

**CATEGORÍAS DE USOS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA
EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS**

JOHN FREDY ERAZO CASTRO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C. 2016

**CATEGORÍAS DE USOS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA
EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS**

Autor:

JOHN FREDY ERAZO CASTRO

Directora:

Lyda Constanza Mora Mendieta

Trabajo de grado presentado como requisito

Para optar por el título de

Magister en Docencia de las Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C. 2016

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos”



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *Categorías de usos de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas*, presentado por el estudiante:

John Fredy Erazo Castro, Cód. 2014185006, CC. 1014211898

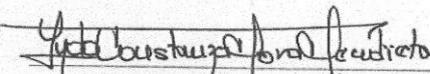
como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 43 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 31 días del mes de agosto de 2016.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesora:

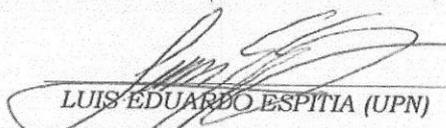

LYDA CONSTANZA MORA

Jurados:

Profesor:


ROBERTO VIDAL CORTÉS (Chile)

Profesor:


LUIS EDUARDO ESPITIA (UPN)

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado de Maestría en Investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Categorías de usos de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas
Autor(es)	ERAZO CASTRO, John Fredy
Director	Mora Mendieta, Lyda Constanza
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 90 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	USOS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, REVISIÓN DOCUMENTAL, EDUCAR EN MATEMÁTICAS

2. Descripción
Trabajo de grado que se propone caracterizar sistemáticamente los usos de la Historia de las Matemáticas [HM] a través de una revisión documental de revistas especializadas reconocidas por la comunidad de educadores matemáticos, que se refieran a propuestas de aula o experiencias de actividades cuyo diseño estuviese relacionado con la Historia de las Matemáticas, se crean categorías de análisis, unidades y subunidades de análisis para interpretar y describir las relaciones entre cada categoría para la construcción de unidades hermenéuticas mediadas por el software de análisis Atlas.TI.

3. Fuentes
Para el desarrollo de este trabajo de grado se consultaron fuentes de diferente tipo, a continuación se presentan algunas de las más importantes según la intencionalidad:
En relación con la HM y la educación en Matemáticas [eM]:
<ol style="list-style-type: none">1. Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. <i>For the Learning of Mathematics</i>, 17, 55–61. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/402482242. Jankvist, U. T. (2009a). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. <i>Educational Studies in Mathematics</i>, 71(3), 235-261.3. Jankvist, U. T. (2009b). On empirical research in the field of using History in Mathematics Education. <i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa</i>, 12(1), 67-101.
En relación con los antecedentes de investigación sobre los usos de la HM:
<ol style="list-style-type: none">4. Clark, K. (2006). Investigating teachers’ experiences with the history of logarithms: A collection of five case studies. Dissertation. Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, USA (accessed 18/2/2016).5. Siu, M.-K., & Tzanakis, C. (2004). History of Mathematics in Classroom Teaching - Appetizer?

Main Course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in*

En relación con los usos de la HM:

6. Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma*, 2, 17–28
7. González, P. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, ISSN 0212-4521, ISSN-e 2174-6486, Vol. 9, N° 3, 1991, págs. 281-290
8. Siu, M.-K. (1997). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom
9. Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics Education* (pp. 201–240).
10. Weng Kin Ho. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. Singapur: Department of Mathematics and Science. Retrieved from [http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My publications/Math Education/hom.pdf](http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/hom.pdf)

En relación con la revisión documental

11. Siu, M.-K., & Tzanakis, C. (2004). History of Mathematics in Classroom Teaching - Appetizer? Main Course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1), 5–10.
12. Toerner, G., & Arzarello, F. (2012). Grading Mathematics Education Research Journals. *European Mathematical Society Newsletter*, 86, 52-54.
13. Torres, L. A. & Guacaneme, E. A. (2014) La Historia de las Matemáticas en la formación inicial de profesores de Matemáticas en Colombia. *Actas del VII CIBEM*. ISSN 2301-0797, 3999-4006

4. Contenidos

El presente trabajo corresponde al reporte de una investigación documental sobre artículos que se refieren a propuestas o experiencias de aula publicadas en revistas especializadas reconocidas por la comunidad de educadores matemáticos, que hicieran uso de la Historia de las Matemáticas. Se estructura bajo los siguientes capítulos:

0. Introducción: Se presenta una breve descripción sobre cada uno de los capítulos, mencionando los apartados más importantes y la intencionalidad de cada uno.
1. Preliminares: Se presenta la delimitación del problema, objetivos generales y específicos de la investigación.
2. Antecedentes: Se incluye una revisión sobre doce investigaciones que consideraron la relación entre Historia de las Matemáticas y enseñanza o aprendizaje de las Matemáticas, de manera global, con el fin de encontrar parámetros para la creación de categorías para analizar la información, así como para mejorar la comprensión sobre estas relaciones.
3. Marco de Referencia: se reconocen dos aspectos sobresalientes entre las relaciones antes presentadas: i) Educación en Matemáticas e ii) Historia de las Matemáticas y educación en Matemáticas, y de este último aspecto (ii) se ubican investigaciones que fundamentaron este trabajo, particularmente se exponen cuatro investigaciones ((Boero, 1989; González, 2004; Tzanakis & Arcavi, 2002; Siu, 1997; Weng Kin Ho. 2008) que sirvieron para la creación de las categorías de análisis en los usos de la HM. Se culmina el capítulo proponiendo ciertos usos de la Historia de las Matemáticas generales y específicos que se constituyen en las unidades de análisis fundamentales del trabajo.
4. Metodología: Se expone el tipo de investigación al que corresponde el estudio realizado argumentando el paradigma y enfoque en el cual se ubica (cualitativo y enfoque humanístico interpretativo); adicionalmente se presentan las categorías de análisis que se usaron con sus respectivas unidades, así como los códigos respectivos utilizados en el Software Atlas.TI, herramienta fundamental para la organización de la información.
5. Resultados del análisis: Se describen las relaciones encontradas entre los usos de la Historia de las Matemáticas y las demás categorías de análisis, se presentan las distintas redes hermenéuticas creadas con el software y algunas interpretaciones sobre la información que se vislumbra con tal representación (redes).

6. Conclusiones y cuestiones abiertas: Se presentan las conclusiones finales del trabajo de grado en relación con cada uno de los objetivos planteados y se manifiestan algunas cuestiones abiertas que no fueron abordadas en esta tesis y que quizás puedan ser objeto de estudio para trabajos futuros.

5. Metodología

Se trata de una revisión documental, el enfoque que se utiliza es el humanístico interpretativo (Erickson, 1986) porque se buscó, a partir de dicha revisión, insumos que permitieran comprender la manera de usar la HM en la eM. Inicialmente se seleccionaron 75 artículos después de buscar su acceso, leerlos y codificarlos en el software, se redujeron a 33.

Para estructurar el trabajo se proponen algunas fases de estudio las cuales se presenta como sigue:

- Fase 1. Selección preliminar de los documentos a analizar: Descripción de algunos parámetros de selección de los documentos.
- Fase 2. Determinación de categorías y creación de las unidades y subunidades de análisis en el software: establecimiento de las categorías a usar
 - Categoría 1. Tipo de artículo
 - Categoría 2. Nivel de profundidad en el uso de la Historia de las Matemáticas
 - Categoría 3. Rama de Estudio a la que hace referencia.
 - Categoría 4. Uso general de la Historia de las Matemáticas (Meta y Herramienta).
 - Categoría 5. Uso específico de la Historia de las Matemáticas (Organizar el currículo, Incorporar acciones específicas en el aula de clase, Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas, Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos, Promover “habilidades complementarias” en los estudiantes, Promover habilidades y competencias en los profesores, Comprender la génesis de un objeto y rescatar significados o heurísticas, Mejorar la actitud hacia las Matemáticas).
- Fase 3. Codificación y selección final de los artículos a analizar: Presentación de las categorías, unidades y sub-unidades de análisis, así como su respectiva codificación en el software Atlas.TI
- Fase 4. Análisis de datos: Interpretación de la información resultante de las relaciones entre categorías.

6. Conclusiones

Durante el desarrollo del trabajo se fueron condensando una serie de conclusiones que no pudieron ser presentadas en cada apartado, de tal manera para facilidad de su interpretación se presentan como sigue:

En relación con los objetivos trazados:

- Para proponer una clasificación de los usos de la HM fue necesario establecer unos usos preliminares fruto de la experiencia del autor con el documento de González, P. (1991) en su trabajo de pregrado y la lectura del artículo de Siu, M.-K. (1997), los cuales se enriquecieron posteriormente con documentos de otros autores como Boero (1989), Siu (1997), Tzanakis & Arcavi (2002), Wen King Ho (2008) y que finalmente quedaron condensados en una tipificación denominada *usos específicos de la HM en la eM* (Organizar el currículo, Incorporar acciones específicas en el aula de clase, Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas, Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos, Promover “habilidades complementarias” en los estudiantes, Promover habilidades y competencias en los profesores, Comprender la génesis de un objeto y rescatar significados o heurísticas, Mejorar la actitud hacia las Matemáticas). Con el estudio de la propuesta de Jankvist (2009), personaje de autoridad en el tema, se lograron identificar dos usos de la HM que parecen se han acentuado entre la comunidad de educadores Matemáticos, como Herramienta y como Meta, los cuales este autor considera son *usos generales* que están en un nivel supra respecto a los establecidos como específicos. Estos dos últimos usos sí constituyeron una clasificación de los usos de la HM.
- Establecer un mecanismo de búsqueda de fuentes documentales (bases de datos, revistas, páginas web) fue un aspecto crucial para el desarrollo de la investigación, a lo que aportó en gran medida el trabajo realizado por Toerner, G., & Arzarello, F. (2012), en primera instancia como fuente de consulta para la extracción de documentos, y en segunda instancia como documento orientador

para la selección de los artículos.

- El autor tenía una idea inicial referida a la existencia de las propuestas y experiencias a consultar, se tenía la hipótesis de una mayor existencia en la cantidad de artículos que incluyeran propuestas de enseñanza o experiencias de aula que utilizaran la HM; no obstante, al definir los criterios de selección se obtuvieron solo 33 documentos (de 70 inicialmente elegidos) para analizar, la principal razón de depuración fue que varios artículos realizaban un recuento histórico sobre la evolución de objetos matemáticos pero no presentaba una reflexión que permitiera evidenciar su relación con la educación en Matemáticas; es probable que estos documentos se conviertan en insumos para favorecer el aprendizaje o la enseñanza de las Matemáticas si se realiza una transposición didáctica adecuada.
- El análisis de datos fue una de las tareas más complejas a desarrollar dadas las múltiples relaciones que se pueden establecer entre las categorías, unidades y subunidades de análisis elegidas, ya que era posible analizar de qué manera están relacionadas dichas categorías entre ellas, tomando de dos en dos, o tres en tres, o tratando de realizar un análisis holístico de las mismas, sin embargo, dicha tarea excedía los tiempos y alcances del presente trabajo, de tal manera se optó por centrar el foco de atención en la categoría de los usos (generales y específicos) comparada con las demás categorías y en el análisis de la relación entre usos generales y específicos.

En cuanto al rol de docente del autor

- Es posible estar a favor, o en contra del uso de la HM para la eM, pero si se es un partidario, entonces se debe conocer los aspectos relevantes del objeto de estudio que se está presentando como la génesis, las heurísticas asociadas a él, factores sociales que dieron origen a la consolidación de dicho objeto, para poder explicitar en los estudiantes que sus obstáculos seguramente fueron los mismos que han atravesado aquellos que se enfrentan al objeto, que sus modos de proceder pueden estar en una heurística o incluirse como nueva, en fin, para volver más *humana* a las Matemáticas.
- El desarrollo de una clase que presente en algún nivel la HM evidencia una mejor respuesta de los estudiantes, al menos en términos afectivos, muestra de esto son los documentos: Aznar (1994), Bagni (2001), Meavilla (1989) entre otros.
- Pensar en la pertinencia de los usos de la HM para la eM se observa al dividir la población en dos grupos, uno de referencia y otro de prueba, algunos documentos realizaban este análisis y las conclusiones globales eran que a pesar de que el nivel matemático disciplinar del grupo de prueba no superara ampliamente al grupo de referencia, si mejoraba la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.
- Establecer niveles de profundidad, permite comprender diferentes matices del uso de la HM en la eM, para el caso particular de este trabajo, el nivel de Determinación fue el que menos relaciones presentó, lo cual abre la banqueta a trabajar en artículos que respalden diseños de clase desde la presencia permanente de la HM en el aula.

Elaborado por:	Erazo Castro, John Fredy
Revisado por:	Mora Mendieta, Lyda Constanza

Fecha de elaboración del Resumen:	01	09	2016
--	----	----	------

En Memoria de un padre Amado

Contenido

INTRODUCCIÓN	1
1. Preliminares.....	3
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Objetivos	6
1.2.1. Objetivo general	6
1.2.2. Objetivos específicos.....	6
2. Antecedentes	7
2.1. Reflexiones finales sobre los Antecedentes	11
3. Marco de Referencia	13
3.1. Educación en Matemáticas.....	13
3.2. Historia de las Matemáticas	16
3.3. Usos.....	17
3.3.1. Propuesta de Boero (1989): Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años	22
3.3.1.1. Concebir la HM como fuente de ideas de cara a la «recontextualización» de los conceptos matemáticos como «instrumentos» de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad. 23	
3.3.1.2. Reconocer la HM como una ocasión, para los alumnos, de trabajar los conceptos matemáticos como «objetos de estudio»	24
3.3.1.3. Abrir un discurso matemático mediante la HM	24
3.3.1.4. Potenciar el quehacer docente	25
3.3.2. Propuesta de González (1991): Historia de la Matemática: integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza.....	25
3.3.2.1. La Historia de las Matemáticas para desdogmatizar y enriquecer culturalmente la enseñanza de las Matemáticas.....	25
3.3.2.2. La Historia de las Matemáticas como instrumento didáctico, el método genético .	26
3.3.2.3. La Historia de las Matemáticas como fuente de inspiración, de autoformación permanente y de orientación de la actividad docente.....	26
3.3.3. Propuesta de Siu Man Keung (1997): The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom	28
3.3.3.1. Para presentar anécdotas	28
3.3.3.2. Para presentar una visión general de un tema	28
3.3.3.3. Para mejorar la comprensión del contenido matemático.....	28
3.3.3.4. Para el desarrollo de ideas matemáticas	28

3.3.4.	Propuesta de Tzanakis & Arcavi (2002): Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey	29
3.3.4.1.	Contribuir al aprendizaje de las Matemáticas	30
3.3.4.2.	Reconocer la naturaleza de las Matemáticas y la Actividad Matemática.....	31
3.3.4.3.	Establecer un trasfondo didáctico para la enseñanza	31
3.3.4.4.	Apreciar las matemáticas como una actividad cultural	32
3.3.5.	Propuesta de Weng Kin Ho (2008): Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore.....	32
3.4.	Usos específicos de la HM.....	34
4.	Metodología	44
4.1.	Fases de la investigación	45
4.1.1.	Fase 1. Selección preliminar de los documentos a analizar	45
4.1.2.	Fase 2. Determinación de categorías y creación de las unidades y subunidades de análisis en el software.	47
4.1.2.1.	Categoría 1. Tipo de artículo.....	47
4.1.2.2.	Categoría 2. Nivel de Profundidad.....	50
4.1.2.3.	Categoría 3. Rama de estudio.....	51
4.1.2.4.	Categoría 4 y 5, Usos generales y Específicos	52
4.1.3.	Fase 3. Codificación y selección final de los artículos a analizar	53
4.1.4.	Fase 4. Análisis de datos	58
5.	Resultados del análisis	60
5.1.	Usos de la HM y Tipo de artículo	60
5.1.1.	Uso General Meta – Tipo de artículo	61
5.1.2.	Uso General Herramienta – Tipo de artículo	62
5.1.3.	Uso Específico “promover habilidades en los profesores”– Tipo de artículo.....	63
5.1.4.	Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes”– Tipo de artículo.....	64
5.1.5.	Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Tipo de artículo	66
5.1.6.	Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” – Tipo de Artículo	67
5.1.7.	Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Tipo de Artículo.....	68
5.1.8.	Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las Matemáticas” – Tipos de Artículo.....	69
5.1.9.	Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Tipo de Artículo.....	70
5.2.	Usos de la HM y Nivel de Profundidad	71
5.2.1.	Uso general “Meta” – Nivel de Profundidad.....	71
5.2.2.	Uso general “Herramienta” – Nivel de Profundidad.....	72

5.2.3.	Uso Específico “promover habilidades en los profesores”– Nivel de Profundidad.	73
5.2.4.	Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes”– Niveles de Profundidad	74
5.2.5.	Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Nivel de profundidad.....	75
5.2.6.	Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” –Nivel de profundidad.....	76
5.2.7.	Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Nivel de profundidad. .	77
5.2.8.	Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las Matemáticas” – Nivel de profundidad.....	78
5.2.9.	Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Nivel de Profundidad.	79
5.3.	Usos de la HM y Rama de las Matemáticas	79
5.4.	Usos de la HM generales y específicos	80
6.	CONCLUSIONES	81
6.1.	Cuestiones abiertas	83
7.	Referencias Bibliográficas.	85

Tabla de ilustraciones

<i>Ilustración 1. Meta-Usos e Intra-Usos de la HM según Jankvist (2009)</i>	19
<i>Ilustración 2. Intencionalidades del Uso de la Historia (Furinghetti)</i>	20
<i>Ilustración 3. Enfoques para usar la HM, Jankvist (2009)</i>	21
<i>Ilustración 4. Niveles de profundización del uso de la HM</i>	22
<i>Ilustración 5. Necesidades con relación al uso de la HM</i>	29
<i>Ilustración 6. Categoría 1. Tipo de artículo (Propuesta de enseñanza o Experiencia de Aula).</i>	50
<i>Ilustración 7. Nivel de Profundidad</i>	51
<i>Ilustración 8. Ramas de estudio</i>	52
<i>Ilustración 9. Usos HM</i>	53
<i>Ilustración 10. Ejemplo de análisis de un documento</i>	54
<i>Ilustración 11. Usos de la HM y Tipo de Artículo</i>	60
<i>Ilustración 12. Uso General Meta – Tipo de Artículo</i>	61
<i>Ilustración 13. Uso General Herramienta – Tipo de Artículo</i>	62
<i>Ilustración 14. Uso Específico “promover habilidades en los profesores” – Tipo de Artículo</i>	64
<i>Ilustración 15. Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes” – Tipo de Artículo</i>	65
<i>Ilustración 16. Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Tipo de Artículo</i>	66
<i>Ilustración 17. Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” – Tipo de Artículo</i>	67
<i>Ilustración 18. Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Tipo de Artículo</i>	68
<i>Ilustración 19. Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las matemáticas” – Tipos de Artículo</i>	69
<i>Ilustración 20. Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Tipo de Artículo</i>	70
<i>Ilustración 21. Uso general “Meta” – Nivel de Profundidad</i>	71
<i>Ilustración 22. Uso general “Herramienta” – Nivel de Profundidad</i>	72
<i>Ilustración 23. Uso Específico “promover habilidades en los profesores” – Nivel de Profundidad</i>	73
<i>Ilustración 24. Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes” – Niveles de Profundidad</i>	74
<i>Ilustración 25. Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Nivel de profundidad</i>	75
<i>Ilustración 26. Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” – Nivel de profundidad</i>	76
<i>Ilustración 27. Ejemplo Rescatar Heurísticas P22</i>	76
<i>Ilustración 28. Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Nivel de profundidad</i>	77
<i>Ilustración 29. Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las matemáticas” – Nivel de profundidad</i>	78
<i>Ilustración 30. Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Nivel de Profundidad</i>	79
<i>Ilustración 31. Usos Generales y Específicos</i>	81

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca en el grupo de investigación *Research on Mathematics Teacher Education* de la universidad pedagógica Nacional, para su desarrollo se tuvo en cuenta las relaciones existentes entre Historia de las Matemáticas y Educación Matemática, tomando como objeto de estudio los usos de la HM, a partir de los cuales se presenta una categorización de los mismos resultado de una revisión documental de revistas especializadas reconocidas por la comunidad de educadores matemáticos, las cuales se refieran a propuestas de aula o experiencias de actividades y cuyo diseño estuviese integrado con la Historia de las Matemáticas.

El presente trabajo se divide en seis capítulos, a saber:

En el primer capítulo se ubican los preliminares del estudio, en donde se presenta el planteamiento del problema a partir de algunas reflexiones del autor sobre las implicaciones de la Historia de las Matemáticas en el aula, por consiguiente, se consultan referentes bibliográficos que estudien la relación entre Historia de las Matemáticas y Educación Matemática, la literatura es amplia y es respaldada por eventos que giran en torno a estas relaciones entre HM y EM, ((Erazo & Cañizales, 2013; Siu Man-Keung. 1997; Sriraman. 2012; Fauvel & Van Maanen. 2002; Swetz, Fauvel, Bekken, Johansson, & Katz, 1995; Guacaneme,2016: entre otros)

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes, de manera específica doce investigaciones que estudian las interacciones dadas entre la Historia de las Matemáticas y la educación en Matemáticas, así como las conclusiones parciales de este capítulo, en la que se pueden observar algunos usos de la Historia de las Matemáticas sin profundizar en ellos, sino a manera de listado, y se menciona la pertinencia de desarrollar este trabajo.

En el tercer capítulo, se reconocen dos aspectos sobresalientes entre las relaciones antes presentadas: i) Educación en Matemáticas e ii) Historia de las Matemáticas y educación en Matemáticas, y de este último aspecto (ii) se ubican investigaciones que fundamentaron este trabajo, particularmente se exponen cinco investigaciones ((Boero, 1989; González, 1991; Siu, 1997; Tzanakis & Arcavi, 2002; Weng Kin Ho. 2008) que sirvieron para la creación de las categorías de análisis en los usos de la HM. Se culmina

el capítulo proponiendo ciertos *usos* de la Historia de las Matemáticas *generales* y *específicos* que se constituyen en las unidades de análisis fundamentales del trabajo.

En el cuarto capítulo se presenta la metodología usada, mostrando que se trata de una revisión documental de *Propuestas de enseñanza (o aprendizaje)* o *Experiencias de aula* (propuestas ya aplicadas). El paradigma y enfoque de investigación son cualitativo y humanístico-interpretativo respectivamente, se crean categorías de análisis, unidades y subunidades de análisis adicionales para interpretar y describir las relaciones entre cada categoría para la construcción de *unidades hermenéuticas*¹ mediadas por el software de análisis Atlas.TI.

En el quinto capítulo se encuentra el análisis realizado a partir de las categorías y unidades de análisis creadas, se describen las relaciones encontradas entre los usos de la Historia de las Matemáticas y las demás categorías de análisis, se presentan las distintas redes hermenéuticas creadas con el software y algunas interpretaciones sobre la información que se vislumbra con las redes condensadas.

El sexto capítulo hace referencia a conclusiones y cuestiones abiertas que iban surgiendo durante el desarrollo del trabajo o que resultaron del análisis final de los resultados, estas conclusiones obedecen a los objetivos trazados y no del capítulo de resultados ya que las conclusiones particulares de dicho capítulo se dan de manera transversal en él. Las cuestiones abiertas son reflexiones que escapan al alcance del presente trabajo pero que constituyen puntos de partida para investigaciones posteriores.

Como una finalidad adicional, se espera dejar una iniciativa para analizar de qué manera dichas propuestas de clase o experiencias de aula pueden aplicarse o replicarse y evidenciar a través de casos de estudio, si el uso de la HM contribuye a mejorar las prácticas Docentes.

¹ La Unidad Hermenéutica es el proyecto en el que se lleva un registro de todos los datos agregados al software, mantiene las rutas a los datos de origen y almacena los códigos, familias de código, vistas de red, y otros elementos que se desarrollan en el curso del trabajo.

1. Preliminares

1.1. Planteamiento del problema

Educación en Matemáticas es una de las finalidades más complejas que un docente de matemáticas enfrenta, uno de los mecanismos que el autor de este trabajo considera sirven para alcanzar este logro es mediante el uso de la Historia de las Matemáticas, basado en una experiencia previa en la que a través del estudio de algunos métodos en la historia para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución se encontró una relación directa entre educación en Matemáticas e Historia de las Matemáticas (Erazo & Cañizales, 2013). En este estudio se determinaron algunos de los usos de la HM extraídos de González (1991) y Siu Man-Keung (1997), y de los cuales surgen algunos interrogantes ¿Qué otros usos se pueden encontrar en la comunidad de educadores Matemáticos? ¿Existen categorías en dichos usos? ¿Cuál es el alcance de la HM como mecanismo de enseñanza? ¿Qué evidencias se tienen de que usar la HM es beneficioso de cara a los procesos de enseñanza?

A partir de estas reflexiones se tomó como hilo conductor uno de esos interrogantes:

¿Existen categorías en los usos de la Historia de las Matemáticas? Para responder este interrogante es necesario estudiar relaciones que se establecen entre HM y educación en Matemáticas, las siguientes investigaciones apuntan a la comprensión de estas relaciones:

- La monografía 12 *The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education* (Sriraman, 2012) en la que se encuentran tres capítulos distintos referidos al estudio de la Historia de las Matemáticas: *Topics in History and Didactics of Calculus and Analysis*, *Topics in the History and Didactics of Geometry and Number*, e *History of Mathematics in Mathematics Education*, en esta monografía se resaltan dos artículos “Transitioning students to calculus: Using history as a guide” desarrollado por Nicolas Haverhals y Matt Roscoe (USA) en dicho artículo se presenta la transición de los estudiantes del Pre-cálculo hacia el Cálculo usando como base la Historia, generando reflexiones de tipo pedagógico para el desarrollo de este campo matemático. El segundo artículo *The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral*

of the secant via Mercator's projection; de los mismos autores, presenta un ejemplo de la relación de un objeto matemático con una mala comprensión del mismo a lo largo de la Historia, proponiendo la construcción actividades que se pueden replicar en el aula.

- El volumen 6 del estudio ICMI *History in mathematics Education* (Fauvel & Van Maanen, 2002) referido a la Historia en la Educación Matemática, aborda multiples temas de estudio, como lo muestra el título de sus capítulos:
 - Descripción de la presencia de la HM en el currículo de algunos países como Argentina, Brasil, Italia, Polonia entre otros,
 - Cuestiones de tipo filosófico, multicultural e interdisciplinar, del uso de la HM en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas,
 - Perspectivas de investigación sobre la integración de la Historia,
 - Historia de la matemática para maestros en formación,
 - Formación histórica y comprensión sobre como el estudiante aprende Matemáticas
 - La Historia como soporte para diversos requerimientos educativos y oportunidades de cambio de aspectos sociales, económicos, y culturales de diversos niveles educativos,
 - Integración de la Historia de las Matemáticas en el aula, a partir de una encuesta analítica. Este capítulo es de especial importancia porque presenta cuestiones sobre porqué debería ser integrada la Historia en la educación Matemática, en qué nivel de profundidad y presenta ejemplos sobre cómo realizar esta integración,
 - Apoyo histórico para temas particulares,
 - El uso de recursos originales en la clase de matemáticas, entendiendo recurso original como *fuentes primarias* (Manrique & Triana. 2013).
 - Medios no estándar y otros recursos, haciendo referencia a fragmentos históricos en los libros de texto; el uso de hojas de trabajo; trabajar sobre los errores (de aprendizaje), las concepciones alternativas, y otros casos en los que la historia presenta un contraste con la perspectiva habitual, y,
 - Bibliografía para desarrollar trabajos ulteriores

La literatura encargada de estudiar estas relaciones es amplia, además de las investigaciones mencionadas existen también libros como: *Historical Topics for the*

Mathematics Classroom (NCTM, 1969), Learn from the Masters! (Swetz, Fauvel, Bekken, Johansson, & Katz, 1995), Vita Mathematica. Historical research and integration with teaching. (Calinger, 1996), Using History to Teach Mathematics: An International Perspective (Katz, 2000), entre otros². Adicional a la literatura, existen también eventos y conferencias cuyo objeto de estudio es esta relación (Guacaneme, 2016, p. 105):

- *Seis versiones de la European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education realizadas en 1993 (Monpellier, Francia), 1996 (Braga, Portugal), 1999 (Louvain-la-Neuve & Leuven, Bélgica), 2004 (Uppsala, Suecia), 2007 (Praga, República Checa) y 2010 (Viena, Austria).*
- *Ocho encuentros satélite del ICME (HPM Satellite Meeting of ICME)*
- *Cinco versiones de las Escuelas de Historia y Educación Matemática (ENHEM), realizadas en Colombia en los años 2006, 2008, 2010, 2013 y 2015.*

Observar estos estudios sobre la relación HM y educación en Matemáticas permite observar una creciente preocupación por la comunidad de educadores matemáticos en mejorar la comprensión de estas relaciones, de tal manera se reconocen cuatro ámbitos de interpretación de dichas relaciones: la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas. (Guacaneme, 2016).

Sin embargo, al centrar el foco de atención en los usos de la Historia de las Matemáticas, se encuentra que a pesar de haber iniciativas de clasificación, como la que realiza Harm Jan Smid³ en el estudio ICMI arriba señalado (Fauvel & Van Maanen,

² Una aproximación al estado del arte de esta relación se observa en Guacaneme (2016).

³ Clasifico reportes de investigación alemanes y holandeses en cinco asuntos, el formato original de los asuntos es inglés, pero, se presenta una traducción de los mismos para tener una mejor idea de la clasificación:

- I. Las discusiones y / o acuerdos de las posibilidades y ventajas del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- II. Ejemplos, guías didácticas y sugerencias para los maestros sobre cómo utilizar el material histórico en sus lecciones.
- III. Insumos de hechos más o menos históricos para su uso en el aula.
- IV. Descripciones empíricas de la utilización de material histórico en el aula

2002), no existe una categorización sistemática de estos usos, cada posible clasificación depende de quien las presenta y atienden a finalidades diferentes, es por esto que se hace necesario realizar una categorización sistemática de los usos de la HM en la educación en Matemáticas, todo esto con el fin de contribuir a la formación de profesores de Matemáticas.

1.2.Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Caracterizar sistemáticamente los usos de la HM en la educación en Matemáticas, a través de unidades de análisis y el estudio de propuestas o experiencias de aula que manifiesten la presencia de la Historia de las Matemáticas.

1.2.2. Objetivos específicos

- Establecer una clasificación de los usos de la Historia de las Matemáticas.
- Seleccionar documentos que evidencien el uso de la Historia de las Matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
- Realizar una revisión documental que permita catalogar propuestas y experiencias de clase a partir de usos de la Historia de las Matemáticas pre-establecidos.
- Comprender relaciones existentes entre la Historia de las Matemáticas y la educación en Matemáticas, enfocando particularmente los usos de la Historia de las Matemáticas.

2. Antecedentes

Analizar las posibles interacciones que se puedan dar entre la HM y la educación en Matemáticas no es una tarea nueva, estas interacciones han sido estudiadas por diferentes personas en la comunidad de educadores matemáticos, a continuación, se presentan algunas investigaciones reportadas en la literatura, parte de esta fue gracias a la investigación del Profesor Guacaneme (Guacaneme, 2016) y complementada por diferentes documentos que iban emergiendo de la búsqueda de relaciones entre “History of Mathematics” y “Education”, se utilizó el motor de búsqueda de google y se eligieron aquellas investigaciones que reportaran explícitamente el uso de la HM en la educación en Matemáticas, como ventana temporal se elige la última década en tanto se evidencia que la intencionalidad de este capítulo no es condensar un *estado del arte* sino una aproximación del lector a las últimas investigaciones relacionadas con la interacción Historia de las Matemáticas- Matemáticas; cada investigación reportada se presenta de manera cronológica, cuenta con su respectivo año de publicación, título del documento, autor(es) y una breve descripción:

Clark Kathleen. (2006) Investigating Teachers’ Experiences with The History of Logarithms: A Collection of Five Case Studies

En esta investigación la autora presenta los esfuerzos por estudiar el uso de la historia para enseñar un contenido específico a partir de una reunión de cinco casos de estudio, analiza de qué manera los profesores usan la HM en su práctica, menciona que según Bruckheimer and Arcavi (2000) antes de que los profesores puedan usar efectivamente la HM deben tener un amplio conocimiento sobre ella, y luego si poder usar e integrar la Historia en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Presenta los resultados de cada caso, y adicionalmente provee una revisión de la literatura respecto a la HM en la enseñanza, los usos de la Historia: razones y estrategias. El desarrollo histórico de los logaritmos (tema base de la investigación) y sobre el desarrollo profesional de los profesores.

Goodwin. (2007) Exploring the Relationship Between High School Teachers’ Mathematics History Knowledge and their Images of Mathematic.

Se Realiza un estudio cualitativo para explorar la relación entre el conocimiento de los profesores de la escuela secundaria sobre HM y sus opiniones sobre las Matemáticas, a través de una encuesta enviada a novecientos profesores de escuela secundaria, la información fue

cruzada y se encontró una correlación significativa positiva entre conocimiento de la Historia y éxito en las lecciones impartidas.

Tözlüyurt (2008) The perceptions of senior high students regarding the course, in which activities chosen from history of mathematics are used on the subject of numbers learning area.

Se investiga si el uso de HM tiene un efecto sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En su estudio el autor, trata de responder a la siguiente pregunta "¿Cuáles son las opiniones de los estudiantes de secundaria de último grado sobre las lecciones llevadas a cabo con actividades elegidas de la HM en las temáticas sobre el aprendizaje de los números? Estas opiniones fueron recogidas a través de entrevistas. Los resultados se interpretaron utilizando el método fenomenográfico. Los ocho estudiantes que participaron en el estudio pensaban que las matemáticas eran difíciles, pero encontraron que este pensamiento cambia cuando se enseña desde la Historia, afirmaron que podían comprender fácilmente los problemas y teoremas y que podrían hacer inferencias mediante el uso de la Historia de las Matemáticas.

Albayrak Ö (2008) Effects of history of mathematics integrated instruction on mathematics self-efficacy and achievement

En esta investigación se utilizó la HM en la enseñanza del volumen de pirámides, conos y esferas. Se probaron los efectos de esta práctica en la percepción de las matemáticas, la auto-eficacia y el éxito. Se recogieron datos cuantitativos y cualitativos en el estudio y se concluyó que no había una diferencia significativa entre la prueba inicial y la prueba final en términos de logros de los estudiantes experimentales y el grupo control en matemáticas en las escuelas. Sin embargo, de acuerdo con los resultados, los estudiantes del grupo experimental fueron más exitosos que los estudiantes del grupo de control. De acuerdo con los datos cualitativos, en general, los estudiantes del grupo experimental tuvieron pensamientos positivos acerca de la lección llevada a cabo mediante el uso de la historia de las matemáticas.

Weng Kin Ho (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore.

El autor considera el uso de la HM como metodología de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Singapur, puntualmente investiga cómo la HM puede ser integrada en aula a través de diseños de clase, para lo cual generan un marco de referencia, la factibilidad, los límites, riesgos y el potencial o la influencia que estos diseños tendrían en el currículo de Singapur.

Dentro de los aspectos relevantes se encuentran algunos usos de la Historia de las Matemáticas:

- Incrementar la motivación y la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes,
- ayudar a explicar dificultades y confusiones que los estudiantes encuentran en el análisis y desarrollo de las matemáticas,
- mejorar el razonamiento de los estudiantes usando problemas históricos,
- revelando los aspectos humanos del conocimiento de las matemáticas,
- usar la vida de los matemáticos para inculcar valores como la honestidad la diligencia y la determinación,
- proveer a los profesores guías para sus lecciones.

Para la medición de una buena actitud hacia las Matemáticas se toman los siguientes ítems:

- i. aferrarse a ciertas creencias y la filosofía de las matemáticas, como la universalidad de los resultados matemáticos y creer en la utilidad de las matemáticas,
- ii. la invocación de un interés genuino y tener placer en el aprendizaje de matemáticas,
- iii. el desarrollo de una apreciación de la belleza y el poder de las matemáticas,
- iv. la creación de confianza en el uso de las matemáticas,
- v. infundir un espíritu de perseverancia en la resolución de un problema como parte de la formación matemática.

El autor también pone de manifiesto las potencialidades, los riesgos y límites de los que un docente debe ser consciente cuando intenta realizar una integración de la HM en su quehacer.

Jankvist, U. T. (2009). History of Modern Applied Mathematics in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics.

En esta investigación el autor reconoce dos usos de la Historia, como herramienta y como fin, realiza una tipificación respecto a dos aspectos (i) meta-aspectos; referidos a la comprensión de la evolución de las matemáticas y su interacción con la sociedad y la cultura, y (ii) intra-aspectos: que están orientados a componentes más internos de las matemáticas.⁴

Propone, además, el estudio de tres casos desde una dimensión histórica, y reflexiona sobre el “lado cognitivo de la Historia como herramienta” denotando su cualidad motivacional o afectiva, todo esto mediado por los intereses personales y los objetivos trazados al usar la HM

Noel Ann Bradshaw, Mark McCartney & Tony Mann (2010). Using History in mathematics teaching – some open education resources for the future

En esta investigación se pretende encontrar los beneficios del uso de la HM como herramienta pedagógica de motivación en los currículos de licenciatura, haciendo referencia explícita a los

⁴ Estos dos tipos de aspectos se abordarán en el capítulo de Marco de referencia con profundidad.

reusable learning Objects RLO's (objetos de aprendizaje reusables) esto es la creación de archivos mp3 con la descripción de algunos documentos referentes a Historia, con el fin de propiciar que los estudiantes se sientan atraídos por el desarrollo histórico de un objeto, y por lo tanto logren una mejor comprensión del objeto a través de múltiples perspectivas.

Jankvist, U. T. (2011). Anchoring Students' Metaperspective Discussions of History in Mathematics.

Se presenta una investigación llevada a cabo a través del diseño de un “módulo Histórico” diseñado e implementado en la secundaria danesa para observar como los estudiantes establecen discusiones sobre la evolución de las matemáticas, los estudiantes fueron filmados y evaluados a través de ejercicios matemáticos, entrevistas, con el fin de lograr un “anclaje” de los estudiantes en discusiones desde una *meta-perspectiva*⁵. El autor presenta de manera rápida los “porqués” y los “cómo” del uso de la Historia en la Educación Matemática, los cuales se abordarán formalmente en el marco de referencia, también presenta un panorama general sobre la escuela danesa y la estructura de su currículo, entre otros análisis.

McCartney Mark (2012) History of Mathematics in the Higher Education Curriculum

En esta investigación se presenta la enseñanza de la HM en la universidad St. Andrews (Escocia), un caso de estudio en Greenwich y un caso de estudio en un colegio en Londres, complementado por la relación de la HM para el aprendizaje de análisis, y una sugerencia de recursos. En la introducción presenta dos enfoques para usar la HM en el plan de estudios:

- A manera de Bocado: es decir no se realiza una integración formal de la HM sino que se da a partir de anécdotas, o lecturas cortas, pero no se da un tratamiento extenso en términos históricos.
- A manera de Lineamiento: para usar la Historia de esta manera es necesario diseñar un módulo completo de HM en el que se profundice también en conceptos matemáticos.

Sevda Goktepe, Ahmet Sukru Ozdemir (2013). An example of using history of mathematics in class

En esta investigación se da una actividad que se desarrolla con veintiún estudiantes de grado octavo de una escuela privada primaria, la actividad se basa en hojas de trabajo en las que los estudiantes debían hallar raíces cuadradas mediante dos algoritmos diferentes, y luego de encontrar la solución comparar estos valores con los arrojados por la calculadora, tratando de

⁵ Es decir, observando las matemáticas desde un nivel por fuera de ellas, analizando cuestiones como el desarrollo sociocultural, los problemas y dificultades relacionados con ellas, entre otros.

comprender la manera en la que la calculadora trabaja. Luego mediante una entrevista escrita cuestionan a los estudiantes sobre su opinión de integrar la HM en la clase, registran estas respuestas y realizan la estadística de dicha información, encontrando principalmente ventajas en el uso de la Historia de las Matemáticas.

McAllister A. & White D. (2015) History of Mathematics: Seeking Truth and Inspiring Students

Los autores presentan una postura desde la cual defienden que el uso de la Historia, en especial la historiografía puede beneficiar el trabajo de los matemáticos profesionalmente, reconocen que es necesario ser conscientes de no recurrir a la Historia con una mirada anacrónica, puesto que esto podría inducir a no reconocer el verdadero camino histórico que un concepto ha recorrido.

Önder Bütüner S. (2015). Impact of Using History of Mathematics on Students' Mathematics Success: A Meta-Analysis Study.

El objetivo de esta investigación es analizar la efectividad del uso de la HM en el éxito de los estudiantes de Matemáticas. La pregunta problema de la investigación es *“What is the average effect size of HoM usage in learning-teaching environment on achievement of students in mathematics?”* (Önder S., 2015, p. 84). A partir de diferentes análisis de tipos cualitativos y cuantitativos de la información recolectada, al final de la investigación compara entre la población que no tuvo influencia o participación de la HM y los que sí, encontrando que el efecto general de la efectividad es medio, pero que este hallazgo es un aliciente para seguir mejorando en el uso de la Historia para la enseñanza.

2.1. Reflexiones finales sobre los Antecedentes

Al observar cada una de las investigaciones anteriores y las relaciones existentes entre la HM y la enseñanza/aprendizaje es una actividad que cada vez va tomando eco y fuerza entre la comunidad de educadores matemáticos, de tal manera, proponer una clasificación de los usos de la Historia en la educación en Matemáticas tiene relevancia y sus potencialidades se expanden en la medida de que futuros investigadores saquen provecho de este trabajo de grado, al observar estas investigaciones aquí reportadas se puede reconocer que los usos que reporta cada autor (si los reportan de manera explícita) dependen explícitamente de su formación y de sus vivencias particulares, es decir, son de corte subjetivo entre los cuales se pueden observar:

- Ayudar a explicar dificultades y confusiones que los estudiantes encuentran en el análisis y desarrollo de las Matemáticas.
- Incrementar la motivación y la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes.

- La Historia brinda a los profesores una guía para la enseñanza.
- La Historia revela facetas humanísticas del conocimiento matemático
- Los obstáculos del pasado en el desarrollo de las matemáticas pueden explicar porque hoy los estudiantes encuentran dificultades.
- Los problemas históricos pueden ayudar a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes.
- Mejorar el razonamiento de los estudiantes usando problemas históricos.
- Proveer a los profesores guías para sus lecciones.
- Revelar aspectos humanos del conocimiento de las Matemáticas.
- Usar la vida de los matemáticos para inculcar valores como la honestidad la diligencia y la determinación

Algunos de estos usos son reportados desde la postura y visión de cada autor, es decir, no existe un consenso globalizado para definirlos, de tal forma se considera que es necesario realizar esta caracterización de manera sistemática y buscar establecer un lenguaje común para que la comunidad de educadores matemáticos logre a partir de estos usos, avanzar en la construcción de conocimiento y mejorar el quehacer como docente, investigador o maestro en formación.

Cada uno de estos artículos pudo haber sido constituido como insumo para condensar el marco de referencia; sin embargo, se ubica en este apartado en tanto se reconocen como estudios o investigaciones para lograr establecer relaciones entre la HM y la enseñanza y aprendizaje de las mismas, y no como un deseo formal para establecer categorías en los usos de la Historia de las Matemáticas.

3. Marco de Referencia

La finalidad de este capítulo radica en presentar los ejes que fundamentan el trabajo. Se han considerado dos apartados, estos son:

- i. **Educación en Matemáticas (eM):** Se precisa una postura frente a lo que se considera *educar en Matemáticas* su relación y diferencia con términos como Educación Matemática, Didáctica de las Matemáticas o Matemática Educativa, para determinar posteriormente de qué manera la HM contribuye en la educación en Matemáticas.
- ii. **Historia de las Matemáticas y educación en Matemáticas:** en este apartado se aborda lo que se entiende por Historia y por Historia de las Matemáticas, luego se presentan los planteamientos de Jankvist (2009) quien propone dos usos de la Historia de las Matemáticas, como *herramienta* y como *meta*, siendo estos considerados aquí como *usos generales* de la HM; adicionalmente se definen unos niveles de profundización para estos usos en la educación en Matemáticas, a partir de la propuesta de Siu (1997) y replanteados también por Torres & Guacaneme (2014). Finalmente, a partir de las posturas de Boero (1989), González (1991), Siu (1997), Tzanakis y Arcavi (2002) y Weng (2008) se proponen *usos específicos* de la HM en/para la educación en Matemáticas.

3.1. Educación en Matemáticas

Es inevitable que al leer la expresión “*educación en Matemáticas*” no se genere conexión directa con otras expresiones como *Educación Matemática* [EM] o con algunas otras como *Didáctica de las Matemáticas* [DM] o *Matemática Educativa* [ME], estos últimos términos hacen referencia a disciplinas formalmente establecidas con avances y resultados en los procesos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las Matemáticas. Sin embargo, lo que aquí se percibe como *educación en Matemáticas* dista de ellos, esta expresión reúne un conjunto de acciones que pueden estar lejos de constituirse en una disciplina; y a pesar de tener relación con las anteriores, tiene otro valor semántico.

La Educación Matemática como corriente estadounidense [cuyo principal promotor fue William Kilpatrick (1998)] ha centrado su foco de estudio en «(...) *qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos; también se ha interesado en el qué y en el cómo de las matemáticas que deberían enseñarse y aprenderse en la escuela*» (Kilpatrick, Rico & Gómez, 1998, p. 1). La Educación Matemática surgió intentando responder

a las necesidades de mejorar y aumentar la formación de profesores, a partir del esfuerzo de distintas universidades en varios países hacia el siglo XIX y de la ampliación de cursos de formación; dentro de sus objetivos, la Educación Matemática adopta como centro de interés el aprendizaje, de tal manera que se han establecido diferentes focos de investigación, entre ellos la metodología de los maestros para la enseñanza, los problemas, obstáculos o dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje, el tipo de evaluación que se aplica o analizar el nivel de conocimiento que tienen los profesores sobre las Matemáticas y su naturaleza, y cómo se aplica este conocimiento para transmitirlo a sus estudiantes, entre otros focos (Kilpatrick, Rico & Gómez, 1998).

Algunos autores [Rico, Sierra y Castro (2000; p. 352) citado por Godino (2010)] consideran la Educación Matemática como «(...) *todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*», y toma distancia de la Didáctica de las Matemáticas en tanto esta se encarga de abordar los problemas que surgen en la EM y propone mecanismos de acción para su transformación. En este sentido, la *Educación en Matemáticas* sería más amplia que la *Didáctica de las Matemáticas*.

Por su parte, la Didáctica de las Matemáticas «(...) *la describen estos autores como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación*» (Godino, 2010). Es una corriente europea (Francia, Alemania, España) con promotores de su estudio como Vergnaud, Brousseau y Godino, entre otros. Su foco de estudio son las relaciones que se dan en la interacción de cuatro disciplinas a saber: Filosofía, Sociología, Matemáticas y Psicología. Estas disciplinas son la fundamentación de la Didáctica de las Matemáticas.

Ahora bien, si nos ubicamos en Latinoamérica, en México nace una iniciativa de fundamentar una teoría propia, es decir, que no tuviese la influencia americana o europea, de tal forma se posiciona la Matemática Educativa; su foco de estudio abarca la relación educación – Matemáticas y los múltiples nodos que confluyen en esta interacción (Cantoral, R. y Farfán, 2002). Surge de la necesidad de establecer una teoría mejor adaptada a la realidad de América Latina a partir de un proceso de culturización científica y de la necesidad de realizar modificaciones educativas en las Matemáticas a partir de diseños mejor adaptados a las prácticas escolares, su origen se da a mediados del siglo XX y su objeto de estudio son los fenómenos didácticos ligados al saber matemático.

Como se observa, hay asuntos en común entre estas tres áreas de interés, consideradas por algunos como disciplinas científicas, razón por la cual varios autores las entienden como similares.

Educar en Matemáticas implica una reflexión frente a consideraciones que se plantean en las disciplinas antes presentadas, entre ellas: ¿por qué educar en Matemáticas? ¿Para qué educar en Matemáticas? ¿Cuál es la intencionalidad de educar en Matemáticas y cuál es la justificación de la existencia de las Matemáticas en el currículo y por lo tanto de la enseñanza de las Matemáticas en la educación? Se reconoce que educar y enseñar no están en el mismo nivel de complejidad, la enseñanza hace parte de la educación pero no lo es todo, de hecho, vienen de raíces etimológicas distintas⁶, la educación se da en una percepción de orientación y de guía, la enseñanza está orientada a mostrar un arte o una labor, de tal forma, es necesario tener en cuenta todos los nodos que confluyen en la noosfera en el plano académico (Lerman, 2000), todas estas interacciones permiten recopilar elementos para saber por qué educar en Matemáticas, tener clara la justificación de la presencia de las Matemáticas en el currículo, permite cuestionarse sobre el rol que tienen los profesores de Matemáticas en una institución y la intención de su función como docentes.

Al realizar estas reflexiones se puede evidenciar el carácter social de las Matemáticas, de tal forma es necesario reconocer diferentes finalidades y concreciones al enseñar las Matemáticas, al respecto, la *Mathematical Association* (Niss, 1991 citado por Niss 1981, p.9) expresa que:

“La enseñanza que damos a un chico en la escuela debería prepararlo para ser un ciudadano en el sentido más amplio de la palabra: así, con este fin, se deben desarrollar las facetas moral, literaria, científica (incluyendo matemática), física y estética de su naturaleza.

*Así, en lo que a las Matemáticas se refiere, su **educación** debe capacitarlo no sólo para aplicar las matemáticas en asuntos prácticos, sino también para entender aquellos grandes problemas del mundo, cuya solución depende de las matemáticas y la ciencia”.* (negrita fuera del texto).

Apuntar a estos objetivos nos permite entender que el estudio de las Matemáticas se da bajo dos razones diferentes, unas de tipo *utilitarias* que apuntan a cubrir necesidades técnicas o profesionales del estudiante y de la persona como tal (lo moral, por ejemplo), obtener o mejorar un dominio de su vida personal o como requisito para el estudio de otras disciplinas, y unas

⁶ La palabra educar es de origen latín “ducere” que significa “guiar o conducir” en el conocimiento. A su vez, la palabra enseñanza procede del latín insignare, que a su vez está formado por in (en) y signare (señalar). Signare proviene de signum (seña, indicación o marca), y signum viene del indoeuropeo sekw, que significa seguir. Todo ello transmite la idea de indicar una dirección a seguir.

razones de enseñanza de tipo *general*, que son las que habitualmente escuchamos o encontramos en conversaciones con colegas y pares, para desarrollar el pensamiento (lógico, estructurado, sistemático, analítico entre otros), contribuir a mejorar la memorización, la imaginación, o para profundizar y comprender los avances del mundo, mejorar la exactitud y precisión, . . .

Educación en Matemáticas, por tanto, implica entender la enseñanza de las Matemáticas como un medio a través del cual se contribuye a desarrollar en los estudiantes el pensamiento lógico, la creatividad, la comprensión del mundo, la capacidad de emplear objetos matemáticos con fines prácticos o teóricos y aunado a esto debe desarrollar el carácter del sujeto como sujeto, es decir, dotar de elementos a cada individuo para que sea reconocido como agente fundamental en la construcción de una sociedad. En palabras de Niss (1991, p. 10) “*El individuo tiene que tener el derecho y la capacidad de dominar su vida social, profesional y privada y su vida como ciudadano y no sólo como súbdito en la sociedad*”. Si se dota de este carácter y se reconoce su poder es posible que los estudiantes desarrollen capacidades de comunicación con otros, de entender de manera especial la naturaleza de las Matemáticas, de reconocer su desarrollo histórico y de establecer las relaciones de esta con la sociedad, motivando la formalización de un sentido y propiedad de un individuo crítico y de un agente participativo en la construcción y desarrollo de la cultura (o “multiculturas”) en las que este inmerso, es necesario por tanto educar bajo la premisa del desarrollo democrático. Para el autor de este trabajo se hace necesario presentar lo que se entiende por educación en Matemáticas, esto debido a que, cuando más adelante se entre a decantar los diferentes usos de la HM aparecerán unos que trascienden el acto de la enseñanza de las Matemáticas, por tanto, es necesario hacer conciencia sobre la existencia de usos de la HM que apuntan a asuntos diferentes a los procesos regulares de enseñanza, desde el punto de vista tradicional de la palabra enseñanza.

3.2. Historia de las Matemáticas

Una vez se reconoce el carácter amplio sobre educación en Matemáticas, es necesario dar respuesta a la pregunta ¿Qué se entiende por Historia de las Matemáticas? Puesto que no tiene sentido presentar un discurso acerca de los usos de la HM si no se explicita una visión de lo que es Historia.

La Historia se concibe como la descripción de los fenómenos o acontecimientos concretos que se produjeron en el pasado (*Historia Objetiva*) esto como producto de un proceso de investigación que incluye selecciones, interpretaciones e hipótesis que hace un historiador, es por esto que no se accede directamente a la Historia sino a través de diversos tipos de fuentes (Kragh, 1989). Ahora bien, la Historia de las Matemáticas se concibe como todas las interacciones que resultan de la relación entre Historia y Matemáticas, de donde es posible

abordar múltiples aspectos como los objetos que se abordan, las fuentes usadas, los tipos de Historia que pueden surgir, entre otros.

3.3. Usos

Jankvist (2009) reconoce algunos autores como los primeros en reconocer la HM como guía para orientar procesos de enseñanza y aprendizaje: Poincaré (1963), Klein (1908), Polya (1962) y Weil (1978). Freudenthal en 1981 empieza a cuestionarse sobre el rol de la Historia y de su conocimiento por parte del profesor de Matemáticas, y una década después Fauvel (1991), en el ICMI, logra establecer una discusión entre la comunidad de educadores matemáticos respecto a la relación entre HM y EM, de tal manera que se evidencia que el estudio de la HM es un foco de estudio y de investigaciones entre la comunidad de educadores matemáticos, con el paso del tiempo otros académicos interesados en la HM han enriquecido estas ideas, tal es el caso de Jankvist, Siu y Arcavi entre otros.

En este documento se presentan dos usos de la HM que se han posicionado en la literatura especializada, estos corresponden a la propuesta de Jankvist (2009) quien plantea una forma de organizar y estructurar la discusión sobre *cómo* y *por qué* usar la HM en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y algunas de las interrelaciones entre ambas acciones. Jankvist plantea dos categorías para argumentar el uso de la Historia: (i) la Historia como herramienta y (ii) la Historia como meta⁷.

En la literatura se encuentran distintas propuestas de categorización de los *cómos* de los *porqués* del uso de la Historia [por ejemplo, Tzanakis y Arcavi (2000); Jahnke (2000); Tzanakis y Thomaidis (2000); Gulikers y Blom (2001); Fried (2001); Furinghetti (2004); Tang (2007)], esto permite evidenciar el interés en la comunidad de educadores matemáticos por determinar asuntos referidos a los usos de la Historia, Jankvist es consciente de que cualquier tipo de categorización tiene ventajas y desventajas, una de las desventajas puede residir en que los *cómos* y los *porqués* pueden no estar estrictamente separados, ya que un argumento para justificar un *cómo* presupone una intención de un *porqué*, y por lo tanto hay una delgada línea que los separa.

Como se mencionó antes, se encuentran entonces unos usos que aquí se denominarán *usos generales*⁸ de la HM en la enseñanza y aprendizaje de las mismas, así:

- i. La Historia como Herramienta:

⁷ Jankvist utiliza la palabra “goal”.

⁸ Llamados así por el autor de este trabajo.

Reúne aspectos relacionados con el cómo aprenden Matemáticas los estudiantes, uno de los argumentos que aparece con frecuencia es que la HM puede ser un factor motivante para los estudiantes en su aprendizaje y estudio de las Matemáticas, por ejemplo, ayudando a mantener el interés y el entusiasmo de los estudiantes hacia esta ciencia (el mismo autor referencia algunos trabajos al respecto Farmaki & Paschos (2007); Taimina (2004); Tattersall & McMurren, (2004)) o también que un enfoque histórico puede presentar unas Matemáticas más humanas, y quizás menos aterradoras (Russ et al. 1991). Además de este carácter emotivo, la Historia también puede ser una herramienta para el aprendizaje de las Matemáticas, por ejemplo, al proveer una nueva forma de presentar los contenidos matemáticos (se puede pensar en un diseño curricular basado en la Historia). Un uso especial que resalta el autor, es la identificación de obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938), bien sea para ser consciente de que los estudiantes se enfrentarán a ellos y por lo tanto ver la necesidad de estructurar un discurso acorde con esta situación; sea cual sea la motivación, el uso de la Historia se da como una herramienta para mejorar la práctica docente. El autor plantea que no es posible aprender realmente un concepto sin su Historia, a lo que llama *recapitulación*⁹, a partir de una razón evolutiva, aludiendo a que “la ontogénesis recapitula la filogénesis”.

ii. Historia como meta

La Historia como meta tiene un propósito básico: aprender sobre el desarrollo y evolución de la Matemática como búsqueda del aprendizaje de otros aspectos históricos de la disciplina, es necesario reconocer que cuando se refiere a Historia como meta, no debe confundirse con el conocimiento de la Historia como un tema independiente, es decir, no se estudia la HM para aprender Historia de las Matemáticas, sino para centrarse en el desarrollo de aspectos evolutivos relacionados con las Matemáticas como una disciplina.

Por ejemplo, mostrar a los estudiantes que las Matemáticas existen y evolucionan a través de tiempo y espacio, que se redefinen con cada cultura y a su vez la redefinen y que no han sido creadas de la nada, saber acerca de la HM en relación con fechas y anécdotas es un valor agregado. (Jankvist, 2009)

Dentro de los usos de la Historia como meta, es posible situar dos enfoques o niveles de profundidad, intra-usos y meta-usos, los cuales se resumen en el esquema 1.

⁹ La *recapitulación* es también conocida como *Principio Genético*, solo que esta expresión se da en el ámbito educativo

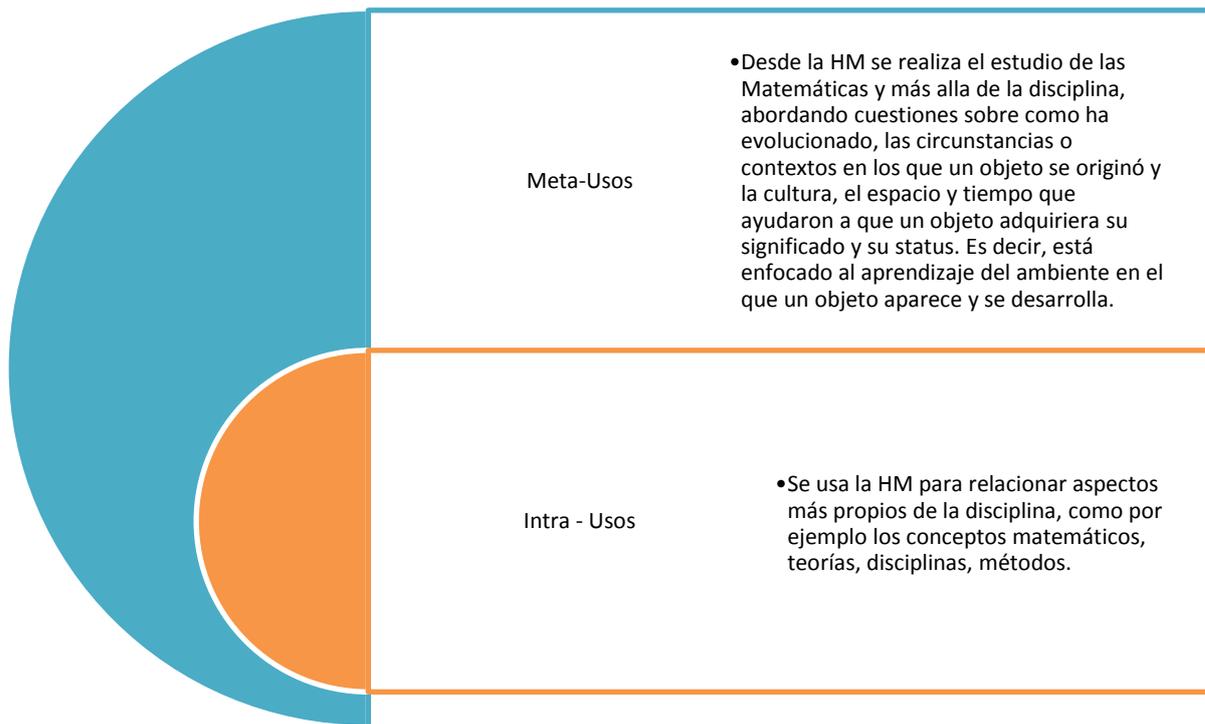


Ilustración 1. Meta-Usos e Intra-Usos de la HM según Jankvist (2009)

Además del por qué y cómo usarla HM, hay otra pregunta también genuina: ¿Cuál es la intencionalidad de usar la HM en la eM? Al respecto, Furinghetti (1977) propone dos intenciones diferentes:

- I. Para promover la disciplina: orientada a resaltar aspectos sociales y a ampliar los imaginarios que se tienen sobre Matemáticas y su naturaleza.
- II. Para reflexionar sobre las Matemáticas que puede desarrollarse a partir de:
 - a. Acciones locales que se centran en usar la HM para la introducción de un concepto o procedimiento pero que no trasciende de un caso específico, y se da en el aula de manera inmediata.
 - b. Acciones globales, cuya finalidad es cambiar y moldear una forma de pensamiento, cuando se estudian múltiples temáticas y formas de trabajo, afectando o desarrollando itinerarios didácticos.

Ambas acciones apuntan a la comprensión de aspectos internos de la disciplina y de objetos matemáticos específicos.

Un esquema que sintetiza los planteamientos de Furinghetti es el siguiente:

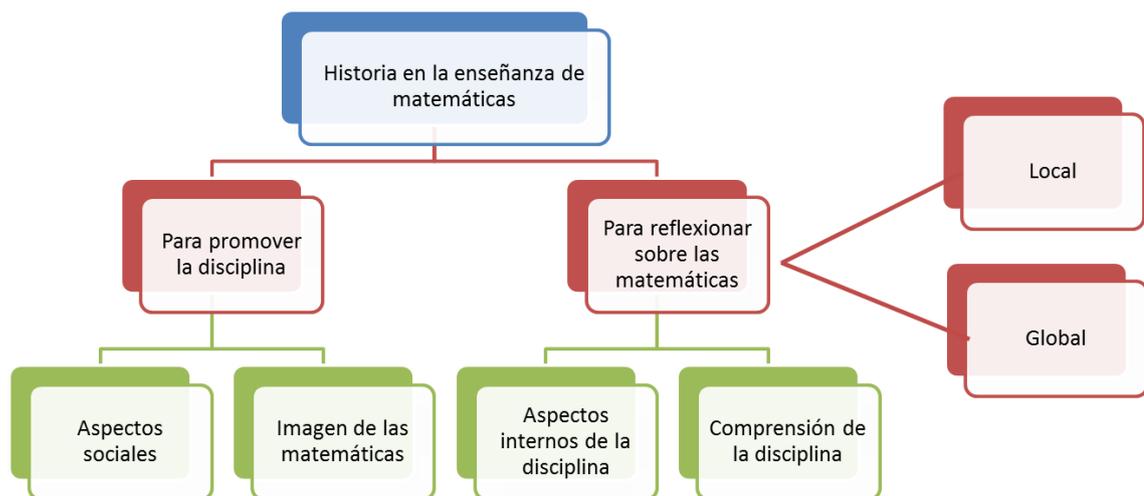


Ilustración 2. Intencionalidades del Uso de la Historia (Furinghetti)

Estas intencionalidades nos permiten reconocer que el uso de la HM como meta o como herramienta desde la postura de Furinghetti ya estaba latente antes de los planteamientos de Jankvist. Furinghetti propone la expresión *integración* de la Historia en tanto presenta un plano más amplio en el análisis del proceso cognitivo en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Este término abarca reconocer objetivos comunes tanto en las Matemáticas como en la HM en palabras de la propia autora (Furinghetti, 1977):

The word "integration" underscores a use of history in mathematics teaching developed according to the following steps: - to single out the common objectives of learning mathematics and learning the history of mathematics; - to develop them, exploiting the specificities of the two fields involved; - to analyse the cognitive results in the light of patterns of educational and epistemological research.

Es clara la intencionalidad de integrar la HM en los procesos de enseñanza, asunto compartido por varios autores como los mencionados al inicio de este capítulo, aunque también existen objeciones (Siu, 2007). Jankvist (2009) también propone algunas maneras de usar la Historia, a partir de tres enfoques, cada enfoque implica una presencia de la HM en diferentes proporciones: La *iluminación*, los *módulos* y la *Historia basada en enfoques*, En la Ilustración 3. Enfoques para usar la HM, Jankvist (2009) se explicita cada uno.

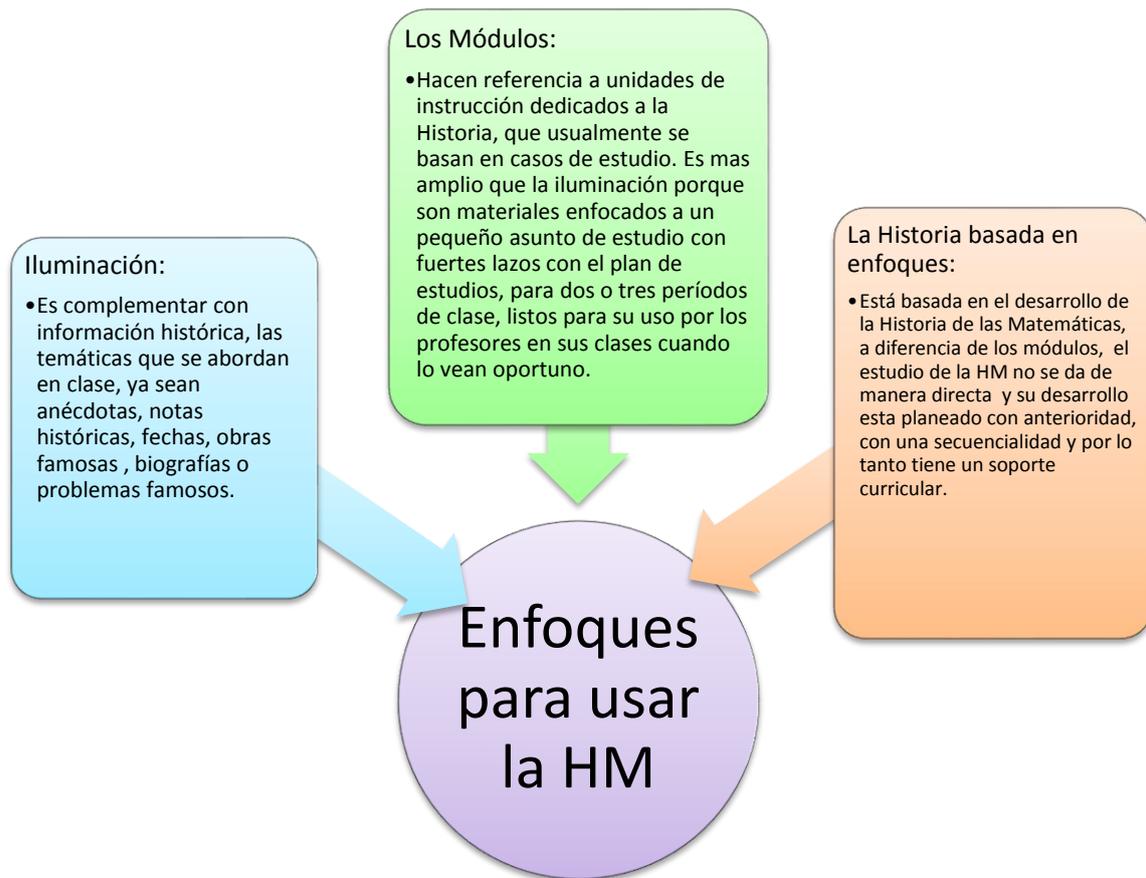


Ilustración 3. Enfoques para usar la HM, Jankvist (2009)

Por su parte, Siu & Tzanakis (2004) sugieren el uso de la HM como un aperitivo, un plato fuerte o un postre; reconocen estas tres analogías gastronómicas como maneras en las que la HM puede hacer presencia. Así, en los procesos de enseñanza de las Matemáticas puede *aludirse* a la HM para por ejemplo motivar a los estudiantes en el estudio de un tema matemático (*aperitivo* en términos de Siu y Tzanakis o *iluminación* para Janvisk), o puede utilizarse como insumo fundamental para el estudio de un contenido matemático (*plato fuerte* o *módulos*) o para enriquecer las Matemáticas que se enseñan o se aprenden (como *postre*), aunque también puede usarse la HM para *determinar* o construir los fundamentos de una secuencia de enseñanza (la *Historia basada en enfoques*); un desarrollo de estas ideas desde la interpretación del autor de este documento, la directora del trabajo, un documento de Guacaneme y Torres (2013) y charlas informales con Guacaneme, se exponen en el siguiente esquema, el cual fue constituido tomando como base uno de Mora & Guacaneme (2014) :

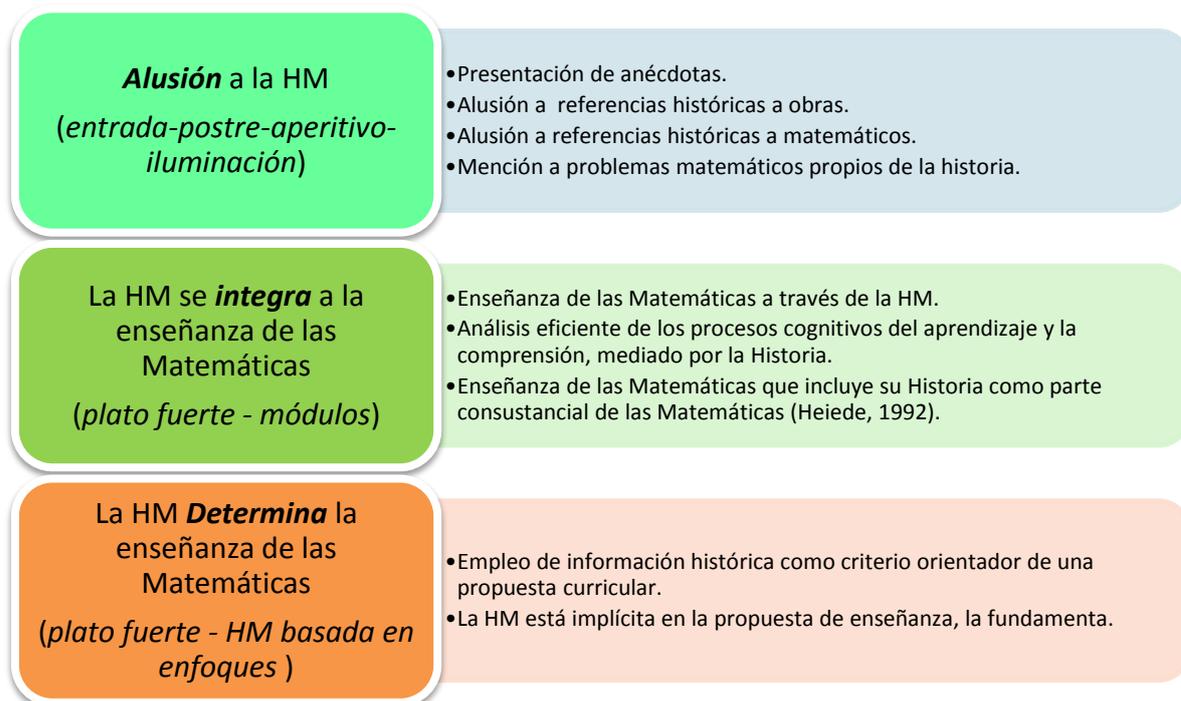


Ilustración 4. Niveles de profundización del uso de la HM

Al recapitular sobre las diferentes posturas presentadas, se evidencian aspectos en común, así como disensos sobre el uso de la HM en los procesos de enseñanza o aprendizaje según las perspectivas de los autores. Concebir la HM como meta o como herramienta permite apuntar a desarrollar procesos y formas de pensamiento diferentes, es por esto que al interior de cada una de estas posturas, los autores de este trabajo reconocen que cuando se menciona el término “uso de la HM” se está haciendo referencia no únicamente a la HM en los procesos de enseñanza o de aprendizaje, ya que se concibe que la HM también está presente en la educación en Matemáticas.

Cuando se acude a la literatura para ampliar o detallar los usos de la HM, se halla que algunos son explícitos mientras que otros requieren acudir a interpretaciones; en ese sentido a continuación, se presentan resúmenes de un conjunto de documentos en los que se pueden reconocer diferentes usos de la HM, relacionados con los ya expuestos, pero a partir de los cuales se busca establecer *usos específicos* de la HM como se verá finalizando el capítulo.

3.3.1. Propuesta de Boero (1989): Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años

Boero (1989) parte de la premisa *¿Qué Historia de las Matemáticas enseñar?* Reconoce que con base en la respuesta a este interrogante la manera de usar la HM varía, uno de los enfoques puede depender de las fuentes de información consultadas; algunos son libros escritos por los

mismos autores, otras fuentes radican en recuentos históricos que realizan personas diferentes sobre obras originales, pero resalta la importancia de enseñar o incluir la Historia de la Protomatemática¹⁰ ya que tradicionalmente se ha realizado (en Italia) como mecanismo fundamental para la comprensión de los objetos matemáticos, y reseña algunos libros como textos guía para la fundamentación de cursos matemáticos.

Otro de los enfoques es reparar en el público y el contexto al que va dirigido la inclusión de la HM, por ejemplo, si se piensa en un público bajo un contexto industrial es recomendable enfocarse en las técnicas, y en los procedimientos, o si por el contrario el público y contexto están orientados a comprender el funcionamiento de los objetos que los rodean es más apropiado usar la HM para enseñar la naturaleza de los objetos matemáticos, de esta manera se puede ver el uso de la Historia como una *meta*.

Paolo Boero (Boero, 1989) presenta algunas reflexiones sobre la experimentación en el diseño de currículos a través de usos de la HM, reconoce explícitamente el uso de la HM como medio *didáctico*, dichas reflexiones son resultado de cursos que él mismo viene desarrollando desde 1975 en Génova. A partir de estas reflexiones reconoce cuatro tipos de usos de la HM, a saber:

3.3.1.1. Concebir la HM como fuente de ideas de cara a la «recontextualización» de los conceptos matemáticos como «instrumentos» de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad.

Boero (1989) propone usar la HM para el diseño y construcción de itinerarios didácticos inspirados en la progresión histórica que se ha seguido en la construcción de ciertas teorías, estos itinerarios se pueden desarrollar de manera paralela al curso regular ofrecido a los estudiantes, intentando desarrollar habilidades y formas de pensamiento diferentes, dichos itinerarios presentan unas características puntuales:

- Los contenidos que se aborden deben ser manejados en algún nivel por parte de los estudiantes, en tanto que la contextualización histórica no requiera una explicación del concepto mismo.
- La profundización respecto a un tema debe ser orientada con base en las experiencias del alumno, de tal manera que dicha interacción objeto-alumno debe existir en algún nivel.

¹⁰Nociones Protomatemáticas: Aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos. Como ejemplo tenemos la noción de simplicidad o patrón presente por ejemplo en las tareas algebraicas de factorización y simplificación de expresiones algebraicas (Martínez, 2002).

- Una característica de este tipo de diseños curriculares es la de enfrentar al estudiante a una “tensión cognoscitiva”, es decir, crear situaciones en las que el estudiante pese a conocer el concepto o la temática que se quiere desarrollar no encuentre un mecanismo convincente que lo ayude a solucionar la situación planteada, de tal forma que aludir a la HM permita suplir estas necesidades.

Boero enfatiza en la eficacia de la recontextualización histórica, reconociendo básicamente tres hipótesis i) la correlación entre la evolución del individuo y la evolución cultural de la especie, ii) la necesidad de ofrecer un itinerario extracurricular con el objetivo de que el estudiante se interese, aprenda y reconozca formas de pensamientos que son ajenas al desarrollo curricular regular del aula y iii) explorar el funcionamiento del objeto matemático en un tema histórico cualquiera (Boero, 1989).

3.3.1.2. Reconocer la HM como una ocasión, para los alumnos, de trabajar los conceptos matemáticos como «objetos de estudio»

Boero (1989) reconoce que presentar a los estudiantes unas Matemáticas “absolutas” no ofrece motivación a los alumnos, ni relaciona sus experiencias con el conocimiento matemático abordado, de tal manera propone como respuesta a esta dificultad, proponer a los estudiantes actividades en las que “utilicen” los formalismos y técnicas matemáticas abordadas, permitiendo entre otras cosas:

- Representar las Matemáticas como una parte de la cultura humana, que evoluciona con ella y, en consecuencia, preparar, el terreno (para los que continúen estudiando) para poder sistematizar los conceptos matemáticos según las Matemáticas de hoy;
- reconocer la importancia de los formalismos y de las técnicas, y las ambigüedades e insuficiencias de cada formalismo;
- construir o profundizar los conceptos matemáticos escogidos por medio de las diversas maneras en que se presentan en cada época.

3.3.1.3. Abrir un discurso matemático mediante la HM

La HM puede ayudar a los estudiantes a comprender que un concepto tuvo diferentes reestructuraciones antes de ser objetivado, que las nociones de demostración no son de fácil comprensión, esta posibilidad es la que considera el autor como una oportunidad para que los estudiantes construyan un discurso matemático sobre las temáticas abordadas (Boero, 1989).

3.3.1.4. Potenciar el quehacer docente

En las reflexiones finales que plantea Boero (1989) se reconocen algunos usos de la HM de las matemáticas presentes a lo largo del escrito, enfocadas exclusivamente en la relación de la HM con el maestro directamente, dentro de las cuales se pueden destacar:

- La HM permite la introducción de un nuevo concepto matemático a partir de notas históricas.
- La HM ofrece contextos para la construcción de conceptos y habilidades matemáticas.
- La HM permite anticipar obstáculos y errores en el aprendizaje de los estudiantes.
- La HM mejora la atención del maestro hacia la concepción de los alumnos, favorece el diálogo con ellos y dirige el proceso de organización de su cultura matemática.

El autor resalta que todas estas facetas de la HM no pueden ser aplicados de manera eficiente si el maestro no cuenta con una formación histórica necesaria, de tal manera que muchos de los profesores que desarrollan las clases (en Génova) al no ser licenciados, desconocen la historicidad de las Matemáticas y ello es determinante para poder usar la HM en la enseñanza.

3.3.2. Propuesta de González (1991): Historia de la Matemática: integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza

A partir de la propuesta de González (1991) se puede interpretar tres usos o finalidades de la HM para la enseñanza de las Matemáticas, como se muestra a continuación:

3.3.2.1. La Historia de las Matemáticas para desdogmatizar y enriquecer culturalmente la enseñanza de las Matemáticas

Esta postura radica en usar la Historia de las Matemáticas para controvertir la creencia de que las Matemáticas son una serie de constructos acabados y formalizados encontrados fundamentalmente a partir de lógicas y estructuradas demostraciones. Afirma González (1991) que esta postura es considerada inaceptable para la enseñanza puesto que no representaría un atractivo para los estudiantes, se trataría de aprender un conjunto de mecanismos y pasos concretos para encontrar determinada solución, lo cual no constituiría un reto para los estudiantes más curiosos. La iniciativa consiste en dotar de atractivo a las Matemáticas, desde el estudio de su Historia, bajo una perspectiva de la necesidad de múltiples caminos y discusiones

en la construcción de conocimiento, la comunicación y el análisis de errores y demás acciones que permitan percibir la actividad matemática como un reto, sin perder su rigurosidad.

La reflexión a la que invita el autor es al conocimiento de la HM como un elemento que permite influenciar la enseñanza de las Matemáticas desde un punto de vista didáctico, por lo que plantea que la presencia de la HM en la escuela debe promulgarse y establecerse. Un factor relevante es la intención de modificar curricularmente la estructura de la enseñanza de las ciencias e integrar la Historia de cada ciencia como una herramienta para modificar estas prácticas de enseñanza en la escuela, fundamentalmente.

3.3.2.2. La Historia de las Matemáticas como instrumento didáctico, el método genético

Este uso propone un método extraído de la biología, en la obra *La ciencia y el método* (Poincaré, 1963 citado en González, 1997, p. 286), se describe sucintamente la naturaleza del método genético:

«Los zoólogos pretenden que el desarrollo embrionario de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados desde los tiempos geológico. Parece que sucede lo mismo en el desarrollo de los espíritus. El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente, pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guía.»

La idea básica es presentar los objetos matemáticos (o de cualquier disciplina) sin dejar a un lado la ruta metodológica de su construcción y el proceso histórico que se dio en el camino a la objetivación. En términos generales, el estudiante debe pasar por los estados más básicos del objeto matemático de estudio, luego intentar establecer relaciones con otros objetos conocidos, y finalmente lograr la objetivación de dicho objeto.

3.3.2.3. La Historia de las Matemáticas como fuente de inspiración, de autoformación permanente y de orientación de la actividad docente

El autor pone de manifiesto su interés para dotar la Historia de las Matemáticas de un matiz de herramienta para la autoformación permanente en la actividad de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, expresa ocho razones (González, 1991):

- i. La perspectiva histórica permite articular de una forma más apropiada los temas de estudio en un curso de matemáticas.
- ii. La Historia de las Matemáticas favorece la comprensión de los objetos matemáticos que se estudian cuando se recrea la ruta histórica de su formalización y hace reflexionar al maestro al reconocer las dificultades de los contenidos que se enseñan.
- iii. La visión histórica puede apoyar una propuesta de un aprendizaje activo. Según Gil (1980 citado en González, 1991, p. 287), “*al extraer de la historia de la ciencia la problemática que, debidamente presentada a los alumnos, les permitiera redescubrir, a través de una actividad investigadora, los conocimientos que la enseñanza tradicional trasmite ya elaborados*”, se podría tender a alcanzar uno de los objetivos de la enseñanza de cualquier ciencia, a saber, enseñar, en alguna forma, a hacer ciencia.
- iv. Algunas ideas o creencias no muy ajustadas a la realidad son fácilmente erradicables apelando a la Historia, como la creencia en la existencia de una *Matemática Moderna* negando la idea de las Matemáticas tradicionales y su evolución histórica, dejar a un lado la reducción de la matemática a un lenguaje al servicio de las otras ciencias y técnicas, o el carácter lógico deductivo de las matemáticas sin analizar los obstáculos o dificultades que en dicho contexto dieron lugar al objeto de estudio.
- v. Las Matemáticas tienen una fuerza creativa interna que se manifiesta en el devenir histórico y que, como objetivo formativo esencial, debe contribuir a desarrollar el espíritu creativo del alumno.
- vi. La HM revela los ingentes esfuerzos desplegados por diferentes generaciones matemáticas en la formación de algún concepto nuevo o en la resolución de algún problema importante, que, a la hora de tratarlo en la clase, el profesor puede creer que debe ser trivial para el alumno.
- vii. La Matemática recreativa se nutre en gran parte de problemas matemáticos que han tenido cierto interés a lo largo de la Historia de la Matemática. Por tanto, usa la HM para extraer toda clase de problemas.
- viii. La Historia de las Matemáticas como forma de integración con otras disciplinas y ciencias como la Filosofía y las Ciencias Sociales.

Adicionalmente, en el discurso del autor se reconocen otros usos que se presentan a continuación:

- Preceder, mediante una introducción histórica, la exposición de cada tema, situando en la historia los problemas que se van a abordar.
- Se pueden añadir a los apuntes que se entregan a los alumnos indicaciones, breves resúmenes o notas históricas.

- Se puede también, a lo largo del desarrollo de la clase y en cualquier momento, indicar brevemente a qué matemáticos o corriente matemática se debe la introducción de un concepto nuevo, la demostración de un teorema o la resolución de un problema.

3.3.3. Propuesta de Siu Man Keung (1997): The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom

Por su parte Siu Man Keung (1997) presenta cuatro posibles usos de la Historia de las Matemáticas en la clase de Matemáticas.

3.3.3.1. Para presentar anécdotas

El profesor Siu reporta el uso de la Historia de las Matemáticas para extraer anécdotas que despierten el interés de los estudiantes y logren centrar su atención en el desarrollo del contenido matemático. Adicionalmente, manifiesta él, desarrolla en los estudiantes la admiración a algunos matemáticos ilustres quienes pudieron resolver alguna cuestión particular mencionada en las anécdotas. Finalmente, para forjar algunas conexiones culturales con la historia.

3.3.3.2. Para presentar una visión general de un tema

El uso reportado obedece a emplear la HM para realizar o bien la introducción o el epílogo de determinado objeto matemático, dando a los estudiantes una perspectiva histórica sobre el desarrollo o construcción de dicho objeto matemático o para mostrar cuál ha sido la ruta histórica de su evolución.

3.3.3.3. Para mejorar la comprensión del contenido matemático

Siu (1997) reconoce que es necesario mejorar la comprensión sobre los objetos matemáticos que se estudian y para ello sugiere el uso de la HM. Este uso puede considerarse trivial, sin embargo, no puede omitirse dentro del discurso del autor.

3.3.3.4. Para el desarrollo de ideas matemáticas

En el desarrollo de los cursos de matemáticas que Siu ha orientado, reconoce algunos ejes temáticos de la Historia que propician habilidades matemáticas como por ejemplo mejorar el análisis y la comprensión de textos matemáticos, comprender mejor el lenguaje y la notación

matemática, crear hábitos de escritura usando notación matemática o mejorar la forma de investigar y de estudiar respectiva temática mientras se intenta comprender la génesis de dicho objeto; en este tipo de estudios Siu reconoce algunos hitos históricos como ejes temáticos y usa la HM para abordarlos sistemáticamente, dichos ejes temáticos son:

- (1) Elementos de Euclides
- (2) De Pitágoras, Eudoxo ... (Magnitudes inconmensurables) a Dedeking, Cantor, ...
(Números Reales)
- (3) Geometrías No euclidianas
- (4) Teorema de la incompletitud de Gödel

3.3.4. Propuesta de Tzanakis & Arcavi (2002): Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey

Tzanakis & Arcavi en Fauvel, Van Maanen (2002) presentan algunos de los roles que puede desempeñar la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática reconociendo que la HM beneficia tanto a profesores como estudiantes. De tal forma, se presentan dos necesidades con relación al uso de la HM y seguido a esto algunos de los usos que presentan los autores, que se resumen en la Ilustración 5. Necesidades con relación al uso de la HM



Ilustración 5. Necesidades con relación al uso de la HM

En relación con estas necesidades, los autores presentan diferentes usos de la HM, a saber:

3.3.4.1. Contribuir al aprendizaje de las Matemáticas

Esto se fundamenta en cuatro aspectos:

1. Desarrollo histórico vs. Matemáticas rígidas: las Matemáticas usualmente se presentan a partir de una organización lógico deductiva; el autor propone presentar el proceso histórico que ha experimentado un objeto matemático antes de ser objetivado y de tal manera el uso de la Historia puede ayudar a descubrir cómo algunos conceptos matemáticos, estructuras e ideas se crearon como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental (Freudenthal, (1983) citado por Fauvel & Van Maanen (2002)).
2. *Historia como recurso*: la Historia provee una serie de recursos, de preguntas relevantes, problemas y exposiciones que son valiosas para motivar a los estudiantes a interesarse por las Matemáticas.

En este sentido, la HM puede usarse para *identificar fuentes de información* (Recursos, preguntas, problemas interesantes, etc.) y para *motivar a los estudiantes* que se puede afrontar de dos maneras, bien sea centrar la atención de los estudiantes a partir de notas o anécdotas interesantes o bien interesar a los estudiantes por las matemáticas por encontrar la solución de los problemas que aparecen en la HM o desde el estudio de las soluciones planteadas por matemáticos a dichos problemas.

3. *Historia como puente entre las Matemáticas y otras asignaturas*: La Historia expone diferentes relaciones de las Matemáticas con otros dominios, de tal manera es posible usar la HM para encontrar relaciones de interdisciplinariedad con otras ciencias.
4. *Historia como potenciadora de habilidades*: la Historia puede desarrollar habilidades y destrezas ajenas a las Matemáticas, como por ejemplo habilidades lecto-escritoras en las que se habitúa al estudiante a la lectura de obras matemáticas, algunas de ellas no están relacionadas explícitamente con la temática que se desarrolla, sino que son más bien lecturas cortas que motivan en los estudiantes formas de pensamiento distintas. Por ejemplo, el estudio de soluciones a problemas matemáticos que han sido identificados como hitos en las matemáticas, como las paradojas de Zenón, las nociones de anillos, la trisección del ángulo o la cuadratura del círculo.

Este tipo de lecturas o actividades crea una conciencia en los estudiantes sobre la construcción social de un objeto matemático de las situaciones y del contexto que rodean a un objeto específico.

3.3.4.2. Reconocer la naturaleza de las Matemáticas y la Actividad Matemática

La HM aporta a comprender la naturaleza de las Matemáticas y la actividad matemática, en dos sentidos:

- En relación con el contenido: A partir del uso de la Historia los estudiantes pueden comprender las variables que estuvieron presentes en el desarrollo de un objeto de estudio: dudas, errores, dificultades y esto genera una valiosa construcción en la actividad de hacer matemática.
- En relación con la forma: Es evidente que las matemáticas en su forma actual no siempre ha sido la misma, ha cambiado la notación, el lenguaje simbólico y algebraico y los sistemas de representación, de tal forma que la historia ayuda a comprender cómo fueron constituidos hasta la actualidad.

3.3.4.3. Establecer un trasfondo didáctico para la enseñanza

Cuando se estudia la Historia y cuando se trata de reconstruir el desarrollo histórico de un concepto matemático los profesores pueden:

- Identificar formas de motivar a los estudiantes en la introducción de un nuevo concepto matemático para que de esta manera los estudiantes puedan comprenderlo.
- Ser conscientes que durante la consolidación de un objeto matemático surgieron obstáculos y dificultades que pueden volver a aparecer en el aula, puede ayudar a identificar los preconceptos que deben tener los estudiantes antes de abordar un determinado tema.
- Al hacer al docente más consciente del proceso de hacer matemáticas, puede permitir apreciar mejor la naturaleza de la actividad matemática.
- Ampliar el repertorio de problemas, estrategias y explicaciones en torno a un objeto de estudio
- Estudiar una situación en la que la notación y formas de representación han cambiado con el tiempo puede sensibilizar la comprensión de los estudiantes tanto del objeto de estudio como de la forma de representación adoptada.

3.3.4.4. Apreciar las matemáticas como una actividad cultural

Al reconocer que las Matemáticas son una producción cultural e interdisciplinar con otras ciencias, se puede conseguir que a través de la HM:

- Los estudiantes evidencien que las matemáticas son resultado de la curiosidad, de retos intelectuales y formas diferentes de pensamiento.
- Que las matemáticas son influenciadas por factores sociales y culturales y que estos factores determinan el porqué de presentar las matemáticas de una manera formal.

Mediante el estudio de la Historia los estudiantes pueden ser conscientes de que las formas de representación tienen una influencia occidental pero que existen otras formas de representación propuestas por diferentes culturales en ámbitos sociales diferentes.

3.3.5. Propuesta de Weng Kin Ho (2008): Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore

Weng Kin Ho considera el uso de la historia como una metodología para la enseñanza y el aprendizaje, es decir, investiga cómo la HM puede ser integrada en las clases, especialmente en Singapur a partir de diseños de clases, evaluados y bien estudiados. Divide la investigación en tres momentos:

- i. Marco de referencia para la implementación: Esto tiene que ver con la necesidad de reflexionar si al usar la HM para procesos de enseñanza un maestro puede asumir implícitamente que las Matemáticas del pasado están en constante relación con los problemas de matemáticas actuales solo que carecían de una notación para representarla. Esto pone de manifiesto una serie de cuestionamientos que apuntan a concebir algunos Usos de la Historia de las Matemáticas, como por ejemplo preguntarse sobre ¿Cuál es la intencionalidad de determinado autor cuando fundamenta un objeto matemático? Teniendo que asumir dos dificultades (Weng Kin, 2008, p. 10):
 - a. Ir más allá de una simplificación del desarrollo histórico que ha tenido un objeto, en su lugar se necesita adquirir un dominio para acudir a la historia de manera asincrónica y entender que el contexto juega un papel fundamental para la objetivación de determinado concepto.

- b. Lidar con la recapitulación psicológica, que en pocas palabras radica en la creencia que la ontogénesis, es decir, el estudio de la especie para comprender el desarrollo del individuo.
- ii. Factibilidad: Potencialidades, límites y riesgos: el autor refiere que en la ejecución de cualquier metodología es necesario considerar estos tres factores; parte de los estudios de caso reportados en la investigación (Weng Kin Ho, 2008) y reconoce básicamente tres potencialidades
 - a. Mejorar la comprensión del objeto de estudio.
 - b. Crear un ambiente de aprendizaje diferente al tradicional, en este aspecto es necesario especular que el autor hace referencia a la configuración de la escuela tradicional, en donde el profesor es quien transmite el mensaje y el estudiante es el receptor.
 - c. Inculcar o mejorar actitudes de los aprendices y de los profesores hacia las matemáticas; refiriéndose al uso de las anécdotas como herramienta para romper la “monotonía” de las clases.

Respecto a los límites, el autor pone de manifiesto tres factores que casualmente coinciden con algunas objeciones que presenta Siu Man Keung (2007) en otro artículo

- a. Falta de formación de profesores en Historia de las Matemáticas, al respecto Schubring (Schubring, 2000) presenta una perspectiva internacional en este tipo de formación y su estudio indica que el componente histórico ya no está restringido a aquellos países que tienen una tradición en HM, y que la comunidad de matemáticas preocupados o interesados en este componente histórico esta en continuo crecimiento, pero que la formación en profesores no se da de manera explícita¹¹.
- b. Falta de tiempo en el currículo, el autor hace referencia a cada una de las actividades que como docentes (sea cual sea la asignatura) debemos cumplir, como el seguimiento a los estudiantes, tiempo para la preparación de clases, atención a padres, otros proyectos o funciones y en general las actividades propias de la actividad docente, al menos del aula, y esto aunado con la necesidad o la intencionalidad de incluir la HM en las clases representa un esfuerzo que muchos profesores no desean asumir.
- c. Falta de rúbricas evaluativas, este tal vez es el aspecto que más “dificulta” el trabajo con HM, ya que no es posible determinar si puede ser medido el

¹¹ Es aconsejable citar aquí el trabajo de Guacaneme y Torres (2011) en el que se realiza un estudio de las universidades colombianas que reportan algún curso de historia en el pensum de Licenciaturas en Matemáticas y afines, quizás la realidad de otros países latinoamericanos no sea ajena a la colombiana.

conocimiento en Historia, y de no evaluarla ¿Cómo exigir la atención de los estudiantes en HM en comparación con los otros objetos de estudio?

Los *riesgos* que reporta el autor tienen relación con realizar una efectiva *transposición didáctica* (Chevalard 1997) mediada por la Historia, es decir, rescatar los orígenes de un concepto matemático y el contexto en el que se originó, pero sin perder de vista el punto de unión con la actualidad y además realizarlo en un tiempo relativamente corto.

3.4. Usos específicos de la HM

A partir de las ideas comunes identificadas en los resúmenes anteriores se reconocen diferentes *usos específicos* de la HM en la educación en Matemáticas, los cuales se pueden ver en la siguiente tabla.

Propuestas Usos de la HM	Boero (1989)	González (1991)	Siu Man Keung (1997)	Tzanakis & Arcavi (2002)	Weng Kin Ho (2008)
Organizar el currículo		La Historia de las Matemáticas como instrumento didáctico, el método genético			
Incorporar acciones específicas en el aula de clase		La Historia de las Matemáticas como instrumento didáctico, el <i>método genético</i>	Para presentar anécdotas Para el desarrollo de ideas matemáticas	Contribuir al aprendizaje de las Matemáticas (<i>Historia como recurso</i>)	Crear un ambiente de aprendizaje diferente al tradicional.
		Preceder, mediante una introducción histórica, la exposición de cada tema, situando en la historia los problemas que se van a abordar.			
		Se pueden añadir a los apuntes que se entregan a los alumnos indicaciones, breves resúmenes o notas			

Propuestas Usos de la HM	Boero (1989)	González (1991)	Siu Man Keung (1997)	Tzanakis & Arcavi (2002)	Weng Kin Ho (2008)
		históricas.			
		Indicar brevemente a qué matemáticos o corriente matemática se debe la introducción de un concepto nuevo, la demostración de un teorema o la resolución de un problema.			
Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas		La Historia de las Matemáticas para desdogmatizar y enriquecer culturalmente la enseñanza de las Matemáticas	Para mejorar la comprensión del contenido matemático	Establecer un trasfondo didáctico para la enseñanza	
				Contribuir al aprendizaje de las Matemáticas (<i>Desarrollo histórico vs. Matemáticas rígidas</i>)	

Propuestas Usos de la HM	Boero (1989)	González (1991)	Siu Man Keung (1997)	Tzanakis & Arcavi (2002)	Weng Kin Ho (2008)
				Reconocer la naturaleza de las Matemáticas y la Actividad Matemática (En relación con la forma) (En relación con el contenido)	
				Apreciar las matemáticas como una actividad cultural	
Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos	Concebir la HM como fuente de ideas de cara a la «recontextualización» de los conceptos matemáticos como «instrumentos» de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad	La Historia de las Matemáticas como instrumento didáctico, el <i>método genético</i>	Para presentar una visión general de un tema	Reconocer la naturaleza de las Matemáticas y la Actividad Matemática (En relación con la forma) (En relación con el contenido)	Mejorar la comprensión del objeto de estudio.
	Reconocer la HM como una ocasión, para los alumnos, de trabajar los conceptos				

Propuestas Usos de la HM	Boero (1989)	González (1991)	Siu Man Keung (1997)	Tzanakis & Arcavi (2002)	Weng Kin Ho (2008)
	matemáticos como «objetos de estudio»				
	Abrir un discurso matemático mediante la HM				
Promover “habilidades complementarias” en los estudiantes			Para el desarrollo de ideas matemáticas	Contribuir al aprendizaje de las Matemáticas <i>(Historia como recurso)</i> <i>(Historia como puente entre las Matemáticas y otras asignaturas)</i> <i>(Historia como potenciadora de habilidades)</i>	
Promover habilidades y competencias en los profesores	Potenciar el quehacer docente	La Historia de las Matemáticas como fuente de inspiración, de autoformación permanente y de orientación de la actividad docente		Apreciar las matemáticas como una actividad cultural	

Propuestas Usos de la HM	Boero (1989)	González (1991)	Siu Man Keung (1997)	Tzanakis & Arcavi (2002)	Weng Kin Ho (2008)
Comprender la génesis de un objeto y rescatar significados o heurísticas		La Historia de las Matemáticas como instrumento didáctico, el <i>método genético</i>			
Mejorar la actitud hacia las matemáticas				Historia como potenciadora de habilidades	Inculcar o mejorar actitudes de los aprendices y de los profesores hacia las matemáticas; Refiriéndose al uso de las anécdotas como herramienta para romper la “monotonía” de las clases.

Tabla 1. Propuesta de usos específicos de la HM en constaste con propuestas particulares

Al observar el cuadro de manera global es posible detectar ciertas tendencias, por ejemplo, según la literatura consultada es posible reconocer que el uso *Incorporar acciones específicas en el aula* se da de manera explícita en cuatro de los autores escogidos, González (1991) Siu (1997) Tzanakis & Arcavi (2002) y Kin ho (2008) o *Ampliar la comprensión de los objetos Matemáticos* que se presenta en los cinco autores escogidos, a diferencia de algunos usos que se dan únicamente en dos autores, como ejemplo, *Mejorar la actitud hacia las Matemáticas* que se da en los autores Tzanakis & Arcavi (2002) y Kin ho (2008).

En resumen, se proponen entonces los siguientes *usos específicos* de la HM:

Uso específico de la Historia de las Matemáticas	¿A quién va dirigido?	Descripción
Organizar el currículo ¹²	Docente	Pretende otorgar una herramienta para que el docente transforme o enriquezca el currículo que ha diseñado; modificar este currículo “integrando” la HM a la enseñanza es el fin de este uso.
Incorporar acciones específicas en el aula de clase	Docente	Busca brindarle herramientas al profesor para orientar el proceso de enseñanza <i>in situ</i> , por ejemplo, en una clase regular sobre métodos de solución de ecuaciones, se sugiere estudiar métodos pocos usuales reconocidos en la HM.
Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas	Profesor o Estudiante	Busca que los estudiantes o profesores logren comprender que las Matemáticas no son una disciplina rígida, acabada, que surge únicamente a partir de procesos lógicos esquematizados, sino que son un constructo social que se nutre con cada interacción social y está permeada por el contexto cultural en el que se desarrolle.

¹² El currículo nombrado en este apartado obedece al currículo cerrado y explícito.

Uso específico de la Historia de las Matemáticas	¿A quién va dirigido?	Descripción
Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos	Estudiante	<p>Estudiante: En el aprendizaje de las Matemáticas es deseable que el estudiante esté en condiciones de establecer nuevas conexiones conceptuales o procedimentales, relacionando los preconceptos que ya ha adquirido con el nuevo conocimiento; se considera entonces que la HM puede constituirse en una fuente que aporte a la generación de tales relaciones... Por ejemplo, si se está presentando un objeto matemático cualquiera, al usar la HM para mostrar la razón que motivó su estudio, es posible que el estudiante logre aprender de mejor manera el concepto estudiado.</p>
	Profesor	<p>Profesor: En el estudio de la HM el docente también puede modificar y ampliar la percepción que tiene de un objeto matemático específico, en la medida que el profesor acude a la HM para reconocer y <i>estudiar</i> un objeto matemático, identificando las etapas de desarrollo, las dificultades que se dieron, heurísticas diferentes, ... se cree le permitirá obtener una visión más global del objeto.</p>
Promover “habilidades complementarias” en los estudiantes	Estudiante	<p>Apunta a que los estudiantes desarrollen habilidades como las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mejorar el análisis y la comprensión de textos matemáticos, lo cual permite que comprendan mejor el lenguaje y la notación matemática. • Crear hábitos de escritura usando notación matemática. • Mejorar la forma de investigar y de estudiar respectiva temática mientras se intenta comprender la <i>génesis</i>¹³ de dicho objeto. • Reconocer y validar las opiniones de otros,

¹³ Puede estar ligado a la categoría de “Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos” va encaminado a hacer una reflexión frente al origen de los objetos matemáticos, sin embargo, el énfasis está en mejorar hábitos de estudio y potenciar ciertas habilidades matemáticas.

Uso específico de la Historia de las Matemáticas	¿A quién va dirigido?	Descripción
		<p>formando futuros ciudadanos que respetan las ideas. Todo esto a partir de lecturas o textos históricos de fuentes primarias –en lo posible– relacionados con temáticas particulares.</p>
Promover habilidades y competencias en los profesores	Docente	<p>Se espera que a partir del uso de la HM se potencien ciertas habilidades y formas de actuar del profesor propias de su rol como educador, por ejemplo: comprender el pensamiento de los estudiantes, reconocer diferentes tipos de representación de los objetos matemáticos, reconocer factores que facilitan o dificultan la comprensión de los estudiantes, entre otras.</p>
Rescatar significados y heurísticas	Docente	<p>Usualmente los objetos matemáticos son comunicados a los estudiantes como objetos terminados, concluidos, que no permiten observar los errores, intentos y situaciones que permitieron que dichos objetos fueran validados. Recurrir a la historia para rescatar significados (Godino, 1994) o procesos heurísticos es una herramienta poderosa para que los profesores puedan estructurar mejor sus propuestas didácticas y así permitir a los estudiantes comprender mejor los objetos, que éstos fueron construidos socialmente y que en esta construcción se presentaron dificultades que ellos pueden atravesar, lo que los motiva a continuar en el proceso de estudio.</p>
Comprender la génesis de un objeto	Docente	<p>Entender la génesis de un concepto otorga más información que el resultado presentado de manera acabada, al respecto se presenta el método genético, con al menos dos posibilidades, la primera hacer pasar al estudiante por estas dificultades para que comprenda la necesidad de su uso, o mostrando los problemas para que los estudiantes los eviten durante su trabajo lo que le permitirá hacer una reflexión en torno a las situaciones que permitieron la evolución de este concepto, su</p>

Uso específico de la Historia de las Matemáticas	¿A quién va dirigido?	Descripción
Mejorar la actitud hacia las Matemáticas	Docente	consolidación y formalización. Se espera que a causa de la presencia de la HM los estudiantes puedan mejorar su disposición y actitud durante la clase, pero también que logre extrapolar este comportamiento a otras asignaturas y a su vida misma, reconociéndose como aprendiz, mejorando en su nivel de ciudadanía y origen de ideas de corte político entre otras en los mecanismos de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Tabla 2. Usos Específicos de la HM

Una vez se condensa esta información es posible asociar cada uso específico a un *uso general*, la HM como Meta o la HM como Herramienta, por ejemplo, *Incorporar acciones específicas en el aula* se incorpora de manera natural a la HM como Herramienta y a su vez *Comprender la génesis de un objeto* es un uso que encaja con la HM como Meta. Es factible que algunos de los usos específicos sean híbridos, es decir, respondan a ambos usos generales, uno de los propósitos de este trabajo será ver si hay relación entre los usos generales y los específicos.

4. Metodología

La intención de este trabajo, como se reportó en el objetivo general, es caracterizar sistemáticamente los usos de la HM en la educación en Matemáticas a partir de una revisión documental de experiencias o propuestas de aula donde se evidencie la presencia explícita de la HM, esta revisión documental ofrece:

- Obtener una visión amplia de los conocimientos sobre las relaciones entre Historia de las Matemáticas y educación en Matemáticas, centrado específicamente en los usos de la Historia de las Matemáticas.
- Generar en el investigador una apreciación objetiva sobre los usos de la Historia de las Matemáticas.
- Información de primer nivel tomada de la literatura especializada en la relación entre Historia de las Matemáticas y educación en Matemáticas, acercando a lectores a esta fuente, ya que en ocasiones el acceso hacia ellas es difícil.
- Permite crear un juicio particular sobre el fenómeno comparando la información obtenida con las experiencias y conocimientos propios.

De esta manera se satisfacen las condiciones planteadas por Montiel (2009) para una revisión documental.

Uno de los objetivos es comprender e interpretar relaciones entre HM y educación en Matemáticas aterrizada a los usos de la HM, y ya que al revisar las diferentes fuentes se intenta entender y darle sentido a lo que dice un autor determinado, mostrando aspectos originales de su planteamiento se estaría en concordancia con lo que presenta el profesor Gómez (2011, p. 229) : “... (el paradigma cualitativo) *Busca de alguna manera establecer un diálogo con el autor, pero sin pretender desde allí construir por ejemplo marcos teóricos, o explicaciones puntuales de una situación, sino permitir que sea la realidad misma la que se exprese, con lógica y con argumentos, construyendo así nuevos conocimientos.*”

Al estudiar el proceso de interacción entre la teoría referente a la HM en la educación en Matemáticas y la realidad del objeto de estudio se determina que el enfoque usado fue el *humanístico interpretativo* (Erickson, 1986). Buscando encontrar a partir de la revisión documental referentes que permitieran comprender la manera de usar la HM en la educación en Matemáticas.

4.1. Fases de la investigación

Durante el desarrollo de la investigación se establecieron ciertas fases, a continuación, se describe cada una de ellas resaltando que dichas fases no se dieron de manera secuencial, en ocasiones fue necesario saltar de una a otra de manera flexible.

4.1.1. Fase 1. Selección preliminar de los documentos a analizar

Antes de seleccionar los documentos a estudiar se hizo necesario establecer ciertos parámetros de depuración dada la vastedad de información disponible; así, se decidió inicialmente que los documentos a analizar deberían corresponder a publicaciones académicas, esto porque se quería atender netamente a documentos científicos, así que se optó por buscar artículos de revistas especializadas en Educación Matemática (se eliminaron libros, tesis, páginas web,...) para además delimitar de alguna manera la cantidad de obras posibles; los demás parámetros utilizados fueron:

- Artículos que hicieran explícito el uso de la HM para/en la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas; por lo tanto, todo documento que hiciera solamente un barrido histórico de un concepto específico fue descartado.
- Los artículos *debían* incluir o corresponder a *propuestas* o a *experiencias*. Por *propuesta* se entendió todo conjunto de tareas que pudiesen llevarse al aula y que pretendiera algún aprendizaje en los estudiantes; y por *experiencia*, todo conjunto de tareas o situaciones que pudiese replicarse en la enseñanza de las Matemáticas y que hiciera referencia a reflexiones sobre su aplicación.

Un interrogante que surgió fue: ¿De dónde/Cómo extraer los artículos?, ya que se debía determinar las revistas de donde se elegirían, originalmente se recurrió a una base de datos de revistas sobre HM (facilitada años atrás por el profesor Édgar Guacaneme), al ingresar a cada uno de los portales web de tales revistas para seleccionar los artículos y, a pesar de hallar numerosos artículos de interés, el tiempo invertido era bastante y en ocasiones infructuoso.

De acuerdo con esta primera experiencia, se decidió buscar criterios para la elección de las revistas, es así como se adoptó el listado de las revistas de investigación en Educación Matemática realizado por Toerner & Arzarello (2012), excluyendo dos revistas en idioma Alemán dadas las limitaciones en este idioma para el autor de este documento; adicionalmente, se agregan otras revistas de investigación en Educación Matemática reconocidas entre los hispanohablantes que publican en español y que a pesar de no estar reseñadas en el estudio de

Toener & Arzarello, se consideraron pertinentes para el propósito del presente trabajo de grado¹⁴; de esta manera, las revistas seleccionadas fueron:

1. *Educational Studies in Mathematics.*
2. *Journal for Research in Mathematics Education.*
3. *For the Learning of Mathematics.*
4. *The Journal of Mathematical Behavior.*
5. *Journal of Mathematics Teacher Education .*
6. *Mathematical Thinking and Learning.*
7. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education.*
8. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*
9. *International Journal of Science and Mathematics Education.*
10. *Mathematics Education Research Journal.*
11. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*
12. *Research in Mathematics Education.*
13. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*
14. *Technology, Knowledge and Learning* (anteriormente: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*).
15. *The Mathematics Enthusiast* (anteriormente: *The Montana Mathematics Enthusiast*) Educación Matemática.
16. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas.
17. Épsilon. Revista de Educación Matemática. SAEM THALES.
18. Números. Revista en Didáctica de las Matemáticas.
19. PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática.
20. RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.
21. Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática.
22. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.
23. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.
24. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas.

Una vez se consultaron estas revistas, se encontró gran cantidad y variedad de artículos en los que se presentaban diferentes relaciones entre HM y eM, por lo que bajo una lectura del título y del resumen o abstract, se extrajeron aquellos que cumplieran con los parámetros de depuración antes descritos, hecho esto se verificó la accesibilidad a los documentos, y tras

¹⁴ Vale la pena dar los agradecimientos al profesor Édgar Guacaneme por su aporte en este aspecto a este trabajo y por compartir apartes de su tesis de doctorado.

ello se logró recolectar, en esta primera fase, una totalidad de setenta y cinco (75) artículos para el estudio.

4.1.2. Fase 2. Determinación de categorías y creación de las unidades y subunidades de análisis en el software.

Ahora era necesario definir las categorías de análisis que se iban a usar, de tal manera se contemplaron algunos aspectos que sirvieran para realizar un análisis global contemplando no solo los *usos generales* y *específicos* de la HM que se evidenciaran en los artículos sino también otras relaciones que pudieran ser objeto de estudio de la investigación y que aportaran al objetivo perseguido, por lo tanto, las categorías que se concretaron fueron las siguientes:

1. Categoría 1. Tipo de artículo (Propuesta de enseñanza o Experiencia de Aula).
2. Categoría 2. Nivel de profundidad en el uso de la Historia de las Matemáticas (Alusión, Integración o Determinación).
3. Categoría 3. Rama de Estudio a la que hace referencia.
4. Categoría 4. Uso general de la Historia de las Matemáticas (Meta y Herramienta).
5. Categoría 5. Uso específico de la Historia de las Matemáticas (Organizar el currículo, Incorporar acciones específicas en el aula de clase, Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas, Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos, Promover “habilidades complementarias” en los estudiantes, Promover habilidades y competencias en los profesores, Comprender la génesis de un objeto y rescatar significados o heurísticas, Mejorar la actitud hacia las Matemáticas).

De estas categorías se dispusieron las unidades y sub-unidades de análisis (algunas de estas sub-unidades fueron emergentes) y se codificaron en el software Atlas.TI¹⁵; enseguida se presentan las redes semánticas arrojadas por el software y los códigos correspondientes (la descripción de las unidades asociadas a los usos generales y usos específicos está reseñada en el capítulo Marco de Referencia).

4.1.2.1. Categoría 1. Tipo de artículo

Categoría	Unidades	Sub-unidades	Código
Tipo de artículo	Experiencias	Experiencia con profesores en formación	Exp-FormProf
		Experiencias con estudiantes de escuela	Exp-Est

¹⁵ El software Atlas.ti es un programa para análisis de información cualitativa diseñado para optimizar tareas de organización y análisis de documentos de texto, PDF, imágenes y video permite el trabajo a partir de Unidades Hermenéuticas para abreviar UH, esta mantiene las rutas a los datos de origen y almacena los códigos, familias de código, vistas de red, y otros elementos. Se pensó en este Software dada la facilidad que presenta al trabajar con múltiples documentos, y al ser el objetivo de este trabajo una revisión documental, el software se constituye en la opción elegida.

	Experiencias con Profesores en Servicio	Exp-prof
Propuesta	Propuesta para llevarse a cabo en una universidad, bien sea con profesores en formación o con otros profesionales	Prop-Uni
	Propuesta para llevar a cabo en algún nivel de la escuela	Prop-Esc
	Propuesta para aplicar en un ambiente no regular de aula, formación de profesores, capacitaciones, talleres, etc.	Prop-Otro

Tabla 3. Categoría 1. Tipo de Artículo, Unidades y Sub-unidades de análisis

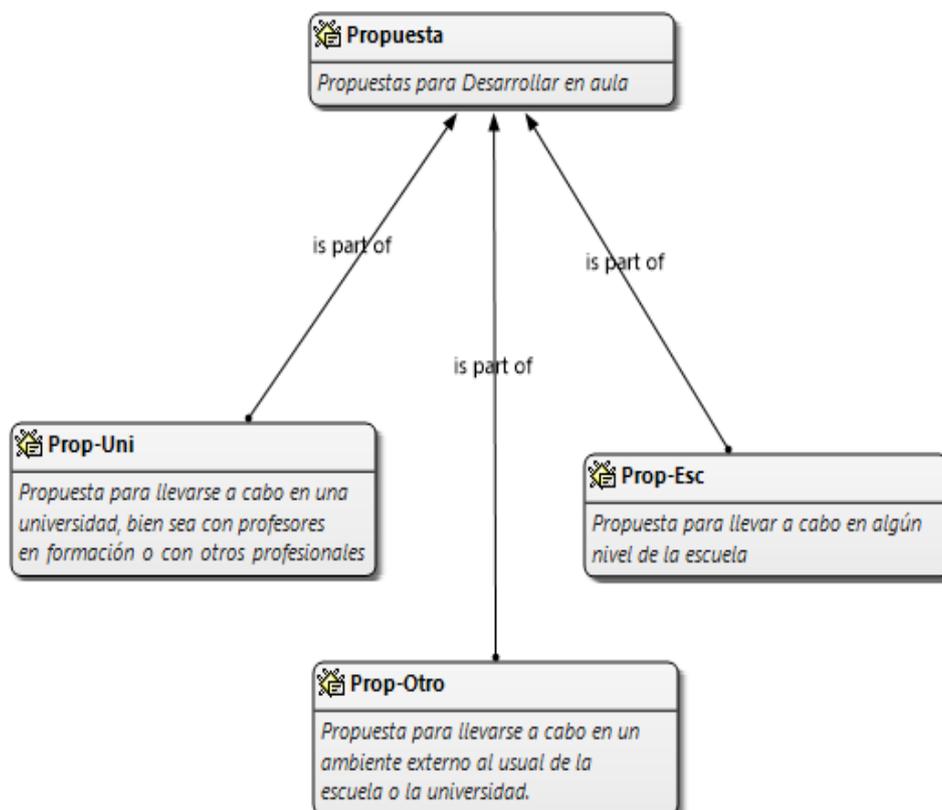
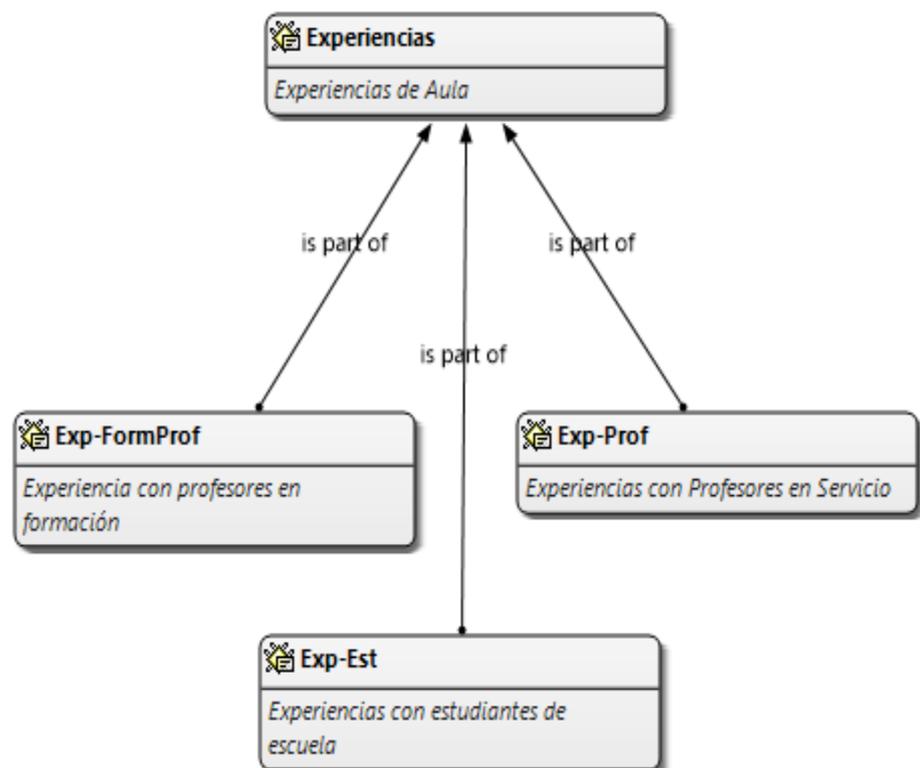


Ilustración 6. Categoría 1. Tipo de artículo (Propuesta de enseñanza o Experiencia de Aula).

4.1.2.2. Categoría 2. Nivel de Profundidad

Categoría	Código	Unidades	Código	Sub-unidades	Código
Nivel de profundidad	NP	Alusión	NP-Alu	Presentación de anécdotas.	Alu-Anec
				Alusión a referencias históricas a obras.	Alu-Obra
				Alusión a referencias históricas a matemáticos.	Alu-Mat
				Mención a problemas matemáticos propios de la Historia.	Alu-Prob
		Integración	NP-Int	Enseñanza de las Matemáticas a través de la HM.	Int-EnsAtHM
				Análisis eficiente de los procesos cognitivos del aprendizaje y la comprensión, mediado por la Historia.	Int-AnaCogMH
				Enseñanza de las Matemáticas que incluye su Historia como parte consustancial de las Matemáticas.	Int-HpartCons
		Determinación	NP-Det	Empleo de información histórica como criterio orientador de una propuesta curricular.	Det-PropCurr
				La HM está implícita en la propuesta de enseñanza, la fundamenta.	Det-HMimpli

Tabla 4. Niveles de Profundidad

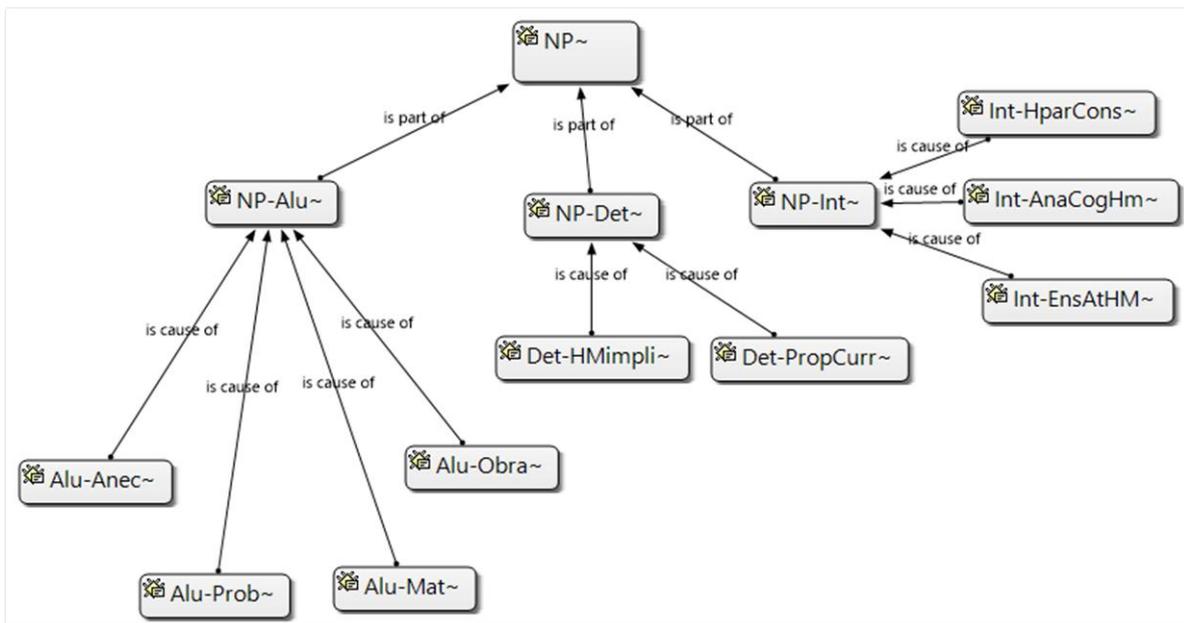


Ilustración 7. Nivel de Profundidad

4.1.2.3. Categoría 3. Rama de estudio

Para la determinación de las unidades de análisis de esta categoría se buscó establecer cuáles eran las Ramas de las Matemáticas en las que la HM tenían mayor presencia, estas ramas fueron extraídas del “árbol de las Matemáticas” presentado en el video documental *¿Qué hace hoy un Matemático?* (Barot M. & Nulman A. 2006), se aclara que no todas las Ramas fueron escogidas en tanto los documentos seleccionados no correspondían a ninguna de ellas. Cuando un documento presentaba más de una sola rama, o que en su lugar describía heurísticas o formas de emplear la HM se codificaba bajo la unidad “No distinguible” y en aquellos documentos en los que se hacía referencia a otras disciplinas se codificaba bajo la unidad “Otra disciplina”

Categoría	Código	Unidades	Código
Rama de Estudio	R	Álgebra	R-Alge
		Aritmética	R-Arit
		Cálculo	R-Calc
		Estadística	R-Estad
		Geometría	R-Geome
		Lógica	R-Logi
		Probabilidad	R-proba
		Trigonometría	R-Trigo
		No Distinguible	R-ND
		Otra disciplina	R-OtrDisc

Tabla 5. Rama de estudio

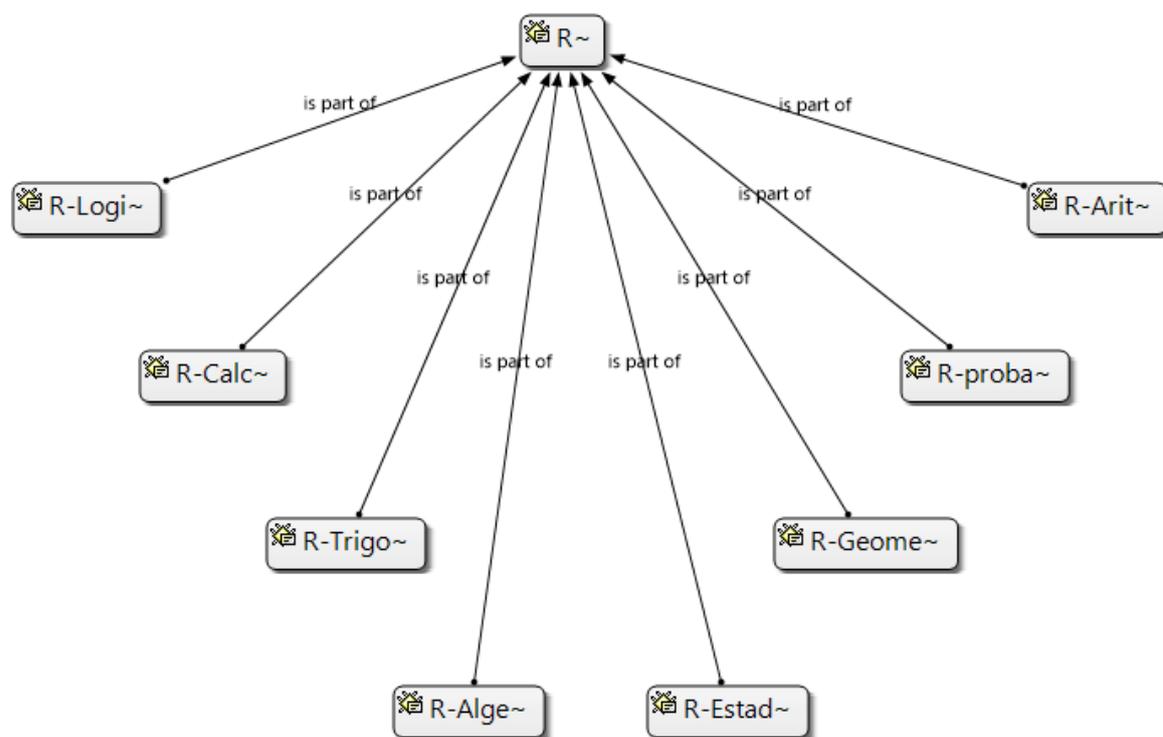


Ilustración 8. Ramas de estudio

4.1.2.4. Categoría 4 y 5, Usos generales y Específicos

Categoría	Código	Unidades	Código	Sub-Unidades	Código
USOS	(U)	Usos Generales	Ugeneral	Como herramienta.	UGHerr
				Como Meta.	UGMeta
		Usos Específicos	Uespecífico	Organizar el currículo.	UOrgCur
				Incorporar acciones específicas en el aula de clase.	UIncAcc
				Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas.	UAmpNat
				Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos.	UAmpObj
				Promover “habilidades complementarias” en los estudiantes.	UPromHabEst

Categoría	Código	Unidades	Código	Sub-Unidades	Código
				Promover habilidades y competencias en los profesores.	UPromHabProf
				Rescatar significados y heurísticas.	URescSigyHeu
				Comprender la génesis de un objeto.	UComGenesisObj
				Mejorar la actitud hacia las Matemáticas.	UMejActMat

Tabla 6. Usos de la HM

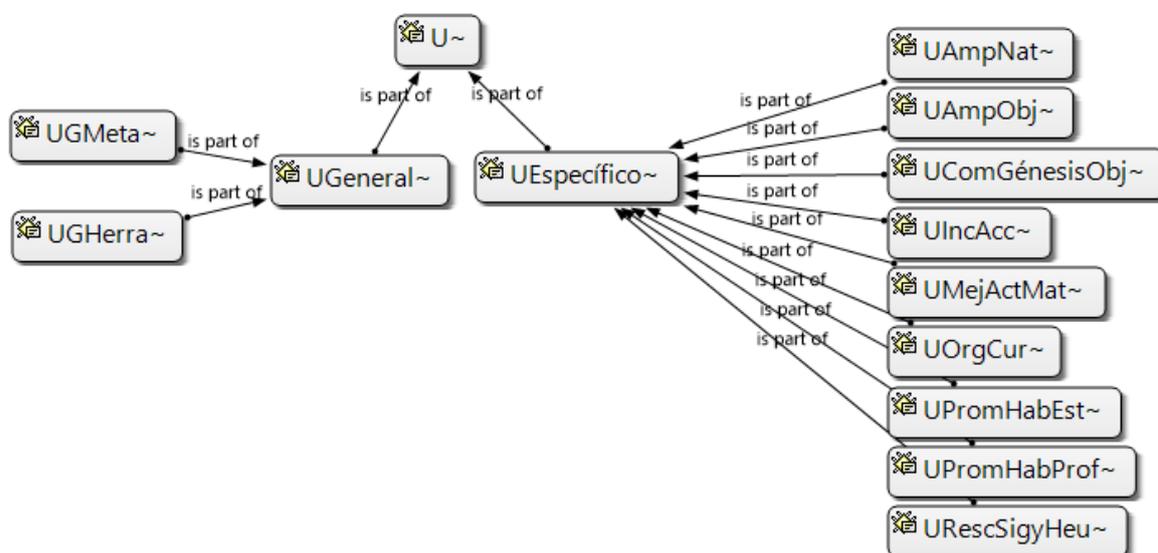


Ilustración 9. Usos HM

4.1.3. Fase 3. Codificación y selección final de los artículos a analizar

Una vez decididas las unidades y subunidades de análisis, se continuó con el cargue los artículos en el software Atlas.ti y a lectura de los setenta y cinco artículos (75) reportados en las revistas anteriormente descritas, y se realizó el proceso de codificación, un ejemplo de ello se muestra en la Ilustración 10. Ejemplo de análisis de un documento:

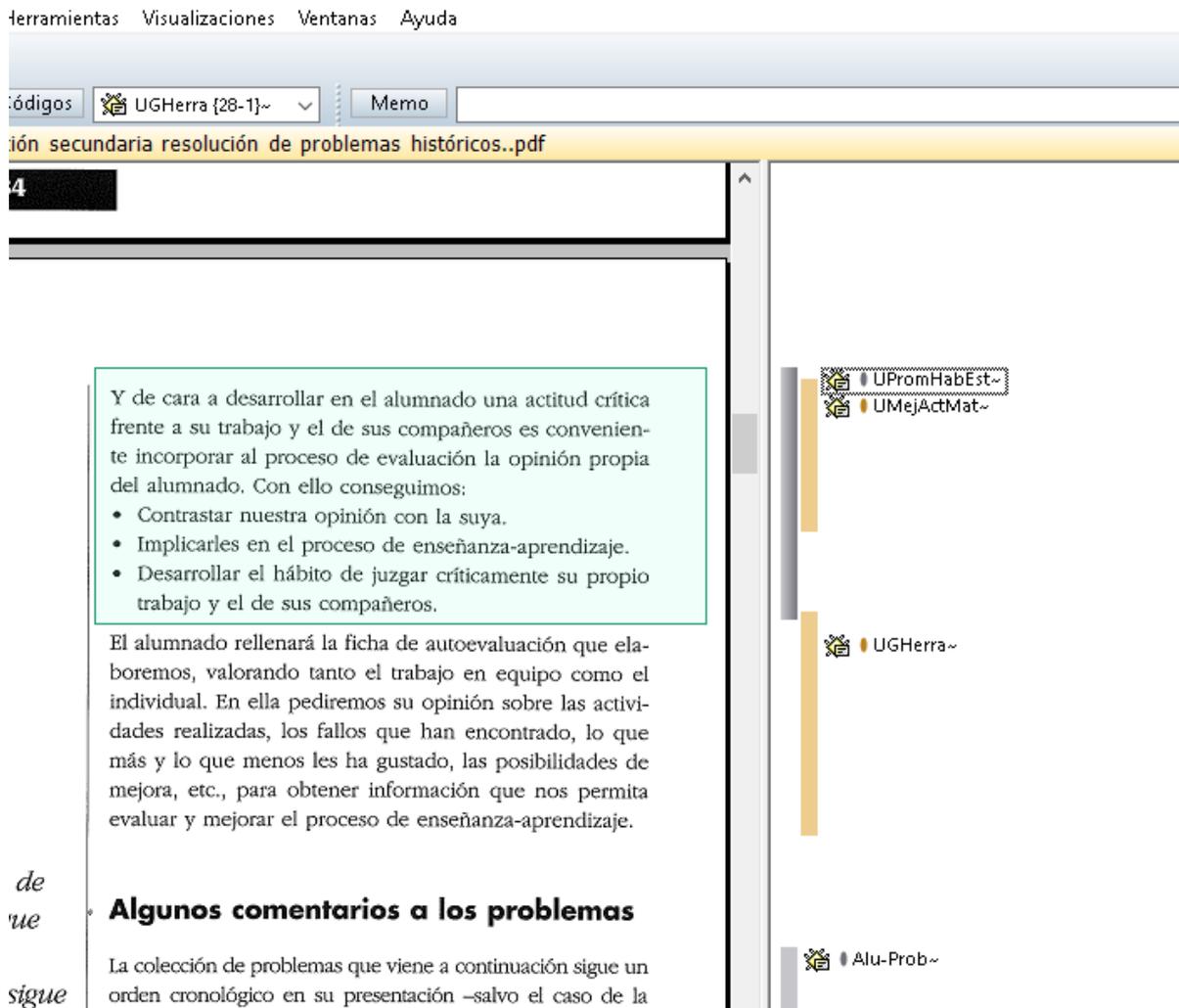


Ilustración 10. Ejemplo de análisis de un documento

En el ejemplo se puede evidenciar algunas de las unidades de análisis que el documento presenta, en el recuadro se resalta la unidad “UPromHabEst” puesto que esta cita arroja muestras de estar asociada a este uso específico.

De la pre-selección de los 75 artículos, se realizó el proceso de codificación y se descartaron cuarenta y dos (42) artículos, entre ellos los que fueron de carácter privado, es decir, se debiera pagar para poder adquirirlos, algunos otros debido a que al realizar la lectura a la luz de las categorías aparentemente eran propuestas o experiencias de aula, pero en su lugar realizaban un barrido histórico de un concepto en específico. Así, el análisis se hizo sobre treinta y tres (33) documentos que constituyeron la muestra sobre la cual se realizó esta investigación documental, en la Tabla 7 se listan los artículos considerados:

Numeración en Atlas.TI	Referencia del artículo
PD1.	Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 3(1), 30-37.
PD2.	Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of irrational numbers. For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 7(2), 18-23.
PD3.	Aznar Sánchez, M. E., López Hernández, Á., Martínez Azor, P. A., Parra Ruiz, G., & Sastre García, A. (1994). Historia de las matemáticas en el aula: experiencia desde un seminario permanente. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 17, 34-36.
PD4.	Bagni, G. T. (2001) La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 4,45-61
PD5.	Blanco, M. n., & Ginovart, M. (2010). How to introduce historically the normal distribution in engineering education: a classroom experiment. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(1), 19-30.
PD6.	da Costa, A. B. (2010). A construção do conceito de sequências na perspectiva lógico-histórica. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21, 133-157.
PD7.	de la Fuente Martínez, C. (2011). Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase. Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28(1), 133-151.
PD8.	Escudero Baylín, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 24, 77-79.
PD9.	Fernández Gago, J., Gutiérrez Bueno, J., Hinojosa Onieva, F., Jiménez Vázquez, D., & Muñoz Velasco, E. J. (1994). Elementos de Euclides: una aplicación de la historia al aula, enfocada desde la resolución de problema. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 14-15, 36-39.

PD10.	Führer, L. (1991). Historical stories in the mathematics classroom. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 24-31.
PD11.	Gairin j., (1999) los enigmáticos cálculos del escriba ahmes. <i>Suma</i> 31, 55-66
PD12.	Gardner, J. H. (1991). How Fast Does the Wind Travel?: History in the Primary Mathematics Classroom. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 17-20.
PD13.	Gavilán Bouzas, P. (1996). Historia del álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas "históricos". <i>Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas</i> , 22, 83-90.
PD14.	Haverhals, N., & Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection <i>The Montana Mathematics Enthusiast</i> , 7(2-3), 339-368.
PD15.	Katz, V. J. (1986). Using History in Teaching Mathematics. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 6(3), 13-19.
PD16.	Keiser, J. M. (2004). Struggles With Developing the Concept of Angle: Comparing Sixth-Grade Students' Discourse to the History of the Angle Concept. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 6(3), 285-306.
PD17.	Kleiner, I. (1986). Famous Problems in Mathematics: An Outline of a Course. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 6(1), 31-38.
PD18.	Martínez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. <i>Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas</i> , 61, 7-15.
PD19.	Meavilla Seguí, V. (1989). Dos demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras. <i>SUMA</i> , 3, 39-42.
PD20.	Meavilla Seguí, V. (2000). Historia de las matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas. <i>Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas</i> , 34, 81-85.
PD21.	Miralles de I. Llobet, J. & Deulofeu Piquet, J. (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas. <i>Educación Matemática</i> , 17(1) 87-106.
PD22.	Núñez Valdés, J., & Rodríguez Arévalo, M. L. (2012). Una propuesta para utilizar la Historia de las Matemáticas en las clases de primaria y secundaria. <i>Épsilon. Revista de Educación Matemática</i> , 29(1), 65-73.

PD23.	Ofir, R. (1991). Historical Happenings in the Mathematics Classroom. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 21-23.
PD24.	Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 82(3), 455-479. doi: 10.1007/s10649-012-9440-8
PD25.	Quirós Bajo, E. (2011). Thales de Mileto y la medición de las pirámides de Egipto. <i>Épsilon. Revista de Educación Matemática</i> , 28(1), 127-131.
PD26.	Redondo A. & Haro. M ^a . (2004) Una propuesta para la aproximación intuitiva de funciones por polinomios en la ESO y el Bachillerato SUMA 45, 29-34
PD27.	Rogers, L. (1991). History of Mathematics: Resources for Teachers. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 48-52.
PD28.	Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G., & Fowler, D. (1991). The Experience of History in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 7-16.
PD29.	Salinas-Herrera, J., Adamuz-Povedano, N., & Jiménez-Fanjul, N. (2011). Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas. <i>Épsilon. Revista de Educación Matemática</i> , 28(1), 113-126.
PD30.	Stowasser, R. (1982). A textbook chapter from an idea of Pascal. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 3(2), 25-30.
PD31.	Stowasser, R., & Trygve, B. (1984). An idea from Jakob Bernoulli for the teaching of algebra: a challenge for the interested pupil. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 4(3), 30-39.
PD32.	Thomaidis, Y. (1991). Historical Digressions in Greek Geometry Lessons. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 37-43.
PD33.	van Maanen, J. (1991). L'Hopital's Weight Problem. For the Learning of Mathematics. <i>An International Journal of Mathematics Education</i> , 11(2), 44-47.

Tabla 7. Artículos Seleccionados

4.1.4. Fase 4. Análisis de datos

A partir de los documentos seleccionados y las unidades de análisis condensadas, se realizó un análisis estadístico descriptivo para cada unidad a manera de descripción en la tendencia en cada artículo; sin embargo, el autor de este trabajo buscó una relación entre varias unidades, tratando de comprender de qué manera se usa la HM en la eM, así, se elaboraron, con apoyo del software Atlas.TI, diferentes redes hermenéuticas que representan estas relaciones y finalmente se plantearon algunas conclusiones y cuestiones abiertas asociadas a los objetivos de esta investigación.

Como el foco de estudio principal de la presente investigación estaba referido a los usos de la HM en la eM, para el diseño de una herramienta de análisis que arrojara información relevante fue necesario ubicar como pilar fundamental los usos y cruzar esta información con cada una de las categorías de análisis creadas, buscando encontrar diferentes relaciones que permitieran mejorar la comprensión sobre los usos de la HM, para ello se elaboró la herramienta de análisis 1. Sin embargo, en este mismo análisis surgió la duda respecto a si los usos específicos de la HM podrían enmarcarse en uno de los dos usos generales (como meta y como herramienta), y por consiguiente se creó la herramienta de análisis 2, las cuales se presentan a continuación:

Categorías de Análisis	Usos										
	General			Específico							
	UGHerr	UGMeta	UOrgCur	UIncAcc	UAmpNat	UAmpObj	UPromHabEst	UPromHabProf	URescSigyHeu	UComGenesisObj	UMejActMat
Propuesta de enseñanza o Experiencia de Aula											
Rama de Estudio											
Nivel de profundidad en el uso de la Historia de las Matemáticas											

Tabla 8. Herramienta de Análisis 1

Usos Específicos	Generales	
	UGHerr	UGMeta
UOrgCur		
UAmpNat		
UAmpObj		
UPromHabEst		
UPromHabProf		
URescSigyHeu		
UComGenesisObj		
UMejActMat		

Tabla 9. Herramienta de análisis

Estas matrices fueron entonces utilizadas para realizar el análisis que será objeto de estudio en el siguiente capítulo.

5. Resultados del análisis

En este capítulo se presentan cada uno de los resultados obtenidos de las herramientas de análisis, se presenta una vista en red de las categorías de análisis.

5.1. Usos de la HM y Tipo de artículo

Esta es la presentación de la red que relaciona los diferentes usos de la HM y los tipos de artículos referidos:

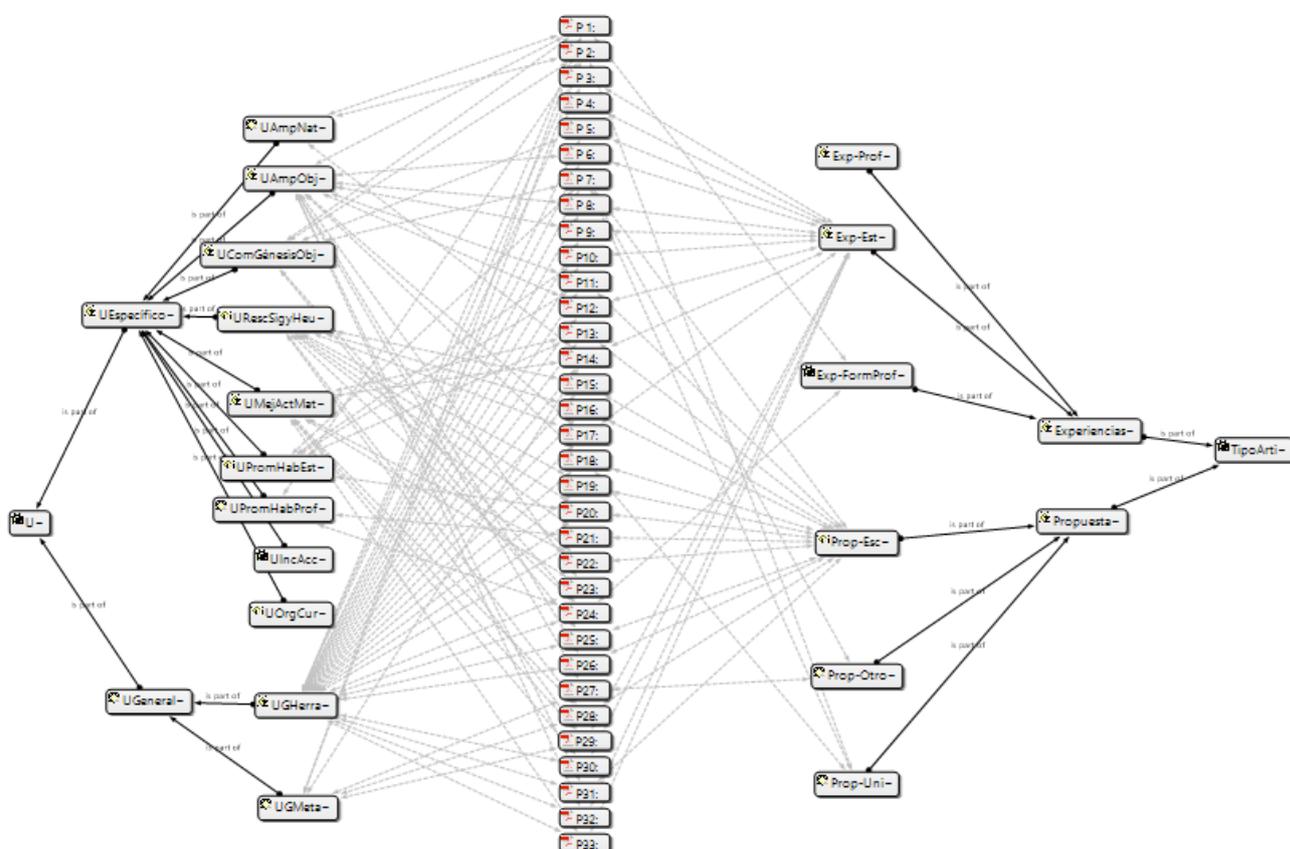


Ilustración 11. Usos de la HM y Tipo de Artículo

Como se observa, esta red no brinda mayor información dada la cantidad de conexiones, lo máximo que se puede indicar es que todas las propuestas o experiencias tienen asociados usos específicos y generales de la HM, lo cual resulta natural dado que así se hizo la selección de los documentos a analizar. De esta manera, enseguida se establecerán relaciones entre categorías y unidades de análisis referidas a los usos generales y específicos con las demás categorías, buscando analizar los datos recolectados.

5.1.1. Uso General Meta – Tipo de artículo

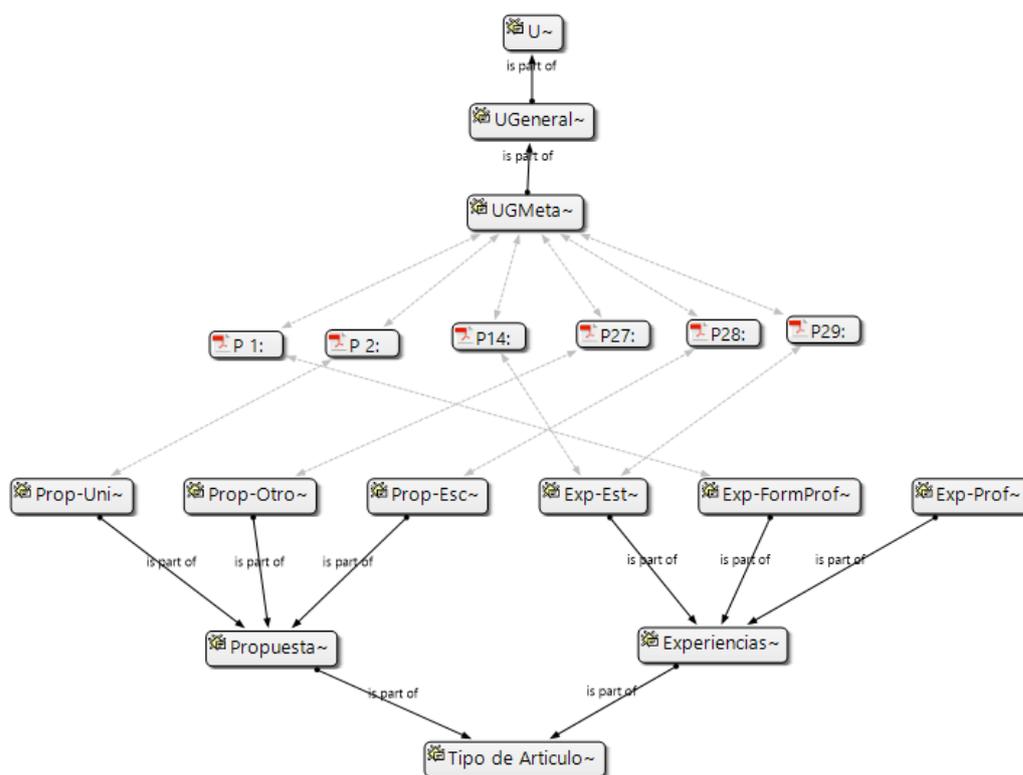


Ilustración 12. Uso General Meta – Tipo de Artículo

Como se puede evidenciar, este uso general, la Historia como Meta, no parece estar asociado con algún tipo de artículo en especial, se hubiera esperado que dada la intencionalidad de comprender la evolución de las Matemáticas, este uso estuviera dirigido en más casos a propuestas con formación de profesores o experiencias con profesores, se puede pensar entonces que la intención de mostrar unas Matemáticas más humanas aún esta sin explorar y de tal manera es necesario generar al interior de la comunidad de educadores matemáticos mas propuestas o experiencias cuyo objetivo sea poner en evidencia, este carácter de las matemáticas y así contribuir al desarrollo social de las Matemáticas, reconociendo que este paradigma de lo social es esencialmente joven (Lerman, 2000).

De manera adicional se encuentra una característica común entre los seis artículos mencionados, la naturaleza de dichos artículos era puntualizar mas en los referentes teóricos del uso de la HM para la enseñanza, a diferencia de otros artículos en los que se hace especial énfasis en el objeto de estudio específico de las matemáticas. Es necesario realizar mayor esfuerzo en promover los casos de estudio basado en profesores, de esta manera es posible adquirir una mejor comprensión sobre sus concepciones, dudas, pensamientos y creencias frente al uso de la HM en la eM, evidentemente esto trasciende los alcances de este trabajo.

5.1.2. Uso General Herramienta – Tipo de artículo

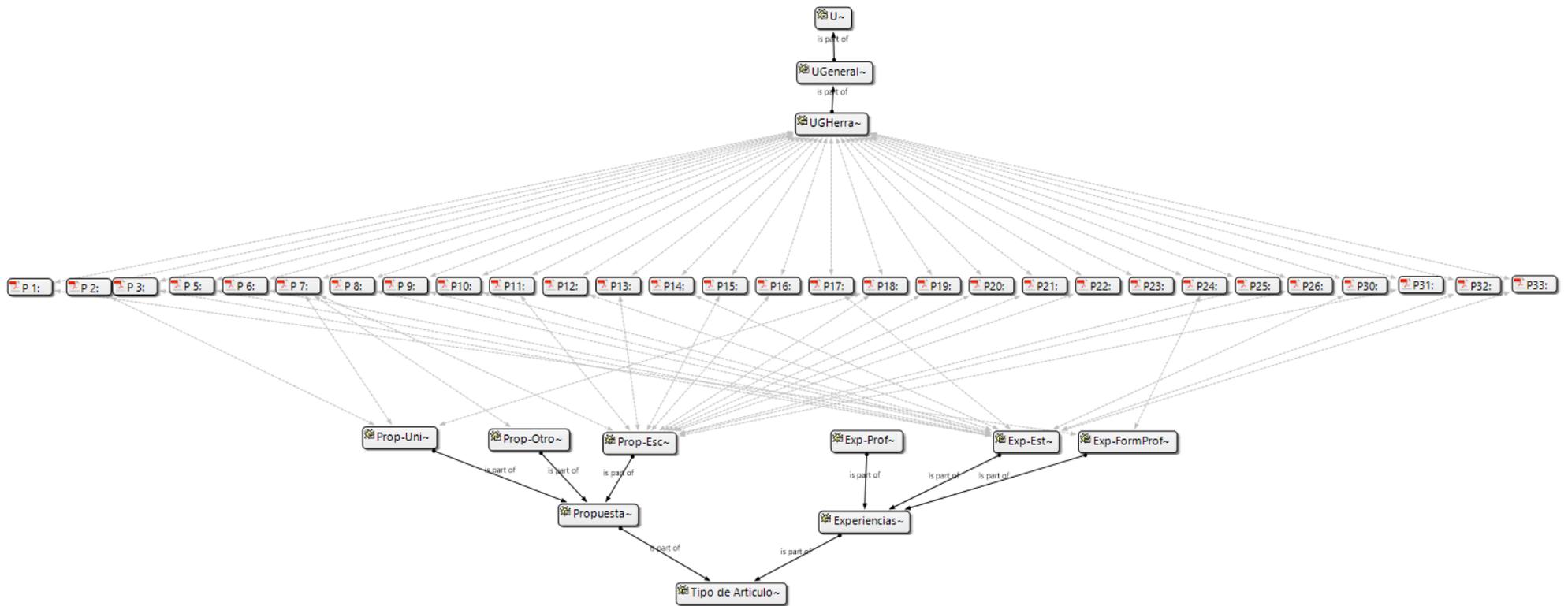


Ilustración 13. Uso General Herramienta – Tipo de Artículo

El uso de la HM como herramienta es quizás la forma más común de presentar la HM en la educación en Matemáticas, en diferentes investigaciones, como las reportadas en el capítulo de antecedentes aludían a este uso general de la HM. De la red se puede apreciar que con una totalidad de 29 artículos se observa un porcentaje de aproximadamente el 82% de preminencia de este uso general frente al 18 restante del uso como Meta.

Respecto al tipo de artículo se observa mayor presencia de propuestas llevadas a cabo en la escuela, y de las experiencias mayor existencia de experiencias con estudiantes, esto permite vislumbrar que es necesario realizar mayores contribuciones mediante propuestas para desarrollar a nivel universitario, bien sea para la formación de profesores o para desarrollar en el aula universitaria. Es necesario resaltar que a pesar de la presencia de estos 29 artículos, ninguno estuvo referido a experiencias con profesionales, de tal manera generar propuestas cuya población sea estudiantes universitarios es una labor que se debe comenzar a realizar.

Se plantea la opción de iniciar el uso de la HM en este sentido, puesto que es del cual se conoce más literatura especializada, por lo tanto, si un docente tiene la iniciativa de incluir el componente histórico en su práctica, puede iniciar por este uso e ir avanzando paulatinamente a otros niveles de complejidad.

5.1.3. Uso Específico “promover habilidades en los profesores”– Tipo de artículo

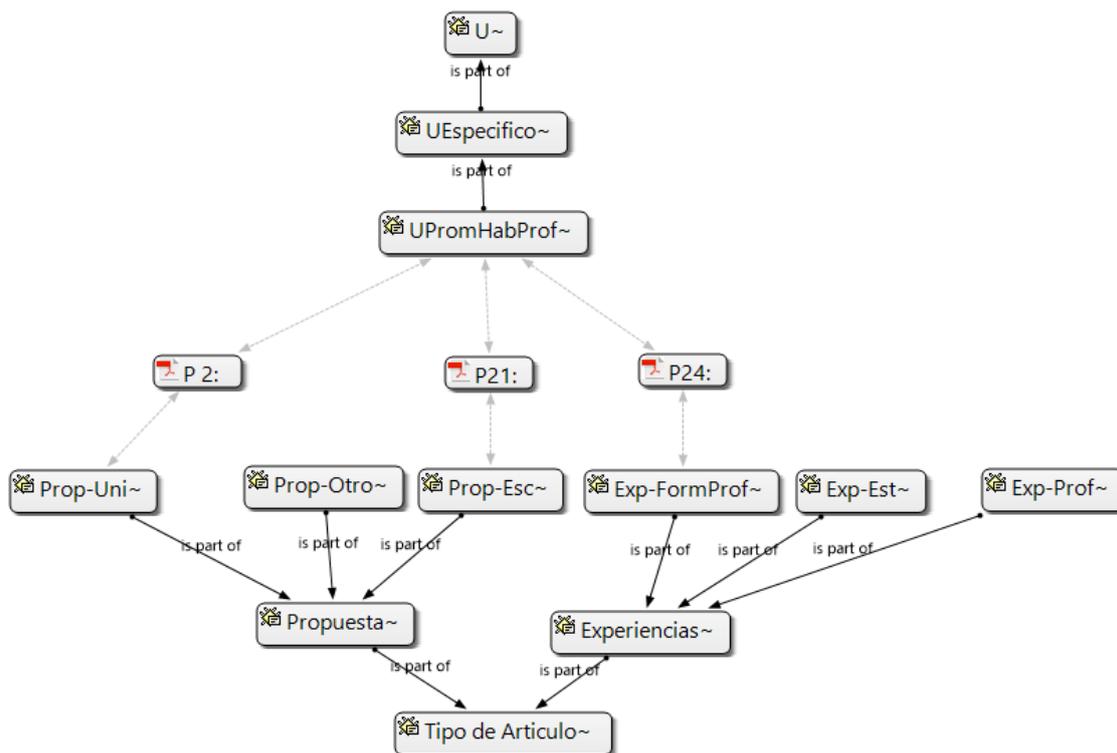


Ilustración 14. Uso Específico “promover habilidades en los profesores”– Tipo de Artículo

Es uno de los usos que menor índice de frecuencia presenta, solo tres documentos correspondiente a cerca del 6% de la totalidad de artículos; las unidades Exp-formProf, Prop-Esc y Prop-Uni presentan cada una relación con un documento, este uso representa un especial interés para la Universidad Pedagógica Nacional al ser encargada de la formación de futuros profesores debe promover más investigación en este campo, desarrollar propuestas que apunten a promover habilidades particulares de los profesores es una actividad casi que obligatoria, puede que estas habilidades se den en otros espacios de formación pero la iniciativa con este trabajo es que se desarrolle desde la perspectiva de la Historia de las Matemáticas. No se encuentra evidencia de Exp-Est ni Exp-Prof esto puede deberse a múltiples factores, uno de ellos puede ser el desconocimiento del uso de la HM para promover habilidades en los profesores, es probable que solo se asuma una contribución a la formación de los estudiantes y se desconozca su contribución a los docentes.

5.1.4. Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes”– Tipo de artículo

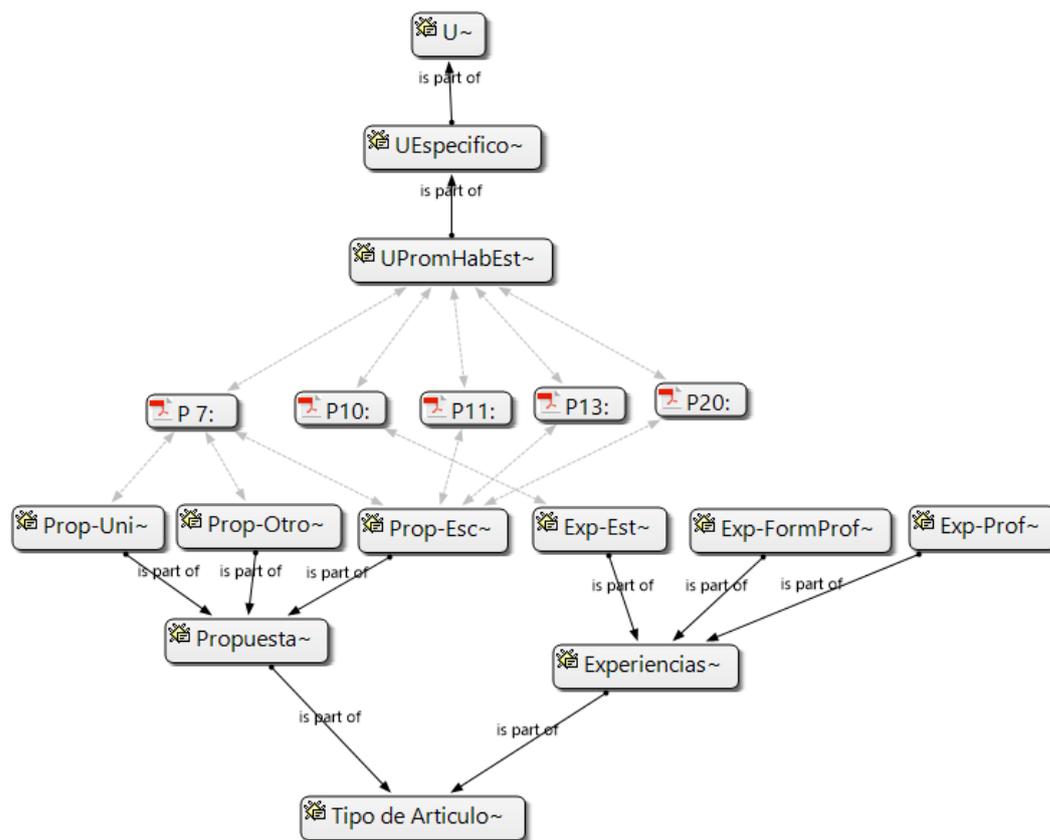


Ilustración 15. Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes”– Tipo de Artículo

El foco de atención de este uso es el desarrollo de habilidades complementarias en los estudiantes como mejorar sus destrezas al escribir y desarrollo de la creatividad, estudiar de fuentes primarias y en general habilidades que no estén centralizadas en el contenido matemático. Esta unidad presenta una singularidad, y es que, en un solo documento el PD7. de la Fuente Martínez, C. (2011). *Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase*, se realiza una propuesta para desarrollar en varios niveles educativos, en la educación secundaria obligatoria, y se considera dada la generalidad de las actividades propuestas que pueden ser replicadas en otros ambientes, como el universitario o con el trabajo con profesores en Formación.

La literatura expresa la importancia de la HM en los procesos de formación de profesores para desarrollar competencias en los estudiantes [Jankvsit (2009), González (2004) entre otros], sin embargo, no hay experiencias referidas a la formación de profesores, para desarrollar en ellos ciertas habilidades como estudiantes que luego, por ejemplo, puedan replicar con sus estudiantes a futuro. Solo 5 artículos fueron catalogados en este uso, por lo que es necesario desarrollar más propuestas y experiencias para promover dichas habilidades en los estudiantes.

5.1.5. Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Tipo de artículo

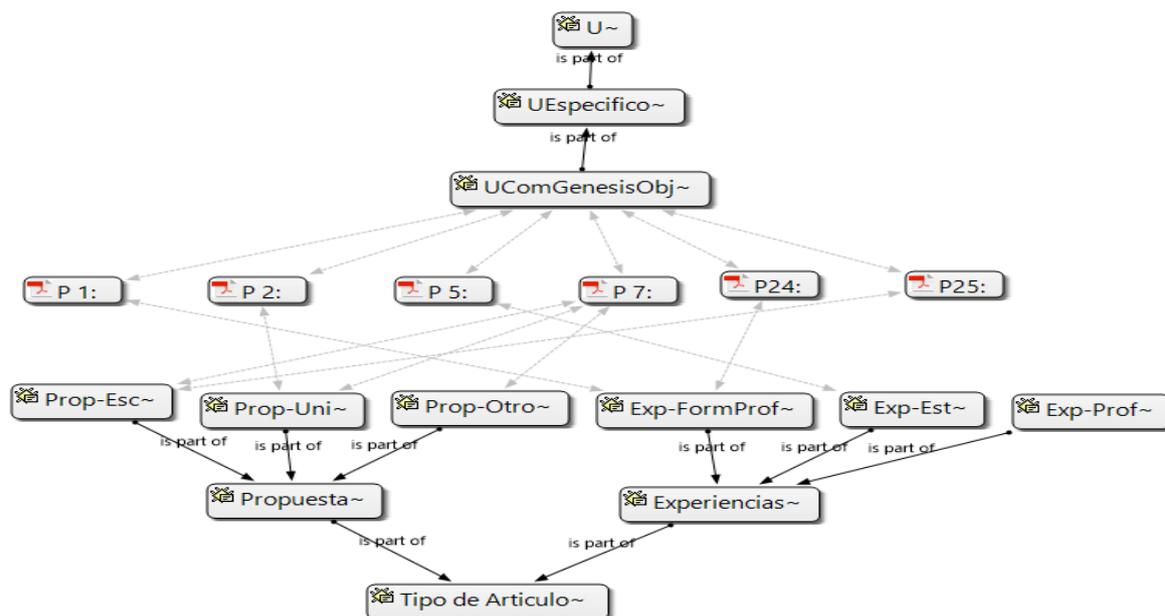


Ilustración 16. Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Tipo de Artículo

El documento p7 referido anteriormente también aboga por la comprensión de la génesis de un objeto matemático, se evidencian dos documentos referidos a Prop-Esc, y un documento por Exp Formprof y otro por Exp-Est, ante lo cual es necesario desarrollar propuestas para aplicar con profesionales, Se esperaba encontrar una relación con el uso general de la HM como meta, ya que al comprender la génesis de un objeto es necesario reconocer que este ha cambiado a lo largo del tiempo, esto permitiría realizar una reflexión en las Matemáticas mismas, pero solo compartían dos documentos lo cual no es un referente sólido para establecer esta relación

5.1.6. Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” – Tipo de Artículo

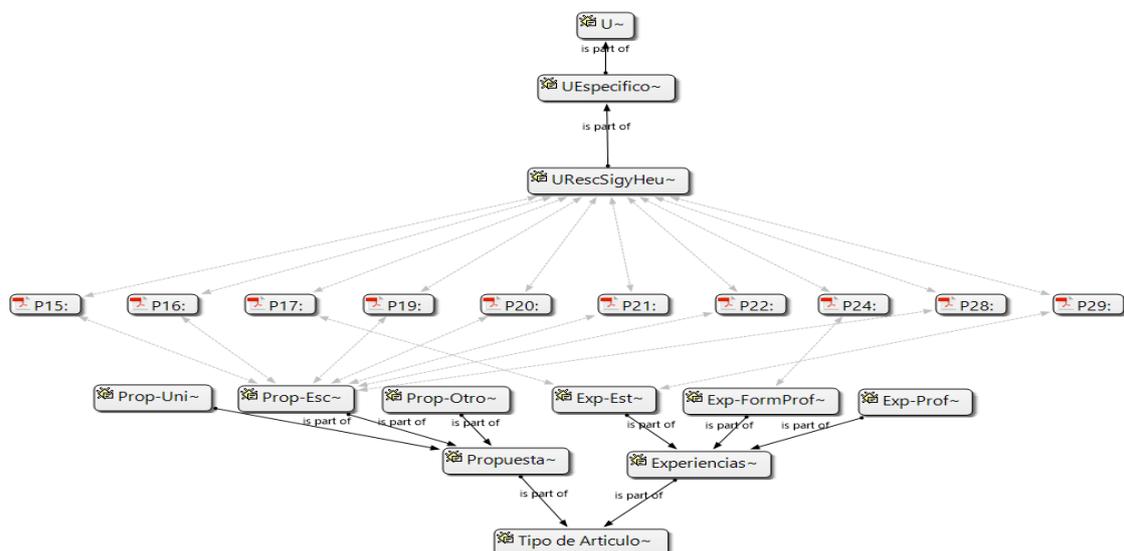


Ilustración 17. Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” – Tipo de Artículo

Se evidencia una mayor presencia de artículos encaminados a rescatar las heurísticas en comparación con la génesis de un objeto, se encuentran diez artículos asociados con este uso específico de la HM, los cuales en un porcentaje de aproximadamente el 70% están asociados a propuestas en la escuela, otros dos documentos asociados a experiencias en la escuela y solo un documento en experiencias con profesores en formación, las unidades Prop-Uni, Prop-Otro y Exp-Prof no presentan documentos relacionados.

5.1.7. Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Tipo de Artículo

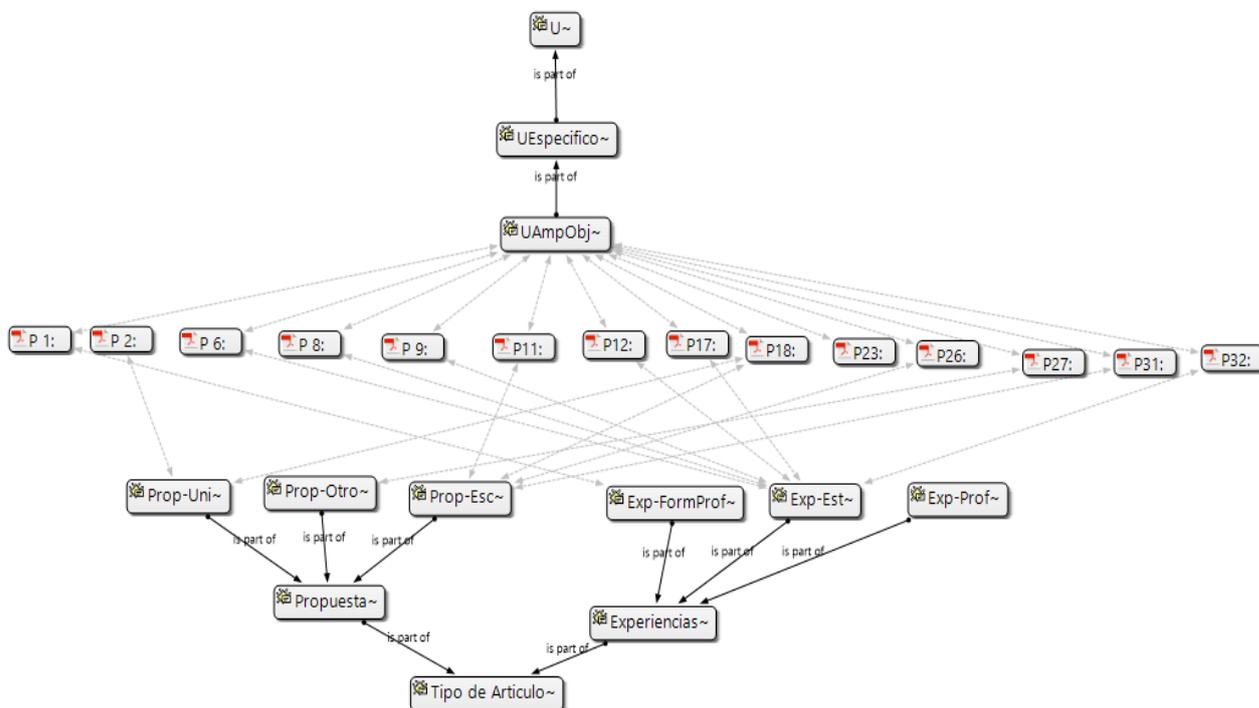


Ilustración 18. Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Tipo de Artículo

Se observan catorce de treinta y tres documentos asociados con este uso específico de la HM que se corresponden con un 42% , de los cuales cinco están asociados a experiencias con estudiantes, uno con experiencia con profesores en formación, cuatro asociados con propuestas para desarrollar en la escuela, uno en un ambiente universitario y uno otro ambiente, no existen documentos asociados a experiencias con profesionales en tanto no se aprecia un interés por ampliar la comprensión de un objeto de estudio en profesores en servicio.

5.1.8. Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las Matemáticas” – Tipos de Artículo

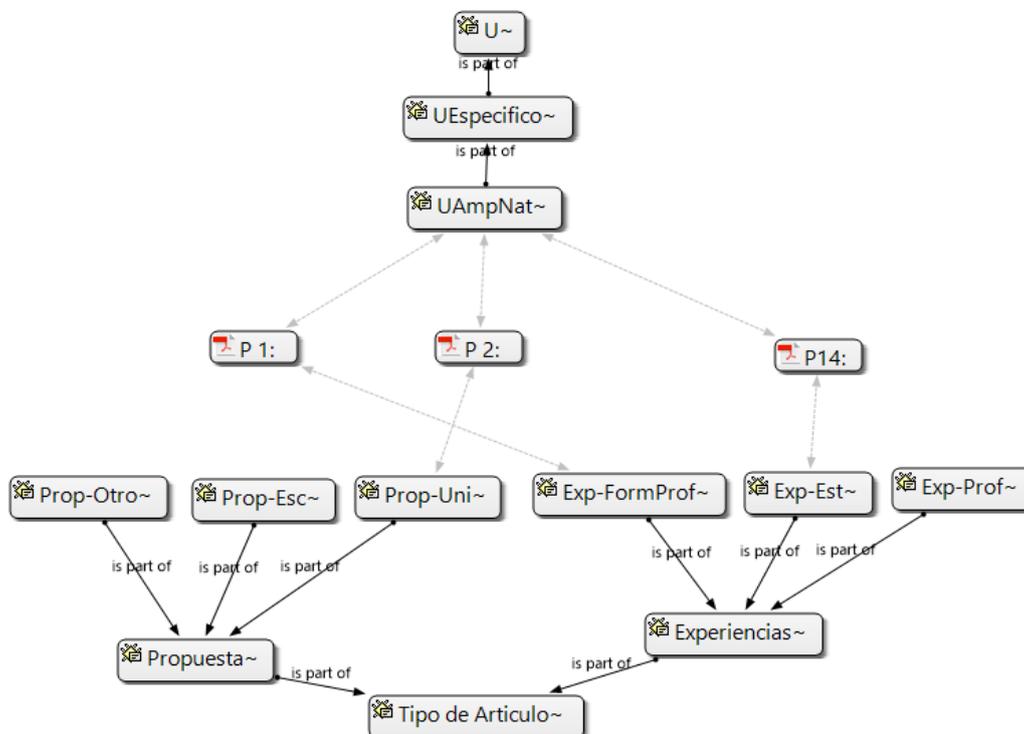


Ilustración 19. Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las matemáticas” – Tipos de Artículo

Se presentan únicamente tres documentos correspondientes al 10%, están asociados individualmente a Propuesta a nivel universitario, experiencia con profesores en formación y a experiencia con estudiantes, no se pueden establecer relaciones adicionales, para esto sería necesario ampliar el número de artículos y extenderlos a libros, conferencias, entre otras fuentes relevantes.

5.1.9. Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Tipo de Artículo

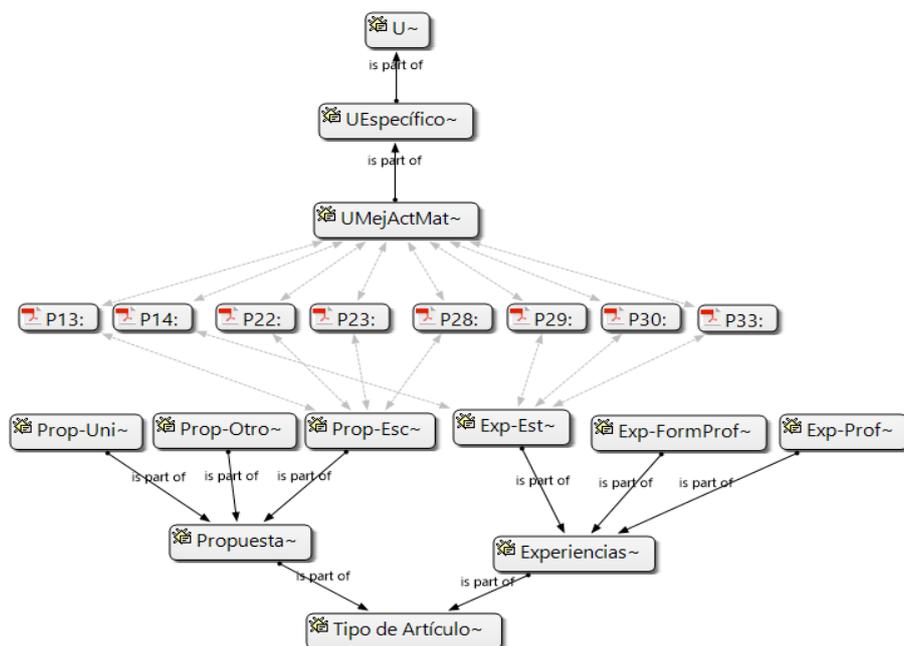


Ilustración 20. Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Tipo de Artículo

De los ocho documentos relacionados, se encuentra que cuatro de ellos están asociados a experiencias con estudiantes, y cuatro hacen referencia a propuestas en la escuela, esto deja ver que no existen experiencias ni propuestas ajenas al ambiente escolar específicamente, lo cual implica desarrollar más actividades cambiando la población de estudiantes a maestros en formación o con profesores en servicio, esto para verificar si esta tendencia en este uso se mantiene.

5.2. Usos de la HM y Nivel de Profundidad

5.2.1. Uso general “Meta” – Nivel de Profundidad

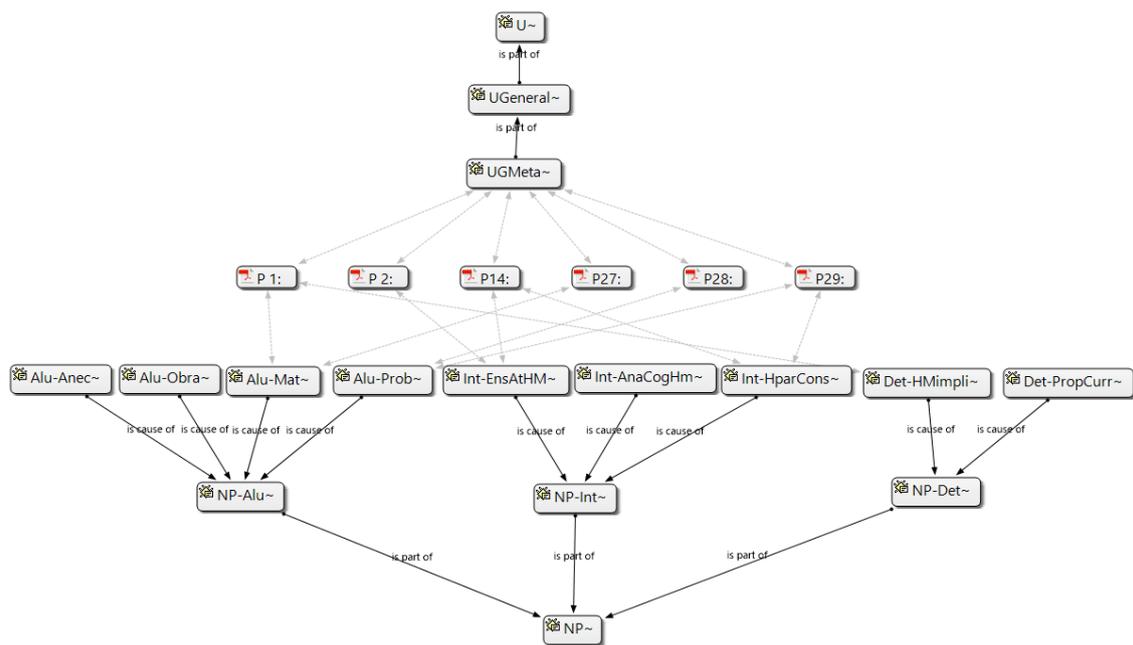


Ilustración 21. Uso general “Meta” – Nivel de Profundidad

El uso general de la HM como meta se creía debía estar asociado con un nivel de profundidad de *integración* o *determinación*, en su lugar, se encuentra que de los seis artículos relacionados tres de ellos están relacionados con el nivel de profundidad de alusión (dos de ellos a problemas y uno de ellos a matemáticos), dos documentos a integración (uno a Int-EnsAtHM y otro Int-HparCons), tan solo un documento hizo referencia a *determinación*, pero este documento también hacía referencia a alusión, el documento p1. *Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics.* Presenta en su desarrollo, referentes que indicaban que se trataba de *alusión* sin embargo dentro de las consideraciones finales se evidenciaba un interés por establecer de manera implícita la HM en la propuesta de enseñanza.

5.2.2. Uso general “Herramienta” – Nivel de Profundidad

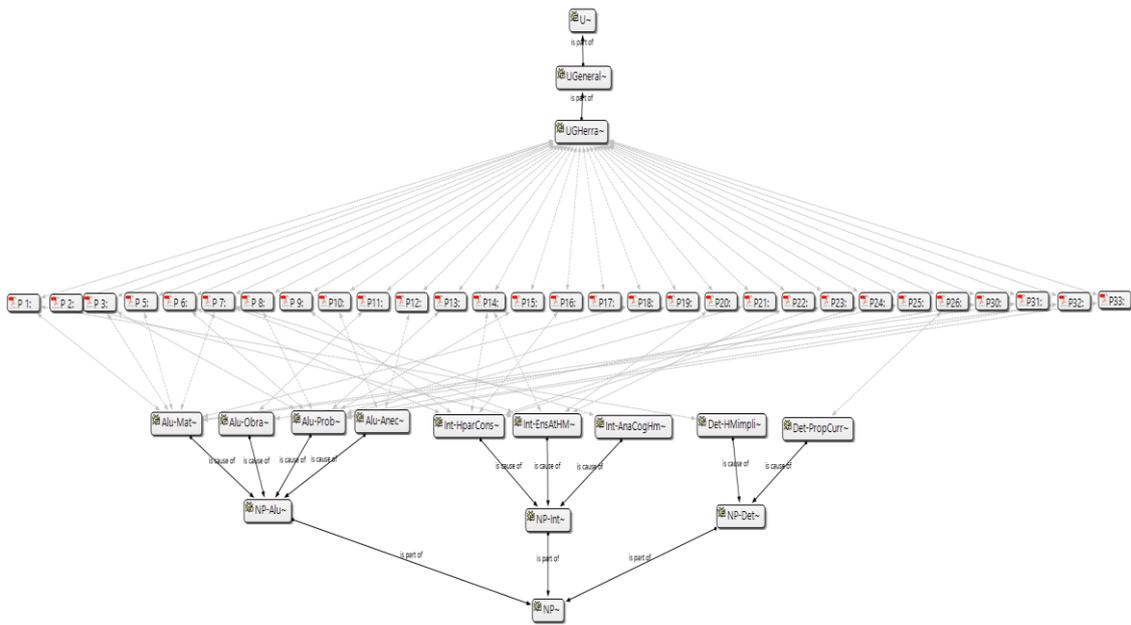


Ilustración 22. Uso general “Herramienta” – Nivel de Profundidad

Respecto al nivel de profundidad en algunos documentos su clasificación no se daba de manera disyunta, es decir, un documento podría apuntar a desarrollar los tres niveles de profundidad, ya que cada uno de ellos se enfoca en asuntos particulares. De los documentos presentados en la red se encontraron un total de 35 relaciones, es decir de los 29 artículos, 5 de ellos tenían relaciones dobles, 22 asociados a alusión, 11 se relacionados con integración y tan solo dos de ellos a determinación.

5.2.3. Uso Específico “promover habilidades en los profesores”– Nivel de Profundidad.

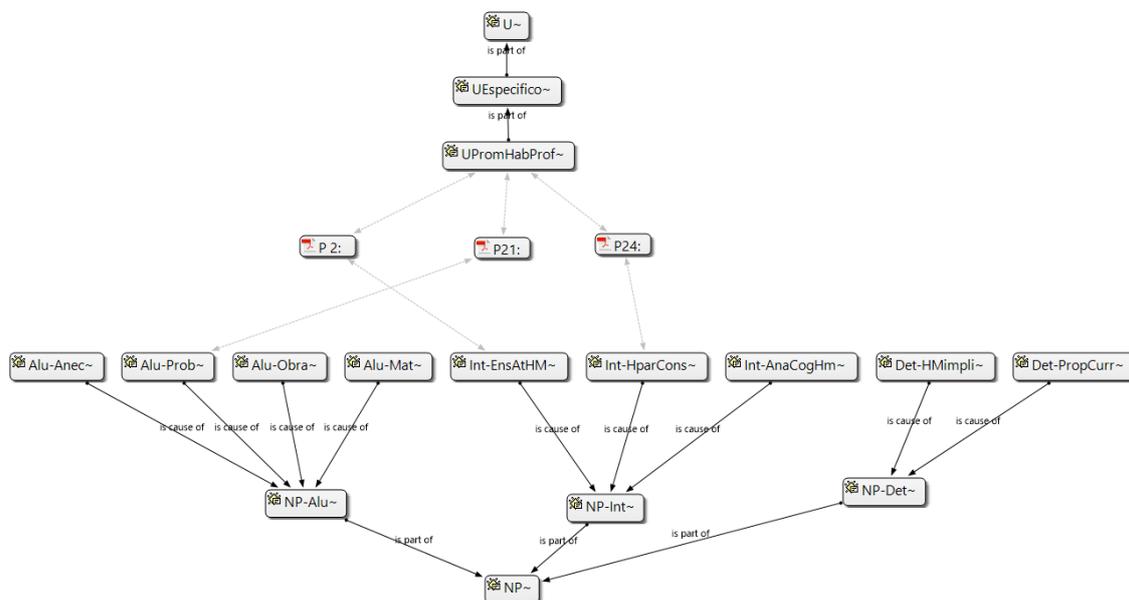


Ilustración 23. Uso Específico “promover habilidades en los profesores”– Nivel de Profundidad.

Pese a la poca existencia de documentos en este uso específico lo único que se reconoce es que dos de ellos se relacionan con *integración*, y solo uno de ellos a alusión, parece generalizarse la no presencia del nivel de determinación, esto da pie a que la comunidad de educadores matemáticos trabaje en la exploración de este nivel.

5.2.4. Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes”– Niveles de Profundidad

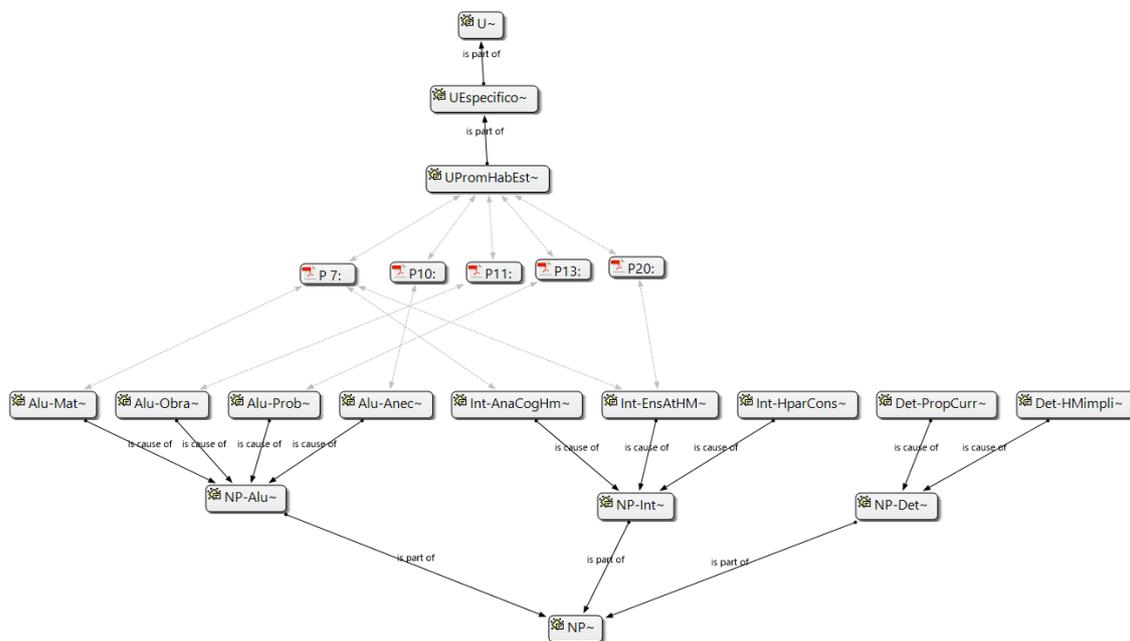


Ilustración 24. Uso Específico “promover habilidades en los estudiantes”– Niveles de Profundidad

De los cinco documentos encontrados, se hallan cuatro relaciones con *alusión* y tres relaciones con *integración*. No hay relaciones asociadas con el nivel de profundidad de determinación, tal vez para promover habilidades en los estudiantes basta con realizar alusiones a la HM o desarrollar actividades que integren la HM sin embargo no hace falta modificar el currículo, ni que la HM determine los procesos de enseñanza

5.2.5. Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Nivel de profundidad.

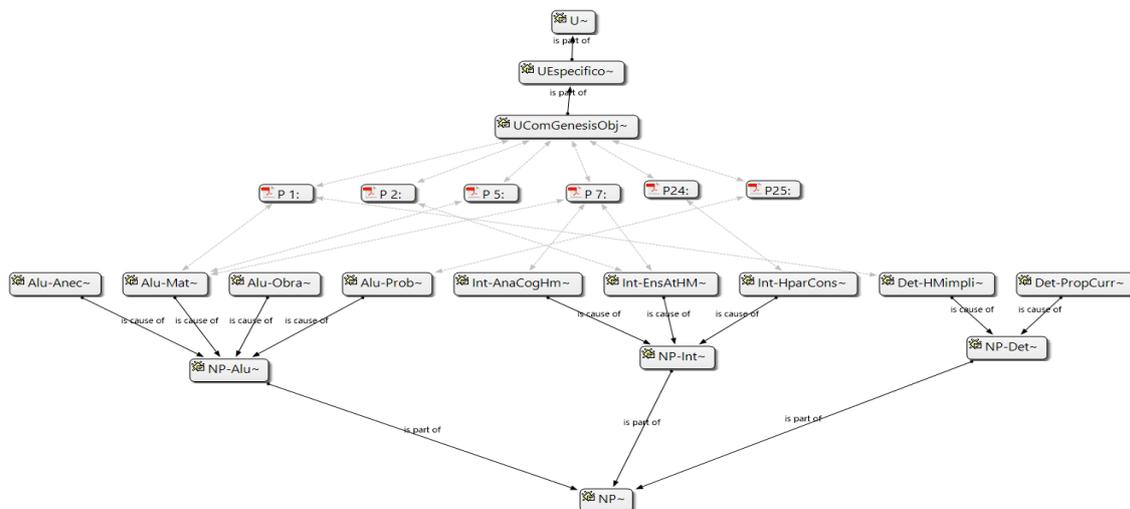


Ilustración 25. Uso Específico “Comprender la génesis de un objeto” – Nivel de profundidad.

El uso específico de comprender la génesis de un concepto presenta variedad en las formas de presentarlo, se puede dar a través de la alusión a matemáticos, problemas y obras. Se encuentran seis documentos asociados con este uso específico de los cuales se encuentran cuatro relaciones a *alusión* (tres a matemáticos y una a problemas), cuatro relaciones a integración y una sola a determinación, estas relaciones permiten observar que la comprensión de la génesis de un objeto se da en los tres niveles de profundidad.

5.2.6. Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” –Nivel de profundidad

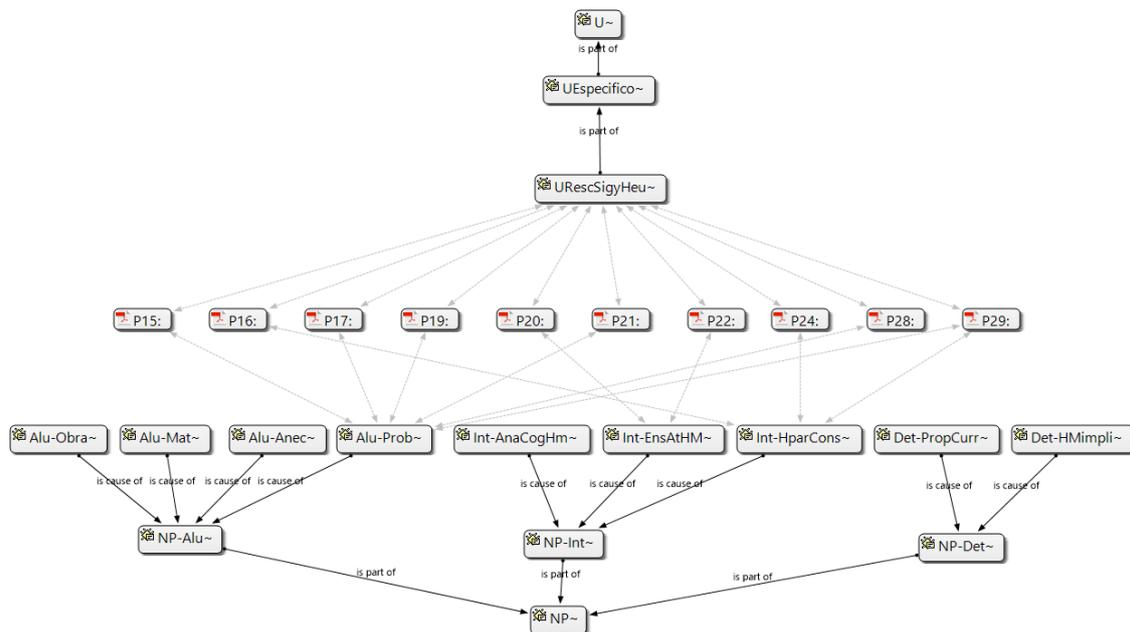


Ilustración 26. Uso Específico “Rescatar significado y Heurísticas” –Nivel de profundidad

A partir de los 10 artículos relacionados en este uso específico se puede observar que seis de ellos apuntan a la *alusión de problemas* tres de ellos a *integración* (Int-HpartCons), de tal manera de los autores de estos artículos optan por aludir a los problemas, curiosamente acudir a las obras o a los matemáticos quienes formularon estas heurísticas parece no ser una opción, en algunos documentos también se pretende que al rescatar heurísticas también se puede analizar los procesos cognitivos de comprensión de los estudiantes, lo cual agrega una funcionalidad a este uso específico, la siguiente ilustración permite ver este tipo de reflexiones.

Ilustración 27. Ejemplo Rescatar Heurísticas P22

5.2.7. Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Nivel de profundidad.

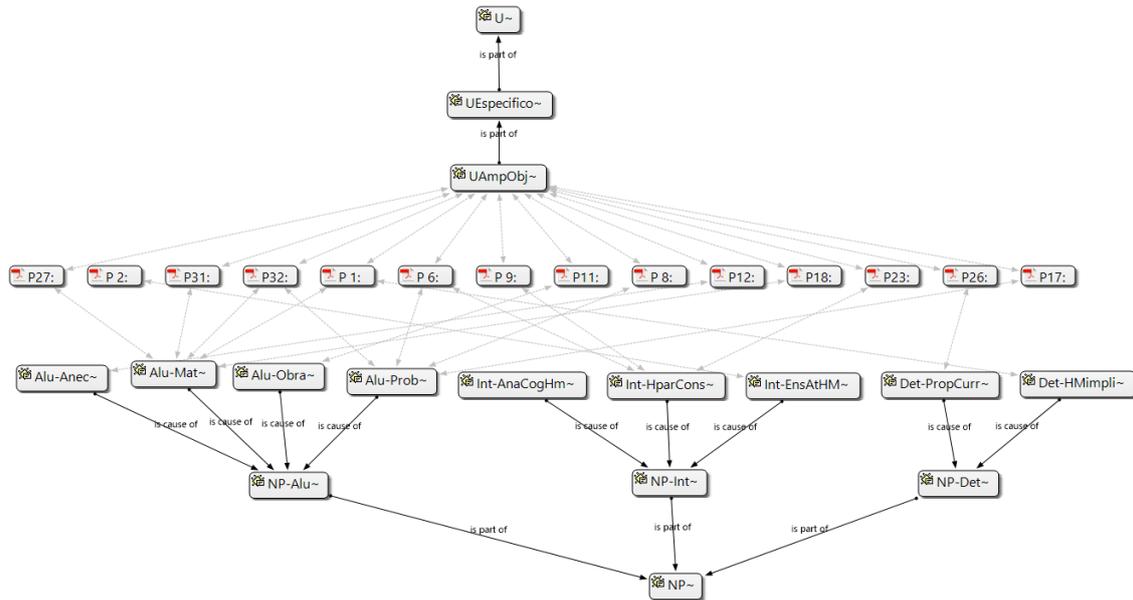


Ilustración 28. Uso Específico “Ampliar la comprensión de un objeto” – Nivel de profundidad.

El uso ampliar la comprensión de un objeto presenta relaciones asociadas a *alusión*, y a *integración* principalmente, tan solo un documento está relacionado *determinación*. Lo que induce a pensar que la ampliación en la comprensión de un objeto puede darse desde todos los niveles de profundidad planeados pero se encuentra mayor predilección por los primeros dos niveles.

5.2.8. Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las Matemáticas” – Nivel de profundidad

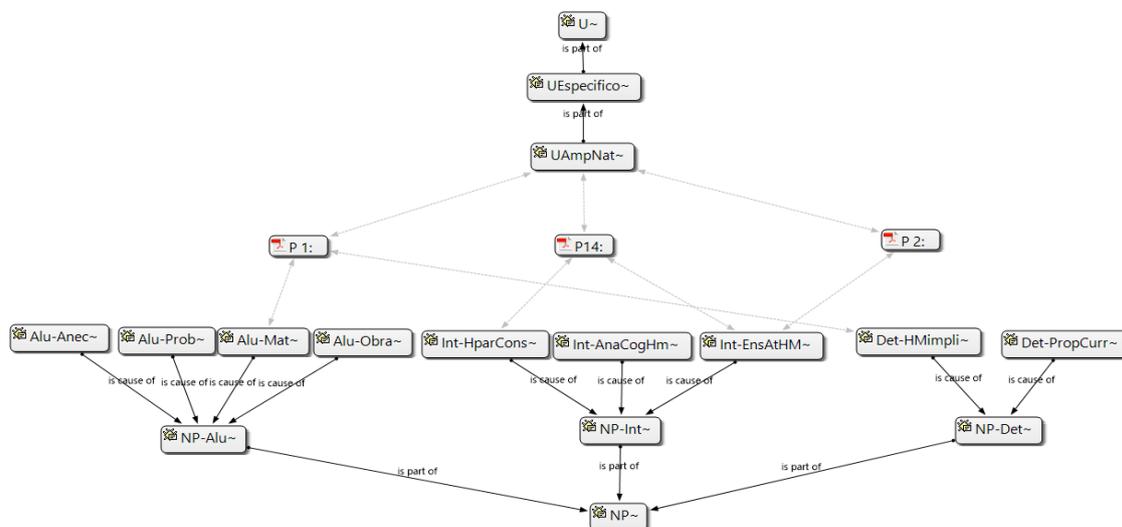


Ilustración 29. Uso Específico “Ampliar la concepción sobre la Naturaleza de las matemáticas” – Nivel de profundidad

Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas parece ser una finalidad que no se respalda por los documentos abordados, se presentan únicamente tres, de los cuales se encuentran cinco relaciones, 2 de ellas a *alusión*, 2 a *integración* y 1 a *determinación*, esto evidencia que se puede abordar desde los tres niveles, pero no hay una cantidad de documentos que permitan generalizar estas cuestiones, por lo tanto es necesario propender por propuestas que apunten a ampliar la concepción sobre la naturaleza de las Matemáticas, en especial cuando se piensa en la enseñanza en la escuela y en la formación de profesores de Matemáticas.

5.2.9. Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Nivel de Profundidad.

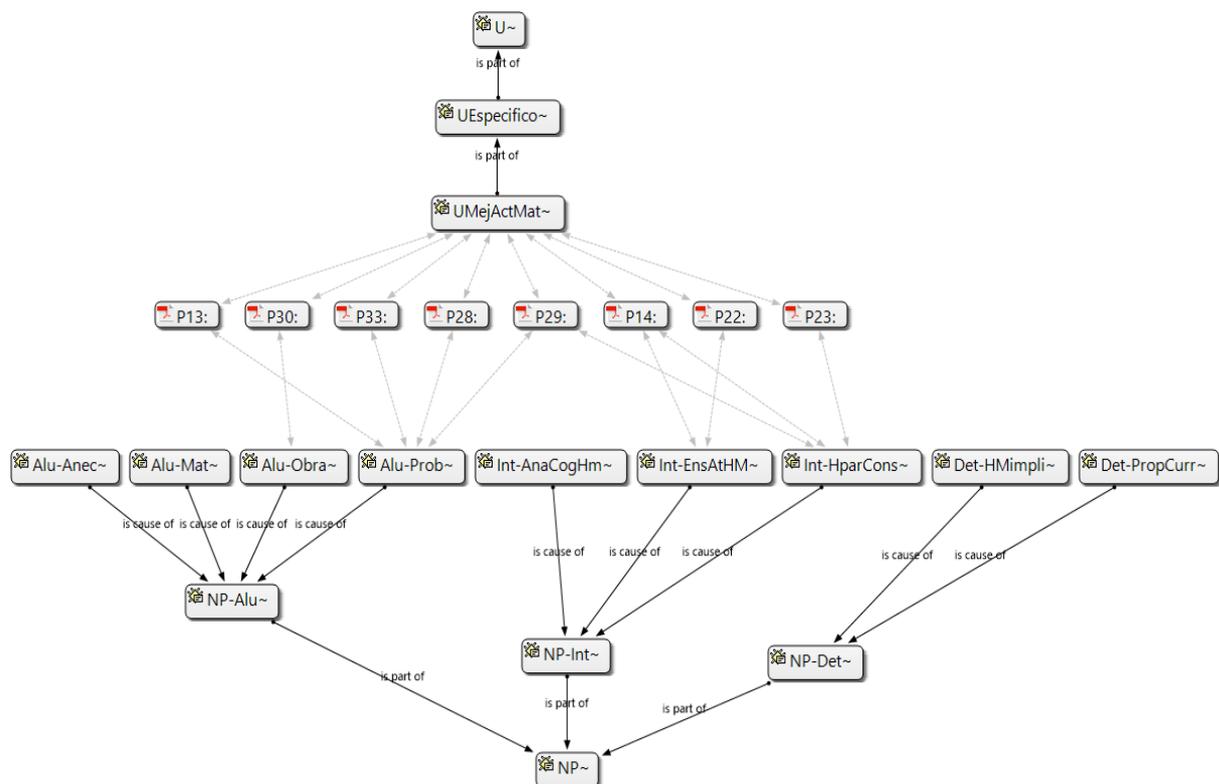


Ilustración 30. Uso Específico “Mejorar la actitud hacia las Matemáticas” – Nivel de Profundidad.

Mejorar la actitud hacia las matemáticas se da en los primeros niveles, cuatro relaciones con la *alusión a problemas* una de ellas *alusión a obras*, y de integración se observan cinco relaciones (2 Int-EnsAtHM y 3 Int-HpartCons). Mejorar la actitud de las matemáticas se puede dar a través de una anécdota, un problema o una biografía, pero también pueden organizarse actividades mucho más estructuradas, de tal manera que la HM se vea de manera consustancial con las Matemáticas.

5.3. Usos de la HM y Rama de las Matemáticas

Dado que las relaciones entre los usos de la HM y las ramas de las matemáticas son repetitivas, carece de sentido explicar uso por uso, por lo cual, a continuación, se presentan las relaciones observadas, para comprender estas relaciones se presentan las redes según la misma estructura que se ha seguido con las demás unidades:

- Respecto al uso de la HM en las ramas de las Matemáticas, se puede apreciar que cuatro de estas ramas son las que tienen mayor número de relaciones, estas son: Álgebra, Aritmética, Cálculo y Geometría; las cuales usualmente son las ramas de las matemáticas que se trabajan con mayor fuerza en las escuelas regulares.

- Las ramas de las Matemáticas como la estadística y la probabilidad son ramas jóvenes aún, esto porque no se han desarrollado investigaciones de corte histórico de los conceptos que se abordan en ellas, y puesto que su aparición es posterior al Cálculo o a Geometría, de los que se conocen trabajos desde las primeras épocas de la humanidad. De tal razón que no se vislumbren experiencias o propuestas en estos campos de estudio.
- En los artículos en donde se evidencian más de dos ramas se evidencia que la intención del autor de dichos artículos no es centrarse en un tema específico, sino que su interés radica en proponer manera de razonar, o procesos de pensamiento que se pueden desarrollar con la HM.
- Es necesario realizar mayor investigación en ramas de las Matemáticas como lógica o como pensamiento estocástico, el cual es un terreno aun fértil para desarrollar investigaciones que nutran la labor de los educadores matemáticos.

5.4. Usos de la HM generales y específicos

Analizar los usos generales y los usos específicos de la HM permite preguntarse si un uso específico está asociado explícitamente a un uso general particular, de manera que estos usos generales puedan ser disyuntos, no obstante, la respuesta que aquí se plantea es que esta situación no es posible de generalizar y depende de cada uso específico que se aborde, puesto que cada uso específico reúne algunas actividades y formas de pensamiento que pueden replicarse en otros usos. A pesar de esto, a continuación, se estudia si existe al menos una tendencia de los usos específicos por ser de alguno de los dos tipos generales.

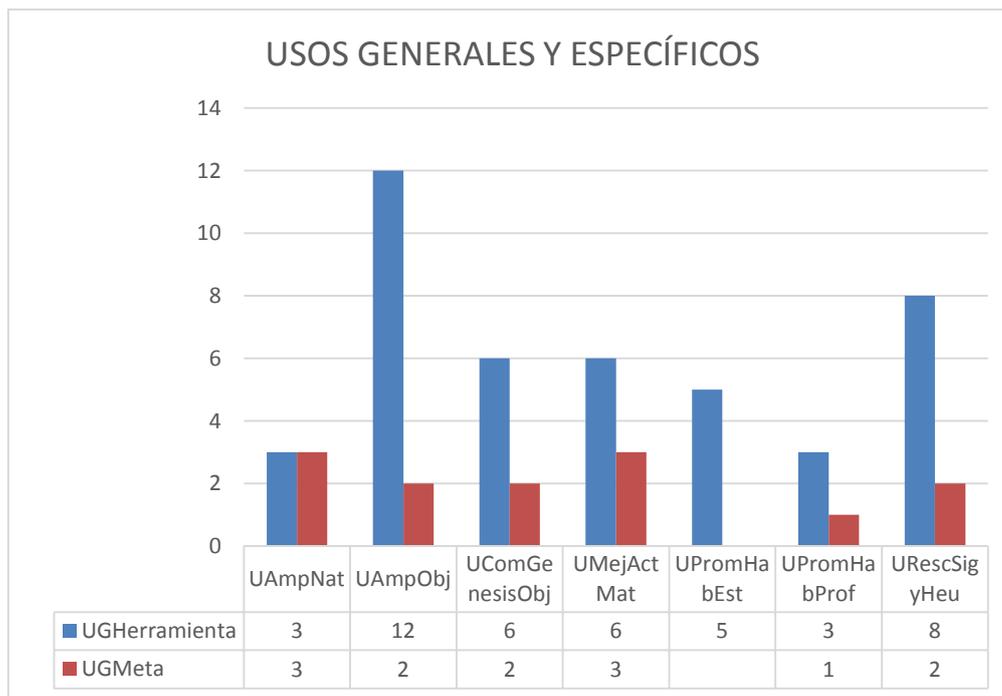


Ilustración 31. Usos Generales y Específicos

La intención de usar la HM como herramienta, tiende a desarrollarse a través de *promover habilidades en los estudiantes* (Esta es la única unidad que solo hace referencia al uso como herramienta), *Mejorar la actitud hacia las Matemáticas*, *Ampliar la comprensión del objeto y Rescatar Heurísticas y Significados*.

Por su parte, usar la HM como meta, se evidencia primordialmente en *Ampliar la Naturaleza de las Matemáticas y Mejorar la actitud hacia las Matemáticas* debido a la poca existencia de documentos en la HM como meta.

Por lo tanto, no es posible atribuir un uso específico a un uso general particular, ya que según como se desarrolle la actividad es posible que aluda a alguno de los dos o a ambos,

6. CONCLUSIONES

Como cierre del presente trabajo, se presentan algunas conclusiones como complemento a las establecidas sobre los usos de la HM del capítulo anterior, también se proponen algunas cuestiones abiertas que se proponen como temas de investigaciones futuras:

A partir de las categorías establecidas se logra una clasificación sistemática de los usos de la Historia de las matemáticas, que, aunque debe complementarse analizando otras fuentes de información la iniciativa es punto de partida para otros trabajos futuros.

Realizar una clasificación documental está orientado a contribuir a la comunidad de educadores Matemáticos brindando una herramienta de información para futuros investigadores o para enriquecer la información con la que se cuenta de las relaciones entre HM y educación en Matemáticas, una reflexión interesante respecto a revisiones documentales se presenta en la revista AMMCI¹⁶ (Vargas Garza, 2009) en la que el autor pone de manifiesto su intención de aprovechar la cantidad de información suministrada en las redes, entendiendo redes en su forma más amplia, es por esto que, realizar una revisión de la bibliografía reportada se justifica desde el acto mismo de recopilar y estudiar información.

Realizar una clasificación implica la creación de categorías de análisis, lo ideal era que estas fueran disyuntas para facilitar la codificación de los documentos, pese a que no fueron disyuntas si se reconocen elementos para asociar un artículo a una categoría en específico o a varias según sea el caso.

La revisión documental permitió conocer y comprender de qué manera se usa la HM bajo la propuesta de distintos autores, quienes imprimían en sus investigaciones, intenciones particulares, creencias e intenciones.

Reflexión personal: El presente trabajo permite comprender mucho mejor la relación existente entre HM y eM a la luz de los usos de la HM, lo cual se verá reflejado en mi practica como docente, buscando integrar la HM al aula, en cualquiera de los niveles de profundidad establecidos, reconociendo que cada uno de estos niveles permite la consecución y el desarrollo de habilidades específicas con los estudiantes.

Comprender la génesis de algunos de los objetos que se consideran fundamentales (como el concepto de número, derivada, integral , función, ecuación, etc.) resulta ser un conocimiento que el profesor de matemáticas debería tener explícito, no para que se lo presente a los estudiantes en todos los conceptos, pero sí para trazar un plan buscando que su aprendizaje sea más natural, abordando quizás los problemas que surgieron en dicha época, o teniendo referencias históricas, anécdotas, o heurísticas usadas,

Comprender la génesis de un objeto y rescatar significados y heurísticas e HM como meta eran unidades de análisis que el autor de este trabajo pensaba irían relacionadas debido a la naturaleza de las unidades, estas recurren a la HM para comprender la manera de abordar una temática a partir de sus orígenes, sin embargo, la realidad no se correspondió con esta hipótesis, ya que los artículos de dichas unidades son diferentes, excepto en el artículo P24. Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). *Teaching prospective teachers about fractions: historical*

¹⁶ Revista de la Asociación Mexicana de Metodología de la Ciencia y de la Investigación

and pedagogical perspectives. Educational Studies in Mathematics, el cual realiza un barrido histórico tanto de la génesis del objeto, así como de las heurísticas usadas

Rescatar Heurísticas y comprender la Génesis de un objeto, fueron unidades de análisis que no tuvieron relación con propuestas o experiencias a nivel universitario, ante esto se podría reflexionar sobre si al interior de las universidades una de sus preocupaciones son estas actividades, es decir, si el componente histórico en un ambiente universitario ajeno al de la formación de profesores de Matemáticas se presenta o es nulo.

Las unidades de análisis fueron construidas tanto de referentes teóricos como de artículos que cumplieran con los parámetros establecidos, de tal motivo, algunas unidades decantadas no tuvieron algún documento relacionado, tal es el caso de uso específico *Organizador Curricular*

En cuanto a los niveles de profundidad, el nivel de *Determinación* fue el que menos relaciones presentó, lo cual abre la banqueta a trabajar en artículos que respalden diseños de clase desde la presencia permanente de la HM en el aula.

6.1. Cuestiones abiertas

Durante el desarrollo de la investigación fueron surgiendo diferente tipo de interrogantes que dados los alcances del presente trabajo no eran posible de abordar, por lo tanto, se proponen como cuestiones abiertas que puedan servir como punto de partida para futuras investigaciones, y de insumo para la decantación de una pregunta problema, según lo intereses del lector.

- La naturaleza de la revisión documental estuvo orientada únicamente a revistas especializadas con unos parámetros específicos, ante lo cual es posible cuestionarse si las tendencias en las relaciones entre las categorías se mantendrán si se cambia la fuente, es decir, eligiendo ahora libros de texto, páginas web, libros de didáctica, memorias de eventos, entre otros.
- Educar en Matemáticas implica un cambio en el paradigma de la enseñanza, hoy en día se propende por unas Matemáticas más humanas, de fácil acceso para todos, razón por la cual es necesario realizar contribuciones a la producción de artículos de este corte puesto que de los artículos seleccionados pocos artículos apuntaban a este objetivo.
- Una conjetura que surge durante el análisis de los artículos radica en los cambios de paradigmas que los mismos usos han tenido durante el desarrollo de la Historia de las Matemáticas, el giro hacia lo social (Lerman, 2000) propone como foco principal de atención las diferentes relaciones de las prácticas sociales, reconociendo a los estudiantes como sujetos que forman parte de una sociedad y que por lo tanto todas las

variables que formen parte de la *noosfera* de la educación Matemática deben tenerse en cuenta y considerarlas para ejercer una mayor atención en el aspecto que se quiera fortalecer.

7. Referencias Bibliográficas.

- Albayrak, Ö. (2008) Effects of history of mathematics integrated instruction on mathematics self-efficacy and achievement
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin
- Barot M. & Nulman A. [NGCmatem] (2006) ¿Qué hace hoy un Matemático? Series de video, José Antonio de la Peña [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=JTDvtwQNDJw&list=PL767B5D34B73BB729&index=3>
- Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma*, 2, 17–28.
- Calinger, R. (Ed.). (1996). *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching*. [Washington, D.C.]: Mathematical Association of America
- Cantoral, R. Farfan, R. (2002). *Matemática Educativa: Una Visión De Su Evolución*. *Revista Educación Y Pedagogía*, XV(35), 203–214.
- CENTRO DE INFORMACIÓN INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE ESCÁRCEGA [ITSE], (2013). *Guía para realizar una investigación documental*. Escárcega Campeche
- Chevallard, Y (1997). *La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique ISBN 950-701-380-6.
- Clark, K. (2006). *Investigating teachers' experiences with the history of logarithms: A collection of five case studies*. Dissertation. Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, USA (accessed 18/2/2016).
- Clark, K. (2006). *Investigating Teachers' Experiences with The History of Logarithms: A Collection of Five Case Studies*
- Erazo Castro, J. F., & Cañizales Garzon, G. D. (2013). *Métodos heurísticos para el cálculo de volúmenes en el siglo XVII bajo la idea naciente de integral definida: una aproximación desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Erickson F. (1986). *Qualitative Methods in Research on Teaching*. Michigan State University

- Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 83–106.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2002). *History in mathematics Education*.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*.
- Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408.
- Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. *For the Learning of Mathematics*, 17, 55–61. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/40248224>.
- Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 1-20.
- Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. In *Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática* (pp. 1–57).
- Godino, J. En, F., & Tss, L. (2006). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos 1, 14(3), 1–6.
- Gómez, L. (2011). Un Espacio Para La Investigación Documental. *Revista Vanguardia Psicológica Clínica Teórica y Práctica*-ISSN 2216-0701. Volumen 1, Número 2, octubre-marzo de 2011
- Goodwin, D. (2007) *Exploring the Relationship Between High School Teachers' Mathematics History Knowledge and their Images of Mathematic*.
- Guacaneme, E (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. Tesis de Doctorado. Universidad del valle, pp. 424.
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 223-258.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400

- Jahnke HN (2000) The Use of original sources in the mathematics classroom. In: Fauvel J, van Maanen J (eds). *History in Mathematics Education: The ICMI study*. Kluwer, Dordrecht, p 291-328.
- Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using History in Mathematics Education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(1), 67-101
- Jankvist, U. T. (2009a). *History of Modern Applied Mathematics in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics*.
- Jankvist, U. T. (2011). *Anchoring Students' Metaperspective Discussions of History in Mathematics*.
- Katz, V. J. (Ed.). (2000). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective: The Mathematical Association of America*.
- Kilpatrick, J., Rico, L., & Gómez, P. (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes - Resolución de problemas Evaluación - Historia*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.
- Klein, F (1908). *Elementarmathematik vom hoeheren standpunkie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1908-1909 (2 vols) Traducción de Hedrick E. Springer, Berlin.
- Kragh, H. (1989). *Introducción a la historia de la ciencia*.
- Lerman, S. (2000). El giro hacia lo social en la investigación en Educación Matemática. *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, 19-44.
- Manrique, J. & Triana, J. (2013). *El papel de la historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores. Maestría en Docencia de la Matemática Tesis no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.*
- Martinez Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 5(1), 45-78.
- McAllister A. & White D. (2015) *History of Mathematics: Seeking Truth and Inspiring Students*
- McCartney Mark (2012) *History of Mathematics in the Higher Education Curriculum*
- Montiel R, R. (23 de febrero de 2009). *Métodos*. Recuperado el 24 de septiembre de 2012, de <http://www.metodos.com>

- Mora, L. C., & Guacaneme, E. A. (2014). La Historia de las Matemáticas como organizador curricular a favor del Conocimiento Didáctico del Contenido. Paper presented at the XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística, San Juan de Pasto. Documento no publicado retrieved from
- NCTM. (1969). Historical Topics for the Mathematics Classroom. Thirty-first Yearbook. Washington, D.C.: National Council of Teacher of Mathematics
- Niss, M. (1991). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? Investigar Y Enseñar Variedades De La Educación Matemática, pp. 7-17.
- Noel Ann Bradshaw, Mark McCartney & Tony Mann (2010). Using History in mathematics teaching – some open education resources for the future
- Önder Bütüner S. (2015). Impact of Using History of Mathematics on Students' Mathematics Success: A Meta-Analysis Study.
- Poincaré, H. (1963). Ciencia y método. Madrid, España: Espasa-Calpe.
- Polya, G. (1962). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving (Vol. I, II). New York, Wiley.
- Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G., et al. (1991). The experience of history in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 11(2), 7–16. Special Issue on History in Mathematics Education
- Schubring, G. (1978). Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics Education (pp. 91 – 142). Dordrecht: Kluwer.
- Sevda, G. & Ahmet, O. (2013). An example of using history of mathematics in class
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22
- Siu, M.-K. (1997). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom.
- Siu, M.-K. (2007). “No, I don’t use history of mathematics in my class. Why?” Man-Keung SIU Department of Mathematics, University of Hong Kong Pokfulam, Hong Kong.

- Siu, M.-K., & Tzanakis, C. (2004). History of Mathematics in Classroom Teaching - Appetizer? Main Course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1), 5–10.
- Sriraman, B. (2012). *The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education*.
- Swetz, F. J., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., & Katz, V. J. (Eds.). (1995). *Learn from the Masters!* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Taimina, D. (2004). History of mathematics and mechanics in digital Reuleaux kinematic mechanism collection. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 89–102. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).
- Tang, K.-C. (2007). History of mathematics for the young educated minds: A Hong Kong reflection. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (revised edition, pp. 630–638). Uppsala: Uppsala Universitet
- Tattersall, J., & McMurrin, S. L. (2004). Using the ‘educational times’ in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 103–114. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).
- Toerner, G., & Arzarello, F. (2012). Grading Mathematics Education Research Journals. *European Mathematical Society Newsletter*, 86, 52-54.
- Torres, L. & Guacaneme, E. (2014). La Historia De Las Matemáticas En La Formación Inicial De Profesores De Matemáticas En Colombia. *Actas del VII CIBEM*. ISSN 2301-0797, 3999-4006
- Torres, L., Guacaneme, E. & Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 16(2), 203-224.
- Tözlüyurt (2008) The perceptions of senior high students regarding the course, in which activities chosen from history of mathematics are used on the subject of numbers learning area.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics Education* (pp. 201–240).

- Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the Close Historical Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks. For the Learning of Mathematics. *An International Journal of Mathematics Education*, 20(1), 44-55.
- González, P. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, ISSN 0212-4521, ISSN-e 2174-6486, Vol. 9, Nº 3, 1991, págs. 281-290
- González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17–28.
- Vargas Garza, A. E. (2009). Investigación documental para la docencia Una propuesta de integración de redes académicas para la Formación del Docente. *Revista de La Asociación Mexicana de Metodología de La Ciencia Y de La Investigación*, 1(1), 121–134.
- Weil, A. (1978). History of mathematics: Why and how. In O. Lehto (Ed.), *Proceedings of the international congress of Mathematicians, Helsinki, 15–23 August 1978* (pp. 227–236). Hungary: Academia Scientiarum Fennica.
- Weng Kin Ho. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. Singapur: Department of Mathematics and Science. Retrieved from [http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My publications/Math Education/hom.pdf](http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/hom.pdf)