pasando al otro lado de la ecuación y cambiar signos.** |
| 82 | P | Resolviendo la ecuación, cierto, entonces (escribe en el tablero) ¿cómo quedaría la ecuación? |

E5 parte del *HG. Par lineal* para determinar $m\angle CBD$, él plantea su conclusión [47] y la garantía la cual se fundamenta en la suma de números naturales [47 y 49], es decir un argumento **[PJAc],** E10 concluye que con los datos se debe plantear una ecuación [52] y plantea como garantía a su argumento, que esto permite averiguar $m\angle ABC$ [54], un argumento [**PCSd]**. E7 realiza su argumento [**PJAa],** En el cual los datos son la expresión matemática que había planteado previamente [72], a partir de la cual presenta la conclusión [74], operación que permitirá hallar la medida buscada y plantea como garantía un proceso matemático [81], que le permite pasar de los datos a su conclusión.

El siguiente fragmento es continuación de la conversación en la que se están analizando los argumentos.

| | | |
|---|---|---|
| 83 | E7 | $m\angle ABC = 180 - 90$. |
| 84 | P | Entonces teníamos que resolviendo la ecuación $m\angle ABC = 180 - 90$, en este momento ¿qué iría aquí en qué se? |
| **85** | **E5** | $\boldsymbol{m\angle ABC = 180\text{-}90}$ |
| 86 | P | Y ¿qué podemos hacer ahí? |
| 87 | E | Resolverla. |

| | | |
|---|---|---|
| 88 | E5 | $m\angle ABC = 90$. |
| 89 | P | ¿La $m\angle ABC$ igual a qué? |
| **90** | **E10** | **Igual a noventa [hace referencia $m\angle ABC$]** |
| 91 | P | ¿Por qué podemos decir eso?, ¿Qué nos lo permite? |
| **92** | **E10** | **Porque $180\text{-}90 = 90$.** |
| 93 | P | Ah $180 - 90$ da noventa ¿qué hicimos ahí para poder llegar a noventa? |
| 94 | E10 | Restar. |
| 95 | P | ¿Restar qué es? |
| 96 | E5 | Es quitarle. |
| 97 | E3 | Disminuir. |
| 98 | P | Bueno, la suma, la resta, la multiplicación y la división ¿eso cómo se llama? |
| 99 | E10 | Operaciones. |
| 100 | P | ¿Operaciones entre qué? |
| 101 | E5 | Operaciones matemáticas. |
| 102 | P | Pero ¿entre qué? |
| 103 | E5 | Números. |
| 104 | P | Entre números, ¿qué clase de números? |
| 105 | E6 | Números reales. |
| 106 | P | Números reales y ¿qué podemos concluir? |
| **107** | **E5** | **El otro ángulo vale noventa, $m\angle ABC = 90$.** |

En el argumento de E10 los datos corresponden a [85], de lo que obtiene su conclusión [90] y presenta una garantía teórica [92] que hace referencia a la resta entre números reales, por tanto realiza un argumento **[PCSb]**, después de todo el proceso efectuado E5 elabora un argumento **[PCSa]** [107], que se convierte inmediatamente en los datos del argumento que emerge en el siguiente fragmento de la conversación.

| | | |
|---|---|---|
| 108 | P | $m\angle ABC = 90$. Bien y nos falta un último paso, pues ya sabemos que mide noventa grados y si es noventa ¿qué clase de ángulo es? |
| **109** | **E7** | **Recto.** |
| 110 | P | ¿Qué sabemos aquí? [señalando la columna de ¿qué se?]. |
| 111 | E6 | Que el ángulo. |
| 112 | P | ¿Qué el ángulo o qué del ángulo? |
| **113** | **E7** | **Que $m\angle ABC = 90$.** |
| 114 | P | ¿Qué vamos a concluir? |
| **115** | **E7** | **Que es recto.** |
| 116 | P | ¿Qué nos permite concluir que es recto? |
| **117** | **E2** | **Que mide noventa grados.** |
| 118 | P | Porque mide noventa grados ¿qué nos permite concluir? |
| 119 | E2 | Por la definición. |
| 120 | P | Por aquí lo dijeron. |
| 121 | E2 | La definición. |
| 122 | P | ¿La definición de qué? |
| **123** | **E7** | **Del ángulo recto [hace refenrencia a la D. de ángulo recto].** |
| 124 | P | Por definición del ángulo recto ¿qué podemos decir? |
| 125 | E2 | Que la medida del ángulo. |
| 126 | P | ¿La medida? |

| | | |
|---|---|---|
| 127 | E7 | $\angle ABC$ es recto. |
| 128 | P | [escribe en el tablero $\angle ABC$ es recto], cierto y ya, esto era a lo que teníamos que llegar, que si un ángulo es recto el otro también es recto. |

E7 inicia con un argumento sustancial **[PJSa]** en el cual parte de que si $m\angle ABC = 90$ entonces concluye que el ángulo es recto [109], E2 plantea un argumento del mismo tipo, pero para este estudiante los datos corresponden a que el $\angle ABC$ es recto y él presenta únicamente una conclusión [117], que hace referencia a la medida del ángulo. Posteriormente E7 después de la intervención de la profesora y de E2 completa su argumento con el respaldo [123] para ello usa la D. ángulo recto, es decir un **[PJAa]**, Llegando a la culminación de la demostración del *HG. Par lineal- recto.*

***T.2. TAREA DE CIRCUNFERENCIA***

Con el desarrollo de esta tarea se pretenden que los estudiantes construyan otros elementos del sistema teórico local, *D. Circunferencia*, *D. Mediatriz de un segmento*, *D. Punto medio de un segmento* y el *HG. Mediatriz*, así como continuar favoreciendo los procesos de argumentación de los estudiantes, dentro de el entorno de la AD

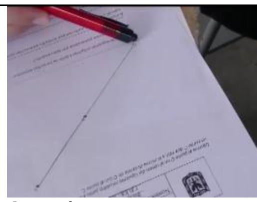
***T.3. P.1. (D. CIRCUNFERENCIA)***

La meta que se persigue con esta tarea, es que los estudiantes construyan la *D. Circunferencia*, para ellos se le proporcionan a los estudiantes, dados dos puntos *O* y *C* deben ubicar todos los *C'* que están a la misma distancia de *C* a *O*.

En el trabajo grupal, Para el desarrollo de argumentos los datos que se tienen en cuenta es la representación gráfica de los puntos que cumplen la condición dada.

*Grupo 1*

La conversación con este grupo gira en torno al cumplimiento de la condición, por parte de los puntos ubicados por estos estudiantes.

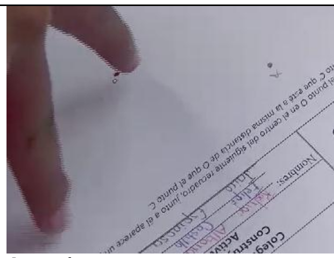
| | | |
|---|---|---|
| 10 | P | Bueno. (se dirige a otro grupo) ¿cuál fue el punto que acabaron de ubicar? |
| **11** | **E1** | Este, este y esta a la misma distancia de *O* que *C*.  Ilustración 21 |
| 12 | P | ¿Y la distancia si es la misma? |
| **13** | **E1** | **Sí, porque acá mide 7cm y aquí también.** |
| 14 | P | Ah, midieron con la regla, ¡pueden ubicar más puntos? |
| **15** | **E1** | **Sí,medimos con la regla.** |

| | | |
|---|---|---|
| 16 | P | ¿Cuántos? |
| 17 | V | Siete. |
| | P | ¿Siete puntos pueden ubicar? |
| 18 | E2 | ¡Ah! No, no, no, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. |
| 19 | P | ¿Sólo seis? |
| 20 | E3 | ¿Todos parten de la *O*? |
| 21 | P | Todos parten de la *O*. |

En el trabajo de este grupo, E1 realiza un argumento [**GCSe]**, en el cual plantea una conclusión [11] los puntos ubicados por ellos están a la misma distancia de *O* que *C* y una garantía empírica, basada en la comparación de dos medidas[13] y un respaldo empírico, “sí, medimos con la regla” [15].

*Grupo 2*

Este grupo presenta una conversación en torno al cumplimiento de la condición dada, por parte de los puntos ubicados por ellos, al igual que en el grupo anterior.

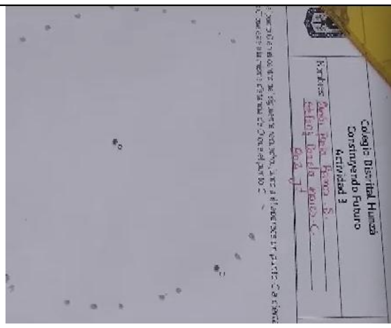
| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 | P | […], ¿Cómo ubicaron ustedes los puntos? | |
| 23 | E1 | Con lo dedos porque no había transportador así. Din (*C*, *D*), de este a este (*O*, *D*) y estos dos (*O*, *A*) y esta así (*A*,*B*).[ubica tres puntos que cumplen con la condición] |  Ilustración 22 |
| 24 | P | Bueno, ¿esta distancia de este punto a este (*O*,*C*) es esta misma distancia de (*O*,*D*)? | |
| **25** | **E2** | **Sí es igual la distancia.** | |
| 26 | P | ¿Seguros? | |
| **27** | **E2** | **Según con los dedos, sí.** | |
| 28 | P | Miremos a ver. | |
| **29** | **E2** | **Toma las distancia con los dedos.** | |
| 30 | P | Si la miramos, si se ve a la misma distancia. | |
| **31** | **E3** | **No se, ve más corrido este que este, este va un poco más acá.** | |
| 32 | P | ¿Qué estará fallando? | |
| 33 | E3 | Las medidas. | |
| 34 | P | Las medidas, cierto, ¿qué podrían utilizar para medir? | |
| 35 | E3 | Una regla. | |

E2 realiza un argumento **[GCSe],** ya que presenta una conclusión [25], en la cual manifiesta que la distancia de *O* a *C* es igual a la distancia de *O* a *D* son iguales, presenta una garantía empírica [27], “según los dedos sí” y un respaldo empírico [29] al tomar las distancias con los dedos, E3 refuta este argumento mediante un argumento sustancial **[GCSd]** [31], en el cual manifiesta que esos puntos no están a la misma distancia y presenta una garantía empírica que hace referencia lo que él observa.

*Grupo 3*

Esta conversación gira en torno a la cantidad de puntos que los estudiantes pueden ubicar que cumplan la condición.

| | | |
|---|---|---|
| 39 | P | […] ¿Cuántos puntos pudieron ubicar? |

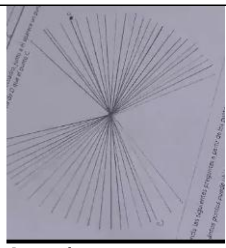
| | | |
|---|---|---|
| 40 | E1 | (Cuenta) diecisiete. |
| 41 | P | ¿Diecisiete, pueden ubicar más? |
| **42** | **E1** | **Sí porque mire de aquí, para acá sí, Pero entonces quedaría todo muy pegado, quedaría una cosa así toda pegada.**  Ilustración 23 |
| 43 | P | Bueno o sea ¿qué cuántos puntos pueden ubicar? |
| **44** | **E1** | **Máximo veinte.** |
| 45 | P | ¿Máximo veinte. |
| **46** | **E2** | **No, no tanto.** |
| 47 | P | Menos, pero hay no más llevan diecisiete, aquí podríamos poner uno, aquí otro y aquí otro (señalando entre puntos) y ya van veinte, aquí otro. |
| 48 | E2 | Uh, podríamos poner. |
| 49 | P | Aquí otro y ¿en esta parte? |
| 50 | E2 | No cabe ¿por qué las letra? |
| 51 | P | Y ¿si no estuvieran las letras? |
| **52** | **E** | **Podríamos hacer un círculo, porque son muchos puntos.** |
| 53 | P | Ah, bueno, ustedes me dicen que podrían hacer un círculo, miremos haber, dice hay ¿cuántos puntos podemos ubicar con esa condición?, entonces ¿serán sólo veinte? |
| **54** | **E3** | **No, muchos.** |
| 55 | E2 | Sí. |
| **56** | **E3** | **No, porque quedaría todo pegado así [señala la circunferencia con su dedo].** |
| 57 | P | Pero podrían ubicar más puntos, cierto, y la siguiente dice ¿si encontró más de un punto, como ustedes encontraron más de un punto, con esta condición estos puntos cumplen una característica especial ¿cuál es? |
| **58** | **E3** | **De que se puede formar un círculo.** |

En este grupo E1 al observar la grafica presenta su conclusión frente a la cantidad de puntos que se pueden ubicar [42] y [44], pero no plantea ninguna garantía para justificar el paso de los datos a la conclusión, es decir un **[GCSa]**, otro argumento que surge en el marco de esta conversación, es el de E2, él plantea inicialmente un argumento **[GCSa]** en [46], posteriormente, después de la intervención de la profesora el modifica su argumento para dar origen a un **[GCSd]** ya que realiza una conclusión y una garantía empírica [52], finalmente E3 plantea dos argumentos en los que trata de recoger lo trabajado hasta ese momento en el grupo, en el primero ratifica mediante su conclusión cuantos puntos se pueden ubicar [53], presenta una garantía empírica [56], es decir un argumento sustancial **[GCSd]** y en el segundo la conclusión hace referencia a que dan origen el conjunto de esos puntos [58], sin garantía o respaldo, por lo tanto es un **[GCSa]**.

*Grupo 4*

En esta conversación se centra en la cantidad de puntos que se pueden ubicar, si cumplen o no la condición y a que forman estos puntos.

| | | |
|---|---|---|
| 73 | P | […] Bueno ¿Cómo van? |

| | | |
|---|---|---|
| 74 | E1 | Bien. |
| 75 | P | Bien. |
| 76 | E2 | Es que nos quedo mal la gráfica.  Ilustración 24 |
| 77 | P | Yo creo que me pueden responder las preguntas que están ahí ¿cuántos puntos pueden ubicar con esa condición? |
| **78** | **E1** | **Muuuchos.** |
| 79 | P | ¿Cuántos? |
| 80 | E2 | Toca contar (cuentan), cuarenta y ocho. |
| 81 | P | Cuarenta y ocho, ¿pueden ubicar más? |
| 82 | E1 | Sí. |
| **83** | **E2** | **Artos en medio de todos estos (señala los extremos de los segmentos ubicados), acá, acá y aquí.** |
| 84 | P | ¿Cuántos? |
| 84 | E1 | Acá que se ubique uno, cuenta cincuenta y uno, cincuenta y uno. |
| 86 | P | Y la otra pregunta, si encontró más de un punto, ustedes encontraron más de un puntos, estos puntos cumplenuna característica especial, ¿cuál es? |
| **87** | **E2** | **Todos miden lo mismo tiene la misma distancia a *O*.** |
| 88 | P | Ah todos tienen la misma distancia hasta *O*, ¿qué otra característica, qué ven de especial en esos puntos? |
| **89** | **E3** | **Todos partes del mismo punto.** |
| 90 | P | Si tenemos un punto de referencia ¿qué más?, ¿que tienen de especial esos puntos (señalando todos los puntos ubicados por los Es) |
| **91** | **E3** | **Ah, que todos cogen como una forma decírculo, porque como todos tienen la misma medida y están en diferente dirección aquí que da como la forma de un círculo.** |
| 92 | E1 | Si aquí se pudiera quedaría así un círculo. |

E1 a partir de la actividad realizada plantea su conclusión [78], pero no presenta garantía en su argumento por lo tanto es un **[GCSa],** E2 elabora otro argumento del mismo tipo [83], en el cual la conclusión está relacionada con la cantidad de puntos que puede ubicar según la condición provista, pero no presenta garantía, E3 crea otro argumento como los anteriores en el cual la conclusión hace referencia a que todos los puntos parten de *O* [89] y finalmente E3 realiza otro argumento [91], para el que plantea la conclusión y una garantía empírica a partir de la observación (parte subrayada), un **[GCSd]**.

La siguiente conversación corresponde a la construcción del elemento teórico en cuestión a partir del trabajo realizado en los grupos. En el momento de la puesta en común.

| | | |
|---|---|---|
| 107 | E2 | Con los dedos. |
| 108 | E 1 | [empieza a medir con sus dedos y a ubicar puntos formando una circunferencia]. |
| 109 | P | ¿puedes explicarnos?, ¿Cuántos puntos se pueden ubicar? |
| 110 | V | Infinitos. |
| 111 | P | Infinitos y había otra pregunta que decía ¿qué características cumplen esos puntos? |
| **112** | **E1** | **Que es una circunferencia, por que los puntos que cumplen la condición forman una circunferencia.** |
| 113 | P | Todos los puntos forman una circunferencia, entonces podemos definir que es una circunferencia, ¿cómo podemos definirla? |
| 114 | E4 | Con el radio. |

| | | |
|---|---|---|
| 115 | P | ¿qué sería una circunferencia? |
| **116** | **E5** | **Un círculo, por que tambien está formado por lospuntos que están a igual distancia de *O*.** |
| 117 | P | ¿Un círculo o una circunferencia?, ¿qué diferencia hay?, bueno definamos que es circunferencia y miramos que es un círculo, |
| 118 | E2 | Una figura redonda. |
| 119 | P | Pero teniendo en cuenta lo que acabamos de hacer (señala el tablero), ¿qué es una circunferencia? |
| **120** | **E4** | **Es una figura que está conformada por infinitas líneas.** |
| 121 | P | Por infinitas líneas ¿cuáles líneas? |
| | E4 | Son muchos rayos. |
| 122 | P | Miremos aquí ¿cuál es la circunferencia?, tu dices que son muchos rayos. |
| **123** | **E4** | **Los que parten de *O* a todos los puntos** |
| 124 | P | La clase pasada E6 decía que esos rayos ¿qué nombre reciben? |
| **125** | **E 6** | **Radios.** |
| 126 | P | Radios de la circunferencia, entonces, lo que tu llamas rayos son radios y son segmentos de recta que tienen siempre ¿Cómo es la longitud de los radios ? |
| **127** | **E6** | **Igual** |
| 128 | P | Igual cierto porque es de la misma circunferencia y ¿cuál es la circunferencia? Si nosotros tenemos que estos puntos forman una circunferencia ¿cuál es la circunferencia? |
| **129** | **E1** | **La unión de los puntos porque hay se ve que esos puntos forman la circunferencia [refiriénndose a los puntos *C'*].** |
| 130 | P | La unión de todos los puntos, entonces podemos decir que es el conjunto de puntos ¿qué que? |
| 131 | E 4 | Que están unidos. |
| 132 | P | ¿Qué se unen?, ¿qué condición deben cumplir esos puntos? |
| **133** | **E1** | **Que deben tener la misma distancia.** |
| 134 | P | Que deben tener la misma distancia, ¿con respecto a qué? |
| **135** | **E1** | **Al punto de partida [se refiera *O*]** |
| 136 | E7 | Al punto *O*. |
| 137 | P | A *O*, cierto, es el conjunto de puntos, es más podemos decir es el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos y me decían que cumplen una condición ¿cuál condición? |
| 138 | E7 | Que parten de un mismo punto. |
| 139 | E5 | Forman la circunferencia. |
| 140 | E4 | Que todos tienen la misma distancia. |
| 141 | E1 | Que todos tienen la misma medida. |
| 142 | P | Teniendo en cuenta lo anterior ¿qué es una circunferencia? |
| **144** | **E4** | **Un conjunto de puntos que cumplen la condición de tener la misma distancia de *O* a *C* y todos parten de *O*.** |
| 145 | P | ¿Por qué los puntos describen una circunferencia? |
| **146** | **E 5** | **Porque esos puntos tiene la misma distancia de *O*, porque si fueran distancias diferentes que daría otra forma.** |
| 147 | P | Ah, tiene la misma distancia de *O* a *C*, entonces es el lugar geométrico, formado por el conjunto de puntos que están a la misma distancia de *O* y ¿cómo es ese punto *O*? Miren que, lo que ocurre con los otros puntos es que ustedes los ubicaron, ¿este punto *O* cómo es? |
| 148 | E2 | Esta en el centro del círculo. |
| 149 | P | Están en el centro del círculo, si, de hecho ese punto *O* es llamado centro y es un punto fijo (escribe en el tablero) de un punto fijo *O* llamado centro y entonces, si nosotros vamos a escribir simbólicamente que esto es una circunferencia decimos, la circunferencia de centro o$\odot O\ y\ radio\ \overline{OC}$. Cada uno de estos(señalando las distancias entre *O* y un *C*) forman un radio y dijimos que estos radios tenían siempre la misma distancia. Bueno ya tenemos la definición de circunferencia. |

El primer argumento que surge durante la puesta en común es el realizado por E1 [112], el cual consta de una conclusión y una garantía teórica, que corresponde a la condición dada inicialmente en la tarea, es decir un argumento **[PDSb],** E4 realiza un **[PDSi]**, el cual por sus características es tipificado de esta manera, ya que se evidencia una conclusión y una garantía teórica errónea que no justifica el paso de los datos a la conclusión [116], este mismo estudiante realiza un argumento **[PDSa],** en el cual plantea una conclusión frente a la *D. Circunferencia,* sin garantía alguna,E6 plantea un argumento sustancial **[PDSa]** en el cual plantea únicamente que los radios de una circunferencia tienen la misma medida [125 y 127], E1 también plantea un argumento [129], que difiere del no sólo en la conclusión si no también en cuanto a la estructura ya que en este se evidencia la conclusión acompañada de la garantía empírica, por tanto es un argumento [**PDSb]**, luego este argumento en [133] y [135] es complementado por el estudiante en la medida que avanza la conversación, pasando a una garantía teórica, elaborando un **[PCSb].** Luego E4 plantea un argumento [**PDSa]**, en el cual a partir de todo el trabajo realizado durante la conversación presenta una definición de circunferencia "Un conjunto de puntos que cumplen la condición de tener la misma distancia de *O* a *C* y todos parten de *O*" [144],finalmente en [146] E5 presenta un argumento **[PCSd],**para resaltar la importancia de la equidistancia presente entre el centro *O* y los diferentes puntos de la circunferencia.

Esta conversación finaliza con la concreción de la *D. Circunferencia* como se puede evidenciar en [149].

#### *T.3. P.2. (DEFINICIÓN DE MEDIATRIZ)*

El objetivo de este problema es permitir al estudiante la construcción de la *D. Mediatriz*, para ello se les proporciona material concreto, un conjunto de puntos mediante el uso de los cuales deben realiza una construcción geométrica, en la que deben ubicar dos puntos y luego ubicar todos los puntos que equidistan de ellos y posterior mente realizar una conjetura para llegar a la *D. Mediatriz*.

*Grupo 1*

A continuación se presenta el fragmento del diálogo que se realizó con el grupo durante el trabajo grupal. En este grupo se presento una mala interpretación del problema por tanto en gran parte de la intervención se aclara dicha situación, lo que origino una construcción de argumentos mínima.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | […]. (se dirige a un grupo) Bueno ¿Qué hicieron primero ustedes? |
| 2 | E1 | Ubicar el punto *A* y *B*. |
| 3 | P | ¿Qué son cuáles? Y luego ¿qué hicieron? |
| 4 | E2 | Trazamos líneas, diferente, porque no dice que tienen obligatoriamente que partir del mismo punto. |
| 5 | P | No dice que parta de un mismo punto, pero si hay una condición que debe cumplir ¿Cuál es? |
| **6** | **E2** | **Que tenga la misma distancia entre *A* y *B*.** |
| 7 | P | ¿Eso dice ahí? |
| **8** | **E2** | **Sí.** |
| 9 | P | Dice [lee] ubique los puntos *A*, *B* utilizando las fichas suministradas y ubique ahora un punto *C* que cumpla la condición de estar a la misma distancia de *A* y de *B*, entonces miremos [mira el trazo de los estudiantes], de *C* a *A* es esta distancia y esa distancia es la misma que tenemos de *C* a *B*. |
| 10 | E2 | Pero no, no se que decir [revisa el enunciado del ejercicio]. |
| 11 | P | Es que la condición que debe cumplir ¿cuál es? Que *C* este ¿cómo? |
| **12** | **E1** | **Que tenga la misma distancia de *A* y *B*.** |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | P | ¿Qué tenga la misma distancia a *A* que?. |
| **14** | **E1** | **De *A* y *B* sólo dice, ubicar un punto *C* que cumpla la condición de estar a la misma distancia de *A* y *B*, por eso que tenga la misma medida esta [señala la distancia $\overline{CA}$] y no que tenga que estar a la misma distancia de los dos dice. [disatancia de $\overline{AB}$].** |
| 15 | P | Ahí dice ¿qué tenga la misma distancia de *A* a *B*? |
| 16 | E1 | La condición de estar a la misma distancia de *A* y *B* hay dice. |
| 17 | P | Ah, pero miremos como esta escrito acá de *A* y *B*, pero si nos están hablando de distancia debería decir de *A* a *B* sin la y es cuestión de notación, ahora leamos lo con entonación, ubique ahora un punto *C* que cumpla la condición de estar a la misma distancia de *A* y *B*. |
| 18 | E1 | O sea la misma distancia a que ha de *A* a *B*. |
| 19 | P | Pero ahí no dice que la misma distancia a que ha de *A* a *B*. |
| 20 | E1 | Esta tiene que ser la misma distancia de *B* [señalando la distancia de *C* a *B*]. |
| 21 | P | Sí. |
| 22 | E1 | Tiene que quedar con las dos. |
| 23 | P | O sea ¿qué cuáles distancias tendrían que tener en cuenta? |
| 24 | E 1 | **Esta [señala de *A* a *B*], esta la tendremos que corre un poco más hacia acá [señala *C*] para que *C* quede a la misma distancia de *A* y *B*.** |

Los argumentos de este grupo surgen en torno a la construcción de los puntos que se piden, ya que se presenta un problema con la interpretación de la lectura.

El primer argumento **[GCSa],** que se realiza lo presenta E2 quien plantea una conclusión errada a partir de la lectura y plantea una garantía empírica [6 y 8], realiza de esta manera un argumento **[GCSd]**, el cual es refutado por un argumento de la misma tipificación realizado por E1, en el cual se evidencia una conclusión [12], y una garantía empírica [14], finalmente E1 realiza otro argumento [**GCSd].** en el cual concluye [24] que el punto *C* ubicado por ellos no está a la misma distancia de *A* y de *B*.

*Grupo 2*

La conversación del siguiente grupo gira en torno a la cantidad de puntos que se pueden ubicar y si estos cumplen o no la condición dada.

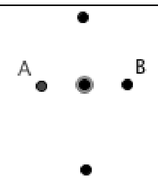
| | | |
|---|---|---|
| 1 | E | [miden con los dedos la distancia de *C* a *A* y la traslada de *C* a *B* ]. |
| 2 | P | La distancia que hay de *A* a *C* es la misma distancia de *B* a *C*. |
| 3 | E1 | Sí. |
| 4 | P | ¿Pueden ubicar más puntos? |
| 5 | E2 | Sí. |
| 6 | P | ¿Cuáles? |
| 7 | E3 | Pero ¿con los mismos? |
| 8 | P | O sea que cumpla la condición. |
| **9** | **E1** | **A sí, claro.** |
| 10 | P | ¿Cuáles? |
| 11 | E1 | **Por ejemplo, puede ser también de este mismo lado, este acá, este por acá (ubica dos puntos más que tienen la misma distancia que de *C* a *A*).** |
| 12 | P | No porque entonces tendríamos lo mismo, mira que tendríamos, este punto *C* de acá este de acá es igual. |
| 13 | **E2** | **Ah, no, no se pueden más.** |
| 14 | P | ¿Será que no se pueden más? |
| 15 | E1 | No. |
| 16 | P | Bueno. |

| | | |
|---|---|---|
| **17** | **E3** | **Se puede otro.** |
| 18 | P | ¿Otro, cuál? |
| **19** | **E3** | **El de acá el de esta esquina, sería así como haciendo un cuadrado.** |
| 20 | P | O sea habría otro punto. |
| **21** | **E3** | **Si acá, que si sería lo mismo, porque entonces la mitad que daría por acá y así sería la misma medida.** |
| 22 | P | La misma distancia, ah ya tendríamos otro punto, ¿puede ubicar otro? |
| **23** | **E2** | **El centro.** |
| 24 | P | El ¿centro?, ¿cuál sería? |
| **25** | **E2** | **Según lo que yo veo acá y tendría la misma medida que este, que este, que este. [ubica un punto entre *A* y *B*].** |

El primer argumento, que surge en el marco de esta conversación es el realizado por E1 quien a partir de los datos (puntos ubicados por los estudiante y la condición dada) plantea la conclusión [9] y una garantía empírica, realiza así un **[GCSd],** E2 contradice la conclusión de E1 [13], pero no plantea garantía en su argumento por lo tanto es **[GCSa]**, el siguiente argumento es el realizado por E3 quien apoya con su conclusión la de E1 [17], presenta como garantía la ubicación de otro punto [19] y plantea el respaldo para este argumento [21], el cual es empírico basado en la observación y la condición dada inicialmente, es decir un argumento **[GCSe],** finalmente E2, realiza otra conclusión en la que alude al punto medio de $\overline{AB}$ (no lo menciona de esta manera) [23] y plantea la garantía empírica para este argumento **[GCSd]** [25].

*Grupo 3*

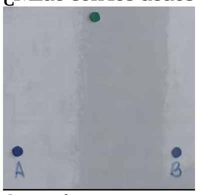
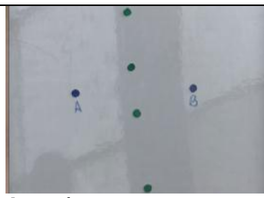
En este grupo se presentan dos argumentos, uno entorno a la ubicación de los puntos que cumplen la condición dada y el otro entorno al punto medio.

<table>
<tr><td>27</td><td>P</td><td colspan="2">[…] Miremos haber, la condición es que ese punto C debe estar a la misma distancia de B ¿cuál es la distancia que hay de ese punto a B?, esa ¿es la misma distancia que hay del punto a A?</td></tr>
<tr><td>28</td><td>E1</td><td colspan="2">Se corrió un poquito, pero sí se puede.</td></tr>
<tr><td>29</td><td>P</td><td colspan="2">Pero si se puede, o sea que ya tienen dos puntos, entonces arréglenlo[…] Ese punto cumple la condición, listo es otro C ¿pueden ubicar otro?</td></tr>
<tr><td>30</td><td>E3</td><td>Acá, este es el punto central por que esta a la misma distancia de A que de B y esta entre A y B, por eso se llama central.</td><td>

Representación gráfica 38</td></tr>
</table>

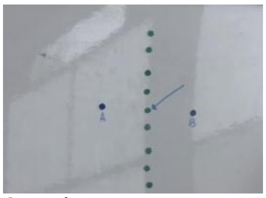
En este grupo de evidencian dos argumentos el realizado por E1 [28] un **[GCSa]** ya que carece de garantía y el de E3 quien concluye que es el punto central y presenta una garantía teórica basada en la condición dada (parte subrayada), lo que determina un **[GDSb].**

La puesta en común del grupo se realizó mediante el uso de material concreto, a continuación se presenta la conversación que tubo lugar en torno a la construcción de la *D. Mediatriz* y *D. Punto medio de un segmento.*

| | | |
|---|---|---|
| 31 | P | […] Ponen atención aquí y vamos a empezar a ubicar los puntos, entonces, por ejemplo el grupo de Combita ¿pueden ubicar algunos puntos qué cumplan la condición?¿recuerdan cuál era la condición que tenia que cumplir el punto? |
| 32 | E1 | Que tenga la misma distancia de *A* y *B*. |
| 33 | P | La misma distancia de *A* y de *B*, entonces alguien del grupo que pase. |
| 34 | E1 | ¿Mide con los dedos y ubica el punto verde?  Ilustración 25 |
| 35 | P | ¿Puedes ubicar más puntos? |
| 36 | E1 | Sí. |
| 38 | P | ¿Puedes ubicar más puntos? |
| 38 | E1 | Sí. (Ubica otros puntos) |
| 39 | P | Bien ¿cuántos puntos se pueden ubicar, qué cumplan la condición?  Ilustración 26 |
| **40** | **E2** | **Sí infinitos.** |
| **41** | **E1** | **Entonces podemos ubicar ya nos dijeron infinitos puntos (coloca más puntos), hay dos preguntas en la guía que decían.** |
| **42** | **P** | **¿Cuántos puntos pueden ubicar con esta condición?, infinitos cierto y la segunda, si encontró más de un punto con esta condición, cumplen una característica especial¿qué característica tienen esos puntos?** |
| **43** | **E4** | **Que todos los puntos parten de *A* y *B*.** |
| 44 | P | ¿parten o están a la misma distancia? |
| **45** | **E5** | **Están relacionados con A y B.** |
| **46** | **E6** | **Todos los puntos tienen la misma distancia a *A* y a *B*.** |
| 47 | P | Todos los puntos están a la misma distancia de *A* y *B*. |
| **48** | **E7** | **Todos los puntos están centrados.** |
| **49** | **E8** | **La unión de todos los puntos forman una recta.** |
| 50 | P | La unión de los puntos forman una recta, Paula du decías ¿qué todos los puntos están qué? |
| **51** | **E7** | **Los puntos están centrados.** |

El primer argumento es el realizado por E2, quien únicamente plantea una conclusión [40], a partir de los datos dados es decir un **[PCSa],** luego E1 plantea un argumento **[PCSd]**, es decir, una conclusión (se pueden ubicar infinitos puntos) y presenta una garantía empírica a su argumento (ya lo dijeron). Ante la pregunta "¿qué característica tienen esos puntos?" surgen cinco argumentos **[PCSa]** [43, 45, 46, 48 y 49].

| | | |
|---|---|---|
| 52 | P | ¿Qué quieres decir con que todos los puntos están centrados? ¿a qué te refieres con qué están centrados? |
| 53 | E7 | En la mitad de *A* y *B*. |
| 54 | P | ¿Todos están en la mitad de *A* y *B*? [señala en el tablero]. |
| 55 | V | No |
| 56 | P | Pero de todos esos que tenemos ¿alguno está en la mitad de *A* y *B*? |

| | | |
|---|---|---|
| 57 | E9 | El quinto subiendo. |
| 58 | P | Entonces vamos a tener en cuenta ese punto, vamos a marcarlo.  Ilustración 27 Ya nos habían dicho que todos los puntos están alineados, que todos los puntos forman una recta, cierto si unimos todos estos puntos se forma una línea recta, esa línea recta tiene un nombre especial, es una mediatriz y vamos a definir que esuna mediatriz, según lo que ustedes tienen, ¿qué es una mediatriz? |
| **59** | **E8** | **La unión de los puntos.** |
| 60 | P | La unión de varios puntos, o sea que podemos decir que es un con juntos de puntos, entonces una mediatriz es un conjunto de puntos, cuando nosotros escribimos la definición de circunferencia escribimos una palabra, para esté objeto geométrico ¿cuál es? ¿cómo iniciamos la de circunferencia? |
| **61** | **E10** | **Lugar geométrico.** |
| 62 | P | Lugar geométrico [escribe en el tablero] ¿por qué está formado ese lugar geométrico? |
| 63 | E11 | Por puntos. |
| 64 | P | Por lo puntos o por el conjunto de puntos, pero ¿qué característica tiene de especial ese conjunto de puntos? |
| **65** | **E6** | **Forman una recta.** |
| 66 | P | Esté es el lugar geométrico, pero ¿qué condición deben cumplir esos puntos? ¿cuándo ustedes ubicaron esos puntos que condición? |
| **67** | **E6** | **Deben tener la misma medida de *A* y *B*** |
| 68 | P | Con todo lo que se ha dicho ahora sí ¿Qué es la mediatriz? |
| **69** | **E10** | **La recta formada por todos los puntos que estan a la misma distancia de *A* que de *B*** |
| 70 | P | Deben tener la misma medida de *A* y a *B*, entonces es el conjunto formado por los puntos que tienen la misma medida a *A* y a *B*, esto es mediatriz. […]. |

Posteriormente y ante la pregunta de la profesora "¿qué es la mediatriz?", se presentan únicamente argumentos **[PDSa],** una conclusión a partir de los datos, los cuales varían de acuerdo al cuestionamiento realizado, en este fragmento hay cinco argumentos de esta categoría [59, 61 y 69],desarrollados hasta llegar a la *D. Mediatriz* en [69], de otro lado en este mismo fragmento E6 en [65 y 67] construye dos argumentos en el proceso de conjeturar de tipo **[PCSa]**.

El siguiente fragmento de la conversación corresponde a la construcción del elemento teórico *D. Punto medio de un segmento.*

| | | |
|---|---|---|
| 70 | P | […] ¿Qué tiene de especial este punto de acá? [Señala el punto marcado] |
| 71 | E5 | Que esta en la mitad de *A* y *B*. |
| 72 | P | Bueno primero cumple una condición que cumplen todos estos. |
| 73 | E8 | Estar a la misma distancia. |
| 74 | P | Estar a la misma distancia de este punto a *B* y de este punto a *A* y cumple otra condición especial |
| **75** | **E8** | **Está en la mitad de *A* y *B*** |
| 76 | P | Está en la mitad es decir está entre *A* y *B*, entonces, atrás alguien decía ese es el centro, ese punto se denomina punto medio, escriban la definición de punto medio y ya la leemos. Dilo. |
| 77 | E8 | Es un punto que esta en la mitad de *A* y *B* formado por, ahí no mentiras yo no se. |
| 78 | P | Bueno cumpledos condiciones, dime. |
| **79** | **E12** | **Está en la misma recta.** |
| 80 | P | Está en la misma recta ¿en cuál recta?, ¿en la qué contiene qué puntos? |
| **81** | **E12** | **En la mediatriz.** |
| 82 | P | Esta en la recta mediatriz |
| **83** | **E12** | **Y tiene la misma distancia a *A* que de *B*.** |
| 84 | P | Pero mira que este, esta en la mediatriz y esta a la misma distancia de *A* y de *B* [señalando otro punto diferente al punto medio] |
| **85** | **E12** | **Esta en la recta horizontal.** |

| | | |
|---|---|---|
| 86 | P | ¿En qué horizontal? |
| **87** | **E12** | $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$**.** |
| 88 | P | Miren una nueva definición de punto medio, es el punto que está en la mediatriz de $\overline{AB}$ y segundo dice que esta ¿en dónde? |
| 89 | E9 | En la de la $\overleftrightarrow{AB}$. |
| 90 | P | En la recta que pasa por $A$ y $B$ |
| **91** | **E4** | **Y que por ese punto es de la mediatriz, porque esta a la misma distancia de *A* y de *B*** |
| 92 | P | No olviden que esta es la mediatriz y este es el punto medio. Dejamos ahí. |

Los argumentos en este fragmento inicialmente tiene como datos la información en las intervenciones [56], [57] y la gráfica [58], E8 [75] presenta sólo una conclusión desprovista de garantía, es decir un argumento **[PDSa]**, E12 también presenta un argumento de este tipo, él a lo largo de su intervención, perfecciona su argumento relacionado con la *D. Mediatriz* [81, 84, 85 y 87], pero en ningún momento plantea una garantía, finalmente el último argumento lo realiza E4 [91], el cual consta de una conclusión y una garantía teórica, es decir un **[PDSb]**