UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "***Acciones de un profesor que promueven la experimentación y reflexión sobre la actividad demostrativa. El caso de profesores en formación avanzada***", presentado por la estudiante:

Luz Elvira Moyano Valencia - 2011185054 - 52718965

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado,** con 42 Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 23 días del mes de febrero de 2016.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesor: OSCAR JAVIER MOLINA JAIME

Jurados:

Profesora: *LYDA MORA MENDIETA (UPN)*

Profesora: *IVONNE TWIGGY SANDOVAL (México)*

ACCIONES DE UN PROFESOR QUE PROMUEVEN LA EXPERIMENTACIÓN Y REFLEXIÓN SOBRE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA. EL CASO DE PROFESORES EN FORMACIÓN AVANZADA

LUZ ELVIRA MOYANO VALENCIA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2016

ACCIONES DE UN PROFESOR QUE PROMUEVEN LA EXPERIMENTACIÓN Y REFLEXIÓN SOBRE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA. EL CASO DE PROFESORES EN FORMACIÓN AVANZADA

LUZ ELVIRA MOYANO VALENCIA

Trabajo de grado presentada como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Asesor
Óscar Javier Molina Jaime
Profesor del Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016

Nota de aceptación:

Firma del Asesor

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá, D.C., Febrero del 2016.

DEDICATORIA

A mi esposo, Alexander, por su apoyo para llevar a cabo este proyecto.

A mis amados hijos, Juan David y Manuel Alejandro, por su comprensión y amor demostrados mediante sus abrazos, besos y palabras que motivaron mi progreso.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por su apoyo incondicional, comprensión y acompañamiento desde el inicio de este trabajo hasta su culminación.

Al profesor Óscar Molina, por su apoyo constante y oportuno, pero sobre todo por su paciencia, al corregir y aclarar todas aquellas dudas e inquietudes que surgieron en la elaboración del presente trabajo.

A los profesores de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional por poner a nuestro servicio sus saberes y experiencias que enriquecieron día a día nuestra labor profesional.

A los estudiantes, profesores en formación avanzada, del curso *Procesos y conceptos de la geometría escolar* por su disposición y colaboración desinteresada que permitió llevar a cabo este trabajo.

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mí total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores, he dado los respectivos créditos.

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Acciones de un profesor que promueven la experimentación y reflexión sobre la actividad demostrativa. El caso de profesores en formación avanzada.
Autor(es)	Moyano Valencia Luz Elvira
Director	Molina Jaime Óscar Javier
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 101 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA, ACCIONES DEL PROFESOR, CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR, UNIDAD COGNITIVA.

2. Descripción
En este documento se presenta un estudio que tiene como objetivo establecer las acciones llevadas a cabo por el profesor para promover que sus estudiantes experimenten actividad demostrativa y reflexionen sobre los procesos inmersos. El espacio académico en cual se llevó a cabo el estudio fue *Procesos y Conceptos de la Geometría*, curso del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, del primer semestre del año 2013. Para desarrollar este estudio, se toma como marco de referencia la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008), la cual permite caracterizar momentos generales de las dos sesiones de clase seleccionadas; para tener mayor fineza en las acciones realizadas por el profesor en el marco de los momentos generales decantados, se

usa la categorización de acciones del profesor propuestas por el grupo de investigación Æ.G. (2011) cuando este intenta conformar una ambiente de actividad demostrativa en el aula. Tener en cuenta estas dos propuestas permite plantear categorías de análisis asociadas a los intereses del presente estudio.

3. Fuentes

Se utilizó información proporcionada por 14 fuentes bibliográficas:

Brown, J. & Stillman, G. (2009). Preservice secondary teachers' competencies in proof In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and proving in mathematics education (Vol. 1, pp. 94-99). Taipei, Taiwan: ICMI.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis doctoral, Universitat de València, Departament de Didàctica de la Matemàtica Valencia, España.

Camargo, L. & Gutiérrez, Á. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 245-258). Lleida: SEIEM.

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa* (Francisco Agudo López, Tr.). Madrid, España: Ediciones La Muralla (primera edición en inglés, 1989).

Cubillos, M. & Sánchez, S. (2010). *Análisis de una práctica docente. Interacciones que se gestan en la actividad demostrativa.* Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Colombia.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* Tesis doctoral, Universitat de València, Departament de Didàctica de la Matemàtica Valencia, España.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. ZDM, 40(2), 329-336.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, (17), 51-64

Llinares, S. (2000) Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En: DA PONTE, J.P. y SERRAZINA, L. (org.). Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: actas. [Lisboa]: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000, pp. 109-132.

Llinares, S. (2007 (a)). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en relación a la noción de función. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. JAEM. Granada. Julio.

Llinares, S., Roig, A., & Valls, J. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, *20* (3), 59-82.

Samper, C., Camargo, L., Molina, O., Perry, P. & Echeverry, A., (2011). *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase.* (Informe de investigación). Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).

Samper, C., Molina, O., Camargo, L., Perry, P. & Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, O., Perry, P. & Camargo, L., (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y O. Molina (Ed.), Geometría plana un espacio de aprendizaje (pp. 13-36). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

4. Contenidos

Este trabajo está estructurado en cinco capítulos y una sección de anexos. El primer capítulo está dedicado a la presentación de la problemática en la cual se sitúa el presente trabajo. Este contiene una justificación del estudio, la pregunta de investigación que lo orienta, los objetivos general y específicos y algunos antecedentes investigativos sobre la temática relacionados con actividad demostrativa, el conocimiento y la práctica profesional del profesor de matemáticas y la formación de profesores de matemáticas. El segundo capítulo presenta los referentes teóricos sobre los cuales se fundamenta el análisis de las acciones del profesor. En el tercer capítulo se presenta el diseño investigativo, en él se describen aspectos como el contexto del curso, la recolección, almacenamiento y selección de los datos, las categorías de análisis, entre otros. El cuarto capítulo presenta los resultados y el análisis de los datos recogidos a partir de las categorías de análisis establecidas en el tercer capítulo. Para esto se hace una descripción analítica de cada episodio de clases y se exponen los resultados observados en el proceso de análisis. El capítulo seis está dedicado a la presentación de las conclusiones obtenidas del estudio realizado. Finalmente, se presenta una sección de anexos que complementan y sustentan los asuntos tratados durante la investigación. Estos corresponden a las transcripciones de algunos momentos de las clases.

5. Metodología

Este estudio es de corte cualitativo (descriptivo e interpretativo) que se enmarca dentro de un enfoque metodológico de investigación educativa de estudio de caso cuya observación es no participante, puesto que la autora de este trabajo permaneció separada de las actividades realizadas por el grupo que estaba investigando, evitando ser miembro del grupo (Cohen y Manion, 1990). Se busca describir e interpretar las acciones de un profesor que orienta el espacio académico *Procesos y conceptos de la geometría escolar* del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN (I semestre – 2013), en el marco de la aproximación metodológica propuesta por el grupo de investigación Æ · G. y de la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008) para el conocimiento y habilidades necesarias para enseñar Matemáticas. Para llevar a cabo el trabajo se tomaron como unidades de análisis episodios de dos sesiones de clase de dicho espacio académico al cual asistieron 10 estudiantes. El proceso de investigación del presente trabajo se desarrolló en cinco fases fundamentales: revisión bibliográfica y fundamentación teórica, caracterización del curso (contextualización de la población estudiada, objetivos y metodología del espacio académico, tipos de problemas tratados, entre otros), recolección, organización y almacenamiento de los datos estudiados, definición de categorías de análisis y consolidación del documento final del presente estudio. Para definir las categorías de análisis se tuvo en cuenta las categorías propuestas por Llinares, Valls & Roig (2008) en las cuales se hace una descripción general de los tres dominios de conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas. No obstante, dichas categorías no precisan acciones que debe tener un profesor para que efectivamente estén en el marco de esos dominios, tan solo muestran una descripción general de estas tres categorías. De este modo, se vio la necesidad de precisar unas acciones que sirvieran de indicadores de análisis para determinar en cual categoría está el profesor, pero además que guardaran estrecha relación con aspectos relativos a la actividad demostración y la aproximación metodológica propuesta. Para ello, se acudió a las acciones del profesor propuestas por el grupo Æ.G. presentadas en el informe final de investigación (2011) "Conjeturas y organización del contenido matemático en clase", específicamente, la categorización establecida para el análisis de la mediación semiótica del profesor.

6. Conclusiones

Llevar a cabo una revisión bibliográfica que permitiera vincular la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008) sobre conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas y las acciones del profesor propuestas por el grupo Æ.G. (2011), permitió definir categorías de análisis que posibilitaron observar las acciones del profesor a la luz de estos elementos teóricos. No obstante, se observó la necesidad de incluir acciones –categorías emergentes– que no estaban contempladas, que permitieron caracterizar aspectos que los referentes teóricos no ofrecían. Por tal razón, se transforman en productos del presente estudio que aportan elementos que enriquezcan la producción científica del grupo Æ · G y parcialmente, den respuesta a los cuestionamientos planteados por la comunidad de investigadores en Educación Matemática alrededor del aprendizaje de la demostración y de las habilidades que requieren los profesores en formación avanzada para lograr una enseñanza más efectiva de la misma.

Las acciones llevadas a cabo por el profesor en el marco de la aproximación metodológica propuesta por el grupo Æ · G, en primera instancia, favorecieron en los profesores en formación avanzada, el reconocimiento de que la participación en la actividad demostrativa y la reflexión y el análisis de las tareas matemáticas propuestas por el profesor, aportan elementos didácticos asociados a la enseñanza de la Geometría que hacen parte de su conocimiento profesional y apoyan sus propias prácticas. En segunda instancia, tuvieron en cuenta los aspectos que conforman un ambiente adecuado para aprender a demostrar: el *uso de la geometría dinámica*, las *tareas matemáticas* propuestas a los estudiantes y la *interacción social de la clase*. En tercera instancia, las acciones más frecuentes del profesor estuvieron relacionadas con los dominios *conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las Matemáticas* y *habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula*, quizás, por tres elementos a tener en cuenta: 1) por momentos de clase de los cuales se prescindió durante el análisis; 2) los profesores en su mayoría eran de Matemáticas; y 3) los propósitos planteados por el profesor para el curso a su cargo, apuntaban a mejorar la capacidad de actuación de los estudiantes en contextos relacionados con la Geometría y la capacidad de generar ambientes de aprendizaje de la demostración en la escuela, mediante la actividad demostrativa desarrollada en clase. Las acciones del profesor, en su mayoría, se activaron durante la *conversación matemática*, posiblemente, porque no se realizaron registros fílmicos de momentos en los cuales los estudiantes trabajaran autónomamente.

De otra parte, durante la realización del presente trabajo, faltó como insumo para el análisis, entrevistas a los estudiantes después de las grabaciones de cada clase que permitieran constatar que efectivamente lo que se desarrollaba en ella tenía impacto sobre sus prácticas. Finalmente, la realización de este estudio aportó elementos innovadores que contribuyeron a replantear y transformar las clases de Geometría en el colegio en donde trabaja la autora, con el ánimo de mejorar en los estudiantes el aprendizaje de la demostración en Geometría, y permitió hacer un análisis comparativo entre la metodología empleada por el profesor del curso analizado y la metodología tradicional de un curso de Geometría en la escuela.

Elaborado por:	Luz Elvira Moyano Valencia
Revisado por:	Óscar Javier Molina Jaime

Fecha de elaboración del Resumen:	26	01	2016

Tabla de Contenido

Índice de Tablas y Figuras

Tablas

Figuras

Introducción

El presente trabajo nace del interés de la autora por el estudio de la Geometría y por aportar al estudio de la educación en Geometría, en particular, a las investigaciones adelantadas por el grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ · G) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Este trabajo es el resultado de una investigación llevada a cabo con profesores en formación avanzada (profesionales en Educación que realizan un estudio de posgrado) del espacio académico *Procesos y conceptos de la geometría escolar*, el cual pertenece al programa Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN. El propósito de este trabajo se centra en establecer cuáles son las acciones llevadas a cabo por el profesor de dicho curso que contribuyen a que sus estudiantes –profesores en formación avanzada– experimenten actividad demostrativa y logren reflexionar sobre los procesos inmersos. Para esto, se observaron los videos de seis de las ocho sesiones de clase y se analizaron dos sesiones a profundidad.

Este trabajo está estructurado en cinco capítulos. El primer capítulo está dedicado a la presentación de la problemática en la cual se sitúa la investigación reportada. Este contiene una justificación del estudio, la pregunta de investigación que lo orienta, los objetivos general y específicos y algunos antecedentes investigativos sobre la temática relacionados con actividad demostrativa, el conocimiento y la práctica profesional del profesor de matemáticas y la formación de profesores de matemáticas. El segundo capítulo muestra los referentes teóricos sobre los cuales se fundamenta el análisis de las acciones del profesor. En el tercer capítulo se explica el diseño investigativo, en él se describen aspectos como la caracterización del curso, la recolección, almacenamiento y selección de los datos, las categorías de análisis, entre otros. El cuarto capítulo presenta los resultados y el análisis de los datos recogidos a partir de las categorías de análisis establecidas en el tercer capítulo. Para esto se hace una descripción analítica de cada episodio de clases y se exponen los resultados observados en el proceso de análisis. Finalmente, el capítulo cinco está dedicado a las conclusiones obtenidas del estudio realizado.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

En este primer capítulo se plantea la problemática en la cual se ubica el tema de estudio del presente trabajo de investigación. Inicialmente, se realiza una justificación del estudio que se pretende realizar a la luz de algunos presupuestos de la literatura relacionada con la necesidad de estudiar al profesor formador de profesores de matemáticas, su metodología de trabajo y las acciones conducentes a la formación de profesores que transformen las prácticas tradicionales de la enseñanza de la geometría escolar. Adicionalmente, se expone la pregunta de investigación que orienta este estudio junto con los objetivos general y específicos los cuales proveen herramientas que posibilitan la formulación de una repuesta a la pregunta planteada. Al finalizar el capítulo, se desarrollan algunos antecedentes investigativos sobre temática relacionada con los objetivos de este trabajo que, eventualmente, brindarán los fundamentos teóricos que en el segundo capítulo se precisarán.

1.1 Justificación del problema

Diversas investigaciones en Educación Matemática se han interesado por la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en la escuela. Precisamente, este fue el tema central del pasado Encuentro XIX de la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI 19) llevado a cabo en la Universidad Nacional de Taiwan ubicada en Taipei (Taiwan) del 10 al 15 de mayo de 2009. Entre las preguntas claves planteadas en dicho evento se encuentra la sugerida por Hanna y De Villiers (2008) *¿Cómo diseñar oportunidades para estudiantes para profesor que les permitan adquirir los conocimientos (habilidades, comprensiones y disposiciones) necesarios para proporcionar una enseñanza efectiva la demostración?* De acuerdo con Harel (2008) referenciado en Browm y Stillman (2009), uno de los primeros pasos para responder a esta pregunta es determinar qué competencias, disposiciones y conocimiento (matemático y didáctico) poseen los profesores de matemáticas en formación. Lo anterior, se convierte en un desafío para los formadores de profesores al pensar en cómo se deben preparar los profesores para actuar en estos contextos. En el mismo sentido, Llinares, Valls & Roig (2008) señalan que uno de los propósitos de los formadores de profesores es proporcionar estrategias de aprendizaje a los profesores en formación avanzada que les permitan desarrollar las competencias necesarias para gestionar situaciones de enseñanza de las matemáticas en la escuela.

En el contexto colombiano, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (*Æ · G*) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) se ha interesado por indagar acerca de la importancia de la demostración en la clase de matemáticas y las posibles aproximaciones para su enseñanza y aprendizaje en diferentes niveles y bajo diversos contextos. Para lograr esto, ha planteado una reforma curricular a los cursos de Geometría ofrecidos por el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), en particular el curso *Procesos y conceptos de la geometría escolar* que se enmarca dentro del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, mediante el diseño situaciones de aprendizaje en un entorno de geometría dinámica que conlleven a una demostración formal a través de acciones como explorar, visualizar, inventar problemas, hacer preguntas, establecer conjeturas y argumentar, entre otras. Adicionalmente, por medio de esta propuesta buscan contribuir a la formación avanzada de profesores competentes que comprendan la Geometría plana y la demostración para cambiar la forma de ver la geometría escolar.

En este sentido, este trabajo de grado pretende enriquecer la producción científica del grupo *Æ · G* en tanto no hay un estudio específico que concentre su atención sobre profesores en formación avanzada cuando participan en espacios académicos que tengan como propósito favorecer procesos de argumentación y generar reflexiones sobre su propia práctica.

1.2 Delimitación del problema

En los programas de formación del Departamento de Matemáticas de la UPN no son fácilmente reconocibles espacios académicos que tengan como propósito (u objeto de estudio) generar reflexiones sobre la práctica docente de profesores en ejercicio, asunto que supone una falencia en una Universidad que se dedica a la formación de profesores. En un intento por aportar a corregir dicha falencia, el espacio académico *Procesos y conceptos de la geometría escolar*, el cual se enmarca en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, busca que sus participantes – profesores en formación avanzada – reflexionen sobre sus prácticas en términos de cómo entienden la argumentación y cómo lograr que sus estudiantes experimenten actividad demostrativa.

De esta manera, teniendo en cuenta los elementos descritos en el párrafo anterior, el interés de la comunidad de investigadores en Educación Matemática por la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en la escuela y los propósitos del grupo de investigación *Æ · G*, es pertinente realizar un estudio que aporte a las investigaciones en Educación Matemática que describa acciones llevadas a cabo por un profesor que orienta un espacio académico de un programa de formación avanzada (Maestría en Docencia de las Matemáticas) que contribuyan a que sus estudiantes – profesores en formación avanzada – experimente actividad demostrativa y reflexionen sobre su propia práctica en relación con dicha actividad.

Con este panorama, se propone la pregunta que orientará el desarrollo del presente estudio. Dicha pregunta considera las ideas expuestas anteriormente y busca precisar los elementos que se abordarán y serán guía de esta investigación.

> *¿Cuáles son las acciones que lleva a cabo un profesor que orienta un espacio académico de un programa de formación avanzada de profesores de matemáticas para promover que sus estudiantes experimenten actividad demostrativa en geometría y reflexionen sobre los procesos inmersos?*

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Identificar acciones que lleva a cabo un profesor de un programa de formación avanzada de profesores de matemáticas para promover que sus estudiantes experimenten actividad demostrativa en geometría y reflexionen sobre la misma desde un punto de vista didáctico y práctico.

1.3.2 Objetivos específicos

- Constituir categorías de análisis, a partir de las propuestas de Llinares, Valls & Roig (2008) y de las acciones del profesor propuestas por el grupo Æ.G. (2011), que permitan identificar acciones de un profesor de un espacio académico de un programa de formación avanzada que tienen el propósito de favorecer actividad demostrativa (y la reflexión sobre la misma) en sus estudiantes (profesores en ejercicio).
- Analizar los datos recogidos con base en las categorías de análisis decantadas, para determinar las acciones empleadas por el profesor en el espacio académico Conceptos y procesos de la geometría escolar del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN y caracterizar los momentos de clase a la luz de las acciones que utiliza el profesor con mayor frecuencia.
- Determinar si las acciones de un profesor del espacio académico Conceptos y procesos de la geometría escolar del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, favorecen tanto la actividad demostrativa en sus estudiantes (profesores en ejercicio) como la adquisición de herramientas para que estos hagan una reflexión sobre la misma (desde un punto de vista didáctico y práctico).

1.4 Antecedentes bibliográficos

La revisión de antecedentes se fundamenta principalmente en las investigaciones realizadas por el grupo Æ · G y por Camargo (2010) ya que estas orientan los elementos tanto teóricos como metodológicos de este estudio. Dichas investigaciones se han centrado en un contexto universitario – a nivel de pregrado – cuyo propósito es que los estudiantes –profesores en formación avanzada– aprendan a demostrar a partir de su *participación* en actividades de justificación, dentro de un sistema axiomático local.

El grupo de investigación Æ · G ha enfocado sus estudios en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. A partir de proyectos de investigación en interrelación con una innovación que se lleva a cabo en los cursos de la Línea de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN, han logrado avances significativos en la conceptualización del constructo *actividad demostrativa* que muestran el carácter social de la demostración y que su aprendizaje proviene principalmente de la participación en actividades de justificación. Precisamente, la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración requieren analizar diferentes elementos problemáticos, algunos de tipo individual y otros de carácter social. En este sentido, durante los años 2013 y 2014, llevaron a cabo la investigación *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase*. Con dicha investigación brindaron aportes y sustentaron información significativa para responder la pregunta: *¿qué elementos de la clase, relacionados con las decisiones del profesor y la interacción entre los miembros de la comunidad del aula, intervienen para que sea posible organizar y desarrollar el contenido geométrico del curso a partir de las conjeturas formuladas por los estudiantes y con la participación legítima de ellos?* Para investigar a profundidad el objeto de estudio, consideraron conveniente centrar su atención en la actividad semiótica que tiene lugar en el aula y el papel del profesor como mediador. Así, la investigación es un estudio de caso prototípico de lo que ocurre en la actualidad en la clase cuando se introduce como teorema un hecho geométrico al sistema teórico y el profesor orienta la construcción de significado alrededor de tal hecho.

Por su parte, Camargo (2010) presenta un sugerencia metodológica para analizar el aprendizaje de la demostración matemática en estudiantes para profesor de matemáticas, tomando como referencia los aportes de Wenger (1998) sobre el aprendizaje, entendido este como la participación en una comunidad de práctica. Entre los conceptos teóricos que sustentan el estudio se encuentra el constructo *actividad demostrativa* definido –desde la perspectiva sociocultural– como el conjunto de acciones en las que participan los estudiantes que apoyan y estimulan la producción de una demostración matemática. A medida que los estudiantes se involucran en la actividad demostrativa, se aspira a que progresen en su participación. Dicha participación es clasificada en tres estados, *participación periférica legítima*, *participación legítima y participación plena*, diferenciables por el rol del profesor y por la caracterización establecida para la participación en términos de relevante, genuina, autónoma y original. Los aspectos de la aproximación metodológica que pretenden dar a conocer son:

- Una participación condicionada a las características del contexto y a la actividad matemática que se lleva a cabo.
- La dificultad de ilustrar el aprendizaje como participación, debido a que se necesita lograr vislumbrar la esencia de la participación de los estudiantes en pequeños extractos de clase, que al mismo tiempo sean representativos de la participación en general.
- La confiabilidad del análisis se fundamenta en la coherencia con la que se utilizan los códigos en los distintos extractos y en la atención que se presta al análisis para que este sea viable de realizar.

Finalmente, presenta como resultado que después de comparar distintos extractos de clase en los que los estudiantes aportaron elementos para producir una demostración se puede identificar una ruta que incluye su participación. Este hecho –según la perspectiva de la práctica social– se considera como una evidencia del aprendizaje alcanzado por los estudiantes. Este estudio constituye un antecedente para el presente trabajo en tanto la población sobre la cual se realizó fue estudiantes para profesor de matemáticas, en este sentido es pertinente realizar una investigación sobre profesores en formación avanzada. Además, aporta elementos teóricos sobre el constructo actividad demostrativa y la aproximación metodológica.

Por otra parte, teniendo en cuenta que el presente estudio se centra en la práctica del profesor de matemáticas, se revisaron los referentes que se describen a continuación con el ánimo de caracterizarla. En primera instancia, de acuerdo con Llinares, Valls & Roig (2008) los formadores de profesores deben tener como propósito diseñar oportunidades de aprendizaje que brinden las mejores condiciones para que los estudiantes para profesor desarrollen el conocimiento y destrezas necesarios para enseñar matemáticas. En su trabajo estos autores caracterizan una aproximación que relaciona la práctica de formar profesores y la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesores de matemáticas a partir de perspectivas socioculturales. Para esto, utilizan como ejemplo un contexto del diseño de entornos virtuales de aprendizaje interactivos con videos. Esta aproximación pone de manifiesto la necesidad de evidenciar la trasmisión de conocimiento entre la investigación sobre el aprendizaje del profesor y el desarrollo de materiales para los programas de formación de profesores.

En segunda instancia, Cubillos y Sánchez (2010) en su trabajo de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, reportan un estudio centrado en la caracterización de las interacciones entre una profesora y sus estudiantes durante una clase de geometría, cuando se favorece la actividad demostrativa, como una forma de establecer relaciones entre la formación inicial y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en ejercicio. En este sentido, el problema que orienta la investigación es la falta de rutas de aproximación a la práctica del profesor con las cuales dar comienzo a una reflexión situada sobre el aprendizaje de la demostración en los primeros cursos de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN.

Finalmente, el trabajo de investigación llevado a cabo por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ durante los años 2010 – 2011, descrito al inicio de esta sección, junto con los estudios que agrupan el análisis de la práctica de formar profesores realizados por Llinares y su grupo de colaboradores, orientan el proceso de construcción de las categorías de análisis del presente estudio.

Capítulo 2. Referentes Teóricos

El propósito del este capítulo es presentar los referentes teóricos que sustentan el estudio. Específicamente, tales referentes se centran en cuatro asuntos, a saber: (i) la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008) sobre conocimiento y habilidades necesarias para enseñar matemáticas en el marco de la formación de profesores; esta propuesta se constituye en un referente fundamental que proporciona elementos base para hacer la descripción del curso en estudio; (ii) constructo actividad demostrativa; (iii) aproximación metodológica sobre la enseñanza, ambos tomados de la propuesta del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$); y (iv) el constructo unidad cognitiva propuesto por Boero (1996) y Mariotti (1997). Esto, por cuanto los tres últimos elementos (Actividad Demostrativa, Aproximación metodológica y Unidad Cognitiva) servirán para contextualizar al lector en los referentes que sirvieron de base para el diseño curricular del curso protagonista en este estudio. Se considera que los componentes de la actividad demostrativa y de la aproximación metodológica junto con la noción de unidad cognitiva, proporcionarán otro tipo de elementos para describir clases del espacio académico mencionado y otros que se precisarán en el Capítulo Metodología, en el cual se describirán detalladamente las acciones que lleva a cabo un profesor de un programa de formación avanzada de profesores de matemáticas para promover que sus estudiantes experimenten actividad demostrativa en geometría y reflexionen sobre los procesos inmersos.

2.1 Conocimiento y habilidades necesarias para enseñar matemáticas: caso de los profesores en formación avanzada

Uno de los propósitos de los formadores de profesores en formación avanzada es proporcionar estrategias de aprendizaje a los profesores/estudiantes que les permitan desarrollar las competencias necesarias para gestionar situaciones de enseñanza de las matemáticas en la escuela. Lo anterior, se convierte en un desafío para los formadores de profesores al pensar en cómo se deben preparar los profesores para actuar en estos contextos. Uno de los motivos por los cuales esta situación es desafiante es que tanto los procesos de formación de profesores como la enseñanza de las matemáticas en la escuela, se basa en contextos sociales mediados por las representaciones sociales de los profesores, estudiantes y gestores de la administración educativa, y algunas de estas representaciones sociales deben transformarse para que la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores puedan cambiar.

Desde hace dos décadas se han venido realizando estudios orientados a reflexionar sobre los procesos de aprendizaje de profesores desde perspectivas socioculturales. Entre ellos se encuentra el estudio realizado por Llinares, Valls & Roig (2008) en el cual se caracteriza una forma de entender las destrezas y el conocimiento necesarios para enseñar matemáticas y el proceso de aprendizaje del profesor. De acuerdo con estos autores, el profesor de matemáticas requiere de una profunda comprensión de tres dominios de conocimiento que se relacionan entre sí: el conocimiento de y sobre las matemáticas; el conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas; y las habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula. A continuación se describen las ideas desarrolladas por los autores antes mencionados.

2.1.1 El conocimiento de y sobre las matemáticas

El conocimiento de y sobre las matemáticas se ha estudiado desde dos perspectivas: cognitiva, enfocada en las creencias, concepciones y conocimientos individuales, matemáticos, pedagógicos, psicológicos o didácticos del profesor de matemáticas (Llinares, 2000, 2007(a)) y sociocultural, fundamentada en la práctica del profesor, conformada por la gestión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, los instrumentos empleados por el profesor, las representaciones, asuntos metacognitivos y las interacciones que surgen en el aula. En este sentido, el conocimiento de y sobre las matemáticas de los profesores de matemáticas no se limita únicamente a conocer las matemáticas dadas por el currículo, implica un conocimiento específico de las mismas vinculado a la tarea profesional de enseñar matemáticas, es decir, abordar el contenido matemático desde la mirada que dicho contenido debe ser aprendido por los estudiantes. De esta manera, los estudiantes para profesor y los profesores en formación avanzada requieren conocer las matemáticas de una forma distinta a como otros profesionales necesitan conocerlas. Como resultado, los programas de formación de profesores de matemáticas deben ofrecer un contenido matemático distinto al ofrecido en otras carreras profesionales.

Teniendo en cuenta la anterior concepción del conocimiento de y sobre las matemáticas, se hace necesario que en los programas de formación de profesores de matemáticas se generen *situaciones matemáticas* que propicien procesos matemáticos como conjeturar, probar, generalizar, clasificar, comunicar, proponer, demostrar y resolver problemas. Asimismo, se requiere explorar las posibilidades matemáticas de dichas situaciones, reconocer posibles objetivos por alcanzar con estas y predecir posibles estrategias de solución de los estudiantes. Así, los estudiantes para profesor y los profesores en formación avanzada deben comprender la tarea y las matemáticas implicadas en ella.

Para esto, la resolución de la situación por parte de los profesores en formación avanzada y la discusión entre ellos y el formador de profesores, permitirían concentrar la atención entre lo matemático y lo didáctico y los ayudaría a comprender y reflexionar sobre las "matemáticas escolares" (Cooney y Wiegel, 2003, referenciado en Llinares, Valls & Roig, 2008). El análisis de las situaciones involucra resolver el problema diseñando estrategias, conjeturar relaciones que deben ser probadas, generalizar mediante la transformación de la presentación del problema y pensar en el problema como un instrumento con el cual es posible generar aprendizaje matemático. Entonces, son objetivos para el formador de profesores:

- La introducción de "lo didáctico" en el análisis de las tareas matemáticas –cuando se ven como instrumento de aprendizaje–.
- Lo relativo a la organización del conocimiento matemático para la enseñanza en diferentes niveles escolares y los objetivos pretendidos.
- El conocimiento de la transformación del contenido como disciplina científica hacia un contenido para enseñar y del contenido para enseñar un contenido aprendido.
- La precisión de asuntos metacognitivos que si bien no son objeto de enseñanza en algunas ocasiones, sí son claves para la formación de un profesor de matemáticas cuando se pretende hacer enseñables objetos matemáticos.

2.1.2 El conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas

El conocimiento del profesor de matemáticas sobre el pensamiento matemático de sus estudiantes es otro aspecto importante para la enseñanza. De acuerdo con Llinares, Valls & Roig (2008) "la idea de que se debe comprender y reflexionar sobre las matemáticas escolares traslada el foco de atención a la consideración del contenido matemático en relación con el aprendiz" (p.64). Si se tiene en cuenta esto, uno de los propósitos de los programas de formación es propiciar la comprensión de los profesores en formación avanzada sobre cómo piensan los estudiantes las Matemáticas. Desde este punto de vista, si los profesores en formación avanzada aprenden a interpretar razonamientos matemáticos de sus estudiantes, estarán facultados para llevar a cabo una enseñanza más eficiente.

Una forma de integrar la información –generada en investigaciones– acerca del pensamiento matemático de los estudiantes con el contenido de los programas de formación, es diseñando materiales específicos con los cuales los profesores en formación avanzada puedan diferenciar procesos de resolución que los estudiantes usan ante las situaciones matemáticas planteadas. Esto quiere decir que, cuando los profesores en formación exploran los procedimientos utilizados por los estudiantes y discuten sobre la compresión matemática que estos involucran, logran reconocer qué tareas adicionales se requieren y cuáles preguntas pueden plantearse para alcanzar la compresión matemática de sus estudiantes. Llinares y Sánchez (1998), referenciados en Llinares, Valls & Roig (2008), afirman: "Este tipo de situaciones tiene como objetivo que los estudiantes para profesor lleguen a problematizar las situaciones de enseñanza-aprendizaje y la gestión que se hace de los contenidos matemáticos y de las interacciones entre el profesor y sus alumnos mediante investigaciones sobre cómo aprenden los alumnos las matemáticas" (p.65).

El análisis del aprendizaje contribuye a que los profesores en formación avanzada tengan posibilidades de:

- Identificar conceptos y procesos matemáticos que son susceptibles de ser aprendidos.

- Reconocer sus ideas sobre lo que significa el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, su rol como profesores y situaciones matemáticas como herramientas de aprendizaje.
- Desarrollar su creatividad para generar propuestas didácticas y desarrollarlas cuando comprendan los procesos de aprendizaje matemático de sus estudiantes.

2.1.3 Habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula

Los profesores en formación avanzada necesitan desarrollar procesos de identificación e interpretación de las interacciones dadas en el aula que intervienen en el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiantes. Además, requieren poder explicar los argumentos que se generen en dichas interacciones, desde alguna perspectiva teórica derivada de la Didáctica de las Matemáticas.

> Desarrollar procesos interpretativos significa mirar las situaciones de enseñanza con el propósito de comprender lo que sucede, lo que los alumnos parecen estar pensando sobre las matemáticas o cómo influyen las cuestiones planteadas por el profesor en el pensamiento matemático de los alumnos (Llinares, Valls & Roig, 2008) (p.65).

Así, el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas en formación avanzada, está estrechamente ligado con la capacidad de establecer relaciones entre lo que sucede en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento teórico desde la Didáctica de las Matemáticas. No obstante, desarrollar este proceso interpretativo no es fácil y está ligado a las características de los ambientes de aprendizaje implementados en el programa de formación de profesores (Van Es y Sherin, 2002 citado por Llinares, Llinares, Valls & Roig, 2008).

Por ejemplo, los profesores inscritos en el espacio académico *Procesos y conceptos de la geometría escolar* del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, necesitan reflexionar sobre su propia práctica y desarrollar su capacidad para crear ambientes de aprendizaje de la demostración en contextos escolares mediante la participación de sus estudiantes en procesos de justificación. El desarrollo de esta capacidad es gradual y depende en gran medida de la calidad de las experiencias de aprendizaje que se propicien en dicho curso. En este sentido, la gestión del profesor del curso es de gran importancia para generar un ambiente de aprendizaje que permita desarrollar, en los profesores en formación avanzada, las capacidades antes mencionadas.

En la sección *Categorías de análisis* del capítulo 3, se traerá a colación la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008) dado que se usarán algunos de sus elementos como categorías de análisis para describir aspectos generales de las sesiones de clase a analizar. Dichos elementos se describen en la *Tabla 1* que se presenta a continuación.

Dominios del conocimiento del profesor	Indicadores de habilidades para la enseñanza de las matemáticas
Conocimiento de y sobre las matemáticas	- Proponer "situaciones matemáticas" para generar procesos matemáticos como construir, conjeturar, probar, generalizar, proponer problemas, clasificar, definir y comunicar. - Generar reflexiones *sobre* las matemáticas a partir de los problemas propuestos en clase. - Establecer relaciones entre lo matemático y lo didáctico que contribuyan a comprender y reflexionar sobre las *matemáticas escolares*.
Conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas	- Identificar conceptos de la *geometría escolar* y procesos de la *actividad demostrativa* que son susceptibles de ser aprendidos. - Desarrollar su creatividad para generar propuestas didácticas y desarrollarlas cuando comprendan los procesos de aprendizaje matemático de sus estudiantes.
Habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula	- Identificar e interpretar las interacciones dadas en el aula que intervienen en el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiantes. - Reconocer y caracterizar las diferentes maneras en que el profesor puede gestionar la clase.

Tabla 1. Dominios del conocimiento del profesor y habilidades necesarias para enseñar matemáticas

Como se dijo antes, los referentes teóricos que acá se presentan sirvieron para decantar elementos a tener en cuenta para precisar y analizar acciones específicas de la actividad del profesor en el aula. En el siguiente apartado se describen los referentes que fundamentan el diseño curricular de curso en cuestión; estos son: el constructo 'actividad demostrativa' y la aproximación metodológica para la enseñanza –bajo la perspectiva sociocultural– propuesta por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ · G) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y, la noción de unidad cognitiva propuesta por Boero (1996) y Mariotti (1997).

2.2 Actividad Demostrativa en el contexto de la Didáctica de la Geometría

De acuerdo con Samper, Molina, Perry & Camargo (2013) la actividad demostrativa es un constructo teórico que comprende un conjunto de acciones englobadas en dos procesos, no necesariamente separados, que sirven de apoyo y estímulo en la producción de una demostración matemática. Uno de los procesos tiene como finalidad la formulación de conjeturas y el otro, la validación de las conjeturas formuladas mediante la producción de un discurso argumentativo de tipo deductivo dentro del sistema axiomático de referencia.

El *proceso de conjeturación* tiene como propósito la formulación de enunciados – a partir de observar o analizar indicios – sobre las cuales el sujeto no tiene establecido su valor de verdad teórico pero cree firmemente que es cierto; en síntesis, en este proceso el sujeto produce conjeturas. Dentro de las acciones que conforman este proceso se encuentran: detectar un invariante (*i.e*., algo que no cambia a pesar de aplicarles una transformación) vía exploración de una situación generalmente y verificarlo, formular la conjetura y corroborarla. Formular una conjetura hace referencia a poner de manifiesto como un enunciado condicional de carácter general y en términos matemáticos, un potencial hecho geométrico identificado mediante el estudio de casos particulares. Corroborar una conjetura consiste en verificar que lo que se registra en el antecedente es suficiente para garantizar todas las propiedades que se señalan en el consecuente, y si el consecuente contiene todas las posibles consecuencias necesarias de las condiciones puestas en el antecedente (Samper et al., 2013).

Por otra parte, el objetivo del proceso de justificación es la elaboración de una argumentación de índole deductiva que valide la conjetura formulada. Dentro de este proceso se pueden identificar tres acciones: escoger elementos – teóricos o empíricos – con los cuales sustentar la afirmación; estructurar dichos elementos de forma deductiva; enunciar la justificación.

Otras acciones – de carácter heurístico – que están presente en los dos procesos, son la *visualización* y la *exploración*. A través de la *visualización* se reconocen elementos característicos de una figura para descubrir relaciones geométricas ‘ocultas’. Para esto, es necesario identificar conexiones entre el saber previo y la figura con el ánimo de determinar, separar y considerar elementos de interés a partir de la vista, encontrar propiedades que propiedades inadvertidas, o recordar propiedades geométricas.

Por medio de la *exploración,* llevada a cabo ya sea en el mundo de los fenómenos o en el mundo de la teoría, se rastrean propiedades o relaciones geométricas. De acuerdo con Samper et al. (2014) se pueden establecer tres tipos de exploraciones: empíricas, dinámicas y teóricas. Una *exploración empírica* es aquella que se realiza en el mundo de los fenómenos y se apoya en las representaciones de figuras geométricas. Son acciones características de esta exploración: tomar medidas, calcular o hacer construcciones auxiliares (como referencias para hacer comparaciones o para llegar a un resultado mediante el ensayo y error). Una *exploración dinámica* tiene por objetivo encontrar invariantes. Esta exploración se realiza en un entorno que posibilite el movimiento de objetos que represente potencialmente objetos, en este caso, de la geometría. Los *software* de geometría dinámica, mediante la herramienta de *arrastre* de los objetos, permiten que una imagen presentada en la pantalla (la representación de un objeto geométrico) cambie de manera continua en otras imágenes asociadas a la figura geométrica inicial, lo que posibilita estudiar las propiedades que se transforman y aquellas que permanecen invariantes. Una *exploración teórica* –que se desarrolla en el mundo de la teoría– se fundamenta en los enunciados que constituyen el conocimiento individual. Permite identificar o descubrir enunciados que justifican una afirmación o una decisión sobre la dirección que debe tomar la exploración empírica.

Ciertamente, la *actividad demostrativa* constituye un andamiaje con el razonamiento y con la argumentación. Para Samper et al. (2013) el *razonamiento matemático* es el resultado de razonar matemáticamente, es decir, consiste en: “conectar, atendiendo reglas de la disciplina, experiencias y saberes, enraizados en ella, con el propósito de indagar, obtener nueva información, interpretar información, explicar, determinar una manera de proceder, formular dudas, contradecir, refutar, concluir, etc.” (p.5).

Antes de precisar lo que el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ entiende por argumentación es necesario precisar lo que se concibe como argumento. Un enunciado oral o escrito que vincula proposiciones específicas – datos y conclusión – y una general – garantía – constituye un *argumento*. Todas las proposiciones no necesariamente deben estar explícitas pero tendría que ser posible determinarlas en un intento por formalizar lo expresado. La manera como se vinculan las proposiciones particulares y la general determina el tipo de argumento: deductivo, inductivo o abdutivo; esta tipología atiende al modelo propuesto por Toulmin, tal como lo describen Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010), referenciados en Samper et al. (2013).

Después de las anteriores precisiones, lo que se entiende por *argumentación* es la enunciación de argumentos para respaldan una idea. Cuando se pretende rechazar dicha idea se dice que es una *contra argumentacion*. Dado que toda argumentación es un acto comunicativo, esta se inscribe en determinadas características que se consideran apropiadas en el grupo social en donde se enuncia. Particularmente, la información admitida como datos y las garantías empleadas en los argumentos tienen que ser aceptados por el grupo, al igual que la manera como se articulan los argumentos en la *argumentación*. Además, las maneras de expresar los argumentos deben ser admitidos por el grupo social y estar al alcance de los integrantes del mismo.

De otra parte, una argumentación en la cual se enlazan argumentos, de manera que una proposición concluida en un argumento determinado se usa como dato en otro, recibe el nombre de *justificación matemática*. Es necesario tener en cuenta la edad y las experiencias académicas previas para que el grupo establezca la conveniencia de utilizar garantías de diversa naturaleza. En este sentido, es pertinente diferenciar tres productos del proceso de justificación: la explicación de validación, la prueba y la demostración. La *explicación de validación* es una justificación en la cual las garantías no se originan en fuentes teóricas. En la *prueba* las garantías son teóricas, no obstante, no todas son elementos del sistema teórico en el cual se trabaja o no contienen directamente todos los argumentos fundamentales. La *demostración* es la justificación en la cual toda garantía se origina en el sistema teórico con el que se cuenta y contiene todos los argumentos fundamentales.

El propósito de la actividad demostrativa es generar un *teorema matemático* entendido como un sistema conformado por un enunciado, su demostración y la teoría que la orienta y enmarca (Mariotti, 1998, citado en Samper et al., 2013). De esta forma, la actividad demostrativa promueve la comprensión del contenido matemático inmerso tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones y, busca la validación de dichos enunciados, en el marco de la conformación de un sistema teórico.

En la búsqueda de intentar relacionar una argumentación (cualquiera sea su tipo de argumentos asociados) con la demostración de un enunciado (relación que no es natural), Boero (1996) y Mariotti (1997) se han referido a la noción de unidad cognitiva, constructo que se constituyó en un referente teórico para el diseño curricular del curso orientado por el profesor. A continuación, se describirá dicha noción.

2.3 Unidad cognitiva de un teorema

Diversos estudios se han llevado a cabo sobre la noción de unidad cognitiva de un teorema, entre estos se encuentra el realizado por Fiallo (2010) en el cual se plantea que la unidad cognitiva de un teorema está orientada a enlazar argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente admisibles. Para esto, durante el proceso de producción de una conjetura, el estudiante crea gradualmente su enunciado a través de una actividad argumentativa profunda que está vinculada eficazmente con la justificación de la plausibilidad de sus alternativas. En la etapa siguiente de demostración del enunciado, el estudiante establece un vínculo con este proceso en forma coherente, organizando algunas de las justificaciones –argumentos– generadas durante la elaboración del enunciado de acuerdo a una secuencia lógica (Boero y otros, 1996, referenciado en Fiallo, 2010).

Por su parte, Mariotti (1997) citado en Fiallo (2010) señala que el constructo unidad cognitiva fue en un comienzo usado para enunciar una posible continuidad entre el proceso de argumentación con el que se admite una conjetura matemática y el proceso de argumentación con el que se construye una prueba que valida una conjetura dentro de un sistema teórico de referencia. Esta continuidad se fundamenta en las relaciones cognitivas, de quien resuelve el problema, establecidas entre los resultados de su actividad exploratoria de búsqueda de una conjetura y su actividad deductiva posterior de búsqueda de una demostración para las conjeturas halladas, de forma que las ideas surgidas durante la actividad exploratoria son la base para la construcción de la demostración deductiva. Sin embargo, el constructo unidad cognitiva "fue redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la fase de argumentación y la subsiguiente producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir" (Mariotti 2006, referenciado en Fiallo 2010, p.94).

Atendiendo a las posturas anteriores, la noción de unidad cognitiva del teorema permite planear y analizar situaciones en las que los estudiantes puedan hacer explícitos sus argumentos para fundamentar sus intuiciones, a fin de reevaluarlas y vincularlas en el proceso de construcción de una prueba o de perfeccionamiento de una demostración matemática. Precisamente, este fue uno de los referentes que sirvió de base para el diseño curricular del curso a estudiar y que proporciona otros elementos para describir clases del espacio académico mencionado. A continuación se ilustra una descripción de la aproximación metodológica del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ que pretende favorecer el involucramiento de los estudiantes en la actividad demostrativa y una reflexión sobre este tipo de actividad y el potencial surgimiento de unidad cognitiva.

2.4 Aproximación metodológica del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ para la enseñanza

El grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ ha desarrollado una aproximación metodológica para la enseñanza de la demostración. Dicha aproximación se enmarca en una perspectiva sociocultural en la que profesor y estudiantes conforman una comunidad de clase. Con el propósito de describir esto último, se hace necesario presentar brevemente la perspectiva sociocultural del aprendizaje de las matemáticas y la aproximación metodológica del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$. Lo que sigue se dedicará a presentar tal descripción.

Las perspectivas socioculturales se basan en principios generales de la aproximación sociocultural al aprendizaje desarrollada por Vygotsky (1978) (Lave, Wenger, 1991 referenciado en Camargo, 2010). Los procesos cognitivos del individuo se fundamentan en la interacción social llevada a cabo mediante la comunicación que se genera en las actividades culturales que los individuos comparten colectivamente. El aprendizaje ocurre a través de un proceso de interiorización en el cual los fenómenos sociales se convierten en fenómenos psicológicos que se producen en el plano mental (Goos, 2004; Lerman, 1996 referenciado en Camargo, 2010). Concretamente, las clases se pueden entender como espacios de interacción social en las que los individuos participan en actividades grupales, debaten sobre su significado y de cómo se realizan. Es de esta manera cómo los individuos aprenden.

Uno de los principios de la aproximación sociocultural en el entorno educativo es que las acciones humanas – individuales y sociales – están mediadas por herramientas. En este sentido, planear diseños didácticos para ser utilizados como mediadores, brinda la posibilidad de desarrollar una amplia actividad experimental, la cual se constituye en el punto de partida de ideas y conjeturas que a su vez, favorecen el acercamiento al conocimiento mediante la comunicación.

El apoyo de una persona más experimentada mientras se lleva a cabo el aprendizaje es determinante. Dicha persona debe aportar progresivamente a medida que se van desarrollando las competencias del aprendiz. Las interacciones entre el aprendiz y la persona más experimentada movilizan funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que reposan en una zona intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo (Lerman, 1996; Blanton y Stylianou, 2003 referenciado en Camargo, 2010). En el ámbito educativo, el profesor –persona más experimentada de la clase– conduce a los estudiantes hacia los estándares del conocimiento mediante la conexión entre las ideas que los estudiantes están en capacidad de producir y aquellas que son aceptadas por la comunidad académica de referencia.

Precisamente, el grupo Æ · G –en calidad de formadores de profesores de matemáticas– asume una perspectiva sociocultural del aprendizaje de las matemáticas y en particular, reconoce que tiene un doble compromiso frente al aprendizaje de la demostración: apoyar a sus estudiantes para que aprendan a demostrar y gestionar que las experiencias de aprendizaje que tengan al respecto les sirvan como referentes y ejemplos para el ejercicio de su profesión. Mediante tales experiencias, se brindan elementos para la visión que pueden llegar a desarrollar los estudiantes sobre lo que es demostrar, el papel que juega la demostración en la actividad matemática, entre otros. Así, el grupo Æ · G entiende que *aprender a demostrar* es un proceso progresivo que sucede esencialmente en la comunidad del aula, a través del cual los estudiantes se van preparando para participar en la actividad demostrativa con una disposición auténtica y un comportamiento autónomo y relevante.

Justamente, esta manera de entender el aprendizaje de la demostración está relacionada con los objetivos de los formadores de profesores señalados por Llinares, Valls & Roig (2008), en tanto las acciones del profesor del curso *Procesos y conceptos de la geometría escolar* traen consigo el reconocimiento de que la participación en la actividad demostrativa, la reflexión y el análisis de las tareas matemáticas propuestas a los profesores en formación avanzada, les darán elementos didácticos asociados a la enseñanza de la Geometría que luego conformarán el conocimiento profesional que apoyarán sus propias prácticas.

Por otra parte, la teoría formulada por Lave y Wenger (1991) descrita por Camargo (2010) concibe el aprendizaje como la participación en actividades de una comunidad que puede establecerse dentro o fuera de una institución educativa. Desde esta perspectiva, particularmente, el aprendizaje de las matemáticas supone el paso a prácticas significativas próximas a las comunidades de profesionales que generan conocimiento matemático o hacen uso del mismo. Para esto, el tipo de participación por parte de los estudiantes no se puede limitar a observar al profesor –experto de la clase– en acción para después imitar lo observado, requiere de diversas acciones preparadas y sistemáticas, junto con instrumentos de mediación que posibiliten la participación cada vez más autónoma y relevante en la práctica de demostrar.

De acuerdo con Samper et al. (2013), en dicha aproximación se distinguen tres aspectos necesarios para constituir un ambiente favorable para aprender a demostrar: el *uso de la geometría dinámica*, las *tareas matemáticas*[1] propuestas a los estudiantes y la *interacción social de la clase*. Los software de geometría dinámica constituye un elemento importante dentro de la aproximación metodológica del grupo de investigación Æ · G, ya que es un instrumento que permite a los estudiantes desarrollar experiencias de tipo empírico que contribuyen a la interacción social entre ellos debido a que la presencia de la tecnología provoca un cambio en la manera de hacer el curso, hacia una práctica de tipo social. De acuerdo con Groman (1996) referenciado por Camargo (2010), los estudiantes – profesores en ejercicio – mediante la exploración de figuras geométricas y de la formulación de preguntas como *¿qué ocurre si…*? logran construir significados matemáticos en ambientes sociales de investigación, en los cuales el profesor se convierte en un participante más del proceso.

Teniendo en cuenta que la formulación de conjeturas es un proceso fundamental en la actividad demostrativa, las tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes deben brindarles múltiples posibilidades para involucrase significativamente en dicho proceso. Estas tareas deben plantearse a los estudiantes con el propósito de favorecer la interacción social entre los miembros de la clase y de generar experiencias de carácter empírico que conlleven a su comprensión, a conjeturar y a buscar una justificación. Por otra parte, con el fin de posibilitar que los estudiantes comuniquen sus ideas y las precisen en enunciados, las soluciones dadas por los estudiantes a las tareas deben presentarse en el escenario de la clase. Dichas soluciones conforman la materia prima para constituir un hecho geométrico relacionado con la tarea propuesta. Así, a partir de los aportes de los distintos miembros de la comunidad, se consigue constituir un hecho geométrico y demostrarlo. De esta manera, toda la comunidad es responsable de concluir con éxito la actividad.

[1] Las tareas –que incluyen situaciones problemas– hacen parte del medio didáctico habitual que organiza el profesor en pro del aprendizaje de los estudiantes. En la sección 3.2.2. se describen los tipos de problemas propuestos por el profesor.

La interacción social en el aula entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes es un componente indispensable para aprender a demostrar, dado que es en la comunicación de ideas, en el estudio crítico de estas y en la argumentación grupal donde se originan los elementos teóricos indispensables para hacer una demostración. En este sentido, el rol del profesor – como persona experta de la clase – es fundamental pues es él quien orienta el proceso hacia el uso de los elementos propios de la práctica de la demostración en matemáticas como términos, símbolos y maneras de expresión. Adicionalmente, desempeña un papel fundamental en la constitución y uso de las normas que orientan el funcionamiento de la demostración y del sistema teórico. Mediante la interacción social, los estudiantes pueden modificar la relación usual que tienen con el conocimiento, con su profesor y con sus compañeros. Con relación al conocimiento, pueden lograr comprender que más allá de conocer la organización de un sistema teórico, debe experimentar su conformación en cooperación con los demás miembros de la comunidad. Con relación al profesor, pueden olvidarse de reconocerlo como la autoridad en la clase y como la persona que exclusivamente posee el saber, por el contrario pueden distinguirlo como el miembro experto de la comunidad que orienta el proceso. Con relación a los otros estudiantes, pueden lograr crear un pacto de trabajo mutuo para favorecer la construcción de un sistema teórico.

Dos tipos de interacciones en el aula anteceden la formulación de enunciados: la *conversación instruccional* y la *conversación matemática*. La *conversación instruccional* se refiere a la interacción profesor-estudiante. El profesor – persona experta de la clase – escucha las soluciones de los estudiantes e interactúa con ellos, con el fin de lograr que precisen sus ideas, o por el contrario, que prescindan de ellas en el momento que no sean convenientes para lo que se intenta desarrollar en la clase. Además, responde preguntas que ayudan a comprender los objetos geométricos involucrados, acepta o valida las conjeturas formuladas, entre otras. La *conversación matemática* surge entorno al trabajo en grupo y a la socialización, concretamente cuando los estudiantes discuten sobre un tema matemático. En las discusiones de esta índole, los estudiantes expresan sus ideas, las cuales son escuchadas, analizadas, transformadas y aceptadas –o rechazadas– por los demás individuos del grupo. Validar o descartar una idea por parte de la comunidad hace posible la construcción colectiva de una solución para la tarea propuesta. El rol de profesor consiste en gestionar las propuestas de los estudiantes, verificar el uso adecuado de los elementos del sistema teórico e institucionalizar el conocimiento. En el siguiente capítulo, se ampliarán en detalle las acciones que podría llevar a cabo el profesor del curso para promover que sus estudiantes realicen actividad demostrativa.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se describen las fases del proceso que permitió la realización del estudio. Es necesario mencionar que este estudio es cualitativo (descriptivo e interpretativo) que se enmarca dentro de un enfoque metodológico de estudio de caso cuya observación es no participante, puesto que la autora de este trabajo no hizo algún tipo de intervención en cada una de las sesiones de clase (Cohen y Manion, 1990); realizó registro audiovisual y análisis posterior de los datos recolectados. Se busca describir e interpretar las acciones de un profesor que orienta el espacio académico *Procesos y conceptos de la geometría escolar* del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, en el marco de la aproximación metodológica propuesta por el grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$. y la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008) sobre el conocimiento y habilidades necesarias para enseñar Matemáticas en el marco de la formación de profesores.

El capítulo se divide en cinco apartados que atienden a los momentos o fases fundamentales que guiaron la realización del estudio. En la primera fase se describe el conjunto de acciones llevadas a cabo frente a la revisión bibliográfica y fundamentación teórica. En la segunda fase se presentan los aspectos que caracterizaron el curso. Lo anterior incluye la contextualización de la población estudiada, objetivos y metodología del curso, tipos de problemas tratados, entre otros. En la tercera fase se plantea cómo se llevó a cabo el proceso de recolección, organización y almacenamiento de los datos. En la cuarta fase se describe la manera en la que la información recolectada fue analizada, teniendo en cuenta las categorías e indicadores que se enmarcan en las acciones llevadas a cabo por un profesor para lograr que sus estudiantes – profesores en formación avanzada – experimenten actividad demostrativa y reflexionen sobre su propia práctica. Finalmente, en la quinta fase, se describe cómo se llevó a cabo la consolidación del documento final del presente estudio.

3.1 Fase I: Revisión bibliográfica

Para llevar a cabo este estudio se realizó una revisión bibliográfica centrada en dos aspectos: investigaciones relacionadas con las destrezas, el conocimiento y la enseñanza de profesores de matemáticas en formación avanzada e investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el ámbito universitario. Dicha revisión permitió seleccionar los referentes teóricos del estudio –conocimiento profesional del profesor de matemáticas, constructo actividad demostrativa, perspectiva sociocultural del aprendizaje de las matemáticas y unidad cognitiva–, los elementos metodológicos de la clase –aproximación metodológica del grupo Æ · G– y las categorías de análisis del estudio: propuesta de Llinares, Valls & Roig y las acciones del profesor descritas en el apartado 3.4.

Con relación a la revisión bibliográfica que orientaba la conceptualización de los elementos teóricos del *conocimiento y habilidades necesarias para enseñar matemáticas en el marco de la formación de profesores*, se tuvieron en cuenta las investigaciones reportadas por Llinares, Valls & Roig (2008) con las cuales se determinaron elementos básicos para describir las sesiones de clase a analizar. Dado que los elementos *Actividad Demostrativa y Aproximación metodológica para la enseñanza* –desde la perspectiva sociocultural del aprendizaje de las matemáticas– fueron referentes que sirvieron de base para el diseño curricular del curso a describir, se tuvieron en cuenta publicaciones realizadas por el grupo Æ.G.: Samper, Perry, Camargo y Molina (2011) y Camargo (2010). Del mismo modo, fue necesario referenciar las acepciones de Boero (1996) y Mariotti (1997) referenciadas por Fiallo (2010) sobre el constructo *Unidad Cognitiva* ya que este también se utilizó para el diseño curricular.

La revisión de los documentos en los que se basa el campo de estudio permitió entender las inquietudes de la autora frente al asunto de investigación, los elementos teóricos que habían fundamentado la conformación del mismo y los resultados investigativos. A lo largo del análisis de estos referentes se fue acotando el campo de estudio, lo que permitió enfocarse en aspectos específicos que sirvieron como base para la formulación del marco de referencia que en gran medida permitieron precisar categorías para analizar los datos recolectados.

3.2 Fase II: Caracterización del curso

Esta sección incluye elementos relacionados con la población estudiada, las experiencias previas del profesor que orienta el curso, los objetivos, metodología y expectativas del seminario y los tipos de problemas tratados desde la propuesta de Samper, Molina, Camargo, Perry & Plazas (2013).

3.2.1 Contexto

Para la realización del presente estudio se tuvo en cuenta una población de 10 estudiantes del espacio académico *Procesos y Conceptos de la Geometría Escola*r, enmarcado dentro del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Las edades de los estudiantes oscilaban entre los 25 y los 40 años de edad. Una de las estudiantes trabajaba en una editorial en la producción de textos escolares de Matemáticas; los demás eran profesores de Matemáticas en colegios o universidades de la ciudad. Es pertinente especificar que en el curso había cinco egresados de la Licenciatura en Matemática de la UPN, una persona tenían formación en una Licenciatura en Física y tres eran Licenciadas en Básica Primaria. En este sentido, las últimas cuatro personas, a diferencia de los demás, tenían un conocimiento bastante básico sobre las Matemáticas, más aún, no tenían conocimiento sobre uso de software especializados en Matemáticas. Vale la pena comentar, que en general, la población no tenía un conocimiento profundo sobre procesos de argumentación en matemáticas ni sobre la demostración en un sentido amplio. Por ende, tampoco conocimiento sobre cómo favorecer estos procesos al aula de clase. Esta información se obtuvo por parte del profesor que orientaba el curso dado que el primer día de clase solicitó a cada estudiante compartir de manera verbal aspectos de su vida profesional.

En el caso de las estudiantes licenciadas en básica primaria, sus conocimientos sobre la geometría escolar no eran adecuados y no conocían el software Cabri, en general, no tenían conocimientos sólidos en matemáticas, sus procesos y su enseñanza. En el caso del profesor de Física, tenía algún conocimiento más cercano a algunos objetos de la Geometría, pero en relación con procesos de demostración, nada sabía, manifestado por él mismo. Los estudiantes egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN, tenían una experiencia con la aproximación metodológica del curso y conocían cómo el profesor orientaba la construcción del conocimiento en ese marco. En los demás casos, los profesores tenían un conocimiento básico del software y tenían ciertos conocimientos de objetos geométricos (definiciones y propiedades) pero no estaban relacionados con el uso de sistemas teóricos para estudiarlos. Teniendo esto como información, se fundamenta la pertinencia de la existencia del espacio académico referido.

De otro lado, el profesor del curso tenía una experiencia de docencia universitaria en programas de formación de profesores de (8) años, en lo que respecta a programas de formación avanzada (4) años, durante los cuales impartió dos veces el espacio académico en cuestión. El profesor es Licenciado en Matemáticas y tiene una Maestría en Docencia de las Matemáticas. Pertenece al grupo Æ.G que ya se ha referenciado. Ha sido autor de varios de los textos que han sido utilizados como referente teóricos de este trabajo como del espacio académico mismo. En tal sentido, conoce de primera mano tanto la aproximación metodológica para la enseñanza propuesta por el Grupo como el constructo actividad demostrativa. Dado este recorrido, tiene experticia en relación con el conocimiento geométrico, con lo metacognitivo asociado a este conocimiento, usos de software especializados y gestión del aula para personas que se forman como profesor. Vale la precisar dos aspectos: 1) el profesor, aunque previamente había orientado el curso dos veces, para esta ocasión quiso introducir con más fuerza asuntos que antes había tenido en cuenta de manera tímida, particularmente en lo que tiene que ver con la reflexión sobre la práctica del profesor cuando se intenta favorecer la actividad demostrativa en el aula de clase; 2) El profesor participó como director del presente trabajo de grado, sin embargo su participación se centró en la revisión de: los referentes teóricos, la metodología de investigación, la construcción de la categorías de análisis y el análisis realizado a sus clases por la autora de este documento. Lo anterior no constituye una autoevaluación por parte del profesor sino una evaluación de las acciones del profesor a la luz de las categorías de análisis constituidas. A continuación, se presenta una descripción un poco más detallada del espacio académico.

Específicamente, el espacio académico *Procesos y Conceptos de la Geometría Escolar* diseñado por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$. del cual hace parte el profesor que orientó el curso, tiene como propósito brindar a los estudiantes del programa Maestría en Docencia de las Matemáticas de la UPN, la oportunidad de desarrollar una conceptualización sobre la demostración por medio de la experimentación de una actividad demostrativa para construir – desde el conocimiento de los profesores en formación avanzada – sistemas teóricos locales de la Geometría euclidiana relacionados con objetos de la Geometría escolar como punto medio, mediatriz, triángulos, cuadriláteros, circunferencias, etc. En ese sentido, desde la perspectiva del *conocimiento matemático*, el espacio académico pretende que los estudiantes ganen confianza en el tratamiento matemático de los objetos que formaron parte de cada uno de los sistemas teóricos construidos, y mediante su propia experiencia, generen una amplia conceptualización acerca de los elementos involucrados en la demostración como *sistema teórico, condicional* y *conjetura*. Entre los contenidos de índole matemático tratados en el curso se encuentran: relaciones entre puntos, rectas y planos, ángulos, congruencia de triángulos, mediatriz, cuadriláteros, semejanza de triángulos, circunferencias y perpendicularidad en el espacio.

Con relación al *conocimiento didáctico*, el seminario busca que los estudiantes comprendan algunos constructos que el grupo $\mathcal{Æ}.\mathcal{G}$ ha desarrollado para describir la producción de los estudiantes durante su actividad demostrativa. Entre esos constructos se destacan: procesos de conjeturación y justificación de la actividad demostrativa, tipos de argumentos (inductivos, abductivos, deductivos), unidad cognitiva y aproximación metodológica del grupo para generar un ambiente de actividad demostrativa.

De este modo, el curso tiene por objetivos los que se describen a continuación:

- Profundizar y consolidar algunos contenidos específicos de la geometría euclidiana, propiciando la discusión colectiva de elementos teóricos básicos y la experimentación significativa de procesos propios de esta disciplina.

- Propender por el mejoramiento de la capacidad de actuación de los estudiantes – profesores en formación avanzada – en contextos relacionados con la geometría y la capacidad de generar ambientes de aprendizaje de las matemáticas escolares.
- A través de la actividad demostrativa desarrollada durante el curso, ampliar el concepto de demostración de los estudiantes – profesores en formación avanzada – reconociendo el papel que esta tiene como actividad fundamental del quehacer matemático y como recurso de comprensión y de argumentación.
- Conocer el potencial del uso de herramientas computarizadas como instrumentos de mediación para el aprendizaje y en la enseñanza de procesos de la actividad demostrativa.
- Proveer elementos para que los profesores en formación avanzada puedan propiciar esta actividad en el aula escolar y tengan herramientas teóricas que les permita interpretar la producción de sus estudiantes en el marco de tal actividad.

Adicionalmente, el seminario busca contribuir al desarrollo de competencias investigativas en los profesores en formación avanzada en la medida en que impulsa el desarrollo de la habilidad de lectura comprensiva e interpretativa, estimula el progreso de los estudiantes en la escritura de textos académicos y propicia el desarrollo de habilidad analítica de la producción de los estudiantes en el marco de la actividad demostrativa.

La metodología del curso consiste en: al iniciar el espacio académico, el profesor explicita las normas de clase relacionadas con el requerimiento de justificar sus ideas, escuchar los argumentos de sus compañeros y producir demostraciones de acuerdo con pautas establecidas. Además, solicita a los estudiantes la conformación de grupos de trabajo para llevar a cabo las tareas que asignaría durante el desarrollo del curso. El trabajo de los grupos incluye: la solución de problemas, un reporte escrito de lo sucedido en clase –notas de clase– de acuerdo con el cronograma y las pautas establecidas, y trabajos escritos que reportaron la construcción y posible tratamiento de una secuencia didáctica que abordara asuntos tratados en el espacio académico.

El profesor inicia cada sesión de clase haciendo una presentación esquemática de los asuntos a tratar en ella. Estos pueden ser –no necesariamente en este orden– comparaciones de las producciones escritas de los estudiantes en relación con los problemas planteados para resolver en los grupos de trabajo, elementos del sistema teórico a construir, reflexiones sobre aspectos didácticos, demostraciones de conjeturas, entre otros.

Los problemas propuestos por el profesor (cuya tipología se describirá en la sección siguiente) son planteados para solucionarse en los grupos. Cada grupo tiene a su disposición computadores con el software de geometría dinámica Cabri el cual es utilizado por los estudiantes para hacer construcciones y explorar, descubrir relaciones o propiedades de los objetos geométricos en estudio, buscando dar respuesta a los problemas planteados por el profesor. Mientras los estudiantes resuelven los problemas propuestos, el profesor recorre el salón, pasando por cada grupo con la intención de recolectar información sobre lo que están haciendo los estudiantes y las conclusiones a las que estaban llegando. Posteriormente, dicha información la utiliza durante la puesta en común de las respuestas, análisis y discusión colectiva que permiten determinar nuevos elementos (postulados, definiciones, teoremas) que van conformando un sistema teórico local.

3.2.2 Tipos de problemas

Los problemas planteados a los estudiantes del curso fueron *problemas abiertos*[2] *de conjeturación* los cuales, de acuerdo con Samper et al. (2013), requieren enunciar una conjetura expresada como condicional y dependiendo de los datos aportados por el problema y la pregunta formulada, los estudiantes deben buscar el *antecedente* o el *consecuente* de dicha conjetura. En este sentido, Samper et al. (2013) clasifican los problemas de acuerdo con el centro de búsqueda:

- *Problemas de búsqueda del consecuente:* en estos problemas están dadas las condiciones precisas y se requiere encontrar las consecuencias obligadas de estas. La representación gráfica de la situación expresada en el enunciado se fundamenta, en

[2] Un *problema abierto* plantea una tarea con una pregunta que no revela o sugiere la respuesta esperada (Arsac et al., 1999; Silver, 1995, en Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010; citados por Samper et al., 2013)

esencia, en la construcción de objetos geométricos que cumplen las condiciones que se tienen. La determinación de invariantes explicitados en el consecuente se realiza a través de la exploración directa de los objetos construidos.

- *Problemas de búsqueda del antecedente:* consisten en establecer las condiciones precisas para las cuales las propiedades expresadas en el enunciado son la consecuencia obligada. Solucionar estos problemas requiere la elaboración de construcciones auxiliares que suministren las condiciones geométricas precisas para establecer a través de la exploración, las propiedades de un objeto geométrico real o las que garanticen la existencia de un objeto que debe contener el antecedente.

- *Problemas de determinación de dependencia.* Consiste en establecer relaciones de dependencia entre figuras geométricas de un conjunto referencial dado y unas propiedades. Durante la solución de estos problemas hay autonomía para determinar lo que se usará como antecedente – ya sea el conjunto referencial o las propiedades – y la geometría dinámica de acuerdo a esto.

3.3 Fase III: Recolección, organización y almacenamiento de datos

Con el propósito de recolectar información que posibilitara la realización de un análisis minucioso de los mismos, se hizo necesaria la implementación de instrumentos que englobaran los momentos de clases desarrollados a partir del diseño curricular del curso. Los instrumentos deberían contribuir a la reconstrucción de los episodios de clase sobre los cuales hubiese un interés particular que se quisiera observar y, deberían brindar diversas perspectivas de análisis de cada dato relevante. De esta manera, se recolectó la información a partir de notas de clase y grabaciones de video. A continuación, se puntualizan algunos aspectos de cada uno.

Las *notas de clase* son documentos escritos en Word realizados por cada grupo de estudiantes – cada grupo las elaboraba dos veces por semestre – a computador, usando el Editor de Ecuaciones para escribir todos los símbolos del lenguaje geométrico. Cada archivo debía dar cuenta de los siguientes aspectos: el problema o los problemas que orientaron la clase y las conjeturas formuladas, razones por las cuales se rechazaban algunas conjeturas, un recuento del proceso de demostración de la conjetura obtenida, la presentación de la demostración final, un reporte de las cuestiones que se discutieron en clase y los acuerdos logrados, asuntos de índole didáctico que se abordaron en la clase luego de la actividad matemática o del uso de Cabri que tuvieran lugar.

Las grabaciones de video se hicieron con una cámara de video estándar. Dichas grabaciones se realizaron durante cinco sesiones de clase, a partir de la segunda clase del curso y hasta la sexta sesión, previa al examen final. Los registros audiovisuales se centraron en filmar al profesor mientras dirigía la puesta en común de las notas de clase o de las producciones de los estudiantes en relación con un problema, exponía asuntos didácticos que suscitaban reflexiones en los estudiantes, cuando se presentaban interacciones entre profesor y estudiantes, del mismo modo instantes en donde el trabajo por grupo de los estudiantes era fundamental, el tablero o los computadores. Los grupos de estudiantes filmados fueron seleccionados atendiendo a la riqueza – por exceso o por defecto – de la interacción entre ellos mismo, cuando solucionaban la tarea propuesta por el profesor, o con el profesor cuando tendía lugar un diálogo con él. Se buscaba capturar la interacción comunicativa entre el grupo de trabajo, con el profesor y en las puesta en común de las producciones realizadas por grupo. Dado que las grabaciones llevadas a cabo carecían de un nivel profesional, en algunos fragmentos de diálogo entre los miembros de la comunidad de la clase aparecían voces externas que no representaron algún tipo de problema en la posterior revisión de las grabaciones. Se grabaron en su totalidad las clases. De esta manera, cada grupo de videos, se guardó en carpetas de archivos por cada sesión de clase.

Para seleccionar los videos de clase, se hicieron varias revisiones de los mismos con el propósito de decidir en cuáles de ellos se concentraría el análisis. Una vez decidido las clases que se tendrían en cuenta, se llevó a cabo un proceso de reducción y decantación de la información para construir episodios de clase donde se observaban acciones del profesor descritas en el apartado 3.4 y teniendo en cuenta los indicadores de la tabla 1 (p.14). La selección de los fragmentos de clase significativos para el análisis se realizó a partir de la trascripción completa de las clases, la cual se hizo intentando mantener una copia fiel de la interacción comunicativa. Esta fue revisada en varias ocasiones, confrontando los registros de video, incluyendo anotaciones entre paréntesis ([ ]) para aclarar algunos elementos del contexto de las intervenciones.

Las dos sesiones de clase analizadas, como se dijo antes, son prototípicas en cuanto la gestión del profesor y la actividad de los estudiantes; estas fueron seleccionadas por encima de las demás sesiones por su calidad del registro audiovisual y porque los asuntos sobre el conocimiento geométrico no implica una contextualización importante, lo cual facilita la lectura por parte de los interesados en el estudio, razón por la cual no se concibe que haya sesgo en la tal selección. Claro, se procuró que en las sesiones escogidas tuvieran lugar interacciones entre los estudiantes y con el profesor, en torno a la producción colectiva correspondiente a la solución de una tarea; esta tarea podría involucrar la solución de un problema abierto de conjeturación, proveer una demostración o hacer reflexiones frente a su propia práctica en relación con asuntos de la actividad demostrativa. Para descartar las sesiones de clase se tuvo en cuenta momentos en los cuales predominaron monólogos por parte del profesor haciendo aclaraciones o correcciones de evaluaciones en el tablero.

3.4 Fase IV: Categorías de análisis

Como se mencionó antes, el interés de este estudio se centra en el análisis de las acciones que lleva a cabo un profesor de un programa de formación avanzada de profesores de Matemáticas, para promover que sus estudiantes experimenten actividad demostrativa en Geometría y reflexionen sobre la misma desde un punto de vista didáctico y práctico. Para lograr esto, en primera instancia se tienen en cuenta las categorías propuestas por Llinares, Valls & Roig (2008) en la tabla 1(p.14) en las que se hace una descripción general de los tres dominios de conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas. No obstante, dichas categorías no precisan acciones que debe tener un profesor para que efectivamente estén en el marco de esos dominios, tan solo muestran una descripción general de estas tres categorías. De este modo, se vio la necesidad de precisar unas acciones que sirvieran de indicadores de análisis para determinar en cual categoría está el profesor, pero además que guarden estrecha relación con aspectos relativos a la actividad demostrativa y la aproximación metodológica propuesta. Para ello, se acudió a las acciones del profesor propuestas por el grupo Æ.G. presentadas en el informe final de investigación (2011) "Conjeturas y organización del contenido matemático en clase", presentado al Centro de Investigaciones de la Univesrsidad Pedagógica Nacional (CIUP), específicamente, la categorización establecida para el análisis de la mediación semiótica del profesor.

En la tabla 2, se expone la adaptación de las acciones propuestas por el grupo Æ.G. que atiende a los propósitos de este trabajo. Para esto, en la descripción de las acciones del profesor aparecerá paréntesis [ ], indicando palabras suprimidas y en letra cursiva palabras adicionales al texto original y se asigna una numeración para cada acción que posteriormente será utilizada como referencia para el lector en la tabla 3 (p.39). Seguidamente, se presenta la tabla 3 (p. 39) en la cual se establecen relaciones entre los niveles de las acciones del profesor del grupo Æ.G. y los indicadores del conocimiento y habilidades necesarias para enseñar matemáticas, propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008), generando el listado definitivo de categorías y sus códigos (que se convertirán en el dispositivo analítico), definidos a partir de las letras y los números que se ponen previos a cada enunciado que describe la acción del profesor. Para identificar una categoría emergente, en la tabla 3 (p.39) aparece su descripción sombreada.

Niveles o tipos	Descripción de las acciones del profesor
1. Expresa concepciones sobre objetos matemáticos	[(concepción-artefacto)] *Hacer explícitas concepciones* sobre objetos matemáticos *mediante el trabajo realizado en el software* para *identificar* imágenes conceptuales reducidas o deficientes, *con la intención de que los estudiantes comprendan* qué propiedades se requieren para que la figura represente el objeto geométrico que se quiere. [construir buenas definiciones]
2. Solicita concepciones sobre objetos matemáticos	Pedir a los estudiantes [(concepción-artefacto)] *hacer explícitas concepciones* sobre objetos matemáticos *mediante el trabajo realizado en el software* para *identificar* imágenes conceptuales reducidas o deficientes, *con la intención de que los estudiantes comprendan* qué propiedades se requieren para que la figura represente el objeto geométrico que se quiere. [construir buenas definiciones]
3. Expresa proposiciones económicas y sintéticas	[(enunciado sintético)] Expresar el enunciado de una proposición de manera sintética *y económica* usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado, para que la proposición se asemeje a la forma como se comunica en la matemática. [debe usarse el sistema teórico para ello, las proposiciones deben ser sintéticas y económicas]
4. Solicita proposiciones económicas y sintéticas	[(enunciado sintético)] Pedir a los estudiantes el enunciado de una proposición de manera sintética *y económica* usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado, para que la proposición se asemeje a la forma como se comunica en la matemática. [debe usarse el sistema teórico para ello, las proposiciones deben ser sintéticas y económicas]
5. Control teórico de objetos matemáticos	[(ubicación de objetos)] *Interpretar* y explicitar o destacar qué elementos del sistema teórico están involucrados en lo que se *enuncia* para legitimar la afirmación. [Interpretación del profesor para mostrar que los objetos involucrados en la proposición tienen un lugar en el sistema teórico, para legitimar la afirmación. Control teórico de objetos involucrados en la afirmación.]
6. Tratamiento de imprecisiones matemáticas	[abordar imprecisiones] Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en [el signo] la afirmación escrita o *verbal* para impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso de la comunidad de la clase.
7. Atención sobre las representaciones	[(construcción-sistema teórico)] Promover que las representaciones hechas *en el software* estén supeditadas al sistema teórico disponible para hacer ostensivas las propiedades dadas en las definiciones, postulados y teoremas.
8. Indagación sobre el significado de un concepto	[(significado personal-concepto)] Preguntar por el significado personal de un concepto, objeto o relación de índole geométrica con el propósito de determinar su correspondencia con la solución del problema.
9. Expresa revisión de la construcción	[(artefacto-antecedente y consecuente)] Revisar el uso del [artefacto] *software en* las construcciones hechas en base de un relato como preparación para determinar si lo que se pone de antecedente se corresponde con lo construido, ya sea directamente o con el arrastre, y en el consecuente con lo obtenido.
10. Solicita revisión de la construcción	[(artefacto-antecedente y consecuente)] Pedir revisión del uso del [artefacto] *software en* las construcciones hechas en base de un relato como preparación para determinar si lo que se pone de antecedente se corresponde con lo construido, ya sea directamente o con el arrastre, y en el consecuente con lo obtenido.

11. Identifica condiciones y propiedades	[(identificación-antecedente y/o consecuente)] Identificar condiciones construidas y propiedades encontradas, paso previo para determinar si lo que se pone de antecedente se corresponde con lo construido, ya sea directamente o con el arrastre, y en el consecuente con lo obtenido.
12. Solicita identificación de condiciones y propiedades	[(identificación-antecedente y/o consecuente)] Solicitar identificación de condiciones construidas y propiedades encontradas, paso previo para determinar si lo que se pone de antecedente se corresponde con lo construido, ya sea directamente o con el arrastre, y en el consecuente con lo obtenido.
13. Evalúa de la conjetura	[(dependencia-conjetura)] Utilizar lo hecho y obtenido en el [artefacto] *software* como referencia para evaluar si la conjetura expresa la dependencia que el [artefacto] *software* hace ostensiva.
14. Expresa el formato condicional	[(conjetura-condicional)] Usar expresión de conjeturas en formato condicional para explicitar la relación de dependencia y con qué se cuenta para comenzar la demostración y qué es lo que se debe demostrar.
15. Solicita el formato condicional	[(conjetura-condicional)] Pedir el uso de expresión de conjeturas en formato condicional para explicitar la relación de dependencia y con qué se cuenta para comenzar la demostración y qué es lo que se debe demostrar.
16. Caracteriza de una condicional, una bicondicional	[(condicional-ejemplos y contraejemplos)] Destacar elementos fundamentales que caracterizan una condicional y una bicondicional, y destacar cómo se pueden aprovechar para producir ejemplos o contraejemplos y cómo se modifica la hipótesis de la condicional para poder hacer una demostración por contradicción.
17. Enriquece construcciones o afirmaciones	[(enriquecer signos)] Enriquecer [signos] *construcciones o afirmaciones realizadas por los estudiantes* con recursos gráficos o icónicos para favorecer la interpretación del significado de lo que establece una condicional.
18. Controla el sistema teórico	[(problema-control teórico)] Controlar el universo teórico en que se va a trabajar para asegurar que los elementos matemáticos que subyacen a las propuestas de solución del problema estén enmarcados en el sistema teórico con que se cuenta o permitan la ampliación del sistema teórico local en el que se enmarca el problema.
19. Expresa síntesis de ideas	[(síntesis-foco de atención)] Sintetizar ideas que establecen el foco de atención para destacar de [los signos] *las construcciones o afirmaciones hechas por* los estudiantes elementos útiles para la producción de la conjetura.
20. Solicita síntesis de ideas	[(síntesis-foco de atención)] Recoger ideas que establecen el foco de atención para destacar de [los signos] *las construcciones o afirmaciones hechas por* los estudiantes elementos útiles para la producción de la conjetura.
21. Indaga en busca de elementos	[(indagar sobre signos)] Indagar sobre [los signos] *las construcciones o afirmaciones* producidas por los estudiantes para rescatar elementos útiles para la producción de la conjetura, o para favorecer que los estudiantes revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás.
22. Impulso de un modelo de resolución de problemas	[(modelo de actuación)] Proveer un modelo para enfrentar la resolución matemática de un problema (en el análisis, en formulación de conjetura) con el fin de favorecer la emergencia de [signos] *enunciados* que conduzcan a la conjetura que soluciona el problema.

23. Enfatiza en elementos de la conjetura	[(elementos-enunciado)] Destacar de las conjeturas de los estudiantes elementos que son parte del enunciado al que se quiere llegar.
24. Transforma proposiciones	[(proposición-operacional)] Promover que las proposiciones se transformen para hacer operacional la demostración.
25. Introduce elementos al sistema teórico	[(nuevo elemento del sistema)] Explicitar la necesidad de introducir un elemento al sistema teórico para poder sustentar un paso de la construcción.
26. Exige proposiciones matemáticas económicas y sintéticas	[(exigencias enunciado matemático)] Hacer referencia a que el enunciado de una proposición matemática debe construirse de manera sintética, económica y general, usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado.
27. Exige requisitos matemáticos	[(requisitos-teorema)] Señalar requisitos desde la matemática para que un enunciado sea teorema.
28. Distingue entre definición, postulado, teorema, demostración	[(asuntos especiales)] Mencionar asuntos especiales relacionados con tipos de teoremas (unicidad, existencia, proceso), en qué consiste una definición, un postulado, un teorema, cómo se hace una demostración.

Tabla 2. Categorización de las acciones del profesor.

Propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008)		***Propuesta grupo Æ.G. (2011)***	
Dominio	**Habilidad**	**Acción**	**Código**
I. Conocimiento de y sobre las matemáticas	A. Proponer "situaciones matemáticas" para generar procesos matemáticos como construir, conjeturar, probar, generalizar, proponer problemas, clasificar, definir y comunicar.	i. Expresa concepciones sobre objetos matemáticos (1)	I. A. i.
		ii. Expresa proposiciones económicas y sintéticas (3)	I. A. ii.
		iii. Control teórico de objetos matemáticos (5)	I. A. iii.
		iv. Identifica condiciones y propiedades (11)	I. A. iv.
		v. Evaluación de la conjetura (13)	I. A. v.
		vi. Expresa el formato condicional (14)	I. A. vi.
		vii. Expresa síntesis de ideas (19)	I. A. vii.
		viii. Introducción de elementos al sistema teórico (25)	I. A. viii.
		ix. Distinción entre definición, postulado, teorema, demostración (28)	I. A. ix.
	B. Generar reflexiones *sobre* las matemáticas a partir de los problemas propuestos en clase.	i. Caracterización de una condicional, una bicondicional, una conjetura, una demostración o tipos de argumentos (16)	I. B. i.
		ii. Exigencia de proposiciones matemáticas económicas y sintéticas (26)	I. B. ii.
		iii. Exigencia de requisitos matemáticos (27)	I. B. iii.
	C. Establecer relaciones entre lo matemático y lo didáctico que contribuyan a comprender y reflexionar sobre las *matemáticas escolares*.	i. Enriquecimiento de construcciones o afirmaciones, uso de diversas representaciones (17)	I. C. i.
		ii. Impulso de un modelo de resolución de problemas (22)	I. C. ii.
II. Conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas	A. Identificar conceptos de la *geometría escolar* y procesos de la *actividad demostrativa* que son susceptibles de ser aprendidos.	i. *Reconocimiento y/o explicitación de ideas sobre el significado de aprender y enseñar geometría:* Reconocer o explicitar ideas sobre lo que significa el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, su rol como profesores y situaciones matemáticas como herramientas de aprendizaje.	II. A. i.
		ii. *Explicitación de lo matemático y lo didáctico:* Explicitar lo matemático y lo didáctico en el análisis del aprendizaje para propiciar la caracterización de los conceptos y procesos matemáticos como objetos de enseñanza.	II. A. ii.
	B. Desarrollar su creatividad para generar propuestas didácticas y desarrollarlas cuando comprendan los procesos de aprendizaje matemático de sus estudiantes.	i. *Planeación, selección y diseño de materiales para la clase:* Planear, seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas y materiales específicos que evidencien los objetivos de aprendizaje asociados a lo geométrico y lo didáctico.	II. B. i.
		ii. *Desarrollo de la compresión sobre cómo los estudiantes piensan la geometría:* Desarrollar la compresión de los profesores en formación sobre cómo piensan los estudiantes la geometría.	II. B. ii.
III. Habilidades para gestionar la enseñanza de	A. Identificar e interpretar las interacciones dadas en el aula que intervienen en el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiantes.	i. Solicita concepciones sobre objetos matemáticos (2)	III. A. i.
		ii. Tratamiento de imprecisiones matemáticas (6)	III. A. ii.
		iii. Indagación sobre el significado de un concepto (8)	III. A. iii.
		iv. Expresa revisión de la construcción (9)	III. A. iv.
		v. Solicita identificación de condiciones y propiedades (12)	III. A. v.

las matemáticas en el aula		vi. Control sobre el sistema teórico (18)	III. A. vi.
		vii. Indagación en busca de elementos (21)	III. A. vii.
		viii. Énfasis en elementos de la conjetura (23)	III. A. viii.
		ix. Transformación de proposiciones (24)	III. A. ix.
	B. Reconocer y caracterizar elementos necesarios para gestionar la clase: organización de grupos de trabajo, uso de recursos, cumplimiento del contrato didáctico.	i. Solicita proposiciones económicas y sintéticas (4)	III. B. i.
		ii. Atención sobre las representaciones (7)	III. B. ii.
		iii. Solicita revisión de la construcción (10)	III. B. iii.
		iv. Solicita el formato condicional (15)	III. B. iv.
		v. Solicita síntesis de ideas (20)	III. B. v.
		vi. *Explicitación y/o cumplimiento del contrato didáctico:* Explicitar elementos del contrato didáctico y exigir su cumplimiento.	III. B. vi.
		vii. *Gestión de actividades que impulsen la participación:* Gestionar actividades que favorezcan la participación de los estudiantes.	III. B. vii.

Tabla 3. Indicadores del conocimiento y habilidades necesarias para enseñar matemáticas frente a las acciones del profesor.

3.5 Fase V: Consolidación del documento final

Para complementar y consolidar el documento final, se hicieron dos secciones específicas, una que presenta el análisis los fragmentos de clase y comentarios generales al respecto, y otra que expone las conclusiones finales del estudio contrastadas con los objetivos general y específico planteados en este trabajo. Además de las conclusiones que se puedan generar a partir del análisis, se presentan algunos cuestionamientos abiertos que se puedan responder en futuras discusiones. Finalmente, para consolidar el documento final, se agruparon los capítulos que contienen la información descrita en las fases antes mencionadas.

Capítulo 4. Análisis

Atendiendo a las categorías de análisis establecidas en el capítulo anterior, a continuación se describen cronológicamente los episodios de clase en los que predominan aspectos relacionados con las unidades de análisis presentadas es el apartado 3.4. Con dicha descripción, se pretende destacar la manera en que los referentes teóricos en los cuales se basa este estudio, se pueden hacer evidentes durante el desarrollo de las clases. Adicionalmente, promover aspectos y observaciones con base en los referentes teóricos proporcionados por Llinares, Valls & Roig (2008), que más adelante posibilitará hacer conclusiones sobre las acciones llevadas a cabo por el profesor.

4.1 Sesiones de clase seleccionadas

En esta sección se presenta el análisis de las sesiones de clase escogidas para ello. Esta son las sesión 2 y 3, de las 8 que tuvieron lugar durante el semestre. Para cada caso, en primera instancia se presenta una descripción global de lo que se abordó en la clase, con el objetivo de que el lector se contextualice. En esa descripción se muestran los objetivos de enseñanza y aprendizaje de las actividades que orientaron cada sesión de clase y se precisan los momentos de la clase que son analizados a la luz de los códigos presentados en el capítulo anterior. Luego, se presenta en detalle una reconstrucción de cada uno de tales momentos, y se hace el análisis pretendido a la luz de los indicadores presentados en el capítulo anterior; para ello, se expresa entre paréntesis el indicador correspondiente a través del uso de la codificación presentada en la tabla 3 del apartado 3.4., y una descripción que explica el porqué de la asignación de un código específico para tal o cual apartado.

4.1.1 Sesión de Clase N° 2

4.1.1.1 *Descripción general de la clase*

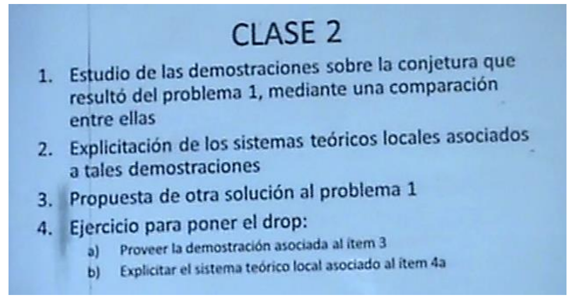


Figura 1

El profesor inicia haciendo una introducción en la cual presenta a sus estudiantes, mediante una diapositiva (Figura 1), la estructura de la clase. Esto tiene como objetivo ubicar a los estudiantes en las actividades a realizar en clase y optimizar el tiempo de trabajo en ella. El primer momento de la clase consiste en el estudio de las demostraciones propuestas por los estudiantes, de la conjetura que resultó del problema 1[3]–mediante una comparación entre ellas– con el objetivo de decantar el sistema teórico local asociado a partir de un elemento teórico[4] común a tres de ellas. Seguidamente, se estudia una propuesta de solución al problema 1, determinando por qué esta es radicalmente distinta a las otras propuestas, dado que atiende a otro sistema teórico local. Luego, con participación de los estudiantes, se hace una revisión y discusión de las soluciones al problema 1, intentando establecer cuál de ellas sería la más adecuada dentro del contexto escolar. En medio de la discusión, se estudian las ventajas y desventajas de presentar una demostración usando un formato a dos columnas o a tres columnas, lo que se gana o se pierde con uno o con el otro y, se aluden algunas ideas en términos de *¿cómo llevar la demostración a la escuela?* Finalmente, el profesor propone a los estudiantes dos problemas –Problema 2 y Problema 3 cuyos enunciado se presentarán más adelante– para resolver en grupos. Vale la pena precisar, que el profesor al presentar la estructura de la sesión de la clase (útil para este escrito en tanto que permitió hacer la descripción general de la sesión que se acaba de exponer), es posible precisar la primera acción del profesor; esta es II. B. i., ya que en la presentación se evidencia una planeación previa de la estructura de la misma, los objetivos

[3] **Problema 1.** Dados tres puntos no colineales A, B, C, existe un punto D tal que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan.

[4] El elemento común entre ellas fue el *teorema de localización de puntos*: Dado $\overrightarrow{CT}$ y $z > 0$, entonces existe un único punto X tal que $X \in \overrightarrow{CT}$ y $CX = z$.

que pretende alcanzar con cada una de las actividades planteadas a los profesores en formación avanzada y una selección de materiales y recursos específicos.

A partir de la introducción hecha por el profesor, lo que sigue en el desarrollo de la clase es estudiar las demostraciones formuladas por los estudiantes sobre la conjetura obtenida del problema 1. Es importante aclarar que las etiquetas de los problemas son los mismos que estableció el profesor en su clase, estos se definieron a partir del orden cronológico en la solución de los problemas por parte de los profesores en formación avanzada. Los fragmentos de clase que se analizarán son los siguientes:

- Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1.
- Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1.
- Propuesta de otra solución al problema 1.
- Problemas 2 y 3.

4.1.1.2 *Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1*

En este momento, el profesor inicia proyectando una diapositiva en la cual están cuatro demostraciones propuestas por los estudiantes. Acá el profesor utiliza III. A. ii. ya que le interesa mostrar cómo cada uno ellos plantean la demostración de la conjetura del problema 1, sus imprecisiones en la demostración y generar una reflexión en términos de la conveniencia del uso del formato a dos columnas o a tres columnas. En la figura 2 se muestran las cuatro propuestas de demostración.

Dados A, B, y C. Existe un único punto D tal que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan.

AFIRMACIÓN	RAZÓN
A,B,C	DADO
$\overline{AB}$	DEF. SEGMENTO
SEA M EL PUNTO MEDIO DE $\overline{AB}$	TEO. EXISTENCIA DEL PUNTO MEDIO
SEA D EL SIMÉTRICO CENTRAL DE C RESPECTO A M	DEF. DE SIMETRÍA CENTRAL
D ES ÚNICO	TEO. SIMETRÍA CENTRAL "EL SIMÉTRICO ES ÚNICO"

Dados tres puntos no colineales A, B y C existe un punto D Tal que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan.

TENGO	USO	CONCLUYO
Dados tres puntos no colineales A, B y C	Postulado de la recta	Existe $\overleftrightarrow{AB}$
Existe $\overleftrightarrow{AB}$	Postulado segmento rayo subconjunto de recta	Existe $\overline{AB}$ que no contiene al punto C
Existe el $\overline{AB}$	Teorema del punto medio	Existe M, punto medio del $\overline{AB}$
Existe M, punto medio del $\overline{AB}$	Teorema de la existencia de simetría central	Sea el punto D la simetría central del punto C con respecto al punto M
Sea el punto D la simetría central del punto C con respecto al punto M	Definición de simetría central	M es punto medio del $\overline{CD}$
M es punto medio del $\overline{CD}$ Existe M, punto medio del $\overline{AB}$	Definición de intersección de conjuntos. Definición de bisección de segmentos.	$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan

Si A, B y C son tres puntos no colineales, existe un punto D tal que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan.

Tengo	Uso	Concluyo
Puntos A, B y C no colineales	Definición de puntos colineales	C no pertenece a $\overleftrightarrow{AB}$
C no pertenece a $\overleftrightarrow{AB}$	Propiedades de la contenencia	C no pertenece a $\overline{AB}$
Sea E el punto medio de $\overline{AB}$	Definición de punto medio de un segmento	E pertenece a $\overline{AB}$
E pertenece a $\overline{AB}$ y C no pertenece a $\overline{AB}$	Definición de circunferencia	Existe una circunferencia de centro E y radio $EC>0$
C es un punto de la circunferencia de centro E y radio $EC>0$	Definición de diámetro	Existe un punto D tal que $\overline{DC}$ es un diámetro de la circunferencia de centro E
$\overline{DC}$ es un diámetro de la circunferencia de centro E	Definición de diámetro y definición de radio	$\overline{DE}$ y $\overline{EC}$ son radios de la circunferencia
$\overline{DE}$ y $\overline{EC}$ son radios de la circunferencia	Definición de radio de una circunferencia	Las medidas DE y EC son iguales
Las medidas DE y EC son iguales	Definición punto medio	E es el punto medio de $\overline{DC}$
E es el punto medio de $\overline{DC}$ y E el punto medio de $\overline{AB}$	Definición de segmentos que se bisecan.	$\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ se bisecan

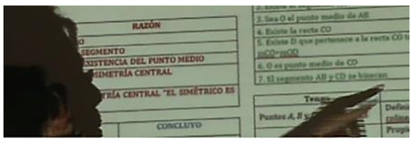
AFIRMACIÓN	RAZÓN
1.Sean A,B,C tres puntos no colineales	Dado
2. Existe el segmento AB	Definición de segmento y postulado de la recta
3. Sea O el punto medio de AB	Definición de punto medio
4. Existe la recta CO	Postulado de la recta
5. Existe D que pertenece a la recta CO tal que mCO=mOD	Teorema de la recta y postulado de la correspondencia
6. O es punto medio de CD	Por 5 y definición de punto medio
7. El segmento AB y CD se bisecan	por 3 y 6 y la definición de Bisección

Figura 2

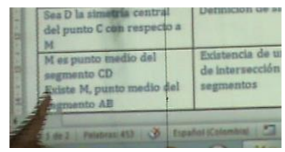
Luego, el profesor a partir de las propuestas que los estudiantes habían presentado como tarea, escribe en el tablero la conjetura a demostrar: *Dados tres puntos A, B, C, entonces existe un punto D tal que* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *se bisecan*. Aclara que en el marco de esta conjetura, se va a tratar de determinar cuál es el último paso de su demostración. En este caso, el profesor usa III. A. viii. dado que señala –subrayando la palabra *existe* en el tablero– que el consecuente de la conjetura es la *existencia del punto D para que los segmentos se bisequen*. A partir de esta aclaración, inicia un proceso de comparación entre las cuatros demostraciones haciendo comentarios a cada una, las complementa y especifica cuáles son sus imprecisiones en términos matemáticos. La siguiente intervención del profesor ilustra la forma en que el profesor lleva a cabo el proceso de comparación para dos asuntos muy específicos, que en principio no aluden a la existencia del punto D citada:

Comparación respecto al último paso de la demostración

P: Si uno mira las justificaciones que están acá, esta primera queda en el hecho de que D es único. Pareciera que solamente está mostrando la existencia pero en ningún momento logra garantizar que los segmentos se bisecan, es decir que, a primera vista uno puede ver que esta justificación quedó corta ¿cierto?… no concluyó el asunto…solamente muestra aparentemente la existencia del punto.



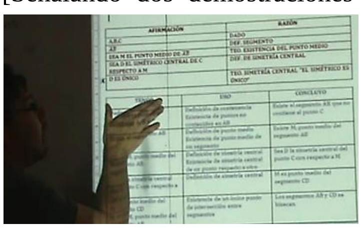
[Señalando otra demostración afirma] Acá si aparece como último paso que los segmentos se bisecan.



[Señalando otra demostración expresa] En esta queda que M es punto medio del $\overline{CD}$ y M punto medio del $\overline{AB}$ y después miren que no aparece algo más… O sea que en esencia pareciera que no se está diciendo que los segmentos se bisecan, por lo menos en esta afirmación pero si aparece acá.

Comparación respecto a formatos usados para presentar la demostración

[Señalando dos demostraciones dice] Notan ustedes la diferencia entre los dos formatos



¿listo?…una afirmación que debería aparecer acá [señala una demostración a dos columnas] como concluyente en el formato a dos columnas, acá aparece en la tercera [señala la tercera columna de una demostración presentada a tres columnas] vamos a ver por qué... eso va dejando cosas en los estudiantes.

El hecho de que el profesor muestre a los estudiantes una comparación entre demostraciones particulares producidas por ellos, resaltando asuntos específicos por discutir, es indicador de que el profesor hace un análisis previo a la clase, de las producciones escritas de los estudiantes, lo que se corresponde con II. B. i. dada la planeación de materiales para la clase que propicien la comprensión de lo geométrico.

Con esta acción del profesor se evidencia III. A. ii., dado su interés por destacar y dar claridad sobre elementos teóricos en el último paso de las propuestas de las demostraciones a partir del señalamiento y comparación entre cada una de ellas. Veamos en detalle, un análisis de esto:

Con respecto a la primera comparación:

El profesor señala que hay un elemento presente en todas las demostraciones; esto es la garantía utilizada para justificar la existencia de los segmentos, es *definición de segmentos*. Al respecto, el profesor resalta que la definición de objeto geométrico no es garantía de su existencia dentro de una demostración, acción que se corresponde con I. A. iii. y I. A. i. dada su intención por explicitar y destacar elementos del sistema teórico para legitimar su afirmación y precisar la concepción de un objeto en particular de la geometría (para este caso, segmento) y de un concepto de las matemáticas en general (para este caso, *definición* de un objeto).

Siguiendo con el asunto de garantizar la existencia de objetos, para este caso de segmentos, él continúa indagando al respecto con el objetivo de que los estudiantes reflexionen sobre sus concepciones al respecto de tal objeto (acciones que se corresponden tanto con I. A. i. y III. A. vii.). En el siguiente diálogo se ilustra tal situación.

1. P: … Quiero mostrar que existen los segmentos, ¿qué es lo primero que debo tener?
2. E2: La recta.
3. P: Una recta o puntos… ¿De dónde saco los puntos? (El profesor continúa cuestionando y plantea la siguiente situación hipotética)… Miren esto es un segmento… justifiquen que existe…
4. E2: De las definiciones intuitivas de plano y punto.
5. P: De las definiciones intuitivas dices… Vamos al asunto de las definiciones intuitivas que me interesa. Uno tiene una concepción de un objeto y eso es intuitivo o uno tiene una definición intuitiva… ¿Qué es una definición? Definición de definición… Definición es coger uno objeto y ponerle las características y ya está… Definición intuitiva no. De pronto definición de objetos intuitivos o un de pronto una concepción intuitiva de algún objeto. Ahora ¡claro! punto, recta, plano, conjunto, relación de pertenencia son objetos primitivos de nuestra teoría; no se definen; de ellos hablamos, los caracterizamos, con ellos construimos teoría, pero a ellos no los definimos, son los elementos mínimos para formar un lenguaje y poder empezar a construir sobre ellos.

En el diálogo anterior, el profesor emplea III. A. vii. cuando pregunta a los profesores en formación avanzada sobre sus concepciones de la existencia de los segmentos [1] y de lo que es una definición [5]. Acciona con I. A. i. en el momento en el que alude a la definición de *definición* y los aspectos a tener en cuenta de los objetos primitivos del sistema teórico desarrollado [5].

Durante este episodio de clase, hay un asunto interesante del actuar del profesor que vale la pena resaltar: él intenta llamar a la reflexión alrededor de tomar con "pinzas" el abordaje de los temas de existencia de objetos en un aula de clase de matemáticas a nivel escolar. Veamos las siguientes reflexiones:

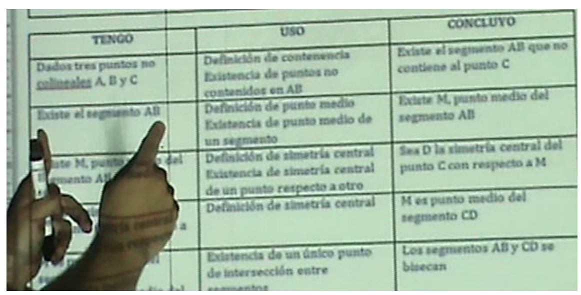
1. P: Todo depende del sistema teórico en el cual obviamente uno esté y hasta qué punto quiere llegar en términos de rigurosidad. ¿Cuándo uno en el colegio se preocupa por la existencia de los objetos? Uno los define ¿cierto? Uno define punto medio, uno define recta…bueno algunas veces se define recta cosa que no debería ser, a veces se define punto, cosa que tampoco debería pasar, se define plano, tampoco debería pasar y, a veces, después de hacer todas las definiciones uno empieza a utilizar los objetos sin percatarse si ellos en verdad existen o no. ¡Claro! porque implícitamente hay un contrato didáctico en el colegio, en la escuela, en donde uno habla de los objetos que efectivamente existen, porque es que si no existieran no tendría sentido hablar de ellos. ¿Listo? hay un contrato implícito.
2. P: Ojo esto que estamos haciendo acá es a manera de chisme [Se refiere a cómo demostrar la existencia del objeto segmento de manera rigurosa]. ¿Cierto? No creo uno quisiera hacer esto en el colegio ¿cierto? A no ser que haya un énfasis o algo así. Pero es chévere que nosotros nos problematicemos sobre el por qué es tan difícil, quizá, pensar en la existencia de los objetos. ¡Claro! es que todo implica construir una teoría y eso puede ser un poco tedioso en la escuela.

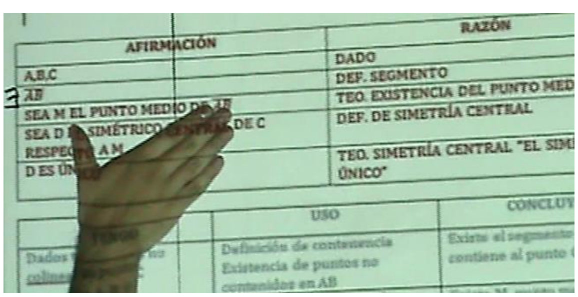
En la primera intervención, el profesor intenta poner de presente que aun cuando la definición no necesariamente garantiza la existencia desde un punto de vista riguroso, en la escuela ello no se cuestiona; esto es, se definen objetos que por supuesto "existen" y que en consecuencia, son susceptibles de ser estudiados en la Geometría escolar. En la segunda intervención, el profesor intenta poner un acento sobre la pertinencia de abordar o no este asunto de la "existencia" a nivel escolar. En ambos casos, se evidencia una acción del profesor que se corresponde con II. A. ii.

Con respecto a la segunda comparación:

El profesor señala la existencia de una diferencia entre los dos formatos para presentar una demostración. Esta consiste en que mientras en el formato a dos columnas una *afirmación* se escribe en la primera columna, en el formato a tres columnas, dicha afirmación se pone en la columna *concluyo*. Así, el profesor acciona I. C. ii y II. A. ii ya que su propósito es explicitar y destacar distinciones entre las maneras de presentar una demostración (para este caso, los formatos a dos y tres columnas) y los aportes a la compresión de la demostración por parte de los estudiantes. Siguiendo con este asunto, el profesor precisa las diferencias entre los formatos mediante la siguiente explicación.

> P: Cuando uno en este formato [señala el formato a tres columnas] pone existe el segmento, ya estoy dando por sentado que existe porque cuando yo pongo en la columna tengo, no estoy diciendo este apareció y voy a justificar por qué apareció sino que lo pongo como existe de una. ¿Se percatan de eso? Acá [señala la columna tengo] no se preocupan por decir de qué manera aparece porque recuerden que esta columna de qué uso es para justificar, esta columna de acá [señala la columna concluyo]. ¿Se dan cuenta de la diferencia entre los dos formatos? En este formato [señala el formato a dos columnas] uno siempre está poniendo la justificación de esto [señala la columna afirmación]. Y, noten ustedes que la existencia del segmento AB, nunca apareció en la tercera columna. No… ¿o sí aparece? Existe el segmento a partir de ¿qué?... De la existencia de puntos no contenidos en el segmento AB o ¿qué? Si ven, no aparece como tal una garantía de la existencia del segmento.





En la intervención anterior, el profesor activa II. A. ii. dada su intención de mostrar cómo el uso de los formatos –a dos o tres columnas– vuelve operativa la producción de una demostración en lo que tiene que ver con la manera de construir una cadena deductiva de proposiciones. Para esto, precisa los elementos que se deben registrar en cada columna del formato a tres columnas: en la primera columna *Tengo* se debe registrar el *hecho dado* (para este caso la existencia del segmento AB), en la segunda columna *Uso* se escribe la *garantía* del *hecho dado* y en la columna *Concluyo* la conclusión; y establece la diferencia con el formato a dos columnas en términos de que lo que se registra en la columna *Afirmación* es el hecho dado y en la columna *Razón* es la justificación de usada como garantía.

Finalmente, después de toda su explicación de orden matemática y de precisar que la existencia del segmento la provee un teorema, retoma las demostraciones formuladas por los estudiantes y termina de hacer la revisión de las mismas. El profesor enfatiza que detrás de todas estas demostraciones está de fondo el Teorema de localización de puntos y que para poder darle sentido al mismo, es necesario explicitar los elementos teóricos relacionados con él. Este último asunto se precisará en el siguiente momento.

4.1.1.3 *Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1*

En este momento de la clase, el profesor propone a los estudiantes la construcción colectiva de un esquema en cual se exponen los elementos teóricos (y las relaciones entre ellos), asociadas al teorema de localización de puntos fundamental para hacer la demostración de la conjetura que surge del problema 1, en particular, fundamental para la existencia del punto D citado en la tesis de la conjetura. Dicho esquema es realizado por el profesor en el tablero, a partir de las respuestas de los estudiantes ante las preguntas hechas por el profesor conducente a que ellos expresen qué elementos de la teoría tuvieron en cuenta mientras construían la demostración de la conjetura. El siguiente diálogo es un ejemplo de tal situación.

1. P: El problema de los tres puntos implica abordar: definición de segmento. ¿qué más implica abordar a parte de la definición de segmento? [Los estudiantes guardan silencio por un momento, lo que hace que el profesor genere otra pregunta] Bueno, ustedes construyeron un segmento, ¿después qué hicieron?

2. E3: Punto medio. [El profesor registra en el tablero completando el esquema y continúa preguntando]
3. P: Punto medio ¿cierto? Entonces implica abordar definición de punto medio. Pero esperen, la definición de punto medio ¿de quién necesita?...Uno define punto medio de ¿qué?
4. E2: Del segmento.
5. P: Pero la definición de punto medio ¿de qué más necesita?
6. E2: De la interestancia.
7. P: Necesita la definición de interestancia. Y ¿no necesita nada más?
8. E1: De igualdad.
9. E2: No, de medida.
10. P: Listo.

En el diálogo anterior, el profesor emplea III. B. v., en tanto recoge las ideas de los profesores en formación avanzada, sobre los elementos geométrico que tuvieron en cuenta durante la demostración de la conjetura del problema 1. También, utiliza III. A. vii. cuando indaga, mediante preguntas [1, 3, 5, 7], sobre los elementos teórico utilizados durante el proceso de demostración.

El profesor continúa construyendo junto con los estudiantes el esquema del sistema teórico asociado al problema 1. Al finalizar el esquema (Figura 3), formula más preguntas que cuestionan sobre qué elementos o conexiones faltarían en esquema. La interacción que sigue da cuenta de esto.

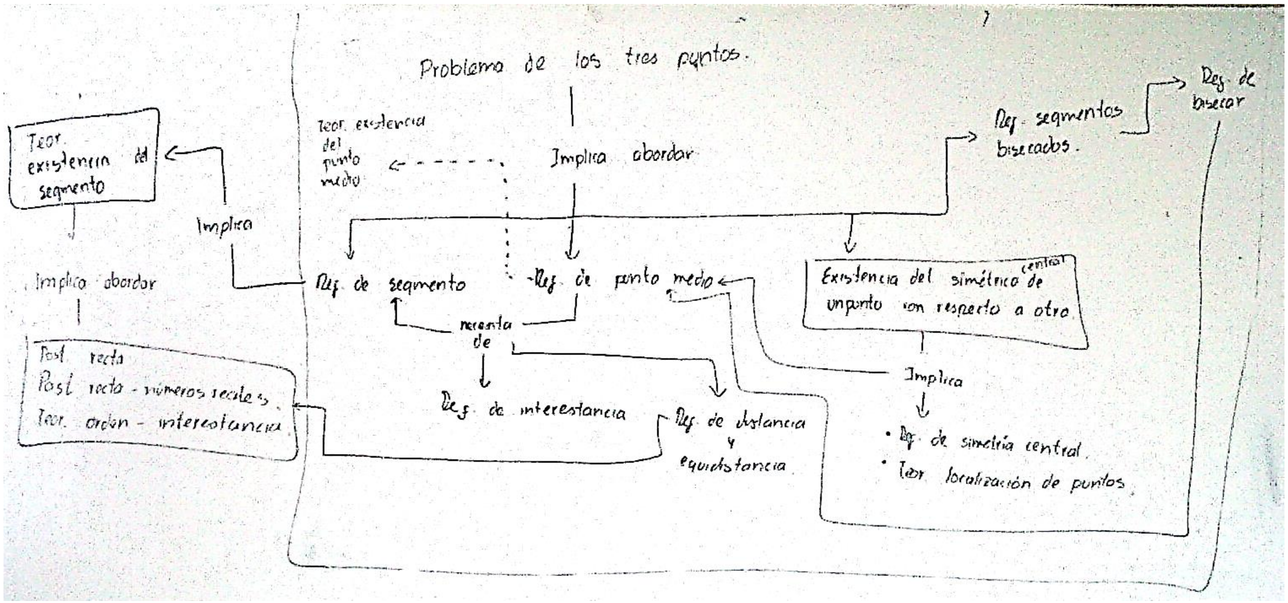


Figura 3

1. P: De acuerdo con este sistema teórico local o ¿no? Bueno de lo que nosotros hicimos hacen faltan cosas pero, en esencia, ¿les parece o hace falta alguna cosa, alguna conexión? No sé.
2. E3: Con lo que hay ahí, ¿no es necesario garantizar la existencia del punto medio del segmento?
3. P: [Asiente con la cabeza] Garantizar la existencia del punto medio. (Complementa el esquema escribiendo en el tablero la sugerencia de la estudiante y vuelve a preguntar). ¿Qué otra cosa? Haber yo lo miro de lejos a ver si hace falta algo. (Se aleja del tablero y observa el esquema)
4. [Los estudiantes no expresan algo más, entonces el profesor comenta otros elementos teóricos que se podrían incluir en el esquema, estos son: el postulado de la recta – números reales y teorema orden – interestancia]

En la interacción anterior, el profesor se vale de I. C. i. dado utiliza como recurso gráfico un esquema que recoge del sistema teórico local asociado a la justificación de la conjetura del problema 1. Además, emplea III. A. iii. en tanto pregunta a los estudiantes su opinión sobre los elementos geométricos expuestos en el esquema [1] y recibe la respuesta por parte de una de las profesoras en formación avanzada.

El profesor finaliza este fragmento de la clase activando III. B. vi. ya que explicita elementos a tener en cuenta del *contrato didáctico* mediante su solicitud de que en los sistemas teóricos locales que se pida construir para los próximos problemas, no es necesario contemplar elementos asociados a la existencia de objetos geométricos. Menciona que hacerlo, representaría un sistema teórico global y complejo, que aunque no vale la pena ahondar en él, sí se debe tener conciencia de que tratarlo implica introducir teoremas de existencia, por ejemplo, e ir hasta el origen del sistema.

4.1.1.4 *Propuesta de otra solución al problema 1*

En esta parte de la clase, el profesor invita a una de las estudiantes a exponer su solución del problema 1. Él conoce de antemano que esta solución implica un sistema local teórico distinto al presentado en el numeral anterior, en tanto gira entorno a propiedades de los cuadriláteros; este hecho es indicador de que hace una revisión y selección –previa a la clase– acción que se corresponde con II. B. i. En el siguiente diálogo además de estar la evidencia de lo que se acaba de decir, están presentes otras acciones del profesor que se quieren resaltar:

1. P: ¿Cómo es la solución? Ven y la haces… La conjetura no cambia. La conjetura es la misma. Lo que está cambiando es la forma como se está encontrando el punto [Se refiere a la existencia del punto D]
2. [La estudiante repasa los pasos de la construcción hecha en Cabri que posibilitó construir el punto D buscado. (Figura 4)]
3. P: Los tres puntos no colineales.
4. E6: Entonces lo que tomamos fue el segmento AB y a partir…

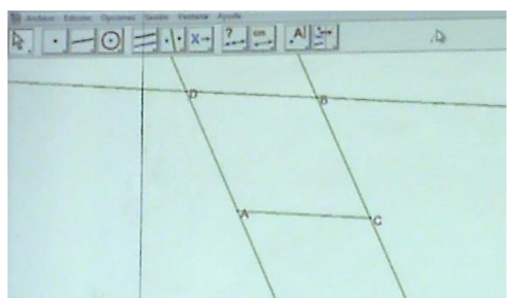


Figura 4

5. P: Antes, ¿si es el segmento AB?
6. E6: Ah, ya, ya, ya vi… sí, sí, sí.
7. P: Pero dale, dale. Ten en cuenta que lo que quieres es el punto D para que $\overline{DC}$ se biseque con $\overline{AB}$. Piensa eso.
8. E6: Hicimos las rectas AC y BC y trazamos paralelas.
9. P: No, pero espera, espera. Cuando queramos decir: hicimos la paralela; siempre tienes que decir dos cosas más: con respecto a quién y por cual punto. ¿Listo?
10. E5: La recta BC y la paralela que pasara por A.

11. E6: Y la recta paralela a este segmento [señala con el puntero el segmento AC] que pase por B. Entonces decíamos que este punto [señala el punto de intersección de las paralelas] es D.
12. P: Ese es el punto que necesitamos.
13. E6: Es el punto que necesitamos. Y ¿por qué es el punto que necesitamos?
14. P: Ahí está el quid del asunto. Pero, hasta ahí el problema ya estaría resuelto.

En el diálogo anterior, el profesor emplea III. A. v. ya que mediante la pregunta formulada en [1] y la afirmación expresada en [7] solicita a la estudiante la identificación de condiciones construidas (i.e., los pasos de la construcción en Cabri) para la existencia del punto D de manera que $\overline{DC}$ se biseque con $\overline{AB}$. Nuevamente acciona III. A. ii. y III. A. v. cuando le pide a la estudiante precisión en la comunicación respecto a las condiciones para construir una paralela a un segmento [Línea 9]. Luego de que la estudiante termina su intervención, el profesor solicita a los estudiantes enunciar someramente elementos del sistema teórico asociado a cuadriláteros que se tendría en cuenta en demostración de la conjetura. Algunos de ellos fueron: *teoremas de ángulos formados entre paralelas, criterios de congruencia entre triángulos, teoremas de paralelismo*.

Cuando se termina su intervención anterior, en un intento de que los estudiantes reflexionen sobre su propia práctica, el profesor formula una pregunta [línea 1] que genera el siguiente diálogo:

1. P: ¿Qué pasaría si en una clase ustedes ponen el problema de los tres puntos (Problema 1)? ¿De qué depende el sistema que ustedes escogen?
2. E4: De la construcción.
3. P: ¿De la construcción?
4. E2 Y E4: Sí.
5. P: ¿De qué depende?
6. E5: Si lo propongo bajo un software de geometría dinámica, sí.
7. P: O sea, no depende de… A ver, hay una cosa acá, los estudiantes solucionan el problema, ¿cómo creen ustedes que los estudiantes solucionan el problema? ¿Con base en qué?
8. E: (Varios estudiantes responden) Con base en lo que se les ha enseñado. En los que se les ha dado.
9. P: Ah, con base en la organización teórica que uno haya llevado en el curso, ¿cierto? […] Pero si es usual que los muchachos [se refiere a los estudiantes de colegio] para solucionar este problema utilicen circunferencia [varias soluciones propuesta por los estudiantes del

> curso hicieron uso de este objeto para solucionarlo, y por ende, lo usaron también en la demostración, por eso lo trae a colación]. Yo creo que es usual, o ¿no? La simetría central [otra propuesta se fundamentó en este objeto] no creo que sea usual. Además, no es una cosa que se estudie fuertemente en el currículo, aunque por allá en las últimas unidades de sexto aparece algo de transformaciones […] Pero la circunferencia sí es usual. Ahora, si uno está en un contexto noveno en donde se ha estudiado cuadriláteros, es probable, dependiendo de la teoría que se haya estudiado, que esta sea la solución [señala la solución a la que hicimos referencia antes con la estudiante paso al tablero a explicarla]. Listo. Implica obviamente se tengas presente como profesor qué conocimientos y qué organización llevan en el currículo para saber cuál de los dos sistemas es el más apropiado. En este caso universitario, con ustedes profesores en ejercicio, exponiendo todas las ideas que van fluyendo, es chévere tratar de discutir cuáles son equivalentes, cuáles son totalmente distintas, cuál es la más apropiada y en qué contexto lo es. Por ejemplo, en grado sexto o séptimo esto [la solución basada en cuadriláteros] no tiene mucho sentido, pero si tiene mucho sentido la circunferencia porque probablemente uno ahí enseña algo de números construibles, hace pequeñas construcciones con regla y compás, de copiar segmentos, cómo se construye el punto medio, una perpendicular, cómo copiar ángulos, eso uno sí lo hace, quizás, en [grado] sexto con regla y compás. Eso está mucho más asociado y se puede proponer el problema en ese contexto. Seguramente, en un contexto como ese, los cuadriláteros no aparecerán, entonces la zona de riesgo del profesor no es tan fuerte. Pero si ustedes llegan a grado noveno, ponen este problema, es probable que los estudiantes, conozcan algo de cuadriláteros, propongan una solución como esta [señala la relativa a cuadriláteros] en algo que ya conocen. Y ahí el profesor tiene que tener la habilidad de manejar los dos campos y tratar de mostrar el potencial de uno con relación al otro o desechar uno porque no es coherente con lo que se ha venido estudiando...

Acá el profesor quiere llamar la atención sobre la habilidad que debe tener un profesor para proponer un problema en términos de qué aspectos tendrá en cuenta, desde el conocimiento geométrico, para validar o no su solución. El profesor para ilustrar ello y llamar a la reflexión, toma la situación que acaban experimentar los estudiantes, claro, en esa situación hay varias soluciones a un problema, y unas más pertinentes que otras según el contexto en el que se encuentren los estudiantes a los que se les pone el problema I. B. ii. Además, hace uso de II. A. i. cuando explicita [9] cómo considera él que los estudiantes de sexto, séptimo y noveno grado resolverían el problema 1 y los elementos que usarían de acuerdo con el sistema teórico desarrollado por el profesor. También, emplea II. A. ii. dado que finaliza su intervención [9] señalando la necesidad de que un profesor tenga habilidades para reconocer en las soluciones de sus estudiantes conceptos y procesos geométricos que potencien su aprendizaje de la Geometría. Con esta reflexión el profesor cierra este momento de la clase.

4.1.1.5 *Problemas 2 y 3*

En este momento, el profesor presenta a los estudiantes la diapositiva de la figura 5 que contiene los problemas a resolver en grupos.

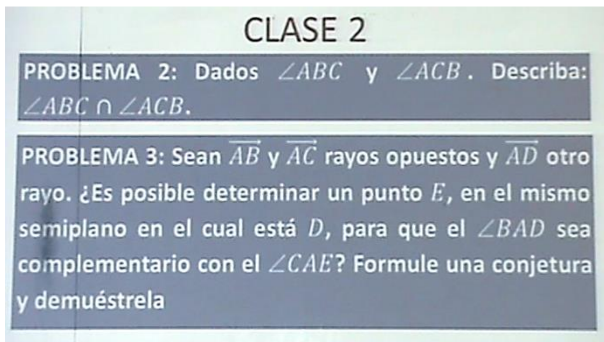


Figura 5

En cuanto al problema 2, el profesor hace el siguiente comentario:

> P: Este es un buen ejercicio que ustedes pueden hacer en el colegio, con el objetivo de precisar, de diagnosticar la concepción de ángulo que tiene un estudiante Esta es una buena manera de darse uno cuenta de ello sin preguntar explícitamente: oiga, ¿Cuál es la definición de ángulo? Que es como uno usualmente hace. O escribirla en el tablero. Esta es una buena forma para uno percatarse cuál es la concepción de ángulo que tienen los estudiantes.

En la intervención anterior, el profesor señala que el problema 2[5] se puede plantear en cualquier contexto para ver qué imagen conceptual tiene un estudiante en relación con el objeto ángulo, expresa que es un ejercicio para definir, esto es, para precisar las características del objeto acción que evidencia el uso de II. A. ii.

[5] Dados $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Describa $\angle ABC \cap \angle ACB$

Hecho este comentario, el profesor da espacio para que los estudiantes trabajen en grupo durante unos minutos en la solución de este problema, para luego discutir las soluciones de cada uno en el tablero. Lo anterior evidencia que el profesor hace uso de III. B. vii. dado que posibilita un espacio para que los estudiantes trabajen en grupo y de manera autónoma.

Vale la pena precisar que el profesor propone este problema, que no es usual enunciarlo a nivel escolar, con el objetivo de que los estudiantes: 1) conceptualicen sobre el objeto ángulo (acción que se corresponde con III. A. i.); y 2) hagan explícita tanto la definición que tienen de él como la coherencia de tal definición en relación con otros objetos del sistema teórico local a ser enseñados en sus aulas de clase (acción que se corresponde con II. B. ii.).

Luego del abordaje del problema 2, la actividad de los estudiantes se concentra en la solución del problema 3[6]. El profesor provee tiempo suficiente para que ellos solucionen el problema, acción que se corresponde con III. B. vii.

Siguiendo con el grupo y teniendo presente que el profesor reconoce una confusión entre la estudiantes a partir de lo que les ha escuchado, que tiene que ver con qué tipo de problema están abordado en este caso (y por ende, si la respuesta que dan a la pregunta del problema se convierte en el antecedente o el consecuente de la conjetura a demostrar), el profesor interviene de la siguiente manera:

1. P: Hay una cosa fundamental entre lo que pasó esa vez [alude al problema 1 referido con anterioridad], y lo que pasa acá: es que ustedes acá están imponiendo una condición geométrica a un objeto para que la cosa funcione; en el anterior caso, no necesitaban hacer eso, ponerle punto medio o simetría a todo el antecedente para que la cosa funcionara; solo necesitaban los tres puntos que estaba dados. Esa es la diferencia.
2. E5: Es así de sencillo, sabemos para donde vamos y sabemos hasta donde podemos.
3. P: Pero está bien lo que dice E5, ¿en dónde debo poner la condición que acaban de determinar?…, en tanto que es condición, debe estar en el antecedente, pero no deben trascender de ella, ustedes deben encontrar las mínimas condiciones para que después

[6] Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayo opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo. ¿Es posible determinar un punto E, en el mismo semiplano en el cual está D, para que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$? Formule una conjetura y demuéstrela.

pueden encontrar el punto E, cuáles son las mínimas condiciones. Efectivamente, lo que nos dan más, la que acabas de decir tú, y después, ¿cuál sería el consecuente?

En esta discusión, el profesor acciona III. B. iii. en tanto hace una claridad sobre el tipo de problema (búsqueda de antecedente) y en consecuencia, aclara y convalidad lo dicho por una estudiante: la codición determinada debe ser el antecedente de la conjetura a formular. Posteriormente, el profesor se desplaza en el salón y observa que los estudiantes de otro grupo están reportando su solución utilizando lenguaje inapropiado, razón por la cual les dice:

P: Una cosa importante es que por favor escribamos con lenguaje geométrico. ¿Listo?, entonces nada de escribir segmento AB, sin utilizar el lenguaje geométrico. ¿Vale? Tratar de procurar hacerlo siempre.

En este diálogo se observa cómo el profesor hace uso de III. B. i. dada su exigencia frente al cumplimiento del uso del lenguaje geométrico cuando se reportan los pasos de la construcción realizada. En el mismo grupo, la siguiente interacción tiene lugar a raíz de una pregunta de un estudiante al profesor:

1. E3: O sea, ¿Podemos hablar de medida para hacer la conjetura?
2. P: Ustedes deciden cómo formulan su conjetura, que tan sintéticos son o no, de qué objeto se quieren valer para formularla o no, cómo quedaría más elegante, ustedes deciden porque finalmente es su conjetura y eso puede traer consecuencias o no en la demostración. Muchas veces los estudiantes formulan las conjeturas atendiendo a por lo menos tres cosas: Uno, transcribo tal cual lo que me dan, porque esa es una cosa fácil. Dos, escribo la conjetura en términos de lo que puedo demostrar, esa es otra forma. Tres, escribo la conjetura que yo sé que es válida, sintética, lo más bonito que pueda, pero no tengo mucha idea de cómo demostrarla, o sea, no pienso en relación con su demostración. Ustedes toman la decisión.
3. E3: Pero de todas maneras, cuando uno piensa en ángulos complementarios, está pensando en medidas, no hay una definición de ángulos complementarios que no pase por las medidas.
4. P: Está pensando en medidas, lo que pasa es que hay una palabra que sintetiza eso, que es la misma definición de ángulos complementarios, entonces, en tanto las definiciones son bicondicionales tu puedes decir: los ángulos complementarios, o puedes decir: la suma de las medidas de los ángulos es noventa. En términos geométricos, es lo mismo, pero a la hora de formular la conjetura tú buscas la manera sintética de escribirlo. Es eso, ahora, muchas veces, eee, eso implica un paso más en la demostración, porque si yo escribo en términos de

medida, sí tengo que hacer un paso más para decir que son complementarios. Ya cuando en la demostración, tiene la suma de las medidas, ahí para la demostración, me ahorro un pasito. ¿Si me hago entender? Eso es lo que piensan los muchachos cuando están escribiendo muchas veces una conjetura, ¿ustedes que piensan?, ¿Qué es mejor?

5. E9: Que ellos van a pensar en la medida porque ya saben que en el ángulo la suma les da noventa.
6. P: ¡Claro!, de hecho, ellos ya dan por hecho que: *"Ahh, esos ya son complementarios, ¿tengo que decir que son complementarios?"* **[**Manifiesta una expresión común en los estudiantes**]**. Pues hombre, sí porque eso [se refiere a hablar de suma de "suma de medidas es 90" y no de "ángulos complementarios"] implica un paso más en la demostración, una garantía más, definición de ángulos complementarios. Ustedes deciden finalmente.

En la discusión anterior, el profesor utiliza I. B. ii. ya que se refiere [2] a los elementos a tener en cuenta cuanto se formula una conjetura. Señala que esta debe ser sintética y que los objetos geométricos que se involucran y manera en que se formula, traen consecuencias en el planteamiento de la demostración de la conjetura. Adicionalmente, el profesor se vale de I. A. ix. en tanto caracteriza las definiciones como proposiciones de carácter bicondicional, y la implicación de ello en el proceso demostrativo [4]. También, el profesor emplea II. B. ii. para promover en los integrantes del grupo una reflexión sobre lo que piensan los estudiantes de colegio cuando están formulando una conjetura (para este caso si tuviesen que usar el concepto de ángulos complementarios). Con estas discusiones finaliza la clase.

4.1.2 Sesión de Clase N° 3

4.1.2.1 *Descripción general*

Nuevamente, el profesor hace una introducción a su clase mostrando una diapositiva (Figura 7) proyectada en el tablero, en la cual se presentan los asuntos a tratar. Describe que lo primero que se va a hacer, es mirar las demostraciones finales que quedaron del problema 1 y tratar de determinar –estudiantes y profesor– qué es lo

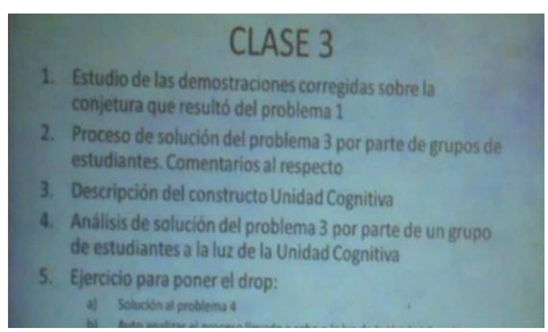


Figura 6

conflictivo en ellas, porque todavía no están completamente terminadas. Después, se observan y revisan las soluciones dadas por tres grupos de los cuatro grupos al problema 3. Luego, se mira un video grabado la clase anterior al grupo faltante, en cual el profesor espera que los estudiantes hagan reflexiones en términos de cómo establecer una conjetura. Después de eso, los estudiantes del grupo faltante presentan la justificación que ellos elaboraron con el objetivo de tratar de mirar si hubo o no hubo unidad cognitiva en ellos. Sin embargo, para poder precisar si hubo o no hubo unidad cognitiva en ellos, el profesor hace una breve presentación de lo que significa el constructo *Unidad Cognitiva*. Finalmente, el profesor propone un ejercicio, problema 4.

En la presentación anterior, el profesor acciona II. B. i. ya que se evidencia que hubo una planeación previa a la clase, lo que le permitió al profesor seleccionar y diseñar situaciones para plantearlas a los estudiantes, con la intención de mostrar distintos procesos de solución ante los problemas propuestos en clase y plantear problemas que contribuyan a la comprensión de lo que significa el aprendizaje y la enseñanza de la geometría (II. A. i).

Después de esta introducción realizada por el profesor, se lleva a cabo la primera parte de la clase que consiste en estudiar las demostraciones corregidas del problema 1. Los fragmentos de clase que se analizarán son los siguientes:

- Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1.
- Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes.
- Descripción constructo Unidad Cognitiva y Análisis de solución del problema 3 por parte de un grupo de estudiantes a la luz de la Unidad Cognitiva.

4.1.2.2 *Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1*

En este momento se comienza con la presentación de las diferentes soluciones al problema 1. El profesor usa II. B. i. en tanto las resalta con color amarillo y expresa que estos son aspectos que él considera conflictivos aún en la demostración, lo que demuestra revisión de las producciones de los estudiantes y preparación de material para generar comprensión sobre los procesos de aprendizaje matemático. También activa III. A. ii. dado que aborda imprecisiones matemáticas, en este caso: uso de la palabra razón en el formato para presentar una demostración, la forma en que se escriben los enunciados dentro de ella y la existencia y unicidad del punto D. Además, señala que espera que sean los estudiantes quienes determinen por qué son conflictivos. En la figura 8 se ilustra la situación anterior.

	AFIRMACIÓN	RAZÓN
1.	Puntos A,B,C	DADO
2.	Sea $\overleftrightarrow{AB}$	Postulado recta
3.	Existe $\overline{AB}$	Teorema existencia segmentos y rayos contenidos en rectas
4.	SEA M EL PUNTO MEDIO DE $\overline{AB}$	TEO. EXISTENCIA DEL PUNTO MEDIO
5.	SEA $\overleftrightarrow{CM}$	Postulado Recta
6.	$\exists D, (D \in \overleftrightarrow{CM}), M$ *es punto medio de* $\overline{CD}$	TEO. Dado A y B, existe el punto C tal que B es punto medio de $\overline{AC}$
7	$CM = MD$ y $AM = MB$	Definición de punto medio
8.	$\overline{AB}$ *se biseca con* $\overline{CD}$	Definición de Bisecarse
9.	Supongamos la existencia de otro punto D' tal que $\overline{AB}$ *se biseca con* $\overline{CD'}$	Negación de la consecuencia
10.	$CM' = M'D'$ y $AM' = M'B$, donde $M' \in \overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Definición de bisecarse
11.	M' es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Definición punto medio
12.	M'=M	TEO. Dado A y B, existe el punto C tal que B es punto medio de $\overline{AC}$. (Unicidad)
13.	D=D'	Principio prueba indirecta

Figura 7

Primero, el profesor activa III. A. v. dado que deja ver como conflictivo en la primera línea, la expresión *Puntos A, B, C* ya que no se le asigna una *condición* a esos puntos. Luego, el profesor utiliza I. A. ix. en tanto da tratamiento a un asunto especial de las matemáticas, para este caso el uso de la palabra *razón* en el formato de demostración a dos columnas, expresando que ya no se utiliza y justifica su cambio por la palabra *garantía* desde la teoría de Toulmin. Además, acciona III. B. vi. señalando que se cambiará la palabra *razón* por *garantía* en el formato a dos columnas, introduciendo así un nuevo elemento del *contrato didáctico.* El siguiente fragmento ilustra el argumento del profesor.

> P: Aparece la palabra razón en la segunda columna eee ¿en algún momento yo les había dicho que íbamos a modificar esa palabra *razón*? ¿o no? [Los estudiantes responden que no]. Bueno, antes en las versiones pasadas del curso, nosotros le llamábamos *razón* al hecho geométrico que permitía justificar la afirmación ¿cierto? Es la razón por la cual no sé qué [Hace una pausa]. Pero digamos que después de leer mucho, uno se percata pues que en realidad razón es para justificar las cosas que pueden ser no necesariamente teóricas y, cuando uno lee particularmente la literatura de Toulmin y los italianos, ellos terminan reemplazando la palabra *razón* por la palabra *garantía*. ¡Listo! la *garantía* teórica que permite afirmar lo que yo afirmo y entonces es un término mucho más apropiado...La *garantía* permite dar soporte a las afirmaciones que yo pongo, entonces vamos a cambiar la palabra *razón* por la palabra *garantía*… Cuando yo utilizo el formato a tres columnas, el *qué uso* es el análogo a la *garantía*.

Posteriormente, el profesor continúa con la revisión de la demostración señalando aspectos por mejorar en ella, lo que da cuenta de III. A. ii. dado que da tratamiento a imprecisiones matemáticas relacionadas con la *unicidad del punto D*. Para esto, se detiene en el *paso 6* de la demostración y solicita a los estudiantes expresar si están o no de acuerdo con ese paso. En este instante, una estudiante expresa su opinión frente al *paso 6* de la demostración y en torno a esta se genera un cuestionamiento por parte de otro estudiante. El siguiente fragmento de conversación ilustra lo anterior.

1. P: Yo quisiera saber si están de acuerdo con esta manera de escribir el asunto... Recuerden que ellos intentaron hacer la demostración utilizando simetría.
2. E1: Es que ahí ellos están garantizando que existe el punto medio pero lo que están concluyendo no es que existe el punto medio sino que existe otro punto de tal manera que el segmento formado es el punto medio.

[Al revisar lo dicho por la estudiante, el profesor se percata de que no es correcto. Así que afirma lo siguiente]

3. P: Eso está perfecto. Ese no es el problema. El problema es que llama la atención que esto [señala la *razón* del paso 6] es lo que garantiza finalmente que exista el simétrico, entonces ustedes en medio de la demostración tendrían que haber dicho sea D el simétrico de C con respecto al punto M. Esa era la demostración que ustedes tendrían que deberían dicho y el teorema sería la existencia del punto simétrico.

En esta conversación, el profesor utiliza III. A. iv. ya que busca resaltar que las *condiciones* bajos las cuales se construyó el punto D –para este caso el uso de simetría central– no fueron tenidas en cuenta en la demostración [3]. Es decir, el profesor intenta que los estudiantes comprendan que la *garantía* utilizada en el *paso 6* no se corresponde con los hechos geométricos utilizados en la construcción que ellos realizaron durante el proceso de solución del problema 1.

La clase continúa con la revisión de las demostraciones propuestas por los demás grupos. Durante esta revisión el profesor continúa resaltando (figura 8) imprecisiones en relación a la falta de algunos pasos en las demostraciones y a las *garantías* de lo que se afirma, haciendo las correcciones correspondientes a cada caso.

	AFIRMACIÓN	RAZÓN
1.	Puntos A,B,C no colineales	DADO
2.	Sea $\overleftrightarrow{AB}$	Postulado recta
3.	Existe $\overline{AB}$	Teorema existencia segmentos y rayos contenidos en rectas
4.	SEA M EL PUNTO MEDIO DE $\overline{AB}$	TEO. EXISTENCIA DEL PUNTO MEDIO
5.	SEA $\overleftrightarrow{CM}$	Postulado Recta
6.	$\exists D, (D \in \overleftrightarrow{CM}), M$ *es punto medio de* $\overline{CD}$	TEO. Dado A y B, existe el punto C tal que B es punto medio de $\overline{AC}$
7	$CM = MD$ y $AM = MB$	Definición de punto medio
8.	$\overline{AB}$ *se biseca con* $\overline{CD}$	Definición de Bisecarse
9.	Supongamos la existencia de otro punto D' tal que $\overline{AB}$ *se biseca con* $\overline{CD'}$	Negación de la consecuencia
10.	$CM' = M'D'$ y $AM' = M'B$, donde M' $\in$ $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Definición de bisecarse
11.	M' espunto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Definición punto medio
12.	M'=M	TEO. Dado A y B, existe el punto C tal que B es punto medio de $\overline{AC}$. (Unicidad)
13.	D=D'	Principio prueba indirecta.

Faltan algunos pasos

La construcción uso la simetría central Existencia del punto simétrico

Existe un único punto

Se quiere usar la unicidad del teorema existencia del punto medio, unicidad.

Figura 8

4.1.2.3 *Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes*

El profesor le solicita a uno de los estudiantes pasar al tablero para explicar el proceso de solución del problema 3, esto constituye evidencia de que el profesor usa III. B. iii. y III. A. v. ya que señala que el interés de esto es observar qué le sobra o qué le falta a la construcción que el estudiante propone, verificar si la conjetura formulada y su demostración son correctas y analizar si la construcción que él propone se respeta en la demostración. El estudiante pasa al tablero e inicia su explicación comentando a sus compañeros paso a paso cómo realizó su construcción (figura 9) en Cabri. Esto lo hace a mano alzada, hubiese sido más provechoso en términos de optimización de tiempo, utilizar los recursos tecnológicos dispuestos en la clase (video beam y portátil).

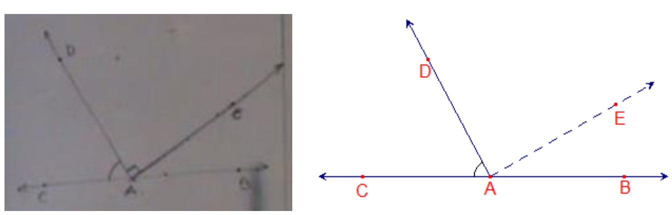


Figura 9

Sin embargo, recurrir al dibujo para representar su construcción, le permitió al profesor, mediante la formulación de preguntas, hacer caer en cuenta a los estudiantes de algunos objetos geométricos que se debían precisar. El siguiente fragmento ilustra esta situación.

1. P: Y otra cosa E1 para que obligatoriamente E estuviera en ese semiplano, eee, ¿Hay que cumplir alguna otra condición?
2. E1: **[**Asienta con la cabeza**]** Y habría otra condición adicional impuesta sobre la medida de este ángulo inicial **[**señala el ángulo DAC (figura 9)**]** que este tenía que ser menor que noventa **[…]**
3. P: Listo. Borra los rayos que no necesitas y escribe bien el digamos en medida eso que, eso que escribiste ahí ¿qué es?
4. E1: Medida del ángulo DAC menor que noventa.
5. P: Listo, entonces borra eso que no está bien escrito ahí, y falta, eee, falta algo, qué condición tiene…?
6. E1: Y que E pertenece al semiplano determinado por la recta CB, al mismo lado que esta D.
7. P: Y falta una cosa más sobre la representación gráfica.
8. E1: ¿Qué son opuestos?
9. P: No
10. E1: ¿Qué no pertenece?
11. P: No
12. E2: ¿La perpendicular?
13. P: La perpendicularidad
14. E1: Ahhh, OK, entonces…
15. P: Esa es la construcción, entonces en esencia construir una recta perpendicular a la recta DA o a al rayo DA por el punto A, en esencia eso es lo que permite la solución, listo.

En el diálogo anterior, se evidencia el uso, por parte del profesor, de III. A. v. en tanto a través de la formulación de preguntas al estudiante –profesor en formación avanzada– [2, 4, 6] y de la pregunta [8] busca que identifique *condiciones* en su construcción que permitan la solución del problema 3. En este caso, que el estudiante observe que la construcción de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ por el punto A le posibilita solucionar el problema 3. Después de esta interacción, el estudiante procede a presentar su conjetura, la demostración de la misma (Tabla 4) y el sistema teórico asociado a la misma (Figura 10).

Conjetura E1: *Dados* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$ *opuestos y* D, $D \notin \overleftrightarrow{CB}$. *Si* $m\angle DAC < 90$, $l \perp \overleftrightarrow{AD}$ *y* $E \in S_{\overleftrightarrow{CB},D}$, *entonces* $\angle DAC$ *y* $\angle EAB$ *son complementarios.*

	Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
1	$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ opuestos	Def. *Rayo* y Def. *Segmento*	A, B, C
2	A, B, C	Postulado de la *Recta*	$\overleftrightarrow{AB}$
3	$D \notin \overleftrightarrow{CB}$		
4	A, D	Postulado de la *Recta*	$\overleftrightarrow{AD}$
5	$\overleftrightarrow{AD}$	Teorema *segmentos y rayos contenidos en rectas*	$\overrightarrow{AD} \subset \overleftrightarrow{AD}$
6	$\overleftrightarrow{AD}$ y A	Teorema "*existencia recta perpendicular a otra dada por un punto en la recta*"	$\exists!\, l, \left(l \perp \overleftrightarrow{AD}\right) \wedge \left(l \cap \overleftrightarrow{AD} = \{A\}\right)$
7	Recta l	Postulado *conjuntos no vacíos*	$\exists E, (E \in l) \wedge \left(E \in S_{\overleftrightarrow{CB},D}\right)$
8	$\exists E, (E \in l) \wedge \left(E \in S_{\overleftrightarrow{CB},D}\right)$	Teorema *segmentos y rayos contenidos en rectas*	$\overrightarrow{AE}$
9	$\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AB}$	Def. *ángulos*	$\angle EAB, \angle EAD$ y $\angle CAD$
10	$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AB}$	Def. *ángulos par lineal*	$\angle CAD\ y\ \angle BAD$ son par lineal
11	$\angle CAD\ y\ \angle BAD$ son par lineal	Teorema *par lineal*	$m\angle CAD + m\angle BAD = 180$
12	$\angle EAD$	Def. *rectas perpendiculars*	$\angle EAD$ es recto
13	$\angle EAD$ es recto	Def ángulo recto	$m\angle EAD = 90$
14	$E \in S_{\overleftrightarrow{CB},D}$	Si $E \notin S_{\overleftrightarrow{DA},B}$, entonces $E \in S_{\overleftrightarrow{DA},C}$ Luego, $E \in \left(S_{\overleftrightarrow{CB},D} \wedge S_{\overleftrightarrow{AD},C}\right)$, o sea, $E \in int\angle DAC$. Pero por el *postulado de la adición de ángulos*, si $E \in int\angle DAC$ $m\angle EAD + m\angle EAC = m\angle CAD$. Y como $m\angle CAD < 90\ y$ $m\angle EAD = 90, m\angle EAC < 0$, por lo cual, se tiene una contradicción.	$E \in S_{\overleftrightarrow{DA},B}$
15	$E \in S_{\overleftrightarrow{DA},B} y\ E \in S_{\overleftrightarrow{CB},D}$	Def. *punto interior de ángulo.*	$E \in int\angle BAD$
16	$E \in int\angle BAD$	Postulado *de la adición de ángulos*	$m\angle EAD + m\angle EAB = m\angle BAD$
17	$m\angle EAD + m\angle EAB = m\angle BAD$ $m\angle EAD = 90$	Sustitución en ***R***	$90 + m\angle EAB = m\angle BAD$
18	$90 + m\angle EAB = m\angle BAD$ $m\angle CAD + m\angle BAD = 180$	Sustitución en ***R***	$m\angle EAB + m\angle CAD = 90$
19	$m\angle EAB + m\angle CAD = 90$	Def. *ángulos complementarios*	$\angle EAB\ y\ \angle CAD$ son complementarios.

Tabla 4. Demostración conjetura E1

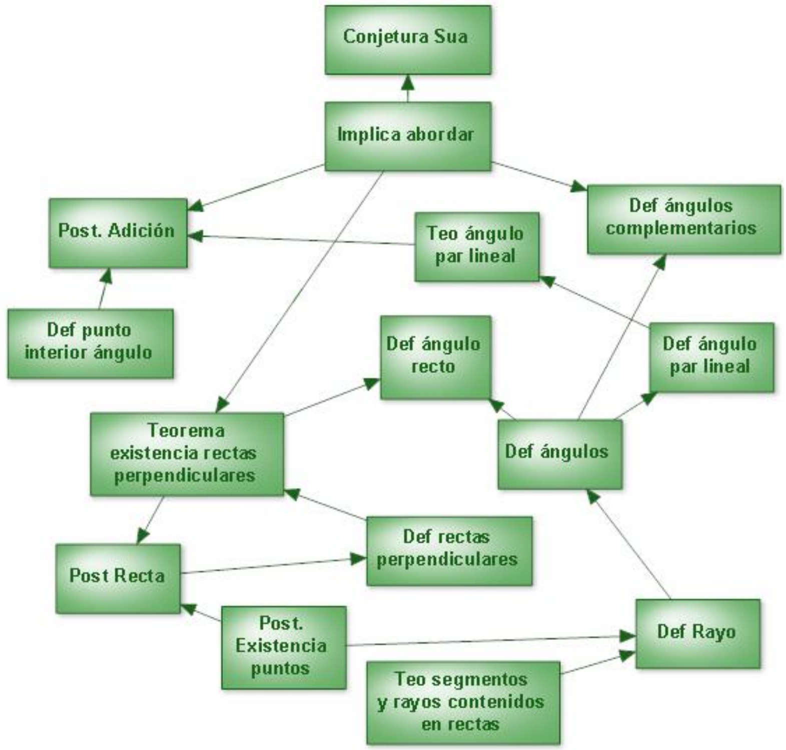


Figura 10

Durante la explicación de la demostración de la conjetura por parte del estudiante, el profesor acciona I. A. iii. dado que observa que en la línea 3 tan solo aparece enunciado $D \notin \overleftrightarrow{CB}$ en la columna *Qué sé* y no se registra algo más en las demás columnas, así que explicita que este elemento teórico involucrado en el *antecedente* de su conjetura debe tener un lugar en la demostración (en este caso se incluye en la línea 4, columna *Qué sé*). Luego, el profesor señala que en la línea 8 hay un problema con la *garantía* de la existencia del punto E así que acciona I. A. viii. introduciendo un nuevo elemento al sistema teórico relacionado con la definición de *semiplano.* Con esto concluye este momento de la clase.

4.1.2.4 *Descripción constructo Unidad Cognitiva y Análisis de solución del problema 3 por parte de un grupo de estudiantes a la luz de la Unidad Cognitiva*

En este momento de clase, el profesor utiliza II. A. ii. dado que lleva a cabo una exposición sobre el constructo *unidad cognitiva* teniendo como referentes los estudios de Boero, Garuti, Mariotti y Pedemonte. En dicha exposición expresa que la unidad cognitiva trata de precisar una continuidad entre los procesos de conjeturación y de justificación, pero además de tratar de precisar que se justifica aquello que se conjetura, también trata de precisar una continuidad entre lo que tiene que ver con el contenido y lo que tiene que ver con lo argumental. Lo anterior deja ver el conocimiento del profesor frente a lo didáctico. Luego, para lograr que los estudiantes (profesores en formación avanzada) comprendan lo que significa que haya unidad cognitiva, toma como ejemplo un video tomado la clase anterior durante el proceso de solución del problema 3 (Sección 4.1.4) y explica por qué no hubo unidad cognitiva. Esto evidencia el uso de (II. B. i.) en tanto que el profesor seleccionó como material que muestra procesos de solución un video generado en una de sus clases. En la siguiente intervención se ilustra tal situación.

> P: […] por ejemplo, en lo que acabamos de ver del grupo, era constante antes de formular como tal la conjetura, a medida que va haciendo la construcción, va dando explicaciones de por qué la cosa puede ser cierta y funcionar, ya está dando una plausibilidad de por qué la perpendicularidad funcionaría, ¿listo?, ¡Antes de que se esté!, antes de que como tal se formule la conjetura, pero ella ya está dando algunas ideas de porque es plausible **[**señala en la presentación la palabra plausibilidad**]** que lo que ella está diciendo, sea después una eee, asunto válido eee, que pueda entrar en el proceso de demostración, y en ese caso, solamente estoy hablando de una cosa de contenido, ella habló de perpendicularidad, en algún momento habló de ángulos opuestos por el vértice, y si uno mira en términos de contenido, uno quisiera que esos mismos contenidos de alguna forma aparezcan después en el proceso de justificación, ¿listo?, vamos a percatarnos si eso finalmente pasó. […] si uno empieza a mirar lo que propuso E2 en términos de la conjeturación y finalmente la demostración que hicieron, si hubo un rompimiento fuerte. Hubo un rompimiento fuerte porque la demostración de ellos es muy parecida a la de E1, y en lo de E1 fue protagonista la perpendicularidad, nada más, ¡claro!, y el hecho del punto en el semiplano que fue el problema que tuvimos todos, ¡pero!, no apareció por ningún lado los ángulos opuestos por el vértice, y eso hace que el argumento de alguna forma cambie, ¡hubo un rompimiento!, entonces no hubo unidad cognitiva completa, solamente en un pedacito y fue en el uso de la perpendicularidad.

Después de la aclaración del profesor frente a si hubo o no unidad cognitiva, una de las estudiantes pregunta por las ventajas de que haya unidad cognitiva completa. En la siguiente intervención se describe la respuesta del profesor.

> P: […] se dieron cuenta que si en la escuela se propicia el hecho de que haya Unidad Cognitiva, es decir, que se le propongan a los estudiantes situaciones en donde ellos deban conjeturar,

> pero esas mismas conjeturas o en esas mismas conjeturas aparezcan contenidos y argumentos que son útiles en la demostración, la demostración en sí misma es mucho más fácil de llevar a cabo, porque los mismos argumentos y los mismos contenidos en los cuales yo estoy haciendo el estudio de la conjetura son en esencia los mismos asuntos, los mismos argumentos, los mismos contenidos que se pueden presentar en la demostración, y ¡facilita! en algo el asunto, lo hace más transparente, ¿mm?, ese es el potencial.

En esta intervención, el profesor utiliza II. A. i dado que reconoce en la pregunta formulada por la profesora en formación avanzada su preocupación por la utilidad del constructo unidad cognitiva cuando se lleva la demostración a la escuela y da respuesta a su cuestionamiento en términos de los beneficios que tiene proponer a los estudiantes situaciones en las cuales los elementos geométricos utilizados en lo que se construye, se utilizan nuevamente en la demostración. Esta respuesta evidencia el conocimiento del profesor frente teorías de la Didáctica de las matemáticas que le permiten propiciar la caracterización de los procesos en intervienen en una demostración como objetos de enseñanza (II. A. i.). Luego, el profesor continúa con su exposición en la cual establece una diferencia entre dos constructos teóricos: *actividad demostrativa* y *unidad cognitiva*. Para esto, nuevamente el profesor emplea II. A. ii. en tanto define claramente dichos constructos teóricos demostrando su conocimiento al respecto. La siguiente intervención ilustra lo anterior.

> P: ¿ven la diferencia entre actividad demostrativa y Unidad Cognitiva? La actividad demostrativa es una continuidad en términos de lo que conjeturo demuestro y ya está, la unidad cognitiva tiene que ver con continuidad de los contenidos que aparecen en un proceso con el otro, continuidad en los argumentos que aparecen en un proceso con respecto al otro y eso ya hace que se distinga la actividad demostrativa de la unidad cognitiva. […] pero la pregunta es: bueno, ¿para qué uno quiere mirar la unidad cognitiva del asunto?, ¿Cuál es el objetivo?, [el profesor muestra la presentación]. Pues el objetivo es que finalmente los estudiantes produzcan teoremas, entonces uno dice: pero, ¿producir un teorema que significa?, producir un teorema significa tener presente la concepción de teorema de Mariotti.

Al finalizar la intervención anterior, el profesor genera un cuestionamiento relacionado con lo que significa producir un teorema. Así que con la intención de que los estudiantes reconozcan qué es un teorema según Mariotti, formula una serie de preguntas a los profesores en formación avanzada. El diálogo que sigue pretende mostrar tal situación.

1. E1: Que es un enunciado
2. P: Enunciando [afirma con la cabeza]
3. E1: Que es un enunciado condicional que depende de un marco teórico
4. P: Marco teórico y ¿qué más?, está bien, es el enunciado en el marco de un marco teórico.
5. E1: Condicional, ¿no?
6. P: Sí, pero hace falta una cosa muy importante para que se convierta en teorema, ¿qué es?
7. E: (Dos estudiantes responden respectivamente) -Se pueda demostrar. -Sea susceptible de demostrar
8. P: ¿Qué sea susceptible de demostrar o que ya es demostrado?, ¿para que sea teorema?, porque si es susceptible de demostrar sería conjetura todavía.
9. E1: ¿Qué se pueda justificar desde los elementos de esta teoría?
10. P: Que… o más que se pueda, tenga demostración, ¿listo? Teorema para Mariotti no es solamente el enunciado, uno usualmente conoce teorema es el enunciado, no, el teorema son tres cosas, que nunca se nos olvide eso, la terna, enunciado [el profesor indica que es la primera con su mano], su demostración [el profesor indica que es la segunda] en el marco [el profesor lo indica como tercero], o mejor, dentro de un marco teórico, dentro de un sistema teórico conocido, reconocido por todos, si uno no tiene esa terna, no puede hablar de teorema, ¿listo?, no puede hablar de teorema, entonces la ideas es que nosotros tratemos de utilizar la unidad cognitiva con el objetivo finalmente de que se produzca un teorema, ¿listo?, teorema en el sentido de Mariotti, no solamente es el enunciado porque eso sería el producto del proceso de conjeturación, no solamente es la demostración porque ella no tiene sentido si no está en un marco de una teoría, ¿listo?, ellos [señala la presentación] tratan de utilizar la unidad cognitiva con el objetivo de construir teoremas en la escuela, ahora, nosotros, igual que podría suceder en la escuela, hacemos sistemas teóricos locales, ¿listo?, que tengan sentido en el marco de una teoría local.

En este diálogo se puede observar que el profesor usa I. B. iii. en tanto que señala [2, 4, 8] los requisitos desde la matemática que permiten determinar cuándo un enunciado es o no un teorema. Del mismo modo, en la siguiente intervención [10] el profesor utiliza nuevamente I. B. iii. dado que amplía lo que hace a un enunciado ser reconocido como teorema, tomando como referente teórico la propuesta de Mariotti. De esta manera finaliza este momento de la clase.

4.2 Resultados generales del análisis

Tomando como referencia los análisis presentados anteriormente, en esta sección se expone una síntesis de la gestión del profesor a la luz de la codificación realizada. Para fundamentar lo anterior, a continuación se muestran dos tablas que condensan la frecuencia con la que aparecieron las acciones de las categorías de análisis de la actividad del profesor, señalando los dominios de conocimiento y los momentos de clase según la aproximación metodológica que dichas acciones reflejan.

Dominio	Acción	Fragmento de la clase	Frecuencia f_i	Totales
Conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas	I. A. i.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	2	2
	I. A. iii.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	1	2
		Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes	1	
	I. A. viii.	Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes	1	1
	I. A. ix.	Problemas 2 y 3	1	2
		Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1	1	
	I. B. ii.	Propuesta de otra solución al problema 1	1	2
		Problemas 2 y 3	1	
	I. B. iii.	Descripción constructo Unidad Cognitiva y Análisis de solución del problema 3 por parte …	2	2
	I. C. i.	Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1	1	1
	I. C. ii.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	1	1
	Frecuencia de acciones del dominio *Conocimiento de y sobre las matemáticas*			13
Conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas	II. A. i.	Propuesta de otra solución al problema 1	1	4
		Descripción de la clase	1	
		Descripción constructo Unidad Cognitiva y Análisis de solución del problema 3 por parte …	2	
	II. A. ii.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	3	7
		Propuesta de otra solución al problema 1	1	
		Problemas 2 y 3	1	
		Descripción constructo Unidad Cognitiva y Análisis de solución del problema 3 por parte …	2	
	II. B. i.	Descripción de la clase	2	6
		Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	1	
		Propuesta de otra solución al problema 1	1	
		Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1	1	

		Descripción constructo Unidad Cognitiva y Análisis de solución del problema 3 por parte ...	1	
	II. B. ii.	Problemas 2 y 3	2	2
	Frecuencia de acciones del dominio *Conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas*			19
Habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula	III. A. i.	Problemas 2 y 3	1	1
	III. A. ii.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	2	5
		Propuesta de otra solución al problema 1	1	
		Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1	2	
	III. A. iii.	Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1	1	1
	III. A. iv.	Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1	1	1
	III. A. v.	Propuesta de otra solución al problema 1	2	5
		Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1	1	
		Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes	2	
	III. A. vii.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	2	3
		Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1	1	
	III. A. viii.	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	1	1
	III. B. i.	Problemas 2 y 3	1	1
	III. B. iii.	Problemas 2 y 3	1	2
		Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes	1	
	III. B. v.	Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1	1	1
	III. B. vi.	Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1	1	2
		Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura del Problema 1	1	
	III. B. vii.	Problemas 2 y 3	2	2
	Frecuencia de acciones del dominio *Habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula*			25

Tabla 5. Frecuencia con las que aparecen las acciones del profesor de acuerdo con los dominios de conocimiento.

Momentos de clase según aproximación metodológica		**Fragmento de Clases**	**Acción**	**Frecuencia**
Conversación instruccional: Cuando los estudiantes trabajan autónomamente en una tarea puesta por el profesor	Tareas de conjeturación	Problemas 2 y 3	I. A. ix.	1
			I. B. ii.	1
			II. A. ii.	1
			II. B. ii.	2
			III. A. i.	1
			III. B. i.	1
			III. B. iii.	1
			III. B. vii.	2
Frecuencia de acciones de la conversación instruccional				10

Conversación Matemática: Puesta en común de producciones de los estudiantes	Por parte del profesor	Comparación de las pruebas sobre la conjetura obtenida del problema 1	I. A. i.	2
			I. A. iii.	1
			I. C. ii.	1
			II. A. ii.	3
			II. B. i.	1
			III. A. ii.	2
			III. A. vii.	2
			III. A. viii.	1
		Estudio de las demostraciones corregidas sobre la conjetura de problema 1	I. A. ix.	1
			II. B. i.	1
			III. A. ii.	2
			III. A. iv.	1
			III. A. v.	1
			III. B. vi.	1
		Explicación de los sistemas teóricos locales asociados a las demostraciones del problema 1	I. C. i.	1
			III. A. iii.	1
			III. A. vii.	1
			III. B. v.	1
			III. B. vi.	1
		Descripción constructo unidad cognitiva y análisis de solución del problema 3 por parte de un grupo de estudiantes	I. B. iii.	2
			II. A. i.	2
			II. A. ii.	2
			II. B. i.	1
	Por parte de los estudiantes	Propuesta de otra solución al problema 1	I. B. ii.	1
			II. A. i.	1
			II. A. ii.	1
			II. B. i.	1
			III. A. ii.	1
			III. A. v.	2
		Proceso de solución del problema 3 por parte de uno de los estudiantes	I. A. iii.	1
			I. A. viii.	1
			III. A. v.	2
			III. B. iii.	1
Frecuencia de acciones de la conversación matemática				44

Tabla 6[7]. Frecuencia con las que aparecen las acciones del profesor en los momentos según la aproximación metodológica

De acuerdo con la tabla 5, se puede concluir que las acciones del profesor estuvieron más relacionadas con los dominios II y III, lo cual se debe, posiblemente, a dos aspectos: 1) entre los momentos de clase descartados para llevar a cabo el análisis se encontraban monólogos del profesor en dónde hacía énfasis en elementos teóricos que quería precisar o desarrollar mediante los problemas propuestos en clase; y 2) los profesores en su mayoría son de matemáticas, luego conocen los objetos involucrados más o menos bien y no había que hacer mucha claridad al respecto, salvo las excepciones que se comentaron de las dos profesoras de primaria y un profesor de Física. Por otra parte, según la información de la tabla 6, se

[7] En esta tabla no se consideró el fragmento correspondiente a la descripción de clase ya que no atiende a algún momento de clase según la aproximación metodológica.

puede deducir que las acciones del profesor, en su mayoría, se activaron durante la *conversación matemática*, lo que se debe, quizás, a que no se realizaron registros fílmicos de momentos en los cuales los estudiantes trabajaran autónomamente en la solución de una tarea dado que el interés de este estudio se centró en las acciones del profesor, así que no se tuvieron en cuenta momentos en los cuales no hubiese participación del mismo.

En términos generales, las acciones realizadas por el profesor reflejan acciones de la aproximación metodológica para la enseñanza del grupo *Æ · G* con la intención de favorecer la actividad demostrativa en sus estudiantes –profesores en formación avanzada– y promover reflexiones sobre ella, en tanto promueve la interacción social (particularmente cuando posibilita que los estudiantes trabajen en grupo, permite que hagan puesta en común de sus producciones, y permite una interacción entre grupos y con él mismo), destaca la importancia de proponer problemas abiertos a los estudiantes (su clase gira en torno a la producción de los estudiantes en torno a la solución de los problemas que propone) y destaca el potencial de la geometría dinámica (particularmente como medio *sine qua non* en la solución de los problemas). Dichas acciones dan cuenta del *uso de la geometría dinámica,* las *tareas matemáticas* propuestas a los estudiantes y la *interacción social de la clase* –aspectos que caracterizan la aproximación metodológica– y de su relación directa con los dominios de conocimiento del profesor de matemáticas, propuestos por Llinares, Valls & Roig (2008). En lo que sigue, se amplían estas ideas.

4.2.1 Sobre el dominio de conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas

Es razonable que las acciones que acá aparecen sucedan porque el profesor quiere hacer incapíe en elementos que él concibe como aquellos en los que menos pueden tener experiencia los estudiantes; aún cuando ellos conocen definiciones de objetos geométricos y los trabajen sus clases, no es usual que lo hagan en el marco de un sistema teórico ni en un ambiente de actividad demostrativa. Esta acciones aparecen cuando se tiene un intención deliberada en que los estudiantes experimenten actividad demostrativa y hagan una reflexión sobre objetos metamatemáticos o procesos que aparece en ella como definición, postulado, teorema, argumentación, demostración, razonamiento, etc.

En relación con las acciones del profesor de la aproximación metodológica en el dominio de conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas (13 de 57 acciones), la gestión del profesor permitió evidenciar el uso de las siguientes acciones, categorizadas dentro de la habilidad para proponer "situaciones matemáticas": *concepciones sobre objetos matemáticos* (I. A. i. / f_i = 2), *control teórico de objetos matemáticos* (I. A. iii. / f_i = 2), *introducción de elementos al sistema teórico* (I. A. viii. / f_i = 1) y *distinción entre (y concepción de) definición, postulado, teorema, demostración* (I. A. ix. / f_i = 2). En el análisis realizado se evidencia la planeación del profesor de diversos problemas para que los estudiantes los solucionaran a partir de una exploración de los mismos, mediante el uso de Cabri o con lápiz y papel, que los llevara a identificar condiciones requeridas en el antecedente o consecuente de su conjetura, para seguidamente plantear la conjetura del problema y generar la demostración de la misma. Además, durante la gestión de la clase, el profesor usa las acciones antes mencionadas con el propósito de generar en sus estudiantes procesos matemáticos como conjeturar, generalizar, definir, comunicar, entre otros.

De otra parte, en la habilidad relacionada con la generación de reflexiones *sobre* las matemáticas, se verifican las acciones que se enuncian a continuación: *exigencia de proposiciones matemáticas, económicas y sintéticas* (I. B. ii. / f_i = 2) y *exigencia de requisitos matemáticos* (I. B. iii. / f_i = 2); dado que el profesor, a partir de la realimentación del proceso de solución de los estudiantes ante los problemas propuestos, hace explícito –desde las matemáticas– requisitos sobre las proposiciones formuladas contribuyendo a la reflexión sobre nociones, postulados, teoremas y definiciones de los objetos geométrico involucrados en el sistema teórico a desarrollar.

Por otro lado, en la habilidad asociada al establecimiento de relaciones entre lo matemático y lo didáctico, se refleja las acciones *enriquecimiento de construcciones y afirmaciones* (I. C. i. / f_i = 1) e *impulso de un modelo de resolución de problemas* (I. C. ii. / f_i = 1) en tanto hizo uso de diversos recursos con la intención de favorecer la interpretación de lo que establece una condicional y utilizó el mismo modelo de resolución matemática de los problemas propuestos cuando revisaba junto con los estudiantes las conjeturas obtenidas y sus demostraciones.

A partir de lo que se observa en la tabla 5, se puede concluir que las acciones del profesor que predominan en el dominio de conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas, son aquellas que realiza en *momentos* cuando el profesor hace *puesta en común de una producción de los estudiantes* (comparación y estudio de las pruebas sobre conjeturas obtenidas del problema 1), *explica sistemas teóricos locales* o *expone elementos teóricos de la Didáctica de las matemáticas* (constructo unidad cognitiva), en otras palabras, según la aproximación metodológica, cuando el profesor está en *conversación matemática*.

4.2.2 Sobre el dominio del conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas

En este dominio, se evidenciaron 19 de las 57 acciones, distribuidas en las dos categorías establecidas para la habilidad para identificar conceptos de la geometría escolar y procesos de la actividad demostrativa que pueden ser aprendidos, así: *reconocimiento y/o explicitación de ideas sobre el significado de aprender y enseñar geometría* (II. A. i. / $f_i = 4$) y *explicitación de lo matemático y lo didáctico* (II. A. ii. / $f_i = 7$), en tanto que, mediante la interacción que el profesor propiciaba en clase –permitiendo la comunicación entre los miembros de la clase– se evidencia su interés por reconocer en las intervenciones y preguntas de sus estudiantes sus concepciones sobre el aprendizaje de la geometría escolar y, cómo a partir del análisis de videos que mostraban los procesos de solución a un problema planteado en clase o de la comparación de las demostraciones formuladas por los grupos de trabajo a los conjeturas obtenidas, propicia la caracterización de los conceptos geométricos y los procesos de la actividad demostrativa (conjeturación y justificación) como objetos de enseñanza.

De otra parte, de la habilidad para desarrollar la creatividad de los profesores en formación avanzada para generar propuestas didácticas y llevarlas a cabo, se reflejaron las dos acciones planteadas: *planeación, selección y diseño de materiales para la clase* (II. B. i / $f_i = 6$) y *desarrollo de la compresión sobre cómo los estudiantes piensan la geometría* (II. B. ii. / $f_i =$

2), en la variedad de tareas matemáticas propuestas por el profesor a los estudiantes (en algunos casos, a partir de lo que ellos mismo realizaban en clase), lo cual evidenció una planeación, selección y diseño de las mismas, en aras de mostrar nuevas formas de aproximarse a la geometría en la escuela y en particular, las ventajas del constructo actividad demostrativa. Además, el profesor trajo a colación en la clase asuntos relativos a la Didáctica de las matemáticas que pueden favorecer el aprendizaje como: considerar diversos tipos de problemas, que a su vez posibilitan la aparición de diversos tipos de argumentos, uso de la geometría dinámica en la resolución de problemas geométricos y elementos teóricos de la unidad cognitiva que se relacionan con la actividad demostrativa.

De la tabla 5, se puede deducir que las acciones del profesor que prevalecen en el dominio de conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas, son aquellas que acciona en *momentos* cuando el profesor hace *puesta en común de una producción de los estudiantes* (comparación y estudio de las pruebas sobre conjeturas obtenidas del problema 1), *describe la estructura de la clase* o *expone elementos teóricos de la Didáctica de las matemáticas* (constructo unidad cognitiva), es decir, mientras se está en la *conversación matemática*.

4.2.3 Sobre el dominio del conocimiento sobre habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula

En este dominio se pueden verificar 25 de las 57 acciones realizadas por el profesor. Dentro de la habilidad para identificar e interpretar interacciones generadas en el aula que influyen en el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes, se evidenciaron las acciones que se expresan a continuación: *concepciones sobre objetos matemáticos* (III. A. i. / $f_i = 1$), *tratamiento de imprecisiones matemáticas* (III. A. ii. / $f_i = 5$), *indagación sobre el significado de un concepto* (III. A. iii. / $f_i = 1$), *revisión de la construcción* (III. A. iv. / $f_i = 1$), *identificación de condiciones y propiedades* (III. A. v. / $f_i = 5$), *indagación en busca de elementos* (III. A. vii. / $f_i = 3$) y *énfasis en los elementos de una conjetura* (III. A. viii. / $f_i = 1$). En el análisis realizado, la interacción entre los miembros de la clase propiciada por el profesor, puso en evidencia su participación genuina, autónoma y relevante durante la solución de los problemas propuestos y las discusiones sobre aspectos didácticos de la geometría, dado que sus acciones estuvieron supeditadas a una motivación propia por dar solución a los problemas y por aportar a la reflexión sobre los conceptos de las matemáticas escolares. Las afirmaciones realizadas por los estudiantes –en el marco de sus conversaciones matemáticas e instruccionales– siempre las fundamentaron con razones propias y las dieron a conocer con el ánimo de aportar a la formulación y demostración de una conjetura.

En la habilidad de reconocer y caracterizar elementos necesarios para gestionar la clase, se evidenciaron las siguientes acciones: *exigencia de proposiciones económicas y sintéticas* (III. B. i. / f_i = 1), *revisión de la construcción* (III. B. iii. / f_i = 2), *síntesis de ideas* (III. B. v. / f_i = 1), e*xplicitación y/o cumplimiento del contrato didáctico* (III. B. vi. / f_i = 2) y g*estión de actividades que impulsen la participación* (III. B. vii. / f_i = 2). La ejecución de estas acciones evidencia el interés del profesor por hacer cumplir el *contrato didáctico* establecido en clase en relación al uso del lenguaje matemático (cuando solicita a los estudiantes el uso de la terminología asignada dentro del sistema teórico), acuerdos básicos (organización de grupos de trabajo para favorecer la interacción y participación genuina y autónoma) y gestión de la clase por parte del profesor (recolección de ideas por parte del profesor que apoyen la producción de una conjetura y solicitud de revisión para determinar que el antecedente de una conjetura contenga las condiciones requeridas).

Finalmente, de la información proporcionada por la tabla 5, se puede inferir que las acciones del profesor que sobresalen en el dominio habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula, son aquellas que activa en *momentos* como: cuando el profesor hace *puesta en común de una producción de los estudiantes* (comparación y estudio de las pruebas sobre conjeturas obtenidas del problema 1); *explica sistemas teóricos locales;* se hace una *puesta en común por parte de los estudiantes de su propia producción* (Propuestas de solución del problema 1 y problema 3); y cuando *los estudiantes trabajan en grupo de manera autónoma* resolviendo alguna tarea propuesta por el profesor (Problemas 2 y 3). Vale la pena resaltar, que a pesar de que estos momentos pertenecen, en su mayoría, a la *conversacion matemática* por parte del profesor y de los estudidantes, 10 de las 57 acciones del profesor se activaron durante la *conversación instruccional* llevada a cabo mientras los estudiantes solucionaban los problemas 2 y 3.

Capítulo 5. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de este estudio en relación con los objetivos propuestos para el estudio mismo, las acciones llevadas a cabo por el profesor, los aspectos a tener en cuenta en futuras investigaciones y las reflexiones sobre el impacto del trabajo realizado en la formación profesional de la autora.

5.1 Sobre los objetivos del estudio

Originalmente se había considerado adoptar un marco teórico de referencia y realizar una revisión bibliográfica del mismo que posibilitara la comprensión de los objetos de estudio que serían analizados en el estudio. Con relación a esto, fue necesario integrar dos marcos teóricos que aportaran una perspectiva analítica frente a las acciones realizadas por un profesor que orienta un espacio académico para profesores en formación avanzada, con la intención de favorecer la actividad demostrativa y la reflexión sobre ella. Del mismo modo, el marco teórico debería proveer elementos que permitieran caracterizar las acciones realizadas por el profesor y exhibir en ellas aspectos que no se aprecian a primera vista.

Para atender a estas necesidades, la propuesta de Llinares, Valls & Roig (2008) que define tres dominios de conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas, precisa acciones generales que debe tener un profesor de matemáticas para que efectivamente estén en el marco de esos dominios. No obstante, esta propuesta teórica no proveía acciones específicas para determinar en cual dominio está un profesor y que además se relacionen con aspectos relativos a la actividad demostrativa y la aproximación metodológica propuesta. Por tal razón, articular las acciones del profesor propuestas por el grupo Æ.G. (2011) fue adecuado en tanto ofrecían elementos que permitieron centrar la atención en aspectos específicos a las habilidades para gestionar la enseñanza que debe tener un profesor de matemáticas. De esta forma, vincular estas dos propuestas teóricas contribuyó al análisis centrado en el profesor y sus acciones realizadas mientras orientaba el espacio académico *Conceptos y procesos de la geometría escolar*.

Al tener en cuenta las acciones del profesor como objeto de estudio y adoptando como marcos de referencia las propuestas de Llinares, Valls & Roig (2008) y del grupo *Æ.G.* (2011), se definieron categorías de análisis que posibilitaron observar las acciones del profesor a la luz de estos elementos teóricos. No obstante, se observó la necesidad de incluir acciones –categorías emergentes– que no estaban contempladas en la propuesta del grupo *Æ.G.* (2011) y que permitieron caracterizar aspectos que los referentes teóricos no ofrecían. Por tal razón, se transforman en productos del presente estudio que complementan los referentes teóricos estudiados, particularmente, la aproximación metodológica planteada por el grupo *Æ.G.* En la tabla 7 se presentan las categorías emergentes descritas con anterioridad en la tabla 3 (p.39).

<table>
<tr><th>Dominio</th><th>Habilidad</th><th>Categoría emergente</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas</td><td rowspan="2">Identificar conceptos de la geometría escolar y procesos de la actividad demostrativa que son susceptibles de ser aprendidos.</td><td>Reconocimiento y/o explicitación de ideas sobre el significado de aprender y enseñar geometría: Reconocer o explicitar ideas sobre lo que significa el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, su rol como profesores y situaciones matemáticas como herramientas de aprendizaje.</td></tr>
<tr><td>Explicitación de lo matemático y lo didáctico: Explicitar lo matemático y lo didáctico en el análisis del aprendizaje para propiciar la caracterización de los conceptos y procesos matemáticos como objetos de enseñanza.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Desarrollar su creatividad para generar propuestas didácticas y desarrollarlas cuando comprendan los procesos de aprendizaje matemático de sus estudiantes.</td><td>Planeación, selección y diseño de materiales para la clase: Planear, seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas y materiales específicos que evidencien los objetivos de aprendizaje asociados a lo geométrico y lo didáctico.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de la compresión sobre cómo los estudiantes piensan la geometría: Desarrollar la compresión de los profesores en formación sobre cómo piensan los estudiantes la geometría.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula</td><td rowspan="2">Reconocer y caracterizar elementos necesarios para gestionar la clase: organización de grupos de trabajo, uso de recursos, cumplimiento del contrato didáctico.</td><td>Explicitación y/o cumplimiento del contrato didáctico: Explicitar elementos del contrato didáctico y exigir su cumplimiento.</td></tr>
<tr><td>Gestión de actividades que impulsen la participación: Gestionar actividades que favorezcan la participación de los estudiantes.</td></tr>
</table>

Tabla 7.Categorías emergentes

5.2 Sobre las acciones del profesor

Con respecto a las acciones llevadas a cabo por el profesor en el marco de la aproximación metodológica propuesta por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, considero en primera instancia que favorecieron en los profesores en formación avanzada el reconocimiento de que la participación en la actividad demostrativa, la reflexión y el análisis de las tareas matemáticas propuestas por el profesor, aportan elementos didácticos asociados a la enseñanza de la geometría que hacen parte de su conocimiento profesional.

En segunda instancia, las acciones del profesor tuvieron en cuenta los tres aspectos que conforman un ambiente adecuado para aprender a demostrar: el *uso de la geometría dinámica*, las *tareas matemáticas* propuestas a los estudiantes y la *interacción social de la clase*. El planteamiento de problemas de abiertos de conjeturación por parte del profesor para que los estudiantes –profesores en ejercicio– los resolvieran en grupos de trabajo, siguiendo el esquema: exploración en el software, identificación de condiciones, planteamiento de la conjetura y demostración de la misma, permitió a los estudiantes –profesores en ejercicio–, en primer lugar, tener una experiencia de tipo empírico que contribuyó a la interacción social entre ellos mediante la exploración de figuras geométricas en el software y de la formulación de preguntas como *¿tú que crees…?*. Sin embargo, en la solución del problema 3, un grupo de estudiantes privilegió el uso del lápiz y papel sobre el uso del software, quizás porque identificaron la solución al problema sin necesidad de realizar una exploración que permitirá determinar invariantes. A pesar de ello, se evidenció una interacción social entre los integrantes del grupo para ponerse de acuerdo en la conjetura. De otra parte, la presentación y realimentación de las soluciones de los estudiantes –profesores en ejercicio– a los problemas, por parte del profesor, posibilitó la comunicación de ideas, aportes y reflexiones que contribuyeron a construir la demostración de hechos geométricos.

En tercera instancia, las acciones más frecuentes del profesor estuvieron relacionadas con los dominios *conocimiento sobre los aprendices y sobre el aprendizaje de las matemáticas* y *habilidades para gestionar la enseñanza de las matemáticas en el aula*, en tanto tuvieron las frecuencias más altas con relación al total de acciones (57), 19 y 25 respectivamente. Lo anterior se debe, quizás, a tres elementos a tener en cuenta: 1) los momentos de clase de los cuales se prescindió durante el análisis contenían monólogos del profesor en dónde hacía énfasis en elementos teóricos que quería precisar o desarrollar; 2) los profesores en su mayoría eran de Matemáticas, luego conocen los objetos involucrados más o menos bien y no había que hacer mucha claridad al respecto; y 3) dado que los propósitos planteados por el profesor para el curso a su cargo, apuntaban a mejorar la capacidad de actuación de los estudiantes en contextos relacionados con la geometría y la capacidad de generar ambientes de aprendizaje de la demostración en la escuela, mediante la actividad demostrativa desarrollada en clase, el profesor activó más acciones que propendieran por la reflexión sobre la actividad demostrativa desde un punto de vista didáctico y práctico.

5.3 Sobre falencias y proyección del estudio

Considero que durante la realización del presente trabajo, faltó como insumo para el análisis, entrevistas al profesor objeto de estudio para comprender sus acciones, el tipo de preguntas, sus percepciones sobre lo ocurrido en las clases, el cumplimiento de los objetivos de la clase, etc. Del mismo modo, entrevistas a los estudiantes después de las grabaciones de cada clase que permitieran constatar que efectivamente lo que se desarrollaba en ella tenía impacto sobre sus prácticas. Sin embargo, en el trabajo final propuesto por el profesor, los estudiantes presentaron un documento cuyo propósito era usar los elementos teóricos (matemáticos y didácticos) que se abordaron durante las diferentes sesiones del seminario, atendiendo a directrices[8] establecidas por el profesor. Pienso que dentro de las directrices hubiese sido provechoso en términos de generar una reflexión en los estudiantes sobre sus propias prácticas, solicitar que explicitaran los elementos matemáticos y didácticos aportados por el espacio académico a su formación profesional. Lo anterior me genera los siguientes

[8] *Directrices*: 1) selección de un objeto de la geometría plana (o del espacio) que sea tenido en cuenta en el currículo colombiano de geometría y que en la práctica, vaya a ser tratado por alguno de los miembros del grupo en la institución para la cual trabaja; 2) diseño de una secuencia didáctica (que contemple: recursos didácticos, tipos de problema y pertinencia) para una clase de geometría (de varias sesiones) que tenga como propósito general involucrar a los estudiantes en un ambiente de Actividad Demostrativa y cuyo objeto geométrico de estudio gire en torno a aquel seleccionado.

cuestionamientos: ¿*Es posible que la participación de un estudiante –profesor en formación avanzada– en un espacio académico que gire en torno a la actividad demostrativa y la aproximación metodológica propuestas del grupo Æ · G propicie cambios en su propia práctica?, ¿Sería más provechoso, en términos de transformar las prácticas de la enseñanza de la demostración en la escuela, incluir dentro de la aproximación metodológica propuesta por el grupo Æ · G acciones encaminadas a propiciar reflexiones en los estudiantes –profesores en formación avanzada– desde lo matemático y lo didáctico?*

De otra parte, la proyección de este estudio es brindar elementos que enriquezcan la producción científica del grupo Æ · G mediante: 1) Las relaciones establecidas entre los dominios de conocimiento de Llinares, Valls y Roig (2008) y las acciones de mediación semiótica del profesor –propuestas por el grupo Æ · G– ; 2) la introducción de acciones que antes no estaban contempladas –categorías emergentes–; 3) establecimiento de las acciones del profesor que se repiten con mayor frecuencia según el momento de clase a la luz de los dominios de conocimiento y de la aproximación metodológica y; 4) desarrollo de competencias investigativas de la autora del estudio.

5.4 Sobre mi propia práctica

Finalmente, la realización del presente estudio me aportó elementos innovadores que me llevaron a replantear y transformar las clases de geometría en el colegio en donde trabajo, con el ánimo de mejorar en los estudiantes el aprendizaje de la demostración en geometría. Particularmente, me permitió hacer un análisis comparativo entre la metodología empleada por el profesor del curso analizado y la metodología tradicional de un curso de Geometría en la escuela. Dicho análisis se presenta en la tabla 8.

	Metodología del curso	Metodología Tradicional
Rol del profesor	El profesor establece las normas con las cuales se van a trabajar en el sistema teórico y en los grupos de trabajo, diseña actividades cuyo propósito es promover la participación de los estudiantes en la construcción del sistema teórico del curso, regula las intervenciones de los estudiantes, orienta la validación de las propiedades encontradas por los estudiantes en las actividades, organiza y socializa las producciones de los estudiantes, coordina el trabajo colectivo, determina la valoración de los tareas presentadas y de las comprobaciones escritas.	El profesor expone el sistema teórico a desarrollar en el curso, con base en un texto guía. Es el actor principal de la clase. Diseña pruebas escritas acordes a los temas tratados en clase y determina la valoración de las mismas.
Rol del estudiante	El estudiante participa en la construcción del sistema teórico a partir del desarrollo de las actividades propuestas por el profesor. Además, manifiesta sus puntos de vista acerca de conjeturas encontradas por el mismo o sus compañeros. Toma notas de clase que se envían a los integrantes de toda la clase, después de que éstas sean validadas por el profesor.	Los estudiantes escuchan la exposición del profesor y aprenden de manera individual axiomas, definiciones y teoremas. Además, realizan ejercicios de demostraciones tomados del libro, imitando los esquemas de demostración ejemplificados por el profesor. Dichos ejercicios no son importantes para el desarrollo de la clase, ni aportan elementos a la construcción del sistema teórico.
Recursos	Programa Cabri, calculadoras, computadores, video screem, tablero, marcadores. Es importante señalar que el trabajo con geometría dinámica permite explorar todas las posibles construcciones que se pueden dar para resolver un problema.	Texto guía, tablero, marcadores, en algunos casos, regla, transportador y compás. El uso de estos elementos no permite, generalmente, que el estudiante se dé cuenta de regularidades y propiedades de los objetos geométricos.
Evaluación	Producciones escritas generadas a partir del desarrollo de los problemas propuestos por el profesor, comprobaciones escritas individuales semanales, tareas, proyecto final, participación en clase.	Comprobaciones escritas individuales realizadas mensualmente, examen final.

Tabla 8. Análisis comparativo entre metodologías.

Bibliografía

Brown, J. & Stillman, G. (2009). Preservice secondary teachers' competencies in proof In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and proving in mathematics education (Vol. 1, pp. 94-99). Taipei, Taiwan: ICMI.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis doctoral, Universitat de València, Departament de Didàctica de la Matemàtica Valencia, España.

Camargo, L. & Gutiérrez, Á. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 245-258). Lleida: SEIEM.

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa* (Francisco Agudo López, Tr.). Madrid, España: Ediciones La Muralla (primera edición en inglés, 1989).

Cubillos, M. & Sánchez, S. (2010). *Análisis de una práctica docente. Interacciones que se gestan en la actividad demostrativa.* Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Colombia.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* Tesis doctoral, Universitat de València, Departament de Didàctica de la Matemàtica Valencia, España.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. ZDM, 40(2), 329-336.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática,* (17)*,* 51-64

Llinares, S. (2000) Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En: DA PONTE, J.P. y SERRAZINA, L. (org.). Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: actas. [Lisboa]: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000, pp. 109-132.

Llinares, S. (2007 (a)). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en relación a la noción de función. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. JAEM. Granada. Julio.

Llinares, S., Roig, A., & Valls, J. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20* (3)*,* 59-82.

Samper, C., Camargo, L., Molina, O., Perry, P. & Echeverry, A., (2011). *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase.* (Informe de investigación). Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).

Samper, C., Molina, O., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, O., Perry, P. & Camargo, L., (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y O. Molina (Ed.), Geometría plana un espacio de aprendizaje (pp. 13-36). Bogotá, D.C., Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.