TAREAS QUE PROMUEVEN EL USO EXPERTO DE UN ELEMENTO TEÓRICO EN LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

JINA PAOLA TRIANA GARCÍA
JENNYFER ALEJANDRA ZAMBRANO ARIAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2016

TAREAS QUE PROMUEVEN EL USO EXPERTO DE UN ELEMENTO TEÓRICO EN LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

JINA PAOLA TRIANA GARCÍA

JENNYFER ALEJANDRA ZAMBRANO ARIAS

Trabajo de grado presentado para optar el título de Magíster en Docencia de la Matemática

Asesora

Carmen Samper de Caicedo

Profesora Emérita Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2016

En cumplimiento del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad, Artículo 42, parágrafo 2:

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

Jina Paola Triana García
CC 1033689631 de Bogotá

Jennyfer Alejandra Zambrano Arias
CC 1032379141 de Bogotá

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática*** presentado por las estudiantes:

Jennifer Alejandra Zambrano Arias
Cód. 2015185023 - CC. 1.032.379.141
y
Jina Paola Triana García
Cód. 2015185021, CC. 1.033.689.631

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 44 puntos.

Observaciones: Los jurados recomiendan otorgar distinción meritoria.

En constancia se firma a los 21 días del mes de febrero de 2017.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: Carmen Samper de Caicedo
CARMEN SAMPER DE CAICEDO (UPN)

Jurados:

Profesora: Leonor Camargo
LEONOR CAMARGO DE URIBE (UPN)

Profesora: Jenny P. Acevedo Rincón
JENNY PATRICIA ACEVEDO RINCÓN
(Universidad Estatal de Campinas – Brasil)

AGRADECIMIENTOS

A Dios por brindarme tantas oportunidades para lograr mis metas y rodearme de buenas personas.

A mi asesora, Carmen Samper, por su importante colaboración y apoyo para el desarrollo de este trabajo. Por los grandes aportes académicos que me ha brindado para mi formación.

A las docentes Leonor Camargo y Gloría García, por su dedicación, paciencia y enseñarme el verdadero significado de estudiar.

A Jennyfer Zambrano; compañera y amiga, quien siempre ha creído en mí y ha contribuido a que esta meta se vuelva realidad.

A mis compañeras de la maestría, por sus aportes durante los cursos vistos.

A mi familia, en especial a mi novio por su comprensión y apoyo incondicional.

Jina Paola Triana Garcia

A Dios que me dio la fortaleza y la serenidad para seguir.

A mi hijo Felipe quien es mi compañía en las largas horas de estudio.

A Daniel por su amor y apoyo.

A mi familia por la motivación que siempre me ha dado para alcanzar mis metas.

A los profesores de la maestría que me permitieron reflexionar sobre mis prácticas docentes

A la profesora Carmen Samper por sus valiosos aportes a este trabajo, por su amistad y confianza.

A mis estudiantes de séptimo por su respeto, compromiso y colaboración.

Gracias.

Jennyfer Alejandra Zambrano Arias

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría en profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática
Autor (es)	TRIANA GARCIA, JINA PAOLA; ZAMBRANO ARIAS, JENNYFER ALEJANDRA
Director	Carmen Samper Caicedo
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 105 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	TAREAS MATEMÁTICAS, ARGUMENTACIÓN, USO EXPERTO DE UN ELEMENTO TEÓRICO GEOMÉTRICO, PROCESOS MATEMÁTICOS, TIPOS DE TAREAS.

2. Descripción
Se propone determinar la relación entre el tipo de tareas matemáticas y los argumentos que se generan durante el proceso de solución, para identificar cómo inciden las tareas en el uso experto de un elemento teórico en la argumentación. Se tomaron como referentes teóricos diferentes autores entre los que se resalta a Vinner (1991) y Samper y Plazas (2017) para el proceso de conceptualización, Toulmin (2003) y Krummheuer (2000) para el proceso de argumentación matemática, y Yeo (2007) y da Ponte (2004) para la caracterización de las tareas matemáticas. El diseño metodológico está orientado por algunas características de un experimento de enseñanza pero con el objetivo de analizar los argumentos generados durante la resolución de las tareas y no de presentar una secuencia didáctica. Para el análisis de los datos se recolectó información de la producción de argumentos en la resolución de nueve tareas de ocho estudiantes de grado séptimo de un colegio oficial de Bogotá. Las tareas que se desarrollaron en la secuencia se analizaron mediante dos criterios: i) de acuerdo a la estructura y ii) de acuerdo al objetivo de la tarea, que está relacionado con los procesos matemáticos que con ella se quieren desarrollar. Para el análisis de los datos, se clasificaron los argumentos generados según su estructura, la forma de su estructura y la naturaleza de la garantía. Las principales conclusiones obtenidas son: i) Se debe propiciar la exploración de diversas representaciones de la imagen del concepto, y el uso de la definición del concepto en diferentes contextos, para favorecer el proceso de conceptualización y el uso experto de dicho elemento teórico; ii) Se debe tener en cuenta que es mejor proponer inicialmente tareas de metas cerradas mientras los estudiantes van adquiriendo elementos teóricos que les permitan idear estrategias de solución, utilizar garantías legítimas en sus argumentos y manejar con destreza los recursos utilizados en las clase de geometría; iii) para favorecer la conceptualización de las definiciones, se sugiere proporcionar a los estudiantes tareas de ejemplos y no ejemplos, iv) el proceso de conformar conjuntamente un sistema teórico local, permitió que los estudiantes fueran adquiriendo elementos que podían usar como garantías en sus argumentos.

3. Fuentes

Aya, O., Echeverry, A., y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometria dinamica. *TED*, 63-86.
Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*(25), 49-60.
Blanco, L., y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometria escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Relime, 6*(2), 107-132.
Camargo, L., y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. (. En Perry, *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (págs. 55-77). Bogotá: Sistema de Publicaciones y Dif.
Christiansen, B., y Walther, G. (1986). Task and activity. En A. G. In B. Christiansen, *Perspectives on mathematics education* (págs. 243-307). Dordrecht: Reidel.
Da Ponte, J. P. (2004). La actividad matemática en el aula. En J. Giménez, & &. J. L. Santos, *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos.* (págs. 25-34). Barcelona: Graó.
Douek, N., y Scali, N. (2000). About argumentation and conceptualisation. *PME CONFERENCE*, (págs. (Vol. 2, pp. 2-249)).
Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En B. (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (págs. 137-161). The Netherlands: Sense Publishers.
Gonzalez, A. (2015). *Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria.* Cantabria-España: Universidad de Cantabria.
Gorgorio, N., Artigues, F., Banyuls, F., Moyano, D., Planas, N., Roca, M., y otros. (1999). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo las rotaciones. *Suma, 33*, 59-71.
Gravemeijer, K. P. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular. *J. Cúrriculo Studies, 32*(6), 777-796.
Henningsen, M., y Stein, M. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.
Krummheuer, G. (2000). Mathematics Learning in Narrative Classroom Cultures: Studies of Argumentation in Primary Mathematics Education. *Learning of Mathematio*, 22-32.
Marín, A. (2015). Selección de tareas "ricas" para el aprendizaje matemático en educación secundaria. *Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad* , (págs. 1-46). Bogotá.
Martinéz, R. A. (2001). La demostración en matemáticas. Una aproximación espistemológica y didáctica. (U. d. Cordoba, Ed.) *Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática.*, (págs 29 - 43).
Miles, M., y Huberman, M. (1994). Qualitative Data Analysis. An Expanded Sourcebook. *Sage Publications: segunda edición:*, 5-11.
Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un Acercamiento a la investigación de diseño a traves de los experimentos de enseñanza . *Enseñanza de las Ciencias* , 75-89.
Ouvrier-bufé, C. (2006). Explorando los Procesos Definición construcción matemática. *Ciencias de la Educación en Matemáticas , 63*(3), 259-282.
Rivera, A. (20 de Enero de 2012). Recuperado el 16 de Julio de 2016, de http://eltiempo.lasprovincias.es/meteorologia/signos-naturales-prediccion-del-tiempo
Samper, C. (2016). *En Geometría: Vía al razonamiento reporte de investigación.* Bogotá: Grupo Æ · G.
Samper, C., y Plazas, T. (2016). Tipos de mensajes del rofesorasor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación*, 12.
Samper, C., y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de Geometría Dinamica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. En prensa.
Samper, C., Camargo, L., y Leguizamon, C. (2003). *Tareas que promuven el razonamiento en el aula a travez de la geometria.* Colombia: Asocolme.
Silva, L. H. (2013). *Argumnetar para definir y definir para argumentar.* Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.
Stein, M., Grover, B., y M, H. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform. *American EducationalR esearch Journal,*

33(2), 455-488.

Stein, M., Schwan, M., y Henningsen, A. (2000). Analyzing Mathematical Instructional Tasks. En M. S. Mary Kay Stein, *Implementing Standards Based Mathematics Instruction: A Casebook for Profesorassional Development* (págs. 1-5). New York: Columbia University.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument* . (M. M. (2007), Trad.) Barcelona: Grup Editorial62, S.L.U. Ediciones Península.

Valles, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social.Reflexión metodológica y práctica Profesorasional.* Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Vinner, S. (1991). El rol de las definiciones en la enseñanza y aprendizaje de las matematicas. *Pensamiento Matematico Avanzado*, 65-81.

Watson, A., y Mason, J. (2007). Taken-as-Shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 205-215.

Yeo, J. B. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. (N. T. University, Ed.) *Mathematics and Mathematics Education*, 1-28.

Zakaryan, D. (2013). El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años . *I-Cemacyc* (págs. 1-12). Santo Domingo-Republica Dominicana: Congreso de Educación matemática de America Central y el Caribe.

4. Contenidos

El objetivo general de este estudio es caracterizar el tipo de tareas matemáticas que propician el uso experto de elementos teóricos geométricos en la argumentación matemática. Los objetivos específicos son: i) Fundamentar el marco teórico a partir del análisis y síntesis de investigaciones de diferentes autores; ii) Adaptar una secuencia de tareas que el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional diseñó para el aula escolar, en torno a relaciones y propiedades de un objeto geométrico; iii) Implementar la secuencia de tareas con un grupo de estudiantes de educación básica; iv) Clasificar las tareas de acuerdo con unas categorías que se establecen a partir del marco de referencia; v) Analizar los argumentos de los estudiantes que surgen durante la solución de las tareas, y que determinar si propician el uso experto de elementos teóricos y vi) Reflexionar sobre la relación entre los argumentos, el uso experto de un elemento teórico geométrico en la argumentación matemática y el tipo de tarea. El trabajo está compuesto por la introducción y cinco capítulos. En la introducción se hace una descripción general del estudio y de la estructura de este documento. En el capítulo 1 se hace la presentación del problema que incluye antecedentes, la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos y la importancia de este estudio en el campo de investigación en Educación Matemática. En el capítulo 2 se presentan los referentes teóricos que sustentan el estudio clasificados en tres grupos: la conceptualización matemática, la argumentación y las tareas matemáticas. En el capítulo 3 se expone el tipo de estudio realizado, la descripción del contexto y de la población. También se exponen las categorías utilizadas para el análisis de las tareas y los argumentos. Seguido a esto se realiza el análisis de cada una de las tareas. En el capítulo 4 se hace el análisis de los argumentos surgidos en cada una de las 9 tareas. Y se analizan los resultados obtenidos en el análisis de los datos y con base en ellos se obtienen las conclusiones del estudio en el capítulo 5.

5. Metodología

El presente estudio es cualitativo, descriptivo, con un modelo de diseño emergente. Para el estudio, se tuvieron en cuenta las características del diseño metodológico de un experimento de enseñanza, sin embargo, el objetivo de la investigación no es evaluar un diseño y proponer como producto

final una secuencia didáctica. El propósito está dirigido principalmente a identificar qué tipos de argumentos matemáticos se generan al proponer diferentes tipos de tareas. En relación a lo anterior, es necesario precisar que, aunque se toman elementos de un EE, el análisis retrospectivo está más dirigido a las características de los diferentes tipos de tareas y a los argumentos que estas generan. Los datos en este estudio son de naturaleza cualitativa y corresponden a los argumentos generados de un grupo seleccionado de ocho estudiantes, durante la realización de nueve tareas y cuando comunicaban a los demás sus soluciones. Se recoge información a través de la observación (video-grabaciones y registros escritos). Los datos son los argumentos de los estudiantes que surgen durante el proceso de solución de la secuencia de tareas. Los elementos cualitativos que se incluyen son solo como apoyo para organizar y presentar los resultados. El estudio describe y analiza los argumentos surgidos durante los procesos argumentativos en torno a la conceptualización del elemento teórico punto medio. Los pasos seguidos durante el estudio fueron: preparación de las tareas, implementación de las tareas y análisis retrospectivo de los datos.

6. Conclusiones
Algunas de las conclusiones obtenidas fueron: - Al diseñar una tarea, el profesor de matemáticas debe tener claro cuál es el objetivo de esta; este debe estar directamente relacionado, tanto con la conceptualización de un objeto o relación matemático como con los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar, como la generalización, la visualización, la justificación, la argumentación. - Se debe propiciar la exploración de diversas representaciones de la imagen del concepto, y el uso de la definición del concepto en diferentes contextos, para favorecer el proceso de conceptualización y el uso experto de dicho elemento teórico. - Se debe tener en cuenta que es mejor proponer inicialmente tareas de metas cerradas mientras los estudiantes van adquiriendo elementos teóricos que les permita idear estrategias de solución, utilizar garantías legítimas en sus argumentos y manejar con destreza los recursos utilizados en las clase de geometría, componentes requeridos para tareas de meta abierta. - Se identificó que la definición de punto medio se usa de manera experta al desencapsular las propiedades para resolver las tareas que conllevan a la relación del punto medio con otros objetos geométricos como la mediana y el perímetro de un triángulo. - A raíz de la exigencia de la profesora de explicar cómo obtuvieron los resultados, los estudiantes expusieron sus ideas y recurrieron a elementos teóricos geométricos para validarlas. Esto muestra cómo los profesores pueden mediar en el proceso de conceptualización de los estudiantes, para que ellos logren construir y desarrollar argumentos para sustentar sus ideas, utilizando los elementos teóricos construidos en clase. - El proceso de conformar conjuntamente un sistema teórico local, permitió que los estudiantes fueran adquiriendo elementos que podían usar como garantías en sus argumentos.

Elaborado por:	Triana Garcia, Jina Paola Zambrano Arias, Jennyfer Alejandra
Revisado por:	Samper de Caicedo, Carmen

Fecha de elaboración del resumen:	12	12	2016

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En este documento se presenta el proceso de desarrollo de una investigación que pretende determinar el tipo de tareas matemáticas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática. Para ello, se experimenta la adaptación de parte de la unidad didáctica *El punto que está en medio de todo*, diseñada por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ·G) de la Universidad Pedagógica Nacional (2015), con un grupo de estudiantes de grado séptimo de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá.

Este documento se organiza en cinco capítulos en los cuales se plantea la problemática de estudio, se presentan los referentes teóricos que lo sustentan, la metodología utilizada, el análisis de datos, y finalmente, el análisis de resultados y conclusiones. En el primer capítulo, se presenta la revisión de varias investigaciones (da Ponte, 2004; Christiansen y Walker, 1986; Blanco y Barrantes, 2003; Blanco, 1993) que abordan, como objeto de estudio, las tareas matematicas. Así mismo, se exponen los resultados de un estudio exploratorio en el que se pregunta a profesores de matemáticas de diferentes instituciones lo que entienden por tarea matemática, y cómo las proponen y las desarrollan en sus clases; seguido a esto, se hace una revisión de dos textos escolares identificando tareas que promueven la argumentación matemática. Lo anterior permitió plantear la problemática que se pretende abordar, formular la pregunta de investigación y establecer los objetivos que orientan este trabajo.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que sustentan la propuesta y que permitieron adaptar y rediseñar la secuencia de tareas de la unidad didáctica *El punto que está en medio de todo*. A partir de los referentes teóricos, se plantean las categorías de análisis de las tareas y de los argumentos formulados por los estudiantes cuando resuelven las tareas. En este capítulo se aborda la conceptualización de un elemento geométrico desde la postura de Vinner (1991), Samper y Plazas (2017) y la argumentación matemática desde la propuesta de Toulmin (2003) y Krummheuer (2000), quienes proponen una clasificacion de los argumentos matematicos. También se hace una revisión del significado del término tarea, sus elementos y su clasificación.

En el tercer capítulo se expone la metodología utilizada en este estudio, la cual incluye algunos elementos de un experimento de enseñanza. El objetivo no es presentar una secuencia de tareas como producto terminado, sino analizar cada una de las tareas propuestas en relación con el tipo de tarea y los argumentos que estas pueden promover. En este capítulo se presentan las tareas implementadas con la intención de introducir a un grupo de estudiantes de grado séptimo a la geometría euclidiana. Estas permiten conformar un sistema teórico con nociones básicas de geometría. Seguido a esto, se proponen las categorías de análisis para las tareas matemáticas, los argumentos y el uso experto de un elemento teórico. Finalmente se presentan una descripción y clasificación de las tareas que se propusieron en clase, tareas que se esperaba promovieran el uso experto del objeto geométrico punto medio.

En el Capítulo 4 se muestra el análisis de los argumentos de los estudiantes que se evidenciaron durante el desarrollo de cada una de las tareas de la secuencia. Se tuvo, como insumo para el análisis, los fragmentos de conversaciones en audio y video, registro fotográfico y escrito de cuatro grupos de dos estudiantes cada uno, que fueron seleccionados porque manejaban con facilidad el software de geometría dinámica y tenían la habilidad para exponer sus ideas de manera oral y escrita.

Finalmente, en el Capítulo 5 se concluye el proceso realizado, presentando conclusiones y reflexiones. Se anexan al documento la adaptación de las tareas, el resumen de las sesiones de clase, la secuencia de tareas, conformada por la guía del estudiante y del profesor, los registros escritos de los estudiantes y las transcripciones de los videos de las sesiones de clase.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En su práctica docente, el profesor se enfrenta a múltiples decisiones de tipo didáctico como, según Marín (2015), seleccionar el contenido matemático a tratar, fijar las expectativas de aprendizaje (objetivos), elegir materiales y recursos, organizar la enseñanza por sesiones de clase, prever un modo de gestionar el trabajo en el aula, fijar medios para evaluar el aprendizaje, seleccionar las tareas más adecuadas, entre otros.

> La selección de las tareas adecuadas es solo uno de los aspectos de la labor del profesor, pero es un aspecto fundamental dirigido a la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje para los alumnos. (da Ponte, 2004, pág. 28)

Estas decisiones están ligadas en gran medida al tipo de tareas que se seleccionen para la planificación de la enseñanza, como lo menciona da Ponte (2004):

> …una buena estrategia de enseñanza normalmente está constituida por distintos tipos de tareas y, por lo tanto, uno de los principales problemas del profesor es encontrar una combinación de tareas adecuada para sus alumnos. (p.25)

Se reconoce entonces que las tareas son un elemento esencial en el proceso de enseñanza y en las oportunidades de aprendizaje que se les puede ofrecer a los estudiantes. Pero, ¿qué se entiende por tarea? Christiansen y Walker (1986) indican que una tarea es "aquello que se le pide a los alumnos que hagan" (p. 248). Esto tiene relación con la definición que presenta la Real Academia Española, *una tarea es una labor o trabajo que debe realizarse en un tiempo específico.* Estas concepciones de tarea capturan en esencia dos aspectos que tal vez los profesores tienen en cuenta cuando proponen tareas en las clases de matemáticas: i) el estudiante debe desarrollarla, ii) tiene un tiempo específico para hacerlo. Esta definición no menciona las características del trabajo. Es por ello que este término se usa con mucha frecuencia para referirse a ejercicios rutinarios de aplicación inmediata de un algoritmo, un procedimiento o una propiedad. Esto refleja que el término ha adquirido una connotación que no es abarcadora de todas las posibles actividades que se pueden desarrollar en la clase. Es posible que se desconozca que hay tareas en el aula, además de las que se centran en lo procedimental, que propician otras actividades matemáticas importantes en la formación de una persona como la argumentación, la resolución de problemas, el análisis, la comunicación, entre otros.

Si el propósito de las tareas es favorecer el desarrollo matemático integral de una persona, las tareas que propone el profesor de matemáticas no pueden estar orientadas únicamente por el paradigma del ejercicio (Skovsmose, 2002). De esa forma, se deja de lado el hacer matemáticas, y se transmite la idea de que las matemáticas son un constructo teórico ya elaborado, del cual el estudiante no puede ser participe. Como lo propone de Villiers (como se citó en Silva, 2013) "la mayoría de profesores y libros de texto siguen dando a los estudiantes contenido ya elaborado que simplemente tienen que asimilar y regurgitar en los exámenes" (p.18).

Es necesario definir lo que es tarea matemática, para que este término abarque mucho más que ejercicios. Así, se ampliaría la concepción de tarea que debe tener todo profesor. Ello podría aportar al mejoramiento de las prácticas docentes en el momento de diseñar, seleccionar e implementar lo que proponen para el aula. La propuesta debería incluir diferentes tipos de tareas, que propicien procesos matemáticos que permitan desarrollar competencias matemáticas útiles para que los estudiantes puedan desempeñarse en diferentes situaciones y contextos cotidianos (PISA, 2003).

> La naturaleza de las tareas potencialmente puede influir y estructurar la manera como los estudiantes piensan y pueden servir para limitar o ampliar sus puntos de vista de la materia, de esta manera los estudiantes desarrollan su sentido de lo que significa "hacer matemáticas" de su experiencia real con las matemáticas. (Henningsen y Stein, 1997, pág. 525)

Algunos investigadores (Martínez (2001), Gorgorio et al. (1999)) han expresado su preocupación por la enseñanza de la geometría, puesto que reconocen que existe una cierta tendencia a proponer tareas rutinarias, lo cual afecta el aprendizaje. Generalmente, las tareas están enfocadas al uso de teoremas para la justificación, y se deja a un lado la importancia de comprender adecuadamente cómo se obtienen dichos teoremas, cómo se demuestran y por qué funcionan en la solución de problemas geométricos. Martínez (2001) señala que como consecuencia de esto, la geometría se convierte en el uso mecánico de teoremas, sin fundamento teórico, por lo cual se crea distancia entre el conocimiento geométrico de los estudiantes y el saber matemático.

> Es por esto que la matemática para los estudiantes puede ser algo incomprensible; ellos logran comprender que es útil y que aprender matemáticas es fundamental para sus proyectos de vida pero que no es comprensible y por lo tanto hay que aprenderla de memoria. (Martínez, 2001, pág. 12)

En nuestra experiencia como profesoras hemos evidenciado que las tareas que se proponen están muy lejanas a propiciar la construcción de significado de objetos geométricos, porque no se fomenta la argumentación y, si se hace, no se exige el uso de elementos teóricos. Esto se refleja, por ejemplo, cuando se pide a los estudiantes que justifiquen sus ideas, y ellos lo hacen de manera empírica, según su sentido común (medir, contar, comparar etc.) o sus percepciones, y casi nunca se remiten a elementos teóricos geométricos para apoyar sus argumentos.

Gorgorio et al. (1999) manifiesta que los profesores tienen dificultades para lograr vincular, entre si, las tareas que llevan a la clase de geometría, y que, por tanto, no se propicia la construccion gradual de significado del concepto que está en juego. Estos investigadores exponen una preocupación respecto al diseño de tareas pues, con frecuencia, se refleja en ellas la interpretación de que el conocimiento geométrico es conocimiento de conceptos y definiciones, relegando el desarrollo de habilidades matemáticas asociadas a procesos como la comunicación, la argumentación, la modelación.

Como preámbulo al estudio que se realizó, se entrevistaron profesores en ejercicio, para indagar sobre el tipo de tareas que proponen a sus estudiantes. Algunos de ellos coinciden en que, en sus clases de geometría, las tareas formuladas son análogas a las explicaciones presentadas en clase. A continuación se citan dos extractos de las entrevistas que reflejan lo anterior.

> Primero hicimos la demostración del teorema de Pitágoras para que los estudiantes entiendan que la suma de los catetos al cuadrado es igual al cuadrado de la hipotenusa, para que puedan aplicarlo en problemas. (Profesor 8°)
>
> Inicio la clase explicando los conceptos básicos que se necesitan para el tema de la clase recordando lo trabajado. Y luego hago la demostración. Posteriormente se realizan ejercicios para evidenciar si los estudiantes comprendieron la explicación (Profesor 9°)

En las *Figuras 1 y 2* se presentan ejemplos de las tareas que comúnmente se desarrollan en las clases de geometría.

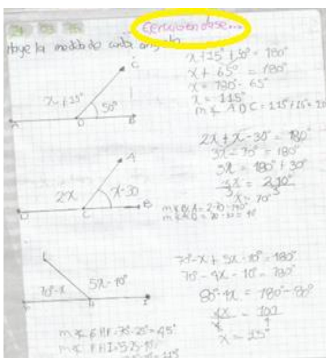


Figura 1. Ejercicios para encontrar el valor desconocido de ángulos (cuaderno de estudiante, Grado 8°).

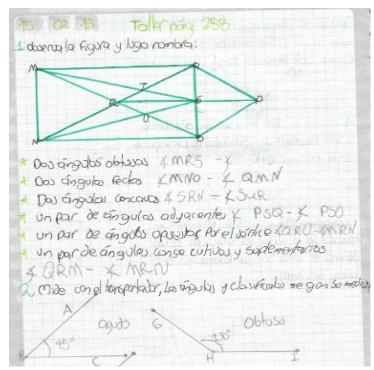


Figura 2. Actividad del libro desarrollada en cuaderno de estudiante. (cuaderno estudiante, Grado 9°)

La siguiente descripción de Blanco y Barrantes (2003) coincide con lo que expresaron estos profesores

> La explicación del maestro es lo básico para que los alumnos aprendan conceptos geométricos. Posteriormente, en las tareas, se observa que el alumno ha aprendido cuando es capaz de resolver los distintos ejercicios y problemas que incluyen uno o varios conceptos. (p.122)

Además, los profesores entrevistados se apoyan en las tareas propuestas en las unidades de geometría de los textos escolares y de internet. Ellos consideran que hay aprendizaje en la medida en que los estudiantes sepan aplicar una fórmula para solucionar problemas, hacer clasificaciones a partir de las definiciones o encontrar el valor de una incógnita a partir de ecuaciones que surgen al usar alguna propiedad geométrica. En las descripciones que hacen los profesores entrevistados no se evidencia que sus estudiantes hayan tenido tareas que exijan el uso de elementos teóricos en la justificación o que le pidan al estudiante argumentar matemáticamente.

En la *Tabla 1* se presenta la clasificación de las 67 tareas de un total de 535, presentadas en la unidad de geometría de dos textos escolares de matemáticas de grados octavo y noveno, que tienen alguna relación con la argumentación. No toda tarea que exige una justificación propicia la argumentación como lo resalta Mariotti (2006):

> Las tareas propuestas en la investigación experimental son a menudo de la forma "demuestre que…", lo que significa que a los estudiantes se les pide demostrar la validez de un enunciado determinado. Este tipo de tareas no parece ser tan eficaz en la activación de la producción de argumentos como las tareas que requieren la producción de una conjetura. (p.13)

Dado que ninguna tarea solicitaba la formulación de conjeturas, consideramos que hay evidencia de alguna relación con la argumentación si en la formulación de la tarea se solicita una de las siguientes acciones: determinar el valor de verdad de una proposición, justificar resultados utilizando elementos teóricos, verificar y validar hechos, aplicar elementos teóricos para resolver ejercicios, proponer contraejemplos, completar y realizar una demostración. Las demás tareas de los textos solicitaban resolver una situación problema con un resultado único y exacto, clasificar figuras según propiedades, medir longitudes y ángulos, hacer construcciones geométricas o hacer el cálculo de una expresión algebraica.

Tabla 1: Análisis y Conteo de las tareas en libros de matemáticas

Categoría según las actividades de los libros	**Cantidad de tareas|**	
	Libro 8°	**Libro 9°**
Determinar el valor de verdad	5	6
Justificar resultados	8	10
Verificar hechos y justificar	2	6
Aplicar elementos teóricos para resolver ejercicios	2	3
Proponer contraejemplos	2	1
Completar una demostración (con afirmaciones y justificaciones)	3	5
Realizar una demostración	3	11
Total	25/213	42/322

En la *Tabla 1* se evidencia que el número de tareas en las que la justificación es central es muy pequeño. Esto coincide con lo que reportan Blanco y Barrantes (2003):

> Las tareas geométricas extraídas del libro de texto suelen ser de estudio de elementos de las figuras, clasificación y sobre todo de medida, aunque consiguen mediante el tacto, el dibujo y la manipulación familiarizar al alumno con el mundo de las figuras, no tienen una proyección posterior en otras tareas geométricas que den significado a su realización y aprendizaje. (p.125)

De acuerdo a lo expuesto, se puede evidenciar que en la comunidad de investigadores y educadores matemáticos existe una preocupación por que en la clase de geometría se propicie, a través de las tareas que se proponen, procesos asociados a la argumentación matemática. Todo lo anterior lleva a establecer la pregunta que da origen a este trabajo de grado ***¿Qué características deben tener las tareas que se proponen en el aula para poder propiciar el uso de experto de elementos teóricos geométricos en la argumentación matemática?***

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 GENERAL

Caracterizar el tipo de tareas matemáticas que propician el uso experto de elementos teóricos geométricos en la argumentación matemática.

1.1.2 ESPECÍFICOS

- Proponer el marco teórico a partir del análisis y síntesis de investigaciones de diferentes autores.
- Adaptar una secuencia de tareas que el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional diseñó para el aula escolar, en torno a relaciones y propiedades de un objeto geométrico.
- Implementar la secuencia de tareas con un grupo de estudiantes de educación básica.
- Tipificar las tareas de acuerdo con unas categorías que se establecen a partir del marco de referencia.
- Analizar los argumentos de los estudiantes que surgen durante la solución de las tareas, y que determinar si propician el uso experto de elementos teóricos.
- Reflexionar sobre la relación entre los argumentos, el uso experto de un elemento teórico geométrico en la argumentación matemática y el tipo de tarea.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 SELECCIÓN DE REFERENTES TEÓRICOS

Para la construcción del marco teórico, se revisaron los resultados de investigaciones de Vinner (1991), Aya, Echeverry y Samper (2014) y Silva (2013) entre otros, para focalizar elementos importantes en la conceptualización de un elemento geométrico, proceso necesario para el uso experto de este (Samper y Plazas, 2017) . Posteriormente se revisó la propuesta de Samper y Molina (2013) quienes amplian lo que se considera como argumentacion matematica en la línea de investigación en la que se enmarca este estudio. También se estudiaron los tipos de argumentos que propone Toulmin (2003), complementando ello con la propuesta de Krummheuer (2000). Finalmente, entre los documentos que tratan sobre tareas matematicas, nos enfocamos en la propuesta de Yeo (2007), Henningsen y Stein (1997), da Ponte (2004), y Stein, Schwan y Henningsen (2000).

2.2 USO EXPERTO Y CONCEPTUALIZACIÓN DE UN ELEMENTO TEÓRICO GEOMÉTRICO

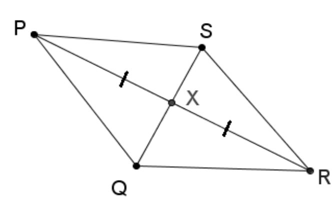
La secuencia de tareas que se propone en este estudio apunta a la conceptualización del punto medio de un segmento, a partir de la construcción de la definición e imagen conceptual de punto medio, así como a su uso para resolver problemas y para establecer hechos geométricos que relacionan a este con otros objetos. Esto es lo que Samper y Plazas (2017) denominan como *uso experto de un elemento teórico*. Ellas, de acuerdo con ideas de Duval (2007), plantean que usar expertamente un elemento teórico hace referencia a: i) reconocer su estatus teórico en un sistema axiomático (diferencia definición, teorema o postulado), ii) reconocer su estatus operativo cuando se usa (garantía), iii) identificar su estructura lógica (condicional o bicondicional), iii) reconocer cuándo tiene sentido usarlo y

iv) usar el lenguaje geométrico correcto cuando se refiere a él. El uso experto un elemento teórico es un aspecto que da cuenta de la imagen del concepto que se tiene.

De acuerdo a estas autoras, el estatus teórico de postulados, teoremas y definiciones es distinto. Por esta razón, es necesario diferenciar lo que se entiende por saber usar un postulado o teorema y saber usar una definición. Saber usar un *postulado o teorema* incluye principalmente dos acciones: reconocer la viabilidad de su uso para la resolver un problema, formular una conjetura o producir una demostración, y reconocer que su uso permite obtener lo que se busca. Así se identifica que ese postulado o teorema es la garantía en un argumento. Ahora, saber usar una *definición* depende del tipo de información que provee la situación: cuando se presenta el objeto con el término que lo designa se *desencapsulan* propiedades, pero cuando se ponen en juego las propiedades del objeto definido se *encapsulan* las propiedades que definen el objeto, para asignarle el término correspondiente (Samper y Plazas, 2017). En este estudio, la secuencia de tareas tiene como objetivo el saber usar una definición.

Específicamente, el uso experto de la definición de punto medio consiste en desencapsular sus propiedades, cuando se informa que un punto es punto medio, para resolver un problema, o encapsularlas, cuando, reconociendo las propiedades de este, se establece que es punto medio. Las propiedades son: i) pertenecer al segmento (que incluye propiedades como ser colineal con los extremos del segmento y la interestancia con ellos) y ii) ser equidistante a los extremos del segmento. Un ejemplo de una situación que favorece el uso experto, porque requiere encapsular las propiedades, es el siguiente.

> *De acuerdo con la información que se provee en la siguiente figura, ¿qué se puede concluir con respecto al punto X?*



En esta tarea, el estudiante debe identificar la relación de equidistancia entre el punto X y los extremos del $\overline{PR}$, puesto que el $\overline{PX}$ es congruente con el $\overline{XR}$, dato que se provee en la representación pictórica a través del uso de la marca en cada segmento. Además, se garantiza que el punto X pertenece al $\overline{PR}$, y está entre P y R, información que también acarrea la imagen. Puesto que se cumplen las propiedades del punto medio, el estudiante puede concluir que X es el punto medio de $\overline{PR}$. Es decir, debe encapsular la definición. Un análisis semejante respecto a la relación de X con el $\overline{SQ}$, permite concluir que el punto X pertenece al $\overline{SQ}$, pero que no necesariamente es punto medio de este, dado que no se puede asegurar que es equidistante a los extremos del $\overline{SQ}$.

La actividad de conceptualizar incluye el proceso de construcción de conceptos, y este a su vez posibilita el uso experto de dichos conceptos en la argumentación. Dicho proceso, según Vinner (1991), representa una de las mayores dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Samper, Camargo y Leguizamon (2003), citando las ideas de Vinner y Hershkowitz (1983), expresan que adquirir un concepto significa tener a la mano un mecanismo para construir e identificar todos los ejemplos del concepto, entendido este como el que acepta la comunidad matemática.

El proceso de conceptualización, como lo señala Vinner (1991), incluye la conformación del esquema conceptual, que es la asociación en la mente de la definición con la imagen figural del concepto. La definición del concepto está conformada por los atributos relevantes del objeto. La imagen del concepto comprende el conjunto de todas las imágenes mentales que asocia el estudiante con el nombre del concepto. Esta puede ser una representación pictórica, una serie de impresiones o experiencias que se han ido formando a lo largo de los años, y que puedan contener propiedades que no están incluidas en la definición formal del concepto o que no corresponda a las representaciones de dicha definición. Este proceso se alimenta constantemente; a partir de las experiencias, la imagen del concepto y la definición personal (Aya, Echeverry y Samper, 2014) se pueden modificar si se agregan propiedades y relaciones. Sin embargo, estas pueden ser incorrectas si incluyen propiedades que no corresponden al concepto. Por esta razón, Samper, Camargo y Leguizamón (2003) proponen que “entre más y mejores experiencias se tengan, la imagen conceptual se acerca al concepto” (p.9). De igual manera, Duval (1998) plantea que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, para su formación es absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones de este.

Un ejemplo que ilustra lo anterior es el siguiente. Gonzalez (2015) presentó un estudio sobre las dificultades en el aprendizaje de los cuadrialteros que tienen niños de 9 a 12 años. En dicho estudio les propuso identificar los cuadriláteros presentes en un conjunto de figuras (*Figura 3*).

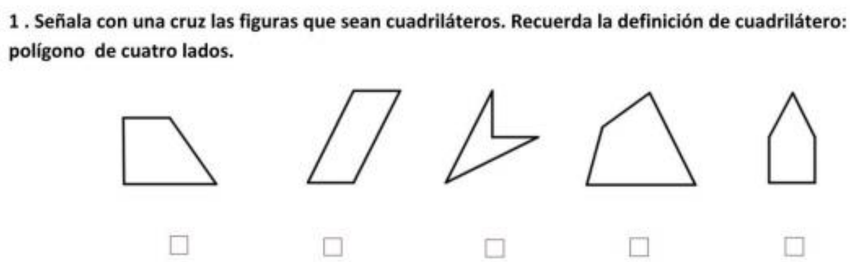


Figura 3: Fragmento de cuestionario de matemáticas. (González, 2015, pág. 21)

De 48 niños, el 38% solo reconoció la segunda representación (de izquierda a derecha) como cuadrilátero. Ello puede deberse a que su imagen mental de cuadrilátero está asociada a la representación de un cuadrado o un rectángulo. Esto indica que los estudiantes, a pesar de poder repetir la definición de cuadrilátero, incluyen en su imagen del concepto propiedades no relevantes como tener lados congruentes, o ser convexo y por ello descartan figuras que sí son cuadriláteros. Así, no se puede decir que sólo reconociendo el nombre y conociendo la definición se tiene una imagen del concepto completa. Vinner (1991), a partir de un estudio realizado, expresa que saber *de memoria una definición no garantiza la comprensión del concepto.*

Como el concepto que construyen los estudiantes está basado en las definiciones, los ejemplos que se les presentan y las tareas que se desarrollan en las clases de matemáticas, es necesario escoger o diseñar tareas que favorezcan la formación del concepto. Este proceso está influenciado por las concepciones y el conocimiento del profesor (Blanco y Barrantes, 2003), y requiere que su imagen conceptual sea amplia y correcta.

Según Vinner (1991), los profesores parten de dos supuestos que influyen en las tareas que proponen: i) los conceptos son adquiridos principalmente por medio de sus definiciones y ii) los estudiantes usarán las definiciones para resolver problemas. Vergnaud (1990) plantea que como un concepto no se limita a una definición, sino que se compone de otros elementos, se requiere proponer a los estudiantes situaciones y tareas, que pueden ser teórico-prácticos, a través de los cuales el concepto adquiera sentido para ellos.

Si se considera que la construcción de un concepto de un objeto geométrico incluye conocer una definición, las propiedades que no están incluidas en la definición, sus representaciones y sus relaciones con otros objetos (Silva, 2013, pág. 28), las tareas que se proponen en el aula requieren mucho más que presentar la definición y usarla. Esto coincide con lo que plantea Ouvrier-bufé (2006)

> La construcción de un concepto implica considerar simultáneamente ejemplos y no ejemplos del concepto, una o más definiciones y probar su equivalencia, así como diferentes representaciones y situaciones. (Pág.13)

2.3 LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Parte de la conceptualización de un objeto geométrico es poder comunicar las ideas que se van generando con respecto a este durante la resolución de tareas matemáticas (Boero et al., 2008). Si estas solicitan evidencias y razones para justificar las ideas, o validar o invalidar afirmación propuesta por otros, pueden dar lugar a la argumentación. La argumentación ha sido un asunto de interés de investigaciones en el campo de la educación matemática. De acuerdo a la revisión de la bibliografía se identificaron aspectos de la argumentación matemática desde la postura de diferentes autores.

2.3.1 La argumentación para respaldar la validez de un enunciado

Para Boero et al. (2008), la argumentación es una actividad discursiva en la que se producen razones para respaldar la verdad o falsedad de un enunciado. Las razones pueden ser: enunciados, evidencias empíricas, dibujos o representaciones que son tomadas de un marco de referencia (el conocimiento compartido de los estudiantes de un curso, marco teórico local o global). Así, la argumentación puede ser usada para justificar, refutar o deducir nuevas conclusiones. En este caso, un *argumento* es considerado como una razón que se ofrece a favor o en contra de una proposición u opinión, con el propósito de convencerse a sí mismo o de convencer a otros.

Llanos y Otero (2009, citado en Silva, 2013) indican que “cada vez que alguien defiende su punto de vista o da razones para justificar un comportamiento o una decisión está argumentando” (p.36). Estos autores aclaran que la manera de argumentar y el tipo de argumentos utilizados en matemáticas son diferentes a los que se utilizan en los demás contextos de la actividad social. El argumento de un padre para prohibirle a su hijo no comer muchos dulces puede consistir en el uso de su autoridad y nada más. Sin embargo, en matemáticas, un argumento requiere el uso de garantías aceptadas como válidas tales como hechos geométricos, nociones, teoremas y afirmaciones establecidas en clase, o representaciones en papel o con el uso de un software de geometría dinámica.

2.3.2 La argumentación favorece la conceptualización

Según Douek (2000), la argumentación matemática se considera como el proceso que desarrolla el estudiante para exponer sus ideas, defenderlas o contradecirlas, buscando convencerse a sí mismo o a otro. La argumentación se puede dar cuando se comparan diferentes procedimientos para resolver un problema o cuando se pide a los estudiantes describir procedimientos eficientes así como las condiciones para ser usados de manera apropiada en la solución de problemas. En la medida en que se apropia, y comprende las relaciones, propiedades o hechos relacionados con un concepto matemático, podrá usarlos en su discurso. Douek y Scali (2000) manifiestan que la argumentación en el proceso de conceptualización permite discriminar conceptos, establecer vínculos entre ellos, y hacer explícitos teoremas y definiciones para asegurar su uso consciente.

2.3.3 La argumentación como construcción social de argumentos

Perry, Samper, Camargo y Molina (como se citó en Samper y Molina, 2013) definen un argumento como "un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una general (garantías)" (p.19). De acuerdo a esto, la argumentación es la formulación de argumentos para apoyar una idea, ya sea ante otros o ante uno mismo con el fin de convencer. Estos argumentos deben estar enmarcados dentro de ciertas características que el grupo social considera apropiadas (Krummheuer G. , 2000). Por ello, la información que se acepta como válida (datos y garantías) y las formas de expresar o articular los argumentos deben ser admitidas y comprendidas por dicho grupo. Ejemplos de tipos de argumentos son: uso de analogías, de esquemas de razonamiento lógicos, de ejemplos, semejanzas o contrastes.

2.4 CLASIFICACIÓN DE LOS ARGUMENTOS MATEMÁTICOS

En la *Figura* 5 se presenta la propuesta de Samper y Toro (2016) quienes plantean una diferenciación de los argumentos según i) su estructura: en la cual se analiza el orden en el que se construyen los elementos del argumento (datos, garantía y aserción); ii) la forma de su estructura en la que se identifica si cumple con los elementos de un argumento y iii) la naturaleza de la garantías en la cual se diferencian en aquellas que son empíricas o teóricas.

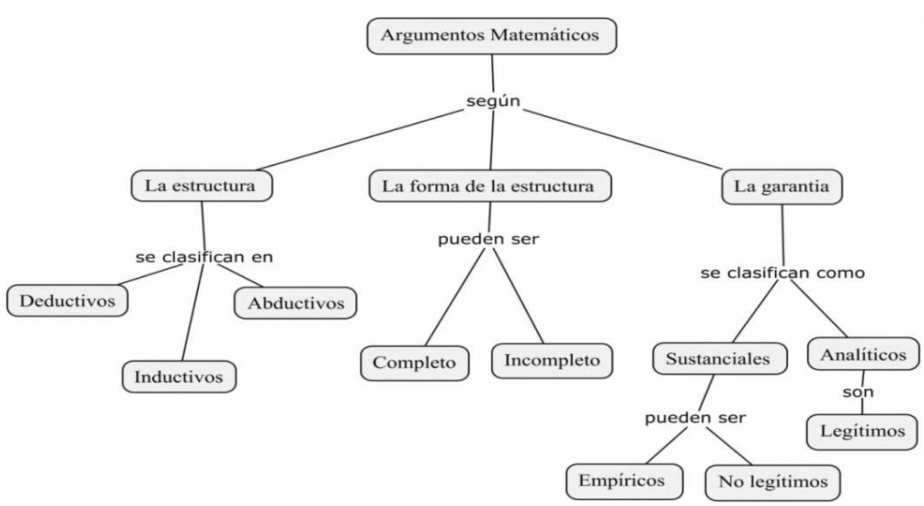


Figura 4. Clasificación de los argumentos matemáticos

2.4.1 Argumentos según su estructura

El modelo de argumentación de Toulmin (2003) establece que un argumento está compuesto por tres elementos básicos: los *datos* que es información dada, ya sea verbalmente o a través de imágenes, *las aserciones* que se realizan sobre la situación en cuestión, teniendo en cuenta los datos, y los *garantías* que son proposiciones aceptadas como válidas en un sistema teórico, o propuestas por el que formula el argumento, y que conectan los datos con las aserciones. De esta propuesta, surgen tres tipos de argumentos que, según Perry et al. (Como se citó en Samper y Molina, 2013), son producto de la relación entre estos tres elementos. Es decir, la forma como, en el argumento, se establecen los datos (p), las aserciones (q) y los garantías $(r: p \rightarrow q)$ define el tipo de argumento: deductivo, inductivo y abductivo.

2.4.1.1 Argumento Abductivo

Este tipo de argumento inicia con un hecho observado. Además, se busca, entre lo conocido, una proposición general que relacione unos datos con el hecho observado, lo que lleva a establecer como datos probables los expuestos en la proposición general. Es un tipo de argumento en el que el sujeto, a partir de la observación de un resultado, se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo, busca reglas generales que tiene que ver con el resultado, y extrae unas posibles condiciones iniciales. Es decir, deriva la verdad o no de datos, aceptando como verdadero el resultado.

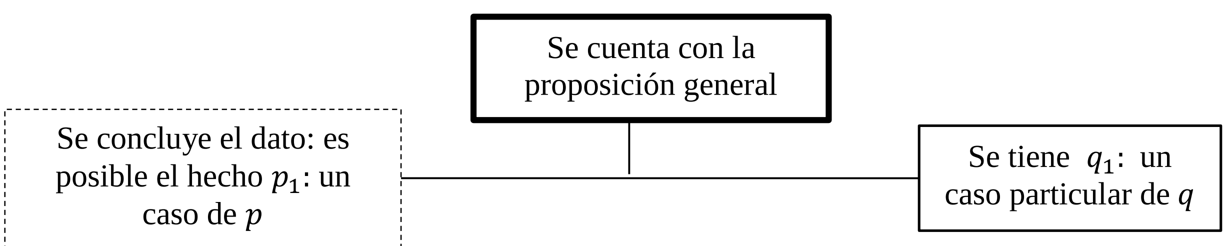


Figura 4: Esquema argumento abductivo

Un ejemplo de un argumento abductivo se evidencia en una posible respuesta a la Tarea 4 de la propuesta didáctica usada para este estudio:

> *En la hoja blanca encontrarás representados los puntos A y B. Encuentra un punto C tal que B es punto medio del $\overline{AC}$.*

Este tipo de tarea promueve el uso de argumentos abductivos, dado que el estudiante parte de la aserción (*B es punto medio del $\overline{AC}$*) y deben concluir los datos que serían (i) la colinealidad de los puntos A, B y C y (ii) la equidistancia de B a A y a C.

Datos	Garantía	Aserción
C pertenece al segmento $\overline{AB}$ y está en la mitad (Tener la misma distancia del punto A al punto C y del punto C al B)	(D. de punto medio)	C es el punto medio del $\overline{AB}$

2.4.1.2 Argumento Inductivo

Esa clase de argumento se presenta cuando se establece una regla general como conjetura, producto de la observación repetida de situaciones donde, a partir de unos datos dados comunes, se nota que el resultado siempre es el mismo.

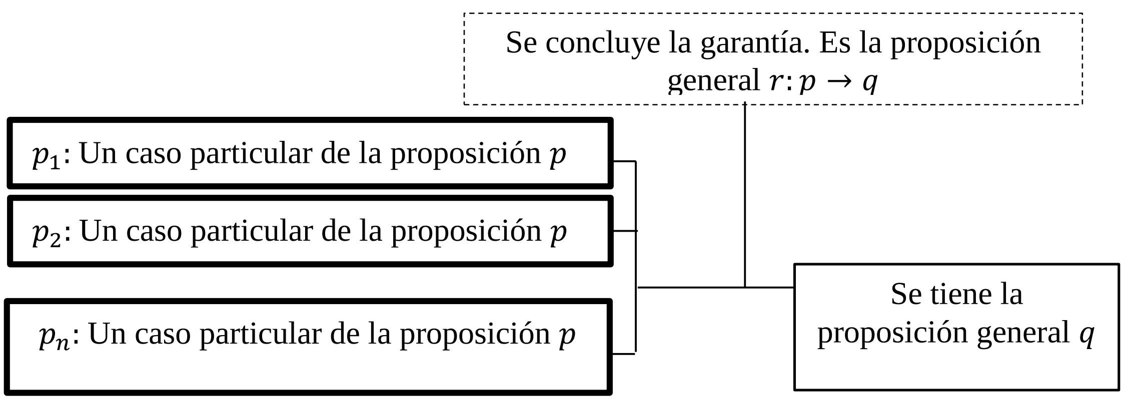


Figura 5: Esquema argumento inductivo

La Tarea 9 de la propuesta didáctica puede promover la argumentación inductiva.

Sea el ΔABC, D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. Observe los ΔBDE y el ΔDAF. ¿Qué relación existe entre los perímetros de esos triángulos? Justifique su respuesta.

Este tipo de tarea induce a que el estudiante realice una exploración en la cual varíe las longitudes de los lados del triángulo y compare estas con las del triángulo determinado por los puntos medios de los lados del triángulo inicial.

Si los vértices del ΔDEF son puntos medios de los lados del ΔABC, entonces el perímetro del ΔDEF es igual a la mitad del perímetro del ΔABC.

D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. El perímetro del ΔABC es de 48 y el perímetro del ΔDFE es 24.

D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. El perímetro del ΔABC es de 26 y el perímetro del ΔDFE es 13.

D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. El perímetro del ΔABC es de 34 y el perímetro del ΔDFE es 17.

El perímetro ΔDFE es la mitad del perímetro del ΔABC.

Figura 6: Ejemplo de argumento inductivo

2.4.1.3 Argumento Deductivo

Los argumentos deductivos ocurren cuando, de premisas que se suponen verdaderas, se deduce una conclusión que se considera como verdadera. La deducción surge cuando de una afirmación condicional ya generalizada que se conoce, se establece una conclusión porque se determina que la información que se tiene concuerda con la hipótesis de la afirmación condicional.

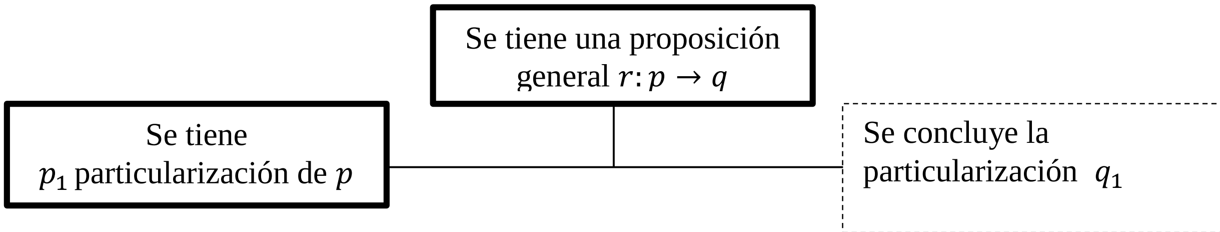


Figura 7: Esquema argumento deductivo

Como ejemplo de un argumento deductivo se tiene uno encontrado en la solución a la Tarea 5 (sección 4.1.5):

Dato	Garantía	Aserción
El punto N *no pertenece al segmento* CD	D. de punto medio (i)	El punto N no es punto medio del $\overline{DC}$

2.4.2 Argumentos según la forma de su estructura

Según Samper y Toro (2016), un argumento puede ser *incompleto* si no se expresa explícitamente alguno de los tres elementos básicos de un argumento, datos, garantía o aserción. Es *completo* si sí se mencionan los tres elementos. Como suele suceder, los estudiantes presentan argumentos incompletos porque no mencionan explícitamente la garantía.

2.4.3 Argumentos según la naturaleza de la garantía

Toulmin (2003) propone distinguir los argumentos según la naturaleza de la garantía, cosa que Krummheuer (2000) establece. Él diferencia entre argumentos sustanciales y argumentos analíticos. Un argumento es analítico si su estructura lógica es válida y se sustenta en un sistema teórico aceptado. Es sustancial si la garantía es empírica, es decir, si, según Douek (1999), incluye datos numéricos, dibujos, gráficas etc., o si está basada en la experiencia con una representación ya sea en el computador o en papel. Este tipo de argumento no tiene el rigor lógico de la deducción formal; no debe ser considerado incorrecto; más bien se debe ver como base para transformarlo en argumento analítico. Samper y Toro (2016) consideran que hay argumentos sustanciales de otro tipo, que denominan ***no legítimos.*** Corresponden a aquellos en los que se usa como garantía una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

Un ejemplo que puede aclarar la clasificación anterior es cuando se afirma que debido a que unas golondrinas vuelan cerca al piso (datos), va a llover (aserción) (Samper, 2016). Es un argumento sustancial cuando la garantía es empírica, es decir, cuando se basa en una creencia popular. En cambio, es analítico si la garantía se basa en un sistema teórico científico que explica que los oídos de las golondrinas son muy sensibles a los cambios de presión (Rivera, 2012). Así, cuando la presión comienza a bajar, lo que suele indicar mayor humedad en la atmósfera, deben volar más bajo para compensar esa caída de la presión. Otra garantía que se puede dar es que los insectos que comen estas aves vuelan más bajo cuando desciende la presión pues aumenta la humedad que pesa en las alas de los insectos.

2.5 TAREAS MATEMÁTICAS

En la revisión de la literatura, se encuentra que el término tarea se presenta desde varias perspectivas. Por ejemplo, para Christiansen y Walker (1986) una tarea es *aquello que se les pide a los alumnos que hagan.* Esta postura está relacionada con lo que propone Silva (2013) quien señala que una tarea consiste en "enunciados que exigen respuestas o acciones, e indicaciones explícitas o implícitas sobre lo que se espera que los estudiantes hagan (resolver, justificar, leer y hacer un resumen, representar, conjeturar, entre otras)" (p.49). Ambas propuestas incluyen una relación implícita entre el profesor, la tarea y los estudiantes, dado que el profesor es el directamente responsable de formular, presentar y proponer las tareas en el aula.

Para Freudenthal (como se citó en Gravemeijer, 2000) una *tarea matemática escolar* debe llevar al estudiante a hacer matemática. Él critica la educación matemática tradicional en la cual el resultado de la actividad matemática de *otros* es tomado como punto de partida de la enseñanza, y las tareas tienden a ser reproducciones de esta. "Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma" (Freudenthal, 1993, p.9) Freudenthal reconoce las matemáticas como una actividad humana; su enfoque está asociado a la *matematización* que consiste en *hacer más matemáticamente.* Esto está asociado a las características de las matemáticas como su generalidad (generalización, observar analogías, clasificar, estructurar), certeza (reflexionar, justificar, probar usando un abordaje sistemático, elaborando y testeando conjeturas, etc.), exactitud (modelizar, simbolizar, definir limitando interpretaciones y validez) y brevedad (simbolizar y esquematizar desarrollando procedimientos estándar y notaciones). Por ello, Freudenthal propone que se diseñen tareas en las que se aborden las anteriores características de las matemáticas.

Da Ponte (2004) está de acuerdo con la perspectiva de la noción de tarea que presenta Freudenthal. Adicionalmente, establece una relación entre actividad matemática y tarea, al decir "cuando un alumno está implicado en la actividad matemática, está realizando cierta tarea" (p.2). Expone que el aprendizaje de las matemáticas está determinado por la actividad matemática que realiza el estudiante, y esta solo se puede promover por medio de tareas. Este investigador reconoce que las matemáticas son dinámicas, y no deben presentarse como un corpus teórico estático que hay que conocer para luego aplicar. Él considera que la actividad matemática es un proceso interno.

> El profesor no dispone de medios para intervenir directamente en la actividad del alumno pero puede y debe preocuparse de la formulación de las tareas, del modo de proponerlas y de dirigir su realización en el aula. (da Ponte, 2004, p. 2)

Otros investigadores, como Henningsen y Stein (1997), definen tarea como una actividad que implica una *demanda cognitiva* centrada en procesos *activos y generativos* que motivan a los estudiantes a hacer y usar matemáticas. En este sentido, se relaciona con la postura de da Ponte (2004). La demanda cognitiva de una tarea se refiere al tipo de procesos cognitivos que necesita el estudiante para realizar la tarea. Estos van desde la memorización, la aplicación de procedimientos y algoritmos (con o sin comprensión) hasta el uso de estrategias de pensamiento y razonamiento complejo, típicas de "hacer matemáticas", lo cual incluye, por ejemplo, formular conjeturas, justificar ideas, o interpretar representaciones (Henningsen y Stein, 1997).

Margolinas (2013) presentó en las Actas del ICMI Study 22[1] una recopilación de estudios realizados sobre el diseño de tareas, dado que este aspecto ha sido de interés general en el campo de la educación matemática. De acuerdo a esta autora, el término tarea se ha prestado para muchas interpretaciones. Menciona, por ejemplo, que en la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (Brousseau 1996) una tarea es considerada como una situación, ya sea didáctica o a-didáctica, que es diseñada por el profesor y está sujeta a ciertos límites y condiciones. Es una situación didáctica si hay intervención del profesor, directa o indirectamente; es a-didáctica si implica que el estudiante trabaja autónomamente. Margolinas (2013) resalta que las tareas son las herramientas mediadoras de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Incluyen desde ejercicios repetitivos hasta la solución de problemas complejos, realización de experimentos o investigación (Christiansen y Walter, 1986; Mason y Johnston-Wilder, 2006).

Diferentes investigadores en educacion matemática (Zakaryan, 2013; Kilpatrick et al, 2001; Watson y Sullivan, 2008; Sullivan et al, 2010) resaltan la importancia de las tareas, y comparten la idea de que estas son el principal recurso del profesor para lograr que los estudiantes desarrollen diversos procesos matemáticos. También reconocen que estos procesos están fuertemente determinados por el tipo de tareas, lo cual implica que aquellas que se proponen para los estudiantes deben ser de diferente tipo.

> Las tareas son el principal vehículo para suministrar a los estudiantes oportunidades de aprendizaje y una cuidadosa selección de estas por parte del profesor, le permite planificar actividades que potencian la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje. (Zakaryan, 2013, p.2)

Silva (2013) expone que una tarea es un *problema* para alguien si no tiene claro cómo establecer matemáticamente las relaciones expresadas en el enunciado o si, aun sabiendo

[1] International Commission on Mathematical Instruction

cómo establecerlas, no tiene claro cómo ellas permiten encontrar una solución; es decir, los conocimientos que tiene la persona determinan si la tarea es o no un problema para ella. Esta perspectiva es similar a la que propone Yeo (2007) quien citando a Henderson y Pingry (1953), indica que se necesitan tres condiciones para que una tarea sea un problema para un estudiante. El estudiante debe i) apropiarse de la tarea, condición necesaria para querer solucionarla y en lo posible debe relacionarse con los intereses de los estudiantes; ii) *ser incapaz de pasar directamente a una solución*. Esto significa que debe tener un nivel de dificultad (demanda cognitiva) que le exija *un poco de esfuerzo creativo* y que requiera el uso de procesos matemáticos para resolverla; y iii) hacer un *intento deliberado* para encontrar una solución. Esto último implica que el estudiante debe tomar decisiones sobre la situación expresada en la tarea, utilizar diferentes representaciones y establecer algunas estrategias de solución, identificar varias posibles hipótesis (soluciones) y validarlas.

Stein, Schwan, y Henningsen (2000) complementan lo anterior al proponer que una tarea debe: i) permitir el desarrollo de diferentes estrategias de solución; ii) involucrar a los estudiantes en la actividad matemática promoviendo procesos matemáticos (conjeturar, generar hipótesis, poner a prueba, demostrar, argumentar, explicar, reflexionar e interpretar, modelar, representar etc.); iii) invitar a los estudiantes a la originalidad y la invención; iv) ser accesible para todos los estudiantes desde el principio; v) promover la comunicación y justificación de los procedimientos y métodos utilizados (en forma escrita y oral); y vi) ser exigente para los estudiantes.

En esta investigación, una tarea es un enunciado problemático (Yeo, 2007) dentro de un contexto, relacionado con situaciones cotidianas o dentro del marco disciplinar de las matemáticas (geométrico, numérico, métrico, etc.) que demanda un esfuerzo cognitivo porque exige usar conceptos, algoritmos y representaciones para solucionarlo.

2.5.1 Tipos de tareas matemáticas

Para establecer una tipología de las tareas matemáticas asociadas a la argumentación durante el proceso del uso experto de un elemento teórico, se realiza una revisión de los tipos de tareas que diferentes autores han propuesto. Da Ponte (2004) identifica las tareas según la actividad matemática del estudiante. En este sentido, presenta cuatro tipos de tareas: i) Problemas matemáticos según la concepción de problema de George Pólya (1975); ii) Ejercicios que permiten poner en práctica conocimientos adquiridos con anterioridad; iii) Tareas de investigación que consisten en la formulación de cuestiones por resolver, que el estudiante debe realizar autónomamente; y iv) Tareas de exploración que requieren tanto trabajo autónomo del estudiante como orientación del profesor. Además, da Ponte (2004) relaciona cada tipo de tarea con otras dimensiones como el grado de dificultad (accesible-difícil), la estructura (abierta-cerrada), la duración (larga-corta) y el contexto (realidad, semi-realidad y matemático).

Yeo (2007) clasifica las tareas según su finalidad didáctica como i) tareas matemáticamente ricas[2], en las que diferencia tareas de síntesis (problemas que involucran la interpretación de un enunciado) y tareas de análisis (investigación, exploración, trabajo por proyectos) y ii) tareas matemáticamente no ricas que son las que solo involucran procedimientos (ejercicios algorítmicos). Él establece que puede haber solapamientos entre los distintos tipos de tareas. Por ejemplo, una tarea de exploración se puede volver tarea de investigación para el estudiante, o un problema puede volverse ejercicio; esto depende del estudiante y sus conocimientos previos. Además, Yeo considera que las tareas son abiertas o cerradas. Es abierta si su meta, método o solución es abierto o estos no están bien definidos. De lo contrario se considera cerrada.

Finalmente, Henningsen y Stein (1997) clasifican las tareas según la demanda cognitiva que exija. En esta clasificacion se presentan tareas que van desde la memorizacion que involucra reproducir formulas, definiciones, algoritmos sin una conexión con los conceptos matematicos, hasta tareas que requieren un pensamiento complejo, dado que implica la exploracion para comprender los conceptos, propiedades y relaciones.

[2] Traduced de *mathematically-rich tasks* (Yeo, 2007 , pág. 21)

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 CARACTERIZACIÓN DEL ESTUDIO

El trabajo de investigación tiene un enfoque cualitativo con una perspectiva interpretativista (Miles y Huberman, 1994) porque se buscó dilucidar, en la realidad de la clase de geometría, los argumentos matemáticos que surgieron durante la implementación de una secuencia de tareas. Así mismo, es una investigación emergente (Valles, 1997) porque continuamente se tomaron decisiones que conllevaron a modificar y reestructurar las tareas propuestas, de acuerdo a como se iba perfilando el fenómeno de estudio, que en este caso son las practicas argumentativas de los estudiantes y el uso experto de un elemento teórico.

Para el estudio, se tuvieron en cuenta características del diseño metodológico de un experimento de enseñanza (EE) que Steffe y Thompson (como se citó en Molina et al. 2011) definen como "una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores" (p.79). Sin embargo, el objetivo de la investigación no es evaluar un diseño y proponer como producto final una secuencia didáctica. El propósito está dirigido a identificar qué tipos de argumentos matemáticos se generan y si se está favoreciendo el uso experto de elementos teóricos, al proponer diferentes tipos de tareas. En relación a lo anterior, es necesario precisar que, aunque se toman elementos de un EE, el análisis retrospectivo está dirigido a las características de los diferentes tipos de tareas, los argumentos que estas generan, y si se evidencia uso experto.

En el proceso de la investigación se quiso tener una visión real del fenómeno de estudio y abarcar los factores del contexto del aula que influyen en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Por ello, se tuvo una intervención directa con los estudiantes, ya que una de las investigadoras era la profesora habitual del grupo de estudiantes. Como lo proponen

Molina et al. (2011) “Los investigadores se convierten en una parte integral del sistema que están investigando, interaccionando con él, lo que conduce a complejas relaciones que rompen la habitual distinción entre investigadores, docentes y alumnos” (p.79). De esta manera se desarrolló la secuencia de tareas de manera natural evitando que el investigador fuera alguien desconocido para los estudiantes. Lo anterior también permitió reconocer otros aspectos: la efectividad o no de las tareas aplicadas, la influencia de la gestión del profesor, de las interacciones entre los estudiantes, y de la mediación del software, específicamente, en la producción de argumentos matemáticos.

Los datos en este estudio son de naturaleza cualitativa y corresponden a los argumentos que un grupo seleccionado de estudiantes generaron durante la realización de las diferentes tareas y cuando comunicaban a los demás sus soluciones. En la recolección de datos se utilizaron las siguientes técnicas e instrumentos:

Tabla 2. Instrumentos y técnicas de recolección de información

Grabaciones de video	Se realizaron video grabaciones del desarrollo de las sesiones de clase.
Grabaciones en Audios	Se realizaron grabaciones de audio de las interacciones de los estudiantes seleccionados durante el desarrollo de las tareas propuestas.
Registros escritos	Se recogieron los registros escritos de los estudiantes producto del desarrollo de las tareas en cada sesión de clase.

3.2 SECUENCIA DE TAREAS

Se adaptan algunas de las tareas de la unidad didáctica *El punto que está en medio de todo*, diseñada por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional, que tiene como objetivo promover la construcción de significado del concepto punto medio de un segmento, por medio del establecimiento de la definición, representación y del uso de hechos geométricos relacionados con este. El fin es que estos elementos se conviertan en garantías de argumentos propiciando así el uso experto del concepto de punto medio.

Estas tareas fueron adaptadas para un grupo de 30 estudiantes de grado séptimo de un colegio oficial ubicado en la localidad de Ciudad Bolívar, en la cuidad de Bogotá. Para implementar la secuencia de tareas, fue necesario i) disponer semanalmente de un bloque (sesión de 100 minutos) de las clases de matemáticas; ii) cambiar del salón habitual a la sala de tecnología, dado que se requería el uso de software de geometría dinámica; iii) enseñar a usar las herramientas que ofrece el software de geometría dinámica GeoGebra; iv) establecer normas socio matemáticas en la clase, entre las cuales estaba proveer argumentos para justificar ideas y establecer el tipo de argumentos que se consideraban aceptables; v) propiciar la participación de los estudiantes basada en el respeto, la petición de la palabra, y en la consideración de que todos los aportes eran importantes; y vi) introducir nociones básicas de geometría plana, establecer las relaciones entre punto, plano y recta como hechos geométricos, y promover la construcción de las definiciones de segmento y rayo.

Para lograr lo expuesto en los numerales iii) a vi), se desarrolló la secuencia de tareas *Tareas de introducción* (Anexo A), con la cual se establecieron los elementos teóricos básicos, a partir de información que obtuvieron los estudiantes al hacer exploraciones con el uso de geometría dinámica. Esta secuencia se realizó durante el segundo semestre del año 2015 e inicios del año 2016, con el mismo grupo de estudiantes. Finalizado este proceso, se seleccionó un grupo de ocho estudiantes que fueron escogidos porque manejaban con habilidad el software, se les facilitaba exponer sus ideas de manera oral, y participaban activamente durante las discusiones colectivas. De esta manera, aunque las tareas se desarrollaron con todo el curso, los datos se obtuvieron de este grupo seleccionado.

Después del desarrollo de las tareas de introducción, se inició la secuencia de tareas extraídas de la unidad didáctica *El punto que está en medio de todo.* Los datos analizados en esta investigación se recolectaron de las interacciones de los ocho estudiantes escogidos cuando resolvían las tareas de dicha secuencia. La secuencia de tareas se realizó en tres fases, que se relacionan con las fases de un EE tal como lo proponen Cobb y Gravemeijer (como se citó en Molina et al. 2011): "Preparación de las tareas, desarrollo de las tareas y análisis de los datos" (p.79). A continuación se nombran cada una de las acciones realizadas en cada una de las fases:

Tabla 3. Fases de la implementación de la secuencia de tareas.

<table>
<tr><th>Fases</th><th colspan="2">Acciones</th></tr>
<tr><td>Preparación de las tareas</td><td colspan="2">Determinación de los objetos geométricos que los estudiantes debían conocer antes de implementar la secuencia El punto que está en medio de todo. Adaptación de las tareas para incluir el uso de software de geometría dinámica.
Planificación de las acciones del profesor-investigador durante la intervención en el aula.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Desarrollo de las tareas</td><td>Antes de cada intervención</td><td>Discusión de los sucesos en clase con los coinvestigadores para revisar aspectos generales de la gestión del profesor y determinar futuras acciones.
Revisión de las próximas tareas para determinar si se debían modificar.
Organización de la información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en la próxima clase y en la posterior interpretación de los datos.</td></tr>
<tr><td>En cada intervención</td><td>Recolección de datos de lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</td></tr>
<tr><td>Después de cada intervención</td><td>Organización de los datos recogidos durante la intervención.</td></tr>
<tr><td>Análisis retrospectivo de los datos</td><td colspan="2">Análisis del conjunto de datos (argumentos de los estudiantes).</td></tr>
</table>

3.3 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Para esta investigación se determinaron dos grandes categorías, la primera se relaciona con los tipos de tareas (Yeo, 2007) y la segunda con los tipos de argumentos (Toulmin, 2003; Krummheuer G.,2000) en esta última se identificó de acuerdo a los argumentos el uso experto de un elemento teórico (Samper y Plaza, 2015). A continuación se presentan los elementos que conforma cada categoría.

3.3.1 Categorías de análisis para las tareas

Cada una de las tareas se clasificó de acuerdo a su estructura y a su objetivo. Las categorías para clasificar la estructura de las tareas son algunas de las que propone Yeo (2007). Las usadas para clasificar el objetivo emergieron durante el análisis, tomando ideas propuestas por diferentes autores. También se analizaron los argumentos de los estudiantes que surgieron en cada una de las sesiones de clase, durante el desarrollo y socialización de las tareas propuestas. Para finalizar el análisis, se determinó si las tareas promovieron el uso experto de la definición de punto medio. A continuación se presenta una descripción de las categorías y sus elementos.

3.3.1.1 Categorías según su estructura

Yeo (2007) plantea que una tarea tiene diferentes variables como: andamiaje, meta, método y solución. Las categorías que establecimos incluyen estas variables. Cada variable tiene subdivisiones, pero, dadas las diferencias tan sutiles que presenta el autor al definirlas y caracterizarlas, no se tienen en cuenta todas ellas. Además de alargar el análisis de cada tarea, no incluir todas las subdivisiones no afecta el fin de este estudio. A continuación se explican las variables:

Meta: Difiere del objetivo de la tarea, que es algo intrínseco de esta. La meta está asociada a los elementos teóricos y procesos matemáticos que se quiere propiciar en la tarea. La meta puede ser:

- ***Cerrada:*** cuando es concreta. Por ejemplo, considere la siguiente tarea: *Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 7 cm, respectivamente, ¿cuánto mide la hipotenusa?* El objetivo es encontrar la medida de la longitud de la hipotenusa; la meta es usar el Teorema de Pitágoras o funciones trigonométricas, según el grado de escolaridad.
- ***Abierta*:** cuando el estudiante puede escogerla, dado que hay varias posibilidades. Por ejemplo, considere la tarea: *Investigue propiedades de paralelogramos*. El objetivo es descubrir propiedades. La meta puede ser: establecer relaciones entre los lados del cuadrilátero, relaciones entre los ángulos, relaciones entre las diagonales, y diferenciar tipos de paralelogramos.

Método: Tiene que ver con las estrategias para el proceso de solución de la tarea. El método puede ser:

- ***Abierto:*** si existen varias estrategias para resolverla. Por ejemplo, considere la siguiente tarea: *Construya un triángulo equilátero dado el* $\overline{AB}$. En este ejemplo, el estudiante puede, con regla y compás, construir la mediatriz del segmento o circunferencias congruentes. Otra posibilidad es usar regla y transportador para construir ángulos de medida 60°.
- ***Cerrado:*** cuando hay que usar una estrategia específica para resolver la tarea. Por ejemplo, en la siguiente tarea se indica qué debe usarse para resolverla: *Utilice el método de Tales para dividir un segmento en cinco partes congruentes*.

Andamiaje: tiene que ver con la información que se incluye en la presentación de la tarea. Está relacionada con el método o estrategias necesarias para el proceso de resolución. El andamiaje puede ser:

- ***Presente:*** cuando en el enunciado se incluyen una representación o esquema que provee ayuda al estudiante para resolverla. Por ejemplo, en la Tarea 7(b) (Sección 3.6.7), el andamiaje está presente pues se solicita de representar la mediana con GeoGebra, utilizando la definición dada. La representación puede usarse para comparar esta con las imágenes dadas para reconocer cuál propiedad de mediana no se cumple en dichas imágenes.

- ***No presente:*** cuando no se plantean preguntas orientadoras o indicaciones que le permitan al estudiante saber cómo proseguir. Por ejemplo, en la Tarea 4 (Sección 3.6.4) solo se presenta la información necesaria para desarrollar la tarea.

Solución: tiene que ver con el resultado final del desarrollo de la tarea. Esta puede ser:

- ***Solución abierta***: si son posibles varias respuestas todas correctas. Por ejemplo, en la tarea: *Construya cuadriláteros que tengan diagonales congruentes,* las posibles respuestas son: un cuadrado, un rectángulo, un trapecio isósceles, o cualquier cuadrilátero no especial con esa propiedad.
- ***Solución no bien definida:*** cuando hay varias respuestas, todas válidas, y la tarea queda resuelto cuando el estudiante da una o más de ellas. Por ejemplo, considere la siguiente tarea: *Investigue tipo de cuadrilátero según las propiedades de sus diagonales.* Se pueden presentar respuestas relacionadas las medidas de las diagonales (congruentes o no) o teniendo en cuenta la medida del ángulo determinado por las diagonales (perpendiculares o no), o de acuerdo a la posición del punto medio de cada diagonal.

- ***Solución definida***: cuando hay una única respuesta correcta. Por ejemplo, para el siguiente problema la solución es un cuadrado: *Represente un cuadrilátero con diagonales congruentes, perpendiculares que se bisecan*.
- ***Sin solución***: cuando no existe respuesta. Por ejemplo, en el siguiente problema: Construya un cuadrilátero con lados adyacentes de medidas 3 cm, 7 cm tal que la diagonal que determinan mida 12 cm.

Una tarea se considera abierta si el método es abierto. De lo contrario, es una tarea no abierta. En la *Tabla 4*, se presenta la posible estructura de cada tipo de tarea.

Tabla 4. Clasificación de las tareas según su estructura

Variables / Tipo de tarea	Meta	Método	Solución	Andamiaje
Abierta	Abierta	Abierto	Abierta o No bien definida	Presente o ausente
	Cerrada	Abierto	Abierta o No bien definida	Presente o ausente
No abierta	Cerrada	Cerrado	Definida o sin solución	Presente o ausente

3.3.1.2 Según su objetivo

Esta clasificación emergente está asociada a los elementos teóricos y procesos matemáticos que se buscan promover con la tarea. Se propone la siguiente clasificación:

- **Tareas de argumentación:** son aquellas en las que además de tener que dar la solución, se debe incluir uno o más argumentos generados para justificar o explicar la respuesta haciendo uso de elementos teóricos. (Silva, 2013) .
- **Tareas de justificación:** son aquellas en las que se promueve la explicación basada en experiencias apoyadas en procesos matemáticos como la visualización, exploración, comprobación, comparación, estimación etc.
- **Tareas de conjeturación:** son aquellas en que a partir de la exploración de una situación matemática se tiene que formular una afirmación en la que se expresa lo que se descubrió.
- **Tareas de investigación*:*** son tareas en las que dados unos parámetros el estudiante debe escoger la meta y el método que le permitan establecer una conjetura. (Yeo, 2007)
- **Tareas de traducción:** son aquellas en las que se requiere traducir el enunciado, oral o escrito, en una expresión matemática. En el enunciado de la tarea aparece toda la información necesaria para resolverla y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir. Son las tareas típicas de los libros de texto en los que el método de solución se

reduce a interpretar correctamente el enunciado, es decir, a elegir el algoritmo adecuado (Da Ponte, 2004).

- **Tareas rutinarias o ejercicios*:*** son aquellas que se reducen a solamente el uso de algoritmos, manipulaciones algebraicas y fórmulas de manera repetitiva. Para da Ponte (2004), estos ejercicios proporcionan oportunidades para obtener destreza y habilidades básicas, a través de la práctica en el uso estándar de procedimientos matemáticos, enseñados en clase.

Tabla 5. Clasificación de las tareas según el objetivo.

Tipos de tareas	**Argumentación**	**Justificación**	**Conjuración**	**Investigación**	**Rutinaria**	**Traducción**
Tarea abierta / Tarea no abierta	Argumenta-ción	Explicación empírica	Exploración y formulación de conjeturas	Estableci-miento de metas y de métodos, con el fin de formular una conjetura	Aplicación de algoritmos y fórmulas	Interpreta-ción de un texto para modelarlo matemática-mente y viceversa

3.3.2 Categorías de análisis de los argumentos matemáticos

De acuerdo a lo expuesto en la Sección 2.4, los argumentos se analizarán de acuerdo a la propuesta de Toulmin, Krummheuer y Samper y Toro, que se resume en la siguiente tabla:

Tabla 6. Categorías de análisis de argumentos

Su estructura	**La forma de su estructura**	**La naturaleza de la garantía**
Deductivo	Completo	Sustancial Empírico
Inductivo		Sustancial No legítimo
Abductivo	Incompleto	Analítico Legítimo

3.3.3 Codificación para el análisis

Para entender la presentación del análisis de las tareas y de los argumentos, se establecieron unos códigos que se presentan a continuación. Hay que recordar que para clasificar las tareas en abierta o no se tiene en cuenta lo establecido en la *Tabla 4*.

Tabla 7 Codificación categorías de análisis

CATEGORÍA	**SUB-CATEGORÍAS**	
Tipo de Tareas matemáticas TM (Yeo 2007)	Tarea abiertas **(TA)**	Argumentación **(TA-A)**
		Justificación **(TA-J)**
		Conjeturación **(TA-C)**
		Investigación **(TA-I)**
		Rutinarias **(TA-R)**
		De traducción **(TA-T)**
	Tareas no abiertas **(TNA)**	Argumentación **(TNA-A)**
		Justificación **(TNA-J)**
		Conjuración **(TNA-C)**
		Investigación **(TNA-I)**
		Rutinarias **(TNA-R)**
		De traducción **(TNA-T)**
Tipo de argumentos (AR) Toulmin (2003) (Krummheuer G. , 2000) Samper y Toro (2017)	Deductivo **(AD)**	Analítico **(ADA)**
		Sustancial Empírico **(ADE)**
		Sustancial No Legítimo (**ADNL**)
	Inductivo **(AI)**	Analítico **(AIA)**
		Sustancial Empírico **(AIE)**
		Sustancial No Legítimo (AINL)
	Abductivo **(AA)**	Analítico **(AIA)**
		Sustancial Empírico **(AIE)**
		Sustancial No Legítimo (AINL)

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presenta el análisis de las tareas y de los argumentos que los estudiantes enunciaron durante el desarrollo de cada una de ellas. Estos se analizan según las categorías de análisis diseñadas (Sección 3.3).

4.1 ANALISIS DE LAS TAREAS

A continuación se presentan las tareas que conforman la secuencia de tareas implementadas en el estudio. Se expone el enunciado, el objetivo, los elementos teóricos y las variables. Con referencia a los elementos teóricos involucrados en las tareas, se evidenció que de la primera tarea a la sexta, se hace referencia a la relación de equidistancia y colinealidad que exige la definición de punto medio, y de la tarea séptima a la novena, el uso de sus propiedades, cuando se informa que un punto es punto medio, para resolver un problema, o reconocer las propiedades de este.

4.1.1 Tarea 1: Punto medio en GeoGebra

a. *Construye un segmento, usa la herramienta Medio o Centro y describe qué pasó.*
b. *Explora la figura geométrica representada para encontrar propiedades geométricas: toma medidas, arrastra los puntos e indica cuáles se pueden mover.*
c. *Reporta lo que encontraste en cada uno de los puntos anteriores.*

El objetivo de esta tarea es identificar, a través de la exploración con la herramienta *Medio o Centro*, las propiedades requeridas para ser punto medio de un segmento: equidistancia a los extremos del segmento y pertenecer al segmento. A continuación, se caracterizan las correspondientes variables de esta tarea.

Tabla 8. Análisis de la estructura de la Tarea 1

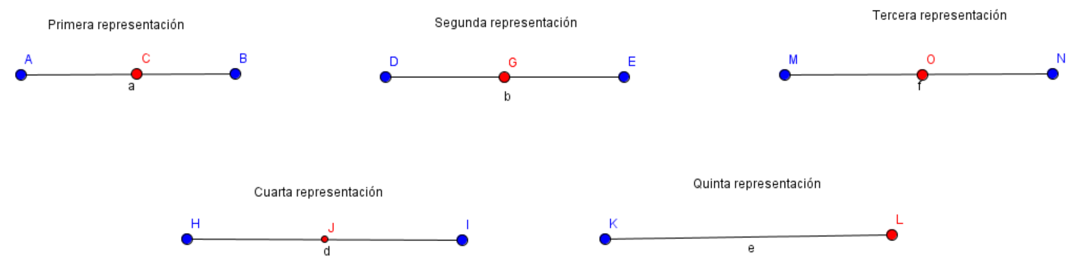
Variables de la tarea	**Característica**
Meta	Es cerrada, dado que la tarea se centra en la observación, exploración y descripción del comportamiento del punto que aparece al usar la herramienta Medio o Centro.
Método	Cerrado dado que se propone explícitamente qué del software usar (tomar medidas, arrastrar).
Andamiaje	Está presente, dado que se dan pautas para la exploración y se está indicando qué tipo de propiedades se quiere que descubran.
Solución	Es definida, porque se espera que identifique las propiedades del punto medio.

De acuerdo a su estructura es una tarea no abierta, porque el método es cerrado. Según su objetivo es una tarea de conjeturación, dado que se le pide al estudiante registrar lo observado en cada representación fijándose en el comportamiento, respecto a la variación o no, de un elemento específico, que en este caso es un punto en el segmento. Por tanto, esta tarea se clasifica como TNA-C.

4.1.2 Tarea 2: Ejemplos y no ejemplos de punto medio

Esta tarea tiene dos partes. La Parte 2 se realiza después de la socialización de respuestas de la Parte 1.

Parte 1 *Abre el archivo Tarea 2. Explora para determinar si, en cada caso, el punto rojo se comporta igual al que surgió en la Tarea 1 cuando usaste la herramienta Medio o Centro.*



a.	*Reporta lo que descubriste en cada representación.*
b.	*¿En qué se diferencia el comportamiento del punto rojo en cada representación con la del punto Medio o Centro de la Tarea 1?*
c.	*Explica en qué se parecen los comportamientos del punto rojo en cada representación con el del punto Medio o Centro.*

Parte 2: *El punto que surgió en el segmento, al usar la herramienta Medio o Centro, es muy especial. Recibe como nombre punto medio. De acuerdo a lo trabajado en esta sesión de clase, define punto medio.*

El objetivo de la Tarea 2 es afianzar y aclarar las propiedades del punto medio a través del estudio de ejemplos y no ejemplos para poderlo definir. A continuación se presentan las características de las variables:

Tabla 9. Análisis de la estructura de la Tarea 2

Variable de la tarea	**Característica**
Meta	Es cerrada, porque lleva a determinar qué propiedades del punto medio cumple o no el punto rojo en cada representación
Método	Cerrado, porque se debe utilizar el arrastre y la medida en GeoGebra para explorar las diferentes representaciones.
Andamiaje	Está presente, puesto que se dan orientaciones para el ejercicio de observación, invitando al estudiante a identificar diferencias y semejanzas de cada punto rojo con respecto al punto medio.
Solución	Es definida, porque en esta tarea la solución no consiste en explicitar cuál representación es la correcta, sino en la justificación de porqué las demás no lo son. Además se pide definir punto medio.

Esta tarea se clasifica, según su estructura, como no abierta porque el método es cerrado. De acuerdo al objetivo, se clasifica como una tarea de justificación, porque le exige al estudiante aludir a las propiedades que identificó del punto generado en el segmento al usar la herramienta *Medio o centro,* para explicar las diferencias y semejanzas con el punto rojo en cada una de las representaciones. La Tarea 2 se clasifica como TNA-J.

4.1.3 Tarea 3: Punto medio del $\overline{AB}$ por plegado.

a. Representa dos puntos A y B en una hoja de papel calcante. Dobla el papel para así encontrar el punto medio C del segmento AB.
b. Explica por qué es ese punto el punto medio.

El objetivo de esta tarea es que la definición de punto medio oriente las acciones que deben realizar los estudiantes para encontrarlo y que la usen para justificar la construcción. Esta tarea cumple con las siguientes características:

Tabla 10. Estructura de la Tarea 3

Variable de la tarea	**Característica**
Meta	Es cerrada, porque se les pide explícitamente la construcción del punto medio.
Método	Es cerrado, dado que se exige que use dobleces de la hoja en la que está representado el segmento.
Andamiaje	No está presente, porque no se dan orientaciones para guiar la construcción.
Solución	Definida, dado que solo hay una manera de hacer la construcción. Se debe hacer un doblez que garantice a la vez, la colinealidad de C con los puntos A y B, y la equidistancia de este a los puntos A y B, los cuales son los extremos del segmento. Esto se logra sobreponiendo los puntos A y B y el segmento con sí mismo. La intersección de este doblez y el segmento es el punto medio.

Esta tarea se clasifica, según su estructura, como tarea no abierta porque el método es cerrado. Según su objetivo, se clasifica como una tarea de argumentación, porque en el proceso de construcción el estudiante debe usar la definición de punto medio para realizar cada uno de los pasos de la construcción. La Tarea 3 se clasifica como TNA-A

4.1.4 Tarea 4: Encontrar el extremo de un segmento

a.	*En la hoja blanca encontrarás representados los puntos A y B. Por medio de plegados, encuentra un punto C para que B sea el punto medio del $\overline{AC}$.*
b.	*Describe lo que hiciste y explica por qué procediste como lo hiciste.*

El objetivo de la tarea es usar la definición de punto medio para justificar una construcción. Cumple con las siguientes características:

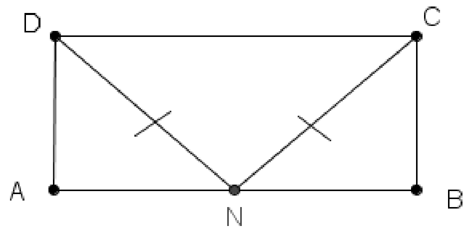
Tabla 11. Estructura Tarea 4

Variable de la tarea	Característica
Meta	Es cerrada, dado que se exige que, por medio de dobleces, se construya el otro extremo C del segmento para que el punto B sea punto medio.
Método	Es cerrado, dado que se exige que se usen dobleces.
Andamiaje	Es no presente. No se dan orientaciones para guiar la construcción requerida.
Solución	Definida, dado que solo hay una manera de hacer la construcción. Inicialmente debe hacerse un doblez que garantice la colinealidad del punto C con los puntos A y B. Luego debe hacer un doblez, sobreponiendo el punto A sobre la recta AB de tal forma que B quede en el doblez. El punto sobre el que se sobrepone A es el otro extremo del segmento.

Esta tarea se clasifica según su estructura como no abierta porque el método es cerrado. Según su objetivo se clasifica como de argumentación, porque es necesario utilizar las propiedades de punto medio para justificar que el punto encontrado es el extremo del segmento. La Tarea 4 se clasifica como TNA-A

4.1.5 Tarea 5: N es el punto medio de un segmento

En la figura, N es el punto medio del $\overline{AB}$.



a. ¿Qué propiedades tiene el punto N? Justifica su respuesta.

b. ¿Es N el punto medio del $\overline{DC}$? Justifica su respuesta

El objetivo de la tarea es usar la definición de punto medio. Difiere de las tareas anteriores porque el punto N hace parte de una figura más compleja que un simple segmento. En el literal a) se debe deducir que N equidista de los extremos del $\overline{AB}$ y en el literal b) aunque se reconoce la equidistancia del punto N a los puntos D y C, N no cumple la colinealidad con esos puntos. De acuerdo a su estructura tiene las siguientes características:

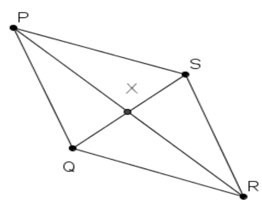
Tabla 12. Estructura Tarea 5

Variable de la tarea	**Característica**
Meta	Es cerrada, porque se solicita en la primera parte indicar qué propiedades el punto N por ser punto medio. En la segunda parte se solicita decidir si el punto N es punto medio de otro segmento.
Método	Es cerrado para la primera parte porque solo con el uso de la definición se puede responder lo que se solicita. En la segunda parte, el método es o abierto porque se puede usar la definición o la imagen figural que se tiene de punto medio.
Andamiaje	Presente porque se da una figura de la cual se puede obtener información para responder las preguntas.
Solución	Definida en la primera parte porque se debe citar la definición. En la segunda parte, la solución es no definida porque se puede justificar teóricamente o empíricamente.

La clasificación, según su estructura, de esta tarea es no abierta porque el método es cerrado. Según su objetivo es de argumentación porque se solicita justificación. La Tarea 5 se clasifica como TNA-A

4.1.6 Tarea 6: ¿Qué pueden concluir respecto al punto X?

En GeoGebra, explora la figura que se encuentra en el archivo Tarea 6, que es parecida a la que se presenta a continuación.



¿Qué puedes concluir respecto al punto X? Justifica tu respuesta.

El objetivo de la tarea es que, a partir de la exploración, se determinen las propiedades del punto X para reconocer que X es punto medio del $\overline{PR}$ más no lo es del $\overline{QS}$. Se debe usar la definición de punto medio para justificar la solución. De acuerdo a la estructura, esta tarea cumple con las siguientes características:

Tabla 13 Estructura Tarea 6

Variable de la tarea	**Característica**
Meta	Es abierta porque existen diferentes propiedades que se pueden asignar al punto X. Ser punto de intersección, ser punto de un segmento y no de otro, ser colineal con los vértices, ser equidistante de algunos de los vértices del cuadrilátero, ser punto medio de alguno de los segmentos.
Método	Es abierto porque se puede medir, arrastrar, hacer construcciones auxiliares como por ejemplo, el punto medio de cada segmento para ver si coincide con X, dado que se está trabajando en un ambiente de geometría dinámica.
Andamiaje	No presente, pues no se dan orientaciones para guiar ni la exploración ni la respuesta esperada.
Solución	No bien definida, porque se puede concluir que X es punto medio del $\overline{PR}$ o que no

es punto medio del $\overline{SQ}$, o que es punto de intersección de los dos segmentos, por ejemplo. También puede decir solo algunas de las características del punto sin remitirse a la definición de punto medio.

De acuerdo a su estructura, la Tarea 6 se clasifica como abierta porque tanto el método como la meta lo son. De acuerdo al objetivo, esta tarea se considera de investigación, argumentación, justificación y conjeturación. Es de investigación porque la pregunta permite escoger la propiedad de X que se quiere determinar y el método para establecerla. Es de conjeturación porque se tiene que explicitar la propiedad que se encontró a partir de la exploración. Finalmente, es de justificación y argumentación porque se solicita que se justifique la conjetura. Esto lo pueden hacer estableciendo como datos aquello que no varía bajo el arrastre y como garantía la prueba de arrastre. Pero en algún momento deben usar algún elemento teórico como garantía que la convierte en tarea de argumentación. Esta tarea se clasifica como TA-IAJC.

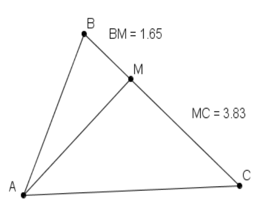
4.1.7 Tarea 7: Mediana del triángulo

Considera la siguiente definición:

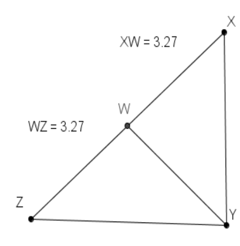
*Dado un triángulo. Una **mediana del triángulo** es un segmento con un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto a ese vértice.*

a. Representa en GeoGebra un triángulo con una de sus medianas.

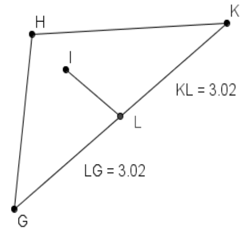
b. Determina si lo que se afirma en cada caso es cierto. Explica tu respuesta



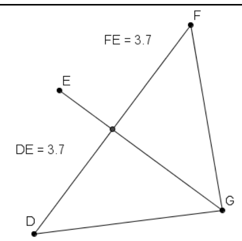
(a) $\overline{AM}$ es mediana



(b) $\overline{WX}$ es mediana



(c) $\overline{IL}$ es mediana



(d) $\overline{GE}$ es mediana

c. *¿Cuántas medianas tienen un triángulo?*

d. *Enumera las propiedades que hacen que un segmento sea mediana del triángulo.*

El objetivo de esta tarea es introducir la definición de mediana para usar la definición de punto medio en otro contexto. Según su estructura esta tarea cumple con las siguientes características:

Tabla 14. Estructura Tarea 7

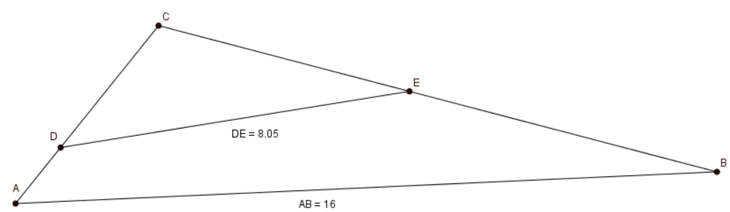
Variable de la tarea	**Característica**
Meta	Es cerrada. Se debe usar la definición de punto medio para representar medianas de triángulo y la de mediana para decidir si un segmento es o no mediana.
Método	Es cerrado. Se debe utilizar la definición de mediana para representarla en GeoGebra. En la segunda parte, se deben usar las definiciones de mediana y punto medio para justificar las respuestas.
Andamiaje	Presente, porque al solicitar la construcción de una mediana se busca que el estudiante identifique claramente las dos condiciones requeridas para ser mediana de triángulo.
Solución	Definida, puesto que consiste en construir la mediana y decidir si el segmento representado es mediana.

Según su estructura esta tarea se clasifica como no abierta porque el método es cerrado. Es de argumentación porque es a partir de los datos presentados en las imágenes, usando la definición tanto de punto medio como de mediana, se debe justificar la decisión respecto al segmento. Por todo lo anterior, esta tarea queda clasificada como TNA-A.

4.1.8 Tarea 8: Relación punto medio-lados de un triángulo

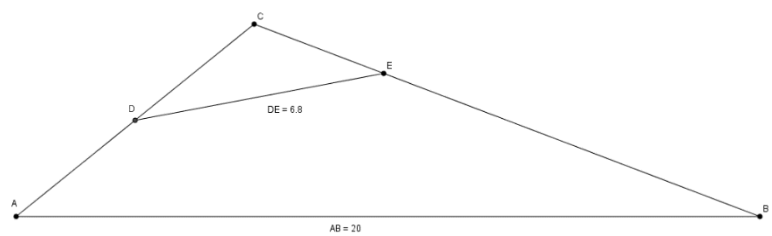
Para realizar esta tarea los estudiantes abren dos archivos prediseñados en GeoGebra. En las representaciones que encuentran el punto D es fijo, así como la base $(\overline{AB})$ de cada triángulo.

En GeoGebra, abre el archivo Tarea 8a, en el cual está representado un ΔABC *y el* $\overline{DE}$.



a. ¿Existe un punto E *en el* $\overline{CB}$ *tal que la medida del* $\overline{DE}$ *sea la mitad de la medida del* $\overline{AB}$*?*

Abre el archivo Tarea 8b, en el cual está representado un ΔABC *y el* $\overline{DE}$.



b. Dado que D *es el punto medio del* $\overline{AC}$*, ¿existe un punto* E *en el* $\overline{CB}$ *tal que la medida del* $\overline{DE}$ *es la mitad de la medida del* $\overline{AB}$*? ¿Qué características debe tener dicho punto?*

El objetivo de esta tarea es descubrir el hecho geométrico que establece que la longitud del segmento cuyos extremos son puntos medio de dos lados de un triángulo mide la mitad de la longitud del tercer lado del triángulo (HG Segmento Extremos Punto Medio en Triángulo). Sus variables se caracterizan por:

Tabla 15 Estructura Tarea 8

Variable de la tarea	Característica
Meta	Cerrada pues consiste en encontrar un punto en un segmento que cumpla una propiedad específica. Se debe explorar la figura para encontrar el punto que da lugar a la relación entre dos medidas solicitada.
Método	En la primera parte es cerrado. La estrategia es arrastrar al punto E y comprobar si se da o no la relación entre las medidas de los segmentos. En la segunda parte, el método es abierto porque hay dos formas posibles para proceder. Se puede arrastrar el punto E hasta que la relación de las medidas se dé, y luego medir la distancia de E a C y de E a B para determinar quién es E. Se puede sospechar que E debe ser el punto medio del $\overline{BC}$, y se procede a construirlo con la herramienta *Medio o Centro* y arrastrar a E hasta que coincida con el punto medio para comprobar la propiedad exigida.
Andamiaje	Está presente, puesto que, en cada archivo, se estudia un caso muy especial de triángulo: tienen un lado de medida fija.
Solución	Definida, porque se puede verificar, y validar la conjetura formulada, a través de la exploración de la figura.

De acuerdo a su estructura, esta tarea se clasifica como abierta porque el método, para una parte, es abierto. Según su objetivo, es una tarea de conjeturación. Por lo anterior, esta tarea fue clasificada como TA-C.

4.1.9 Tarea 9: Relación punto medio

Sea el ΔABC, D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$.¿Qué relación existe entre los perímetros del ΔABC y del ΔDEF? Justifique su respuesta.

El objetivo de la tarea es establecer que el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC. Deben usar el HG Segmento Extremos Punto Medio en Triángulo para justificar la respuesta. Las variables se caracterizan por:

Tabla 16 Estructura Tarea 9

Variable de la tarea	**Característica**
Meta	Es cerrada porque es encontrar una relación entre los perímetros de los triángulos.
Método	Es abierto. Se puede representar la situación en GeoGebra, encontrar los perímetros, y establecer la conjetura, con o sin el arrastre. Además, puede construir los triángulos que desee. O se puede establecer la relación entre los perímetros usando el HG Segmento Extremos Punto Medio en Triángulo.
Andamiaje	No está presente. No se dan orientaciones para indicar qué método usar.
Solución	Definida ya que solo hay una respuesta posible.

Según su estructura se considera una tarea abierta porque el método es abierto, aunque la meta es cerrada. Según su objetivo es de conjeturación y argumentación, porque se debe establecer una conjetura a través de la exploración (medición de los lados del triángulo) y la visualización, y justificarla usando un elemento teórico. Esta tarea se clasifica como TA-AC.

En la tabla 17 se presenta un resumen del anterior análisis de cada una de las tareas, exponiendo la clasificación como abierta y no abierta, de acuerdo a las variables de su estructura.

Tabla 17. Resumen estructura de las tareas

		SECUENCIA DE TAREAS								
		TAREA 1	**TAREA 2**	**TAREA 3**	**TAREA 4**	**TAREA 5**	**TAREA 6**	**TAREA 7**	**TAREA 8**	**TAREA 9**
		Punto medio en GeoGebra.	Ejemplos y no ejemplos de punto medio.	Punto medio del $\overline{AB}$ por plegado	Encontrar el extremo de un segmento	¿ N es el punto medio de un segmento	¿Qué pueden concluir respecto al punto X?	Mediana del triángulo	Relación punto medio-lados de un triangulo	Relación punto medio y perímetro de un triangulo
Variables	**Tipo de tarea**	**TNA-C**	**TNA-J**	**TNA-A**	**TNA-A**	**TNA-A**	**TA-IAJC**	**TNA-A**	**TA-C**	**TA-AC**
Meta	Abierta						X			
	Cerrada	X	X	X	X	X		X	X	X
Método	Abierto						X		X	X
	Cerrado	X	X	X	X	X		X		
Andamiaje	Presente	X	X			X		X	X	
	No presente			X	X		X			X
Solución	Definida	X	X	X	X	X		X	X	X
	No bien definida						X			
	Sin solución									

4.2 ANALISIS DE LOS ARGUMENTOS

Inicialmente se realizó una revisión, sistematización y transcripcion de los videos de clase (Anexo D) para seleccionar los fragmentos que cumplieran la condición de considerarse argumentos, puesto que se evidenciaron conversaciones que no tenían la estructura correspondiente.

Al finalizar el análisis de cada argumento, se presenta una tabla en la que se exponen los datos utilizados por los estudiantes, la garantía y la aserción. Cuando la garantía no es explícita se presenta en paréntesis, y en el caso de los datos y la aserción se presenta en cursiva si se extraen textualmente de lo que dicen los estudiantes, o sin cursiva si se presenta la interpretación que se hace de lo que dicen los mismos. En la revisión de los argumentos se evidenció que casi nunca es explícita la garantía (argumentos incompletos). Por ello, no se justifica esa clasificación al menos que sea un argumento completo.

Para indicar el resultado del análisis se utiliza la codificación de las categorías correspondientes a la argumentación, referenciadas en la *Tabla 7* de la Sección 3.4. Adicionalmente, se añade al código del argumento, el número de la tarea y consecutivamente el número del argumento para esa tarea. Por ejemplo, el codigo IAI-T3-9 hace referencia a una clasificación de un argumento inductivo analítico incompleto, evidenciado en la Tarea 3, siendo el noveno argumento.

En la presentación del análisis, primero se hace una contextuliazacion de lo que sucedió durante la resolución de la tarea, luego se presenta el argumento y su clasificación, y finalmente se explica el por qué de esta. También se determina si hubo uso experto de elementos teóricos, es decir, de las definiciones o hechos geométricos que estaban involucrados en las tareas. Este último análisis solo se hará a partir de la Tarea 3, porque es desde ese momento que se empiezan a introducir los elementos teóricos.

Los estudiantes seleccionados conformaron 4 grupos, como se ilustra a continuación:

Tabla 18. *Organización grupos de estudiantes*

Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Gina y Laura	Nancy y Sergio	Bayron y Juan	Mauricio y Miriam

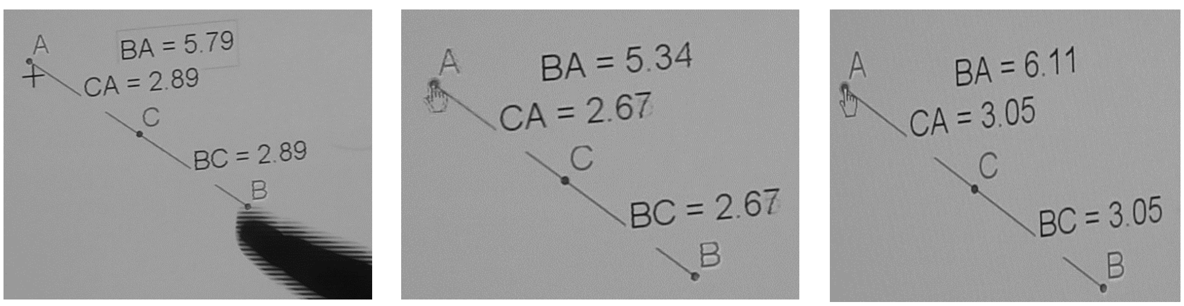
4.2.1 Análisis Tarea 1

Esta tarea fue clasificada como TNA-C (Sección 4.1.1). En esta los estudiantes, por medio de la exploración y del uso de la herramienta *Medio o Centro* de GeoGebra, identificaron características del punto medio de un segmento. A continuación, se exponen cuatro argumentos que se evidenciaron durante el desarrollo de esta tarea.

Argumento inductivo – sustancial empírico– incompleto

En la *Figura 8* se presentan tres momentos de la exploración del Grupo A. En el primero momento, formulan la siguiente conjetura "*el punto C esta siempre en el medio del $\overline{AB}$*"

Figura 8. Registro fotográfico de la exploración realizada por el Grupo A durante el desarrollo de la Tarea 1



Momento 1: Toma de medidas de longitud de los $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$.

Momento 2: Arrastre de los extremos del segmento.

Momento 3: Confirmación de la conjetura.

En la siguiente conversación, el Grupo A le explica a la profesora que midieron los segmentos y expone porqué llegaron a la conjetura formulada.

51	Profesora	¿Qué pueden decir según las medidas que tomaron?
52	Gina	Que si muevo A y B, el punto C siempre está en la mitad. Porque, mire profesora, miden lo mismo.

Gina formula un argumento que es inductivo-empírico. Los datos son que el $\overline{AC}$ y el $\overline{CB}$ "miden lo mismo" bajo el arrastre. La garantía, que no explícita, es la definición de mitad y la aserción es que el punto C está en la mitad del $\overline{AB}$. En la Tabla 1 se representa este argumento.

Argumento 1. ISEI-T1-1

Datos	Garantía	Aserción
La medida de la longitud de los $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ es la misma	(D. Mitad)	*El punto C está en la mitad del $\overline{AB}$*

Argumento abductivo-sustancial empírico- incompleto

En la siguiente conversación, que corresponde a las respuestas a una pregunta formulada por la profesora durante la puesta en común de resultados, se presentan dos argumentos: el primero de Gina y Bayron; el otro de Sergio.

El uso de la palabra "mover" se refiere a un cambio en posición sobre el segmento, si se trata del punto C, y a un cambio de posición en el plano si son los puntos A y B. Aunque la pregunta de la profesora parece difusa, como los estudiantes han estado usando la función arrastre, como se verá en sus respuestas, ellos la interpretan bien. La profesora pregunta por qué se pueden arrastra los puntos A y B, y no el punto C.

65	Gina	Porque C hace parte del segmento.
66	Sergio	Porque ahí decía punto centro, entonces no se puede mover; se tiene que quedar quieto en el centro.
67	Bayron	La C pertenece al segmento y no se puede mover. Solo cuando muevo a A, se mueve.

Los estudiantes reconocen que el punto C es dependiente y que solo varía su posición en el plano si los extremos del segmento cambian su posición en este. Utilizan la función arrastre para concluir que el punto C mantiene una posición específica en el $\overline{AB}$.

Los argumentos tienen como datos la representación con geometría dinámica de un segmento, con extremos A y B, y su punto medio C. La aserción es compartida, el punto C

no cambia su posición relativa respecto a los extremos del segmento. Los argumentos se sustentan en la visualización, pero la garantía que expresa cada estudiante difiere en contenido. Los argumentos son abductivos pues está dada la aserción, y están buscando datos. Gina y Bayron presentan una garantía de índole teórico; aunque no son conscientes de ello, están refiriéndose a la definición de segmento. Lo que subyace a la garantía de Sergio es la definición de punto medio. Con su frase "porque ahí decía punto centro", está manifestando que el comportamiento del punto C obedece a lo que lo define, basado en su noción[3] intuitiva de centro. Él añade otra propiedad del punto medio, no solo es un punto del segmento sino que debe permanecer en el "centro" de este.

Argumento 2. ASEI-T1-2

Dato	Garantía	Aserción
C es un punto del $\overline{AB}$	(D. de segmento)	El punto C mantiene su posición respecto a los puntos A y B

Argumento 3. ASEI-T1-3

Dato	Garantía	Aserción
El punto C se *queda en el centro*	(Noción de punto medio, parte (i))	El punto C está en el segmento y mantiene su posición respecto a los puntos A y B

Argumento deductivo – sustancial empírico – incompleto

En la siguiente conversación, el Grupo D responde a un interrogante sobre la relación entre las medidas del $\overline{AC}$ y del $\overline{BC}$ que plantea la profesora.

80	Miriam	Que son iguales; que AC y BC son iguales.
81	Mauricio	Al mover el punto cambia la medida del segmento, pero las medidas del segmento AC y BC siempre van a ser iguales.

[3] Usamos el término "noción" para indicar que el estudiante tiene ideas de cierto elemento o relación, pero no conoce la definición.

Los estudiantes expresan lo que varía y lo que se mantiene en relación a un segmento y un punto especial en él. El argumento de Mauricio y Miriam es deductivo-empírico en el cual utilizan como datos que C es el centro del segmento, pues eso fue lo que construyeron. Como garantía se refieren a lo que será la parte (ii) de la definición de punto medio, pues aún no se ha establecido; como aserción establecen que la medida de la longitud de los segmentos determinados por el punto C y cada extremo siempre son iguales.

Argumento 4. DSEI-T1-4

Datos	Garantía	Aserción
C *es el centro del segmento* AB.	(La propiedad equidistancia de punto medio que se mantiene bajo el arrastre)	*Las medidas* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BC}$ *siempre van a ser iguales*

Es interesante ver que tanto el Argumento 2 como el 3 hacen referencia a la primera parte de la definición de punto medio. El Argumento 4 hace referencia a la segunda parte de la definición.

4.2.2 Análisis Tarea 2

Esta tarea fue clasificada como TNA-J (Sección 4.1.2). Para esta tarea los estudiantes abren un archivo de GeoGebra en el que encuentran cinco representaciones, cada una de ellas de un segmento y un punto rojo. Los estudiantes deben explorar la representación para encontrar la relación entre el punto y el segmento. Se recuerda que los estudiantes aún no tienen la definición de punto medio; solo reconocen algunas características de un punto especial que aparece al utilizar la herramienta *Medio o Centro* de GeoGebra. La definición que tienen los estudiantes de segmento es como un subconjunto de la recta que está delimitada por dos puntos que son extremos del segmento. Al finalizar el Tarea 2 y tomando los aportes de los grupos; la profesora escribe la definición de punto medio en el tablero, "un punto medio cumple con las propiedades: i) pertenecer al segmento (que incluye propiedades como ser colineal y la interestancia) y ii) ser equidistante a los extremos del segmento".

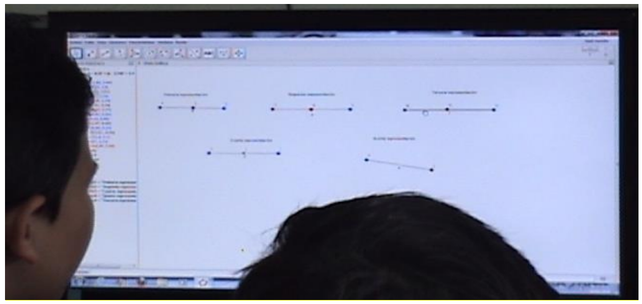


Figura 9. Registro fotográfico del Grupo C quienes realizan la exploración de las diferentes representaciones en la Tarea 2.

En esta tarea se identificaron diez argumentos.

Argumento deductivo – sustancial empírico – incompleto

En la siguiente conversación, el Grupo C expone lo que observó al explorar la primera representación.

97	Profesora	¿Qué sucede con el punto rojo?
98	Juan	Que el punto C se puede mover sobre el segmento AB. Nada más.
99	Bayron	Que el punto C no se sale del segmento y que […]
100	Juan	Acá lo que tenemos es que el punto C ya se hizo parte del segmento. No se puede mover afuera del segmento; sólo dentro del segmento.
101	Bayron	Se mueve de un punto a otro.
102	Juan	Entonces el punto C pertenece al segmento.

En esta conversación, los estudiantes describen que el punto C se puede mover solamente sobre el $\overline{AB}$ y que el movimiento está limitado por los extremos del segmento. Esto los lleva a concluir que dicho punto pertenece al segmento. En el argumento deductivo-empírico de Juan, él utiliza como datos que *el punto C se puede mover sobre el segmento AB. Nada más*; como garantía parece referirse a la definición de segmento y a la relación de pertenencia para establecer cómo aserción que el punto C pertenece al $\overline{AB}$.

Argumento 5. DSEI-T2-1

Datos	Garantía	Aserción
El punto C se puede mover sobre el $\overline{AB}$	(D. de segmento)	*El punto C pertenece al $\overline{AB}$*

Esto se confirma en el registro escrito y en la representación figural que entregó el grupo.

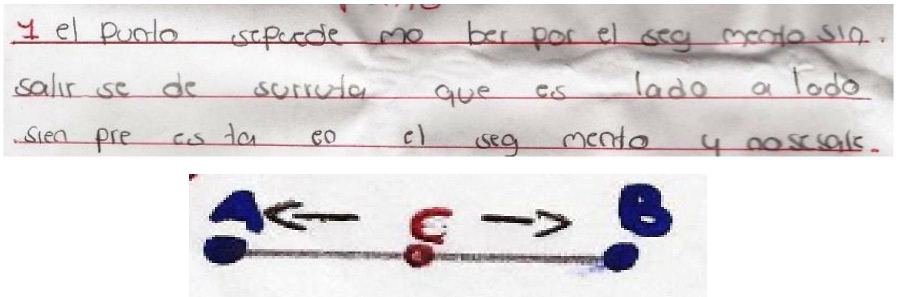


Figura 10. Reporte escrito del Grupo C.

Argumento deductivo- sustancial empírico – incompleto

La profesora sigue cuestionando al Grupo C respecto a la primera figura.

105	Profesora	¿Podría ser el punto C centro o medio del segmento?
106	Juan	No porque creo que deba estar sólo en mitad y este se puede mover [señalando con el cursor el movimiento del punto C sobre el segmento].

En este argumento, Juan utiliza como dato que el punto C pertenece al $\overline{AB}$ (aserción del argumento anterior), y que no está en la mitad de este. Como garantía, que no expresa, Juan usa la noción que tiene de punto medio como aquel que equidista de los extremos del segmento, pues no tienen la definición aún. La aserción es que el punto C no es punto medio del $\overline{AB}$. Como se basa en su noción de punto medio, y en lo que ve en el computador, este argumento es sustancial empírico. Además es deductivo porque de manera implícita se refiere a la equidistancia que debe conservar el punto medio C con respecto a los extremos del $\overline{AB}$. En el argumento Juan usa la contrarrecíproca.

Argumento 6. DSEI-T2-2

Datos	Garantía	Aserción
El punto C pertenece al $\overline{AB}$. El punto C no *está solo en la mitad*	(Noción de punto medio parte (ii))	El punto C no es punto medio del $\overline{AB}$

Argumento deductivo – sustancial empírico – incompleto

En la siguiente conversación, el Grupo D expone sus argumentos sobre lo que observaron en la segunda figura.

112	Mauricio	Al moverlo [señala punto G], cuando se mueve, sale en círculo.
113	Miriam	El punto G solo se puede salir del segmento en forma circular al lado izquierdo.
114	Profesora	En la segunda representación, ¿será que ese punto pertenece al segmento?
115	Miriam	No, porque se sale.

En el reporte escrito, los estudiantes realzaron la siguiente representación para ilustrar el comportamiento del punto G.

Figura 11. Dibujo realizado para explicar el comportamiento del punto $\boldsymbol{G}$ en el $\overline{\boldsymbol{DE}}$.

Miriam construye un argumento deductivo-empírico. Ella utiliza como dato que el punto G no siempre pertenece al segmento. La garantía, que no da Miriam, se basa en la definición de segmento. La aserción es que el punto G no pertenece al $\overline{DE}$. Lo que subyace a este argumento es la idea que tienen los estudiantes de la relación de pertenencia de un punto a un segmento como aquel que se puede mover únicamente sobre el segmento o que está en el segmento y no se puede mover. Esta condición será fundamental para el uso experto del punto medio, dado que una de las propiedades que lo define es pertenecer al segmento.

Argumento 7. DSEI-T2-3

Datos	Garantía	Aserción
El punto G se puede salir del segmento	(D. de segmento)	El punto G no pertenece al $\overline{DE}$

Argumento deductivo - sustancial empírico - incompleto

El siguiente fragmento corresponde a la conversación de la profesora con el Grupo B sobre lo que sucede en la segunda figura del archivo en GeoGebra. El argumento se centra en otra propiedad del punto G. Se utilizan herramientas de GeoGebra para verificar los datos.

121	Sergio	El punto G está en la mitad cuando está sobre el segmento.
122	Profesora	¿El punto G está en la mitad? ¿Por qué se puede decir que está en la mitad?
123	Sergio	Porque está centrado.
124	Profesora	¿A qué te refieres con estar centrado?
125	Nancy	Si profesora […]. Lo podemos medir [señala la representación]. Mira el D con el G y la G con la E [explica cómo está usando la herramienta *Distancia y longitud* de GeoGebra].
126	Sergio	Mira, profesora. Miden lo mismo.

En esta parte, se presenta un argumento deductivo-empírico. Sergio provee como datos que cuando el punto G está en el segmento está en la mitad y las medidas de longitud del $\overline{DG}$ y del $\overline{GE}$. Esta es una condición que le permite a Nancy usar como garantía la definición de mitad para establecer una relación geométrica, equidistancia del punto G a los extremos del segmento D y E. Así el grupo establece como aserción que el punto G está en la mitad del segmento. La acción de los estudiantes de tomar medidas puede ser motivada por la exploración que se realizó en la Tarea 1, de la cual surgió como una caracterización del punto *Medio o Centro*, que es un punto que se encuentra a la misma distancia a cada uno de los extremos del segmento.

Argumento 8. DSEI-T2-4

Datos	Garantía	Aserción
El punto G en el $\overline{DE}$, medidas de longitud del $\overline{DG}$ y del $\overline{GE}$	(D. de mitad)	El punto G *está en la mitad del segmento*

Argumento deductivo – analítico – incompleto

En la siguiente conversación sobre la tercera figura, la profesora solicita al Grupo A leer lo que escribieron y explicar su respuesta.

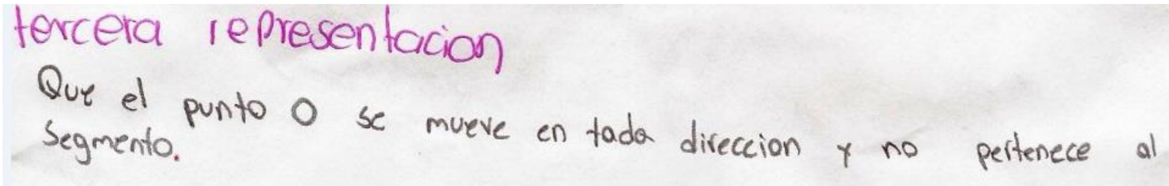

tercera representacion
Que el punto O se mueve en toda direccion y no pertenece al Segmento.

Figura 12. Registro escrito del Grupo A con respecto a la representación (3) de la Tarea 2.

137	Gina	Porque primero tú tienes el punto en el segmento, y luego tú lo puedes mover en cualquier lugar. Entonces lo que significa que el punto no se hizo parte del segmento.
138	Laura	El punto no pertenece al segmento porque se puede mover en todo el plano.
140	Gina	Si fuera parte del segmento entonces se movería solo por el segmento pero como no pertenece.
141	Profesora	¿Puede ser el punto O medio o centro del segmento MN?
142	Gina	No profesora porque ni siquiera está ahí en el segmento.

En la conversación se pueden identificar dos argumentos deductivos-analíticos-incompletos. En el primero, los datos utilizados por Gina y Laura es que el punto O, con el arrastre, se puede colocar en cualquier parte del plano. Como aserción ellas exponen que el punto O no pertenece al segmento. La garantía que subyace es la definición de segmento.

Argumento 9. DAI-T2-5

Datos	Garantía	Aserción
El punto O se puede mover en todo el plano	(D. de segmento)	*El punto O no pertenece al segmento*

El segundo argumento es solo de Gina. Ella utiliza como dato que el punto O no pertenece al segmento, la garantía es la noción de punto medio y la aserción que el punto G no es punto medio. Están expresando que una condición para que un punto sea punto medio es pertenecer al segmento.

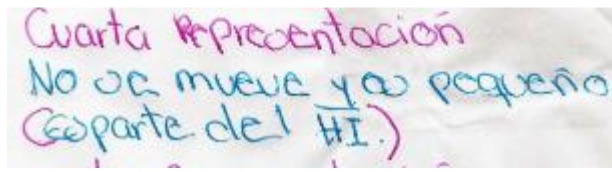
Argumento 10. DAI-T2-6

Datos	Garantía	Aserción
El punto O *ni siquiera está en el segmento*	(Noción de punto medio)	El punto O no es punto medio del segmento

Argumento deductivo – analítico – incompleto

El Grupo B expone lo que encontró al explorar la cuarta representación que sí corresponde a la del punto medio del $\overline{HI}$.

149 Nancy Que pertenece al segmento [trata de mover el punto J con el cursor]. No se puede mover porque ya es parte del segmento.



150 Sergio Yo veo que el punto está centrado en el segmento y no se puede mover [...] Pertenece al segmento y él es el único que es pequeño.

152 Profesora A qué te refieres con centrado.

154 Sergio El punto J es como el punto C del ejercicio anterior [Tarea 1] que no se podía mover, es el que sale de aquí [señala la herramienta *Medio o Centro*].

En esta conversación se evidencia un argumento deductivo – analítico – incompleto de Nancy en el que utiliza como datos el punto J y el $\overline{HI}$ y la imposibilidad de cambiar su posición con el arrastre, como garantía utilizan la definición de segmento. La aserción es que J es un punto del $\overline{HI}$.

Argumento 11. DAI-T2-7

Datos	Garantía	Aserción
El punto J *no se puede mover* sobre el $\overline{HI}$	(D. de segmento)	El punto J *pertenece* al $\overline{HI}$

Argumento deductivo – sustancial empírico – completo

En la conversación anterior, el argumento de Sergio es deductivo analítico y completo. Usa como garantía la noción de punto medio que tiene en el momento resultado de, en la Tarea 1, explorar las propiedades del punto que el software de geometría dinámica crea como punto medio de un segmento; con la frase "es como el punto C del ejercicio anterior" está explicitando la garantía. El estudiante asocia el punto J con el punto especial C puesto que conserva las mismas características como ser estático, ser más pequeño que los extremos y mantenerse centrado al mover cualquier extremo. Por eso su argumento es completo. Sus datos son, el punto pertenece al segmento y la propiedad de equidistancia a los extremos, percibida visualmente, bajo el arrastre. Como aserción establece que el punto J es el punto que se originaría si se usara la herramienta *Medio o Centro* de GeoGebra. Con ello, se evidencia que Sergio ha reconocido dos de las propiedades que caracterizan al punto medio, colinealidad con los extremos del segmento y equidistancia.

Argumento 12. DSEC-T2-8

Dato	Garantía	Aserción
el punto J está centrado en el segmento y no se puede mover	*Comportamiento parecido al del punto medio*	El punto J es el punto medio del $\overline{HI}$

Argumento deductivo – sustancial empírico – incompleto

En la conversación de la profesora con el Grupo C, al cuestionarlos sobre lo observado en la cuarta representación, surge otro argumento.

158	Juan	Que cuando uno mueve el punto H, [J] mantiene la misma distancia.
159	Profesora	¿Tiene la misma distancia?
160	Juan	Sí.
161	Profesora	¿Cómo lo puedes garantizar?
162	Juan	*Distancia o longitud*. La que usamos la vez pasada. Midiendo del punto H al punto J y al revés.

En esta parte se evidencia un argumento deductivo – sustancial empírico – incompleto en el cual Juan utiliza como datos el $\overline{HI}$, el punto J en el segmento y la medida de distancia entre J y H y entre J e I. La garantía es la noción de distancia entre dos puntos. Como aserción que $HJ = JI$.

Argumento 13. DSEI-T2-9

Datos	Garantía	Aserción
El punto J en el $\overline{HI}$ HJ y JI	(Noción de equidistancia)	*El punto J mantiene la misma distancia* a los extremos

Argumento deductivo – analítico – incompleto

Varios grupos coincidieron con la descripción del comportamiento del punto rojo L en la quinta figura. En su registro escrito, el Grupo B presentó un argumento deductivo – analítico. El dato es que el punto L no está en el centro del segmento; la garantía es la noción de la equidistancia del punto medio, y la aserción que el punto L no es punto medio.

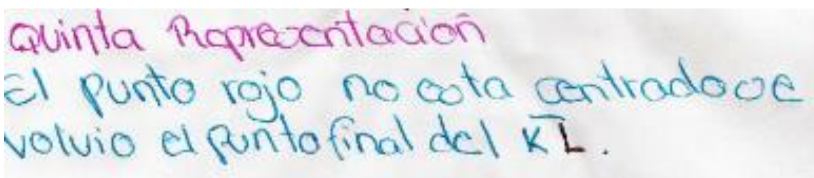


Figura 13. Registro escrito Grupo B, descripción quinta representación.

Argumento 14. DAI-T2-10

Datos	Garantía	Aserción
El punto L no está centrado	(Noción de punto medio parte (ii))	El punto L no es punto medio

4.2.3 Análisis Tarea 3

Esta tarea fue clasificada como TNA-A (Sección 4.1.3). Los estudiantes recibieron una hoja de papel pergamino y se les indicó que ubicaran dos puntos A y B en ella. Luego se les solicitó, a partir de dobleces, ubicar el punto medio del $\overline{AB}$, y describir el proceso de construcción. Ya contaban con la definición de punto medio. Durante el desarrollo de esta tarea, se evidenciaron cuatro argumentos.

Argumento abductivo – analítico – incompleto

En el diálogo que la profesora sostuvo con el Grupo C, se encontró el primer argumento.

169	Bayron	Pusimos un punto aquí y el otro allá [señala los puntos A y B en el papel].
170	Juan	Luego doblamos así [señala el doblez que contiene a los puntos A y B].
171	Profesora	¿Por qué realizas ese doblez?
172	Juan	Para que se alinean.
173	Profesora	¿Por qué es necesario que estén alineados?
174	Juan	Pues profesora, yo creo que deben estar en una sola línea porque entonces no se puede buscar la mitad. Debe estar en el segmento.
175	Bayron	Porque primero hay que hacer la línea del segmento, y después se busca la mitad.

Bayron y Juan proponen, cada uno de ellos, un argumento abductivo analítico igual. Los datos son C es un punto del $\overline{AB}$ y la equidistancia de C a los puntos dados A y B. Como garantía se basan en la definición de punto medio; como aserción C es el punto medio del $\overline{AB}$. Los dos estudiantes desencapsularon la definición de punto medio para proveer los datos de su argumento.

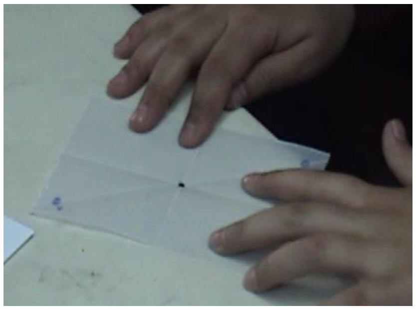
Argumento 15. AAI-T3-1

Datos	Garantía	Aserción
Los puntos dados A, B y C *deben estar en una sola línea porque entonces no se puede buscar la mitad* (Juan) *primero hay que hacer la línea del segmento, y después se busca la mitad* (Bayron)	(D. de punto medio (i) y (ii) (interestancia))	El punto C es punto medio

Argumento deductivo – analítico –incompleto

Siguiendo la conversación anterior, los estudiantes describen la estrategia, no válida, que usaron para encontrar el punto medio del segmento. No es válida porque no usan las propiedades de la definición para asegurar equidistancia.

176	Profesora	Bueno. Ya tienes alineados los puntos A y B[…]. Y ahora, ¿qué haces?
177	Bayron	Doblamos vertical y horizontal.



180	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que es el punto medio?
181	Juan	Pues porque medimos y nos dio la mismo.
182	Profesora	Y si no pudieras utilizar la regla para medir, ¿cómo puedes garantizar que ese punto es punto medio?
183	Juan	Pues podría recortar este lado [señala el $\overline{CA}$] y lo pongo con este otro lado [señala el $\overline{CB}$] y si están iguales miden lo mismo.

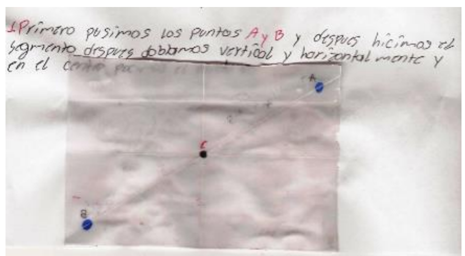


Figura 14. Registro escrito del proceso de construcción del punto medio del segmento $\boldsymbol{AB}$.

En esta tarea se presentaron dos argumentos de Juan. En el primero el estudiante usa un argumento deductivo - analítico - incompleto para validar la construcción. Los datos son el punto C en el $\overline{AB}$ y su equidistancia a los extremos (dato obtenido a través de la medición).Como garantía usa la segunda propiedad de la definición de punto medio (equidistancia) y la aserción es que C es punto medio del $\overline{AB}$.

Argumento 16. DAI-T3-2

Datos	Garantía	Aserción
El punto C en el $\overline{AB}$ y su equidistancia a los extremos	(D. punto medio parte (ii))	C es punto medio del $\overline{AB}$

Argumento deductivo – sustancial empírico- completo

El segundo argumento de Juan los datos son la representación de los $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, la garantía es que dichos segmentos se sobreponen exactamente y la aserción es que los dos segmentos tienen la misma medida

Argumento 17. DSEC-T3-3

Datos	Garantía	Aserción
Los $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$	*Si al sobreponer los dos segmentos quedan iguales entonces miden lo mismo*	Los segmentos *miden lo mismo*

Argumento deductivo – analítico – incompleto

Los estudiantes del Grupo D presentaron el proceso de construcción del punto medio, utilizando una estrategia correcta.

185 Mauricio — Primero colocamos los puntos A y B en cualquier parte de la hoja, y luego los alineamos doblando así [señala el doblez].

186 Profesora — ¿Por qué los alinean?

187 Miriam — Para que queden en una misma línea.

188 Profesora — ¿Por qué deben quedar en la misma línea?

189 Mauricio — Para que los puntos A y B estén en un segmento.

190 Profesora — ¿Y luego que hacen?

191 Miriam — Doblamos por la mitad.

192 Profesora — ¿Cómo lo hacen?

193 Mauricio — Pues colocando el punto A sobre el punto B, y se dobla un poquito y ese es el punto medio.

El argumento construido conjuntamente por Miriam y Mauricio es deductivo analítico pues se remite a las dos partes de la definición de punto medio: interestancia y equidistancia. La equidistancia y la interestancia las consiguen sobreponiendo los puntos A y B. Como datos tienen el $\overline{AB}$, el punto C entre A y B, y la equidistancia de C a A y B; como aserción que el punto C es punto medio del $\overline{AB}$. En este caso, se encapsula la definición de punto medio.

Argumento 18. DAI-T3-4

Datos	Garantía	Aserción
Los puntos A y B estén en un segmento. C en la mitad	(D. Punto medio (i) y (ii))	*C es punto medio* del $\overline{AB}$

4.2.4 Análisis Tarea 4

Esta tarea fue clasificada como TNA-A (Sección 4.1.4). Los estudiantes la solucionaron en casa. Debían exponer al curso cómo la hicieron y validar el proceso con argumentos. A continuación se presenta lo que realizó el Grupo C; se evidenció un argumento. Los demás grupos no hicieron la tarea.

Argumento abductivo- analítico-incompleto

221	Bayron	Bueno. Yo primero puse en el papel pergamino el punto A y el punto C. Los alinee, o sea, la doblé para sacar el segmento. Después, para sacar el punto B, cogí el punto C y lo alinee; le hice así para poder [la profesora interrumpe]
222	Profesora	Le hice así, ¿qué es?
223	Bayron	O sea, lo doblé pues en el punto C, para poder sacar el A y el punto B, para que queden de la misma distancia.
224	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que el punto B es el extremo del segmento, para que el punto C sea el punto medio?
225	Bayron	Porque C pertenece al segmento y está en la mitad.
226	Profesora	¿Qué garantiza que el punto C sea el punto medio del segmento AB?
228	Juan	Tener la misma distancia del punto A al punto C y del punto C al B.

De acuerdo a la conversación anterior, Bayron expresa un argumento abductivo analítico puesto que se tiene que C debe ser punto medio de un segmento con extremo en A

(aserción). Como garantía, implícitamente usa la definición de punto medio. Como alude a la relación de pertenencia de C al $\overline{AB}$ y su equidistancia a los extremos de dos formas diferentes, estos son los datos. Bayron desencapsula la definición de punto medio.

Argumento 19. AAI-T4-1

Datos	Garantía	Aserción
C pertenece al segmento [AB] y está en la mitad (Tener la misma distancia del punto A al punto C y del punto C al B)	(D. de punto medio)	C es el punto medio del $\overline{AB}$

4.2.5 Análisis Tarea 5

Esta tarea fue clasificada como TNA-A (Sección 4.1.5). Se divide en dos ítems; en el primer ítem los estudiantes deben visualizar la *Figura 17*, representada en el tablero, para identificar qué propiedades tiene el punto N.

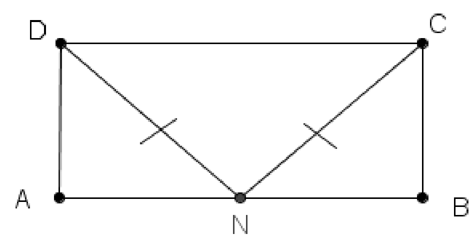


Figura 15. Figura Tarea 5

En el segundo ítem se cuestiona a los estudiantes sobre si el punto N es punto medio del $\overline{DC}$.

Argumentos deductivos – analíticos – incompletos

Durante la discusión grupal del primer ítem de la tarea, en la que participaron Juan y Bayron del Grupo C, surgen varios argumentos. El análisis que realizan los alumnos se basa en el imaginario de que la figura está representada en el computador. A continuación se presenta el fragmento de la transcripción que contiene los argumentos.

339	Juan	Si el punto N se puede mover por todo lado, no es parte del

		segmento $[AB]$.
340	Bayron	No es parte del segmento.
341	Profesora	Según lo que dice Juan es que si yo hago un punto y puedo moverlo, lo puedo poner sobre el segmento, ¿ese punto pertenece al segmento?
342	Juan	No, porque el punto debe moverse solo por el segmento.
343	Bayron	No pertenece al segmento y no podría ser punto medio. Si el punto N se puede mover por todo lado, pertenecería es al plano más no al segmento.
344	Juan	Pero si el punto N está quieto, entonces pertenece al segmento y sí podría ser punto medio.

De acuerdo a la representación mental que tienen Juan y Bayron de la situación, podría moverse libremente al punto N. Para ellos, no es posible asegurar que el punto N es punto medio, dado que existe la posibilidad de que dicho punto no pertenezca al segmento. Juan formula dos argumentos. El dato de su primer argumento es las diferentes posiciones que podría ocupar el punto N, la garantía no es explícita pero se basa en la definición de segmento, y la aserción es que el punto N no pertenece al $\overline{AB}$.

Argumento 20. DAI-T5-1

Dato	Garantía	Aserción
El punto N se puede mover por todo lado	(D. de segmento)	El punto N *no es parte del* $\overline{AB}$

En el segundo argumento, Juan usa como dato que el punto N esté fijo, como garantía no explícita la definición de punto medio, como aserción que el punto puede ser punto medio del segmento. Es interesante notar que él presenta un argumento sobre la plausibilidad de una situación. Es posible que esté evocando su experiencia con respecto a la imposibilidad de mover al punto medio de un segmento, si se usó la herramienta *Medio o Centro* para hallarlo. Queda el interrogante de si habla de la posibilidad porque le faltan datos como la equidistancia o porque no se sabe si el punto es fijo o no.

Argumento 21. DAI-T5-2

Dato	Garantía	Aserción
Si el punto N está quieto y pertenece al segmento	(D. de punto medio (i))	El punto N podría ser punto medio del $\overline{AB}$

Bayron expresa otro argumento. El dato es que N no pertenece al $\overline{AB}$, la garantía no es explícita pero se evoca la definición de punto medio, y la aserción es que el punto N no es punto medio del $\overline{AB}$. En su argumento usa la contrarrecíproca de la definición de punto medio.

Argumento 22. DAI-T5-3

Dato	Garantía	Aserción
Si el punto N no pertenece al segmento	(D. de punto medio (i))	El punto N *no podría ser punto medio* del $\overline{AB}$

Argumento deductivo – analítico – completo

El siguiente fragmento de transcripción se toma de una discusión grupal en la que Miriam, del Grupo D, y Bayron, del Grupo C, analizan el ítem dos de la Tarea 5.

346	Profesora	¿Qué condición cumple [el punto N] para que pudieras decir que es el punto medio [del $\overline{CD}$] ?
347	Miriam	Pues lo que yo dije es algo así como lo de Bayron. Yo digo que no porque al igual no pertenece al segmento. [Hace referencia al punto N]
348	Profesora	¿Ahí sería punto medio? [Dibuja un punto sobre el $\overline{DC}$ que visualmente parece ser el punto medio.]
349	Miriam	Pues ahí sí. Pero si se puede correr, pues obvio no.
350	Bayron	Pues lo que dice Miriam, que se puede correr el punto N al segmento, del mismo modo no cumpliría con ninguna de esas características del punto medio. [Hace referencia a mover el punto N al segmento DC de tal forma que visualmente pareciera punto medio]

En la conversación se pueden identificar dos argumentos de Miriam. El dato del primer argumento es que N no pertenece al $\overline{CD}$; la garantía no la hace explícita pero sería la definición de punto medio parte (i) y la aserción es que el punto N no es punto medio del $\overline{DC}$.

Argumento 23. DAC-T5-4

Dato	Garantía	Aserción
El punto N *no pertenece al segmento* CD	(D. de punto medio (i))	El punto N no es punto medio del $\overline{DC}$

El segundo argumento de Miriam, que si N se puede mover sobre el $\overline{CD}$, deja de ser punto medio. Es un argumento esencialmente igual al argumento DAI-T5-4, solo que se refiere al $\overline{CD}$ y no al $\overline{AB}$.

Argumento deductivo – analítico –incompleto

Siguiendo la conversación anterior, el argumento de Bayron parte, como lo hace Miriam, de imaginar que el punto N se puede mover al $\overline{DC}$. La aserción es que el punto N no es punto medio del $\overline{DC}$. La garantía es la definición de punto medio pues menciona, equivocadamente, que no cumple ninguna de las propiedades de punto medio, razón suficiente para no ser punto medio.

Argumento 24. DAI-T5-5

Dato	Garantía	Aserción
Si se puede correr el punto N *al segmento CD*	D. Punto medio	El punto N no es punto medio del $\overline{DC}$

La diferencia entre el primer argumento de Miriam y el de Bayron es que el primero es categórico, es decir, se basa en la figura representada en el tablero, N no es un punto del $\overline{CD}$. El segundo, en cambio, es plausible pues se basa en imaginarse que N sí se puede mover.

4.2.6 Análisis Tarea 6

Esta tarea fue clasificada como TA-IAJC (Sección 4.1.6). Se desarrolló en dos momentos; en el primero los estudiantes trabajaron en la sala de informática. En los computadores tenían un archivo en GeoGebra que representaba un cuadrilátero con sus respectivas diagonales. A partir de la exploración, los estudiantes debían determinar las propiedades del punto X. En el segundo momento, los estudiantes se trasladaron a su salón de clase. Recibieron una hoja en la que estaba representada la misma figura, pero que incluía el símbolo usado para indicar la congruencia de los segmentos PX y XR, cosa que se esperaba descubrieran con la exploración. Tenían que consignar las características geométricas que encontraron durante la exploración con GeoGebra.

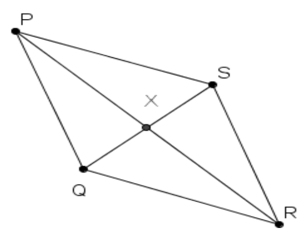


Figura 16. Figura Tarea 6, representada en GeoGebra

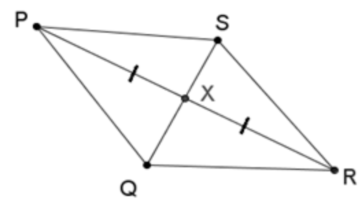


Figura 17. Figura Tarea 6, representada en papel

Argumento deductivo– analítico– completo

Este argumento surgió durante el trabajo en la sala de informática. El siguiente fragmento de transcripción es tomado del Grupo B.

436	Sergio	Miramos que el punto X pues sí pertenece al segmento. Pero no es el punto medio del segmento QS.
437	Profesora	¿Cómo sabes qué no?
438	Nancy	Porque se nota acá que tiene más distancia que acá [señala el $\overline{XQ}$ y luego $\overline{XS}$].
439	Profesora	Ah bueno. Se nota. Pero, ¿cómo puedes garantizar que efectivamente no tienen la misma distancia?
440	Sergio	Midiéndolo.
441	Profesora	Entonces mídelo.
442	Sergio	[Usan la herramienta *Longitud o Distancia* de GeoGebra.] De aquí a aquí tiene uno y medio. Y aquí, uno dos.
451	Profesora	Entonces, ¿qué puedes concluir ahora?
452	Sergio	Pues que como tienen diferente medida no es el punto medio; deben medir lo mismo.

En esta conversación se identificó un argumento colectivo, armado por Sergio y Nancy. Proveen como aserción que X no es punto medio del segmento. Como datos indican que X pertenece al $\overline{QS}$ y que no se cumple la equidistancia. Nancy los asegura basándose en que visualmente el $\overline{QX}$ y el $\overline{SX}$ se ven de diferente longitud. Cuando la profesora los cuestiona sobre cómo pueden asegurarse, sin basarse en la visualización, que los $\overline{SX}$ y $\overline{QX}$ no son congruentes, Sergio busca una estrategia: los mide. La garantía para asegurar que no es puntos medio es que no se cumple la parte (ii) de la definición de punto medio. En su argumento, Sergio usa la contrarrecíproca.

Argumento 25. DAC-T6-1

Dato	Garantía	Aserción
El punto X pues sí pertenece al $\overline{QS}$ *se nota acá que tiene más distancia que acá* [señala el $\overline{XQ}$ y luego $\overline{XS}$] (Nancy) $\overline{XQ}$ y $\overline{XS}$ *tienen diferente medida* (Sergio)	(D. de punto medio (ii))	El punto X no es punto medio del $\overline{QS}$.

Argumento deductivo - analítico - incompleto

Los otros tres argumentos se enunciaron cuando los estudiantes estaban, en el salón de clase, escribiendo las propiedades que habían encontrado. El siguiente fragmento de transcripción corresponde a la conversación del Grupo C con la profesora.

422	Bayron	Primero aquí aparece que el segmento PR. El punto medio es X, porque es congruente porque tienen la misma distancia [señalan en la hoja $\overline{PX}$ y $\overline{RX}$ y el símbolo de congruencia].
423	Profesora	¿Qué es congruente?
424	Juan	Las rayitas de acá significan que son congruentes.
425	Bayron	Que miden lo mismo. Por eso tienen esa rayita.

El argumento que realiza Bayron inicia proveyendo la aserción: el punto X es punto medio del $\overline{PR}$. Bayron hace referencia a la relación de equidistancia entre el punto X y los extremos del $\overline{PR}$ (datos). Aunque no menciona explícitamente la definición de punto medio, Bayron se apoya en la parte (ii) de esta.

Argumento 26. DAI T6-2

Dato	Garantía	Aserción
Que tienen la misma distancia los $\overline{PX}$ y $\overline{RX}$	(D. de punto medio parte (ii))	*El punto medio* del $\overline{PR}$ *es X*

El segundo argumento lo construyen conjuntamente Juan y Bayron. Juan da el dato que los $\overline{PX}$ y $\overline{RX}$ son congruentes y Bayron la aserción que los $\overline{PX}$ y $\overline{RX}$ miden los mismo, pues interpretan correctamente la información consignada en la figura. La garantía no es explícita pero utilizan la definición de segmentos congruentes. Desencapsulan la definición.

Argumento 27. DAI T6-3

Dato	Garantía	Aserción
$\overline{PX}$ y $\overline{RX}$ *son congruentes*	(D. de segmentos congruentes)	*Miden lo mismo*

Argumento deductivo – analítico – completo

El último argumento surge durante la conversación del Grupo A con la profesora.

454	Gina	[Señala lo que escribió en la hoja: X es punto medio del $\overline{PR}$.] Nosotros hicimos una que fue un hecho geométrico que hicimos en el cuaderno [Se refiere a la definición de punto medio que consignaron en sus cuadernos.]. Entonces acá nosotros decimos que el punto X es punto del segmento PR.
455	Profesora	¿Por qué lo puedes decir?
456	Gina	Porque por el hecho número uno que nos dice que el punto X pertenece al $\overline{PR}$. Y también tenemos otra que es por el hecho número dos que estos son congruentes o sea que el $\overline{PX}$ es congruente con el $\overline{XR}$
457	Profesora	¿Qué entiendes por congruencia?
458	Gina	Que si tú lo mides, debe dar la misma medida, o sea el mismo número.

El argumento de Gina tiene como dato que X *pertenece al* $\overline{PR}$ *y que* $\overline{PX}$ y $\overline{QX}$ *son congruentes.* La garantía del argumento es la definición de punto medio, en la que explícitamente Gina hace referencia a las dos condiciones de la definición; implícitamente se remite a la equidistancia pero haciendo alusión a otra relación trabajada en clase que es la congruencia de segmentos cuando explica que dos segmentos son congruentes. La aserción es que el punto X es punto medio del $\overline{PR}$. En este argumento encapsulan la definición de punto medio. Por primera vez, los estudiantes buscan en el cuaderno la definición para explícitamente comprobar que se corresponde lo que dicen con las dos propiedades dadas en esta.

Argumento 28. DAC-T6-4

Dato	Garantía	Aserción
El punto X pertenece al $\overline{PR}$ *El* $\overline{PX}$ *es congruente con el* $\overline{XR}$.	(D. de punto medio) *Hecho partes i y ii*	*El punto X es punto medio del* $\overline{PR}$

4.2.7 Análisis Tarea 7

Esta tarea fue clasificada como TNA-A (Sección 4.1.7). Se realiza en tres momentos; en el primero, se presenta la definición de mediana de un triángulo y se pide a los estudiantes que la interpreten y realicen la representación en GeoGebra. En el segundo momento, los estudiantes abren un archivo en el que se presentan diferentes representaciones gráficas de ejemplos y no ejemplos de mediana. Ellos deben identificar si el segmento representado corresponde a una mediana y justificar su respuesta. En el último momento, los estudiantes deben representar en GeoGebra todas las medianas de un triángulo. Durante el desarrollo de la tarea, fue necesario aclararles a los estudiantes la expresión *lado opuesto al vértice* mencionada en la definición. En esta tarea se identificaron seis argumentos que surgieron cuando la profesora interactuaba con cada grupo de estudiantes.

Argumento deductivo – analítico - incompleto

En el siguiente fragmento del Grupo C, Bayron, después de representar un triángulo con la herramienta *Polígono,* expone cómo interpreta la definición para hacer su respectiva representación.

595	Bayron	Bueno. Aquí donde dice punto; nos fuimos a *Medio o Centro*, entre el $\overline{BC}$, y pusimos el $\overline{AD}$.
596	Profesora	¿Puedo decir que ese segmento es la mediana?
597	Bayron	Sí señora.
598	Profesora	¿Por qué puedo decir que es la mediana?
599	Bayron	Porque está entre el segmento BC, en la mitad y tiene la misma distancia. Nosotros cogimos el punto A que está al frente del $\overline{BC}$.

En el primer argumento de Bayron se evidencia un argumento deductivo analítico, en el que los datos corresponden a que el punto D está en el segmento y equidista de los extremos A y C. Como garantía utiliza la definición de punto medio que no la menciona. Como aserción establecen que el punto D es punto medio del $\overline{BC}$, que tampoco la menciona.

Argumento 29. DAI-T7-1

Datos	Garantía	Aserción
El punto D *está entre el* $\overline{BC}$, *en la mitad y tiene la misma distancia*	(D. punto medio, parte i y ii)	D es punto medio del segmento.

El segundo argumento de Bayron es que como D es punto medio del $\overline{BC}$ y A es el vértice opuesto al $\overline{BC}$ (datos), el $\overline{AD}$ es mediana (aserción). La garantía es la definición de mediana que no la menciona.

Argumento 30. DAI-T7-2

Datos	Garantía	Aserción
El punto D es punto medio del $\overline{BC}$ y *cogimos el punto A que está al frente del* $\overline{BC}$	(D. de mediana)	$\overline{AD}$ es mediana del triángulo.

En este argumento se evidencia que Bayron encapsula la definición punto medio porque usa la definición de mediana y esta exige punto medio.

Argumento deductivo – analítico – completo

En el siguiente fragmento, Sergio, del Grupo B argumenta acerca del número de medianas que tiene un triángulo, utilizando la definición de triángulo.

603	Profesora	¿Cuántas medianas pueden tener un triángulo?
604	Sergio	Si esto [señalando lo que había hecho en GeoGebra] se hace con cada lado, entonces sería tres medianas.
605	Profesora	¿Cuántas?
606	Sergio	Tres, porque el triángulo tiene tres lados y tres vértices, entonces también tiene tres medianas.

Sergio plantea un argumento deductivo analítico completo, en el cual los datos corresponden al número de lados y vértices de un triángulo; la garantía de Sergio la definición de mediana; como aserción establecen que un triángulo tiene tres medianas.

Argumento 31. DAC-T7-3

Datos	Garantía	Aserción
$\Delta\, ABC$ *tiene tres lados y tres vértices*	(D. Mediana y D. de triángulo)	*Un triángulo tiene tres medianas*

Argumento abductivo-analítico- incompleto

Como parte de la interpretación de mediana de un triángulo, el Grupo D manifiesta porque E es punto medio.

622	Profesora	¿Qué me puede garantizar que siempre va a ser el punto medio?
623	Miriam	Que no se mueva.
624	Mauricio	Medirlo también, que tenga las mismas medidas.
625	Miriam	Que pertenezca al segmento.
626	Mauricio	Tenga las mismas medidas de los segmentos EB y EA.

Este es un argumento abductivo analítico incompleto y además colectivo. Parten de la aserción: E es punto medio. Desencapsulan las dos propiedades de la definición: pertenecer al segmento y ser equidistante de los extremos. Miriam menciona la primera propiedad y Mauricio la segunda. No indican explícitamente que están refiriéndose a la definición.

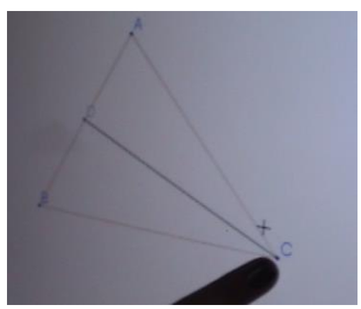
Argumento 32. AAI-T7-4

Datos	Garantía	Aserción
Que pertenezca al segmento *Tenga las mismas medidas del* $\overline{EB}$ *y del* $\overline{EA}$	(D. punto medio)	El punto E debe ser punto medio del $\overline{AB}$

Argumento deductivo – analítico – completo

El siguiente fragmento es la continuación de la conversación anterior, en la que Mauricio del Grupo D argumenta por qué el $\overline{CE}$ es una mediana.

627	Profesora	¿Por qué puedo garantizar que el $\overline{CE}$ es una mediana?
631	Mauricio	La definición dice que dado un triángulo… [Lee la definición dada por la profesora de mediana de su cuaderno].
634	Profesora	¿Cuál condición cumple la mediana?
635	Mauricio	Que digamos que es un segmento.
636	Profesora	¿Un segmento con que característica?
637	Mauricio	Que está en un vértice del triángulo. Del contrario, del que está al frente, como es que se llama…del lado opuesto [lee de la definición]
639	Profesora	¿Cuál vértice?
640	Mauricio	Sería el vértice C. Y el otro extremo está en punto medio.



Se evidencia explícitamente en el argumento de Mauricio el uso de la definición de mediana como garantía. El estudiante plantea un argumento deductivo analítico en el que los datos corresponde al $\overline{CE}$ con extremos en C, vértice del triángulo, y E punto medio del lado opuesto ($\overline{AB}$). Encapsulan las propiedades de mediana para dar como aserción que el $\overline{CE}$ es mediana.

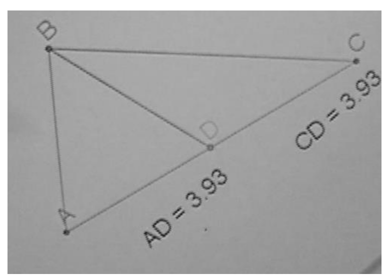
Argumento 33. DAC-T7-5

Datos	Garantía	Aserción
ΔABC es un segmento *que está en un vértice del triángulo el otro extremo está en punto medio.*	*D. de mediana*	$\overline{EC}$ es mediana

Argumento deductivo – sustancial empírico – incompleto

En la siguiente conversación, el Grupo A comunica la relación que creen se cumple entre la mediana de un triángulo y el área del mismo. Gina expone que la mediana *divide el triángulo… pues yo creo que nos da la mitad del triángulo* [743], refiriéndose a la región de la figura.

746	Profesora	¿La mitad del triángulo?
747	Gina	Sí, nos da un punto en la mitad de un segmento.
748	Laura	Yo medí de AD y me dio 3.93 y de CD me dio 3.93. Esto me garantiza que sea el punto medio D del segmento AC porque tienen la misma distancia.



749	Gina	Luego unimos el punto D con el punto B [Señala el vértice del triángulo] entonces si D es punto medio esta parte del triángulo debe ser igual a esta parte. [Señala la región del triángulo]. Como se divide la pizza, algo así.

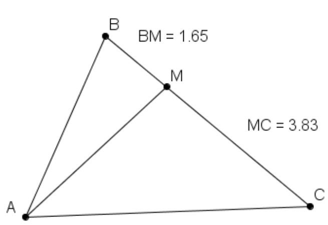
Gina plantea un argumento deductivo sustancial empírico incompleto en el que los datos corresponden a un ΔABC y una de sus medianas. Como garantía establece una relación con la definición de punto medio, la mediana y la región del triángulo. Como aserción establecen que la mediana divide a la mitad la región del triángulo. Este argumento se considera sustancial empírico ya que la garantía subyace la experiencia del estudiante dividiendo una pizza en dos partes iguales.

Argumento 34. DSEI-T7-6

Datos	Garantía	Aserción
El punto medio D del segmento AC y $\overline{BD}$ mediana del triángulo.	*Como se divide la pizza.*	*Esta parte del triángulo debe ser igual a esta parte*

Argumento deductivo-sustancial empírico- completo

En la segunda parte de la Tarea 7 se encontraron argumentos deductivos empíricos completos para justificar si el segmento representado era o no de una mediana. En cada una de las representaciones, los datos corresponden al triángulo dado, un segmento y unas medidas; como garantía utilizan la definición de mediana específicamente en lo que se refiere a punto medio (parte ii). Lo que mencionan para concluir que no es mediana es la condición que no cumplen. A continuación se presentan algunos registros escritos en lo que se señalan los datos que utilizaron los diferentes grupos para establecer la aserción.

<table>
<tr><th>Representación</th><th>Registro escrito</th><th>Aserción</th></tr>
<tr><td>Argumento 35. DSEC-T7-7


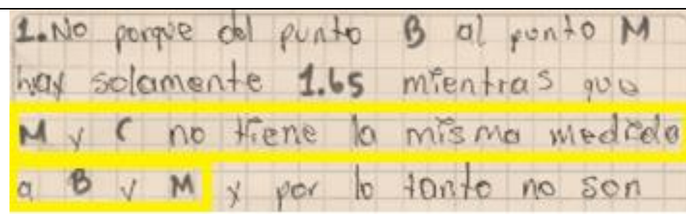
$\overline{AM}$ es mediana</td><td>

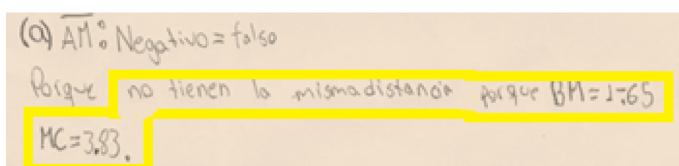
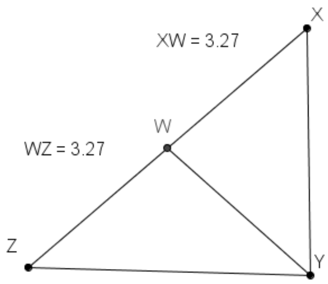
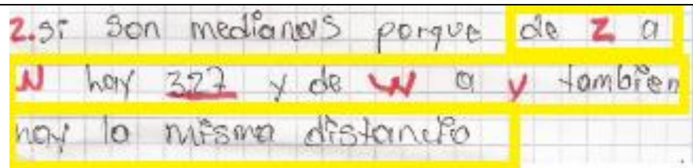
Figura 18. Registro Grupo A


Figura 19. Registro Grupo D</td><td>$\overline{AM}$ no es mediana del $\Delta ABC.$ porque punto M no es punto medio del $\overline{BC}.$</td></tr>
</table>

Representación	Registro escrito	Aserción

<table>
<tr><td>Argumento 36. DSEC-T7-8

$\overline{WX}$ es mediana</td>
<td>
Figura 20. Registro Grupo A

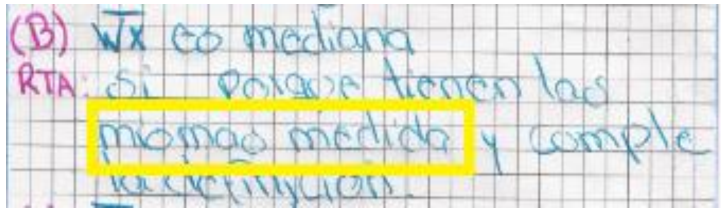



Figura 21. Registro Grupo B

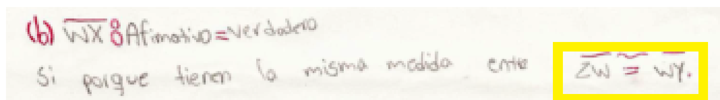
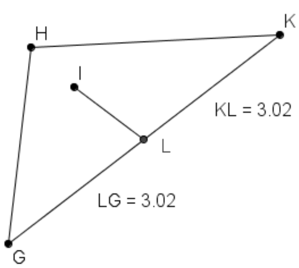
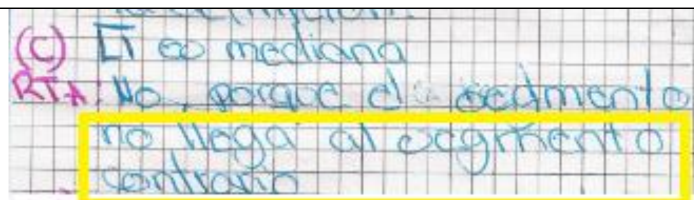



Figura 22. Registro Grupo C</td>
<td>$\overline{WX}$ es mediana del ΔXYZ porque W es punto medio de $\overline{ZY}$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Representación</th><th>Registro escrito</th><th>Aserción</th></tr>
<tr><td>Argumento 37. DSEC-T7-9

$\overline{IL}$ es mediana</td>
<td>
Figura 23. Registro Grupo B

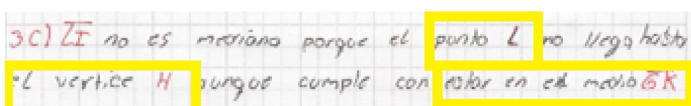



Figura 24. Registro Grupo C

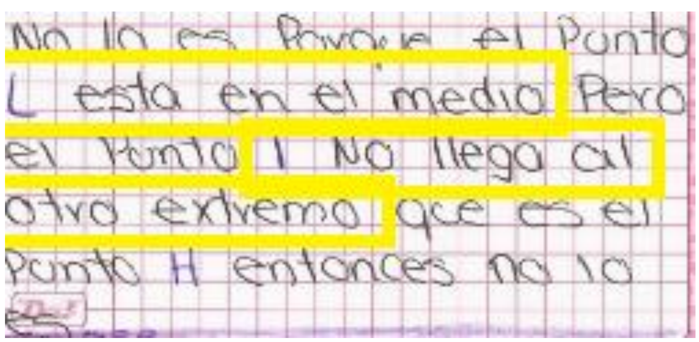
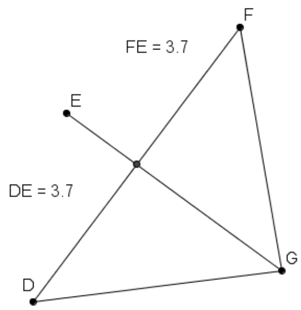



Figura 25. Registro Grupo A</td>
<td>El $\overline{IL}$ no es mediana del ΔGHK. Aunque el punto L que es uno de los extremos del segmento cumple la condición de ser punto medio del $\overline{GK}$. El otro extremo no es el vértice opuesto.</td></tr>
</table>

Representación	Registro escrito	Aserción

Argumento 38. DSEC-T7-10



$\overline{GE}$ es mediana

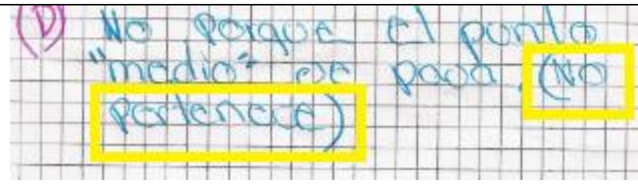


Figura 26. Registro Grupo B

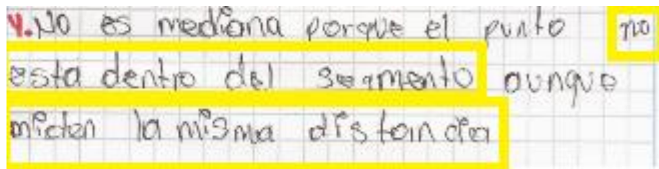


Figura 27. Registro Grupo A

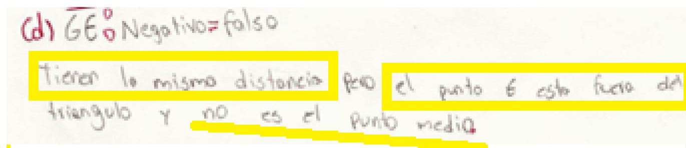


Figura 28. Registro Grupo C

El $\overline{EG}$ no es mediana del ΔDFG porque el punto E no es punto medio del $\overline{DF}$.

4.2.8 Análisis Tarea 8

Esta tarea fue clasificada como TA-C (Sección 4.1.8). Incluye dos archivos en GeoGebra. En el primero está representado un ΔABC y un $\overline{DE}$ (Figura 13) donde D es un punto fijo y E tiene libertad restringida al $\overline{CB}$. A través de la exploración los estudiantes deben determinar si existe un punto E en el $\overline{CB}$ tal que la medida del $\overline{DE}$ sea la mitad de la medida del $\overline{AB}$.

El segundo archivo está representado un ΔABC y el $\overline{DE}$ donde D es el punto medio del $\overline{AC}$. A través de la exploración los estudiantes determinan si existe un punto E en el $\overline{CB}$ tal que la medida del $\overline{DE}$ es la mitad de la medida del $\overline{AB}$, y, si existe, registran las características de dicho punto. En la solución de esta tarea, se identificaron tres argumentos.

Argumento deductivo – sustancial empírico - completo

El siguiente fragmento es una conversación del Grupo B con la profesora, cuando están explorando las características que tiene el punto D, solución a la situación presentada en el segundo archivo de GeoGebra.

780	Profesora	¿Qué característica tiene el punto D del ΔABC ?
781	Nancy	Este es un vértice [señala el punto A]. El punto D no se puede mover

		porque pertenece al segmento y es punto medio.
782	Sergio	El punto D también es punto medio.
783	Profesora	¿Cómo sabes que es punto medio?
784	Nancy	Se puede decir que tiene la misma distancia. [Hace referencia a la longitud de AD y DC]

El argumento que formula Nancy tiene como datos que el punto D pertenece al $\overline{AC}$ y que equidista de A y C. De manera no explícita, utiliza la definición de punto medio. La aserción es que el punto D es punto medio del $\overline{AC}$.

Argumento 39. DSEC-T8-1

Datos	Garantía	Aserción
El punto D pertenece al segmento *Se puede decir que* [D] *tiene la misma distancia* [a A y a C]	D. Punto medio	El punto D *es punto medio* del $\overline{AC}$

Argumento deductivo – sustancial no legítimo- completo

En la continuación de la conversación anterior, se presenta un argumento sobre la diferencia entre los puntos D y E.

792	Profesora	¿Qué características tiene E?
793	Nancy	Que se puede mover por todo el segmento.
794	Sergio	Si fuera punto medio no se podría mover.
796	Nancy	Bueno profesora. Yo lo puedo mover para que este exactamente en la mitad, pero si muevo la esquina del triángulo deja de ser punto medio.

Tanto Sergio como Nancy proveen un argumento para justificar que el punto E no es punto medio del $\overline{AC}$. Los argumentos difieren en la garantía y en los datos. La garantía en ambos casos es la definición de punto medio expresada a través de dos hechos geométricos que los estudiantes expresan en términos de la experiencia con GeoGebra. El primero: (HG_1) Si un punto de un segmento se puede mover sobre el segmento, entonces no es punto medio del segmento. El segundo: (HG_2) Si al mover un extremo de un segmento no se conserva la equidistancia entre un punto del segmento y los extremos, entonces el punto no es punto medio. Para el primer argumento Nancy provee los datos: el punto E se puede mover libremente sobre el $\overline{CB}$. Sergio da la aserción: E no es punto medio del $\overline{AC}$. La garantía es el primer hecho geométrico mencionando anteriormente. El segundo argumento es de Nancy. Los datos son que bajo el arrastre del punto C no se mantiene la equidistancia de E a C y a B; la garantía es el segundo hecho geométrico ya mencionado y la aserción que E no es punto medio.

Argumento 40. DSNLC-T8-2

Datos	Garantía	Aserción
El punto E se puede mover por todo el $\overline{CB}$	(D. Punto medio-HG_1)	El punto E no es punto medio del $\overline{CB}$

Argumento 41. DSNLC-T8-3

Dato	Garantía	Aserción
Arrastre del punto D quien no se mantiene equidistante a los extremos del segmento.	(D. Punto medio-HG_2)	El punto E debe ser punto medio del $\overline{CB}$, para que la medida $\overline{DE}$ sea la mitad del $\overline{AB}$

4.2.9 Análisis Tarea 9

Esta tarea fue clasificada como TA-AC (Sección 4.1.9). Los estudiantes contaban con el siguiente enunciado y el HG Segmento Extremos Punto Medio en Triángulo (Sección 4.1.8):

> *Sea el ΔABC, D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. Observe los ΔABC y el ΔDEF. ¿Qué relación existe entre los perímetros de esos triángulos? Justifique su respuesta.*

En esta tarea, los estudiantes realizaron la representación gráfica del enunciado cumpliendo con las condiciones requeridas.

El Grupo C aborda la tarea comparando los perímetros de los ΔABC y ΔDEF, y formulan la siguiente conjetura:

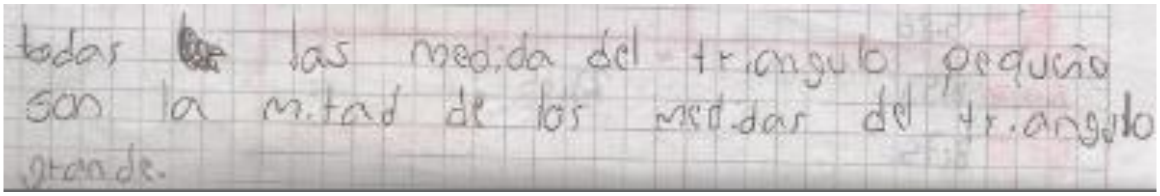
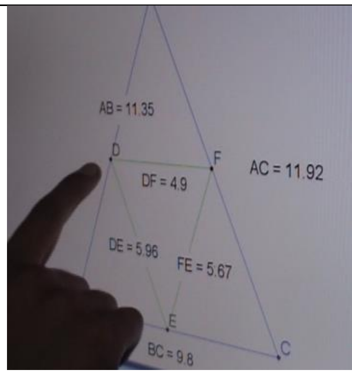
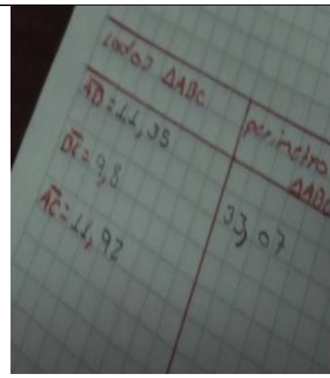
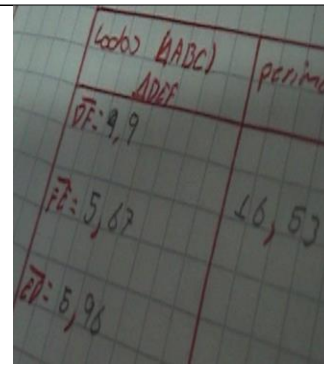


Figura 29. Conjetura Grupo C

En la *Tabla 20*, se presentan los momentos de la exploración realizada.

Tabla 19. Momentos en la exploración de la tarea 9. Grupo C

REGISTRO VIDEO-GRABACIÓN			
DESCRIPCIÓN DEL MOMENTO	**Momento 1** Construyen el ΔABC, los puntos medios de los lados del triángulo, y el ΔDEF. Seguido a esto, miden la longitud de los lados de ambos triángulos.	**Momento 2:** Registran las medidas de las longitudes de los lados del ΔABC y calculan el perímetro.	**Momento 3:** Registran las medidas de las longitudes de los lados del ΔDEF y calculan el perímetro.

Luego representan la situación nuevamente, en otro archivo, a petición de la profesora. En la siguiente conversación el grupo expone su proceso y sus argumentos durante el desarrollo de la tarea.

Argumento deductivo – sustancial empírico – completo

915	Profesora	¿Y ahora qué vas hacer?
916	Bayron	Mido el segmento DF que me **tiene que** dar la mitad del segmento BC.
917	Profesora	Y de acuerdo con el triángulo anterior [se refiere a lo que encontraron cuando hicieron el primer ejemplo.] y este, ¿qué puedes concluir?
918	Bayron	Todas las medidas del triángulo pequeño son la mitad de las medidas del triángulo grande.

Se evidencian dos argumentos. El primero [916] es deductivo, los datos son que D y F son puntos medio de dos lados del ΔABC. La garantía es analítica (HG Segmento Extremos Punto Medio en Triángulo). La aserción es que la medida del $\overline{DF}$ es la mitad de la del $\overline{BC}$.

Argumento 42: DAC-T9-1

Datos	Garantía	Aserción
D y F son puntos medio de dos lados del ΔABC.	(HG Segmento Extremos Punto Medio en Triángulo)	La medida del $\overline{DF}$ es la mitad de la del $\overline{BC}$.

El segundo argumento es inductivo pues generaliza el primer argumento, los datos son que D, E y F son puntos medio. La tesis de la garantía es "todas las medidas del triángulo pequeño son la mitad de las medidas del triángulo grande". La hipótesis de esta garantía no la menciona explícitamente. La aserción es la comparación entre las medidas de los lados del ΔDEF con las de los lados del ΔABC.

Argumento 43. ISEC-T9-2

Datos	Garantía	Aserción
El $\Delta\, ABC$ y ΔDEF donde D, E y F son puntos medios de los lados del ΔABC	Si D, E y F son puntos medios de los lados del ΔABC entonces *todas las medidas del triángulo pequeño son la mitad de las medidas del triángulo grande*	Las medidas de los lados del ΔDEF son la mitad de las correspondientes del Δ ABC

Argumento deductivo – analítico – completo

El Grupo B expone una conjetura igual a la del Grupo C, pero usan el hecho geométrico que se estableció en la Tarea 8.

941	Sergio	Nosotros encontramos que los perímetros del triángulo DEF son la mitad de los perímetros del triángulo ABC.
942	Profesora	Demuéstreme que lo que acabas de encontrar es cierto.
943	Nancy	[Nancy propone medir los segmentos] Estamos midiendo los segmentos del triángulo que son BA, BC y AC . Vamos a medir los segmentos del triángulo

más pequeño [le muestra a la profesora lo que hizo utilizando el software]

944 Sergio No los midamos. El hecho geométrico que encontramos la clase pasada dice que esto mide la mitad [señala el segmento DF].

945 Nancy Sería la mitad de cada segmento. Eso da.

El primer argumento es analítico completo deductivo. Los datos son D, E y F puntos medio de los lados del ΔABC. La garantía es el HG Segmento Extremos Punto Medio**.** La aserción es que cada segmento determinado por los puntos medio miden la mitad del segmento correspondiente del ΔABC.

Argumento 44: DAC-T9-3

Datos	Garantía	Aserción
D, E y F puntos medio de los lados del ΔABC.	HG Segmento Extremos Punto Medio	Las medidas de los lados del ΔDEF son la mitad de las correspondientes del Δ ABC

El segundo es deductivo con garantía algebraica propiedad distributivo suma de mitades es mitad de suma. Datos: cada segmento del ΔDEF mide la mitad de los segmentos correspondientes del ΔABC. Aserción el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC. Esta situación es importante porque Sergio reconoce que no es necesario medir los segmentos sino hacer uso del hecho geométrico para resolver el problema. Esto es ejemplo del uso experto del hecho geométrico, pues reconoció que se tenían las condiciones exigidas en el antecedente del hecho geométrico y estableció el consecuente, aplicándolo a cada uno de los lados del triángulo DEF. Es un paso hacia el mundo teórico. Esto le demuestra de nuevo cuando en la socialización, a petición de la profesora, Sergio expresa su conjetura como condicional:

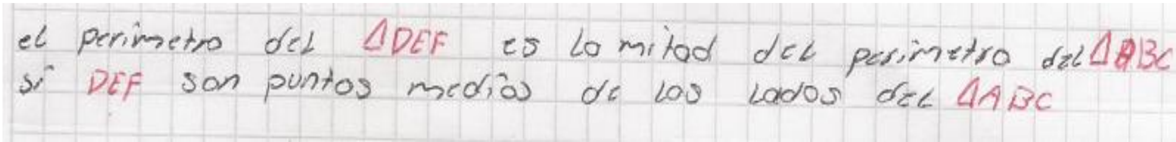

el perimetro del ΔDEF es lo mitad del perimetro del ΔABC
si DEF son puntos medios de los lados del ΔABC

Figura 30. Registro escrito Tarea 9

Argumento 45. DAC-T9-4

Datos	Garantía	Aserción
El $\Delta\,ABC$ y ΔDEF donde D, E y F son puntos medios de los lados del ΔABC	HG Segmento Extremos Punto Medio	Los perímetros del ΔDEF son la mitad de los perímetros del ΔABC

Tabla 20. Resumen análisis de los argumentos

Tareas		1 TNA-C			2 TNA-J			3 TNA-A			4 TNA-A			5 TNA-A			6 TA-IAJC			7 TNA-A			8 TA-C			9 TA-AC			Total
Garantías / Argumentos		SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	SE	SNL	A	
Deductivos	**I**	**1**			**5**		**4**			**2**						**4**			**2**	**1**		**2**							21
	C						**1**	**1**								**1**			**2**	**4**		**2**	**1**	**2**				**3**	17
Abductivos	**I**	**2**								**1**			**1**									**1**							5
	C																												0
Inductivos	**I**	**1**																											1
	C																											**1**	1
Total		**4**	**0**	**0**	**5**	**0**	**5**	**1**	**0**	**3**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**5**	**0**	**0**	**4**	**5**	**0**	**5**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**4**	**45**
		4			**10**			**4**			**1**			**5**			**4**			**10**			**3**			**5**			

En esta tabla se consigna la cantidad de argumentos que se dieron según su estructura (deductivos, abductivos e inductivos); según la forma de su estructura; incompleto (I) o completos (C); según la naturaleza de la garantía: sustancial empírica (SE), sustancia no legitima (SNL) y analítico (A).

4.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para responder la pregunta de investigación, se identifican en ella dos cuestiones que hay que atender: (1) las características de las tareas, y (2) el tipo de argumentos que se generan durante la implementación de la secuencia de tareas. Teniendo en cuenta lo anterior, se busca establecer una relación entre el tipo de tareas y los argumentos para determinar si se promueve el uso experto de un elemento teórico.

4.3.1 Relación tipo de tarea-tipo de argumentos

Para el análisis de los resultados se hace una comparación entre los diferentes tipos de tareas y los tipos de argumentos estableciendo relaciones entre estos dos aspectos, como se presenta a continuación:

Tabla 21. Análisis tipo de tareas vs argumentos

Argumentos / Tipo de tarea	Deductivos		Inductivos		Abductivos		Total		
	C	**I**	**C**	**I**	**C**	**I**	**C**	**I**	
Abierta TA (3)	8	2	1	0	0	0	9	2	11
No abierta TNA (6)	9	19	0	1	0	5	9	25	34
Total	38		2		5		18	27	**45**

I: Argumento Incompleto C: Argumento Completo

En la *Tabla 21* podemos ver que la mayor cantidad de argumentos se generaron en TNA (34/43). Podemos inferir que esto se debe a que: i) en la secuencia hay más TNA que TA; ii) como en este tipo de tareas el método es cerrado y exige una respuesta definida, provee al estudiante una ruta para resolver la tarea. Parece que esto último hace más factible la producción de argumentos; y iii) la profesora constantemente indagaba a los estudiantes sobre sus soluciones a los problemas.

De los argumentos generados en el desarrollo de las TNA (34/45), 21/38 son incompletos, generalmente porque la garantía no se hizo explícita aunque se usó. Por lo anterior, consideramos que se debe a que, en el proceso de conceptualización de un elemento teórico, a medida que se va ganando comprensión de la definición del concepto, sus relaciones con otros conceptos y sus diferentes representaciones (imagen del concepto) se van obteniendo elementos para poder argumentar. Dado que producir argumentos analíticos era un proceso novedoso para los estudiantes, solo si se establece como norma de clase decir explícitamente la garantía de su argumento, norma cuyo cumplimiento el profesor tiene que exigir constantemente, se puede esperar que los argumentos sean completos. Adquirir esa costumbre es un proceso lento. Por ello, los argumentos completos que se generaron en las TNA, 17/38 se presentaron en su mayoría, en el desarrollo de las últimas tareas de la secuencia.

En cuanto al número de argumentos generados en las TA, fueron menos (11/45) pero la mayoría de estos son completos (9/11). Este tipo de tareas exigen proponer un método, lo que eleva el nivel de dificultad de estas. Es posible que por ello menos estudiantes expresen sus argumentos, pero los argumentos expuestos fueron analíticos. Dado que las TA son más exigentes, fue necesaria mayor intervención de la profesora, y ello pudo llevar a la generación de más argumentos completos.

En cuanto a la estructura de los argumentos, se encontró que 38/45 son deductivos; la mayoría se dieron durante el desarrollo de TNA (28/38). Probablemente esto se debe a que al ser tareas de método cerrado y respuesta definida, se le provee al estudiante los datos y la aserción. Solo resta por identificar la garantía que es útil para deducir de los datos la aserción. El uso experto, en este caso, consiste en encapsular o desencapsular una definición o usar un hecho geométrico para establecer la aserción.

Es interesante ver que los argumentos inductivos se generaron tanto en las TA y TNA, lo que nos lleva a plantear que este tipo de razonamiento se puede promover utilizando diferentes tipos de tarea. Los argumentos abductivos solo se generaron en TNA. Dado que en ambos tipos de tareas surgieron los tres tipos de argumentos, se deben proponer TA y TNA para propiciar la formulación de argumentos diferentes a los deductivos.

4.3.2 Relación tipo de tarea-naturaleza de la garantía

De acuerdo a la revisión de los argumentos, se presenta en la *Tabla 22* las garantías que se evidenciaron de acuerdo al tipo de argumentos. Se puede identificar que dentro de los argumentos deductivos que se generaron durante el desarrollo de las tareas, 13/38 son sustanciales empíricos, los cuales se generaron en las primeras tareas dado a que en el proceso se estaban adquiriendo elementos teóricos. Es importante reconocer como las garantías analíticas fueron sobresaliendo de manera espontánea en el desarrollo de las últimas tareas.

Tabla 22: Relación tipo de argumento-naturaleza de la garantía

Argumentos / Garantías	Deductivos	Inductivos	Abductivos	Total
Sustancial empírico	13	1	2	16
No legítimos	2	0	0	2
Analíticos	23	1	3	27
Total	38	2	5	45

Otra mirada que se hace de las garantías es de acuerdo al tipo de tarea, como se presenta en la *Tabla 23.* Se evidenció que los argumentos sustanciales empíricos predominan en las TNA (15/34) lo que es importante dado que, en este tipo de tareas se desarrollan procesos matemáticos que conllevan a la construcción de definiciones y descubrimiento de hechos geométricos, que son elementos teóricos para el desarrollo de las TA.

En ambos tipos de tarea, la mayoría de los argumentos fueron analíticos (8/11 en TA y 19/34 en TNA). Esto se debe a que los estudiantes usaran gradualmente elementos teóricos en las garantías lo que transformaba los argumentos sustanciales empíricos a analíticos. Como evidencia de esto se puede ver en la *Tabla 22* que en la primeras cuatro tareas se evidenciaron 10 argumentos sustanciales empíricos y 8 argumentos analíticos, mientras que de la tarea 5 a la 8 se evidenciaron 6 argumentos sustanciales y 14 analíticos. Aunque en las TNA predominaron los argumentos incompletos, la mayoría de estos los clasificamos como analíticos porque era evidente que estaban usando algún elemento teórico sin expresarlo.

Tabla 23. Relación tipo de tareas-naturaleza de las garantías

Tipo de tareas	**TA**			**TNA**		
Garantías	**SE**	**NL**	**A**	**SE**	**NL**	**A**
Total	1	2	8	15	0	19
	11			34		

SE (argumento sustancial empírico), NL (argumento no legítimo), A (argumento analítico)

4.2.3 Relación tipo de tarea- uso experto

El uso experto del elemento teórico de la definición de punto medio de un segmento se logró paulatinamente. Este uso solo se podía dar en las tareas 3, 4, 5, y 6, ya que en las primeras dos tareas se buscaba que se reconocieran e identificaran las propiedades de punto medio para afianzar la definición, a través de la exploración. En la tarea 7 se evidenció el uso experto de la definición de mediana y finalmente en las tareas 8 y 9 se descubrió y se hizo uso de un hecho geométrico.

En cuanto al uso experto de la definición de punto medio de un segmento, se generaron dos argumentos que encapsularon la definición (argumentos 18 y 28). En ellos se reconocen las propiedades para establecer que se cumple la definición. También se generaron tres argumentos que desencapsulan la definición (argumentos 15,19 y 27) porque se parte de la definición identificando las propiedades del punto medio para resolver la tarea. En relación al uso experto de la definición de mediana, se generó un argumento que encapsuló la definición (argumento 33).

Tabla 24. Argumentos en los que se evidencio uso experto

	Definición Punto Medio				**Definición Mediana**
Tareas	**3** TNA-A	**4** TNA-A	**5** TNA-A	**6** TA-AJC	**7** TNA-A
Encapsula	18	0	0	28	33
Desencapsula	15	19	0	27	0

El número en cada casilla corresponde al número del argumento.

En las tareas 8 y 9, se evidenció en los argumentos 39, 40 y 41 que estos se relacionan con el descubrimiento del hecho geométrico estableciendo la condición de que los extremos de un segmento sean puntos medios de dos de los lados de un triángulo para que el lado restante mida el doble. Y en los argumentos 42 y 43 se evidenció el uso de este hecho geométrico para plantear una conjetura y validarla.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1 EN CUANTO A LAS TAREAS MATEMÁTICAS

En el proceso realizado durante este estudio, reconocimos que las tareas matemáticas que se proponen en el aula son el eje fundamental de la práctica docente. Por ello, se requiere diseñarlas cuidadosamente para que sean adecuadas. Al diseñar una tarea, el profesor de matemáticas debe tener claro cuál es el objetivo de esta; este debe estar directamente relacionado, tanto con la conceptualización de un objeto o relación matemático como con los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar, como la generalización, la visualización, la justificación, la argumentación. Se debe propiciar la exploración de diversas representaciones de la imagen del concepto, y el uso de la definición del concepto en diferentes contextos, para favorecer el proceso de conceptualización y el uso experto de dicho elemento teórico.

También es necesario establecer la meta y el método de la tarea, que pueden ser: abierto o cerrados. Esta diferenciación es crucial, dado que determina el rol del profesor durante el desarrollo de la tarea, para asegurar que la actividad matemática que se espera promover con la tarea, se dé. Se debe tener en cuenta que es mejor proponer inicialmente tareas de metas cerradas mientras los estudiantes van adquiriendo elementos teóricos que les permitan idear estrategias de solución, utilizar garantías legítimas en sus argumentos y manejar con destreza los recursos utilizados en las clase de geometría (regla, compás, software de geometría dinámica, etc.), componentes requeridos para tareas de meta abierta. Esto lo evidenciamos durante el proceso realizado con los estudiantes de grado séptimo.

Con respecto a la secuencia de tareas, se observó que las Tarea 2 y 7, donde se estudian ejemplos y no ejemplos de figuras para determinar cuáles cumplen la definición y cuáles no, y que exigen justificar la respuesta, fueron las tareas que promovieron la mayor cantidad de argumentos analíticos. Esto valida lo que Camargo y Samper (2014) afirman sobre cómo favorecer la conceptualización de las definiciones, pues ellas sugieren proporcionar a los estudiantes ejemplos y no ejemplos, para que identifiquen las propiedades esenciales de lo que se va a definir. Las tareas propuestas fueron diseñadas para promover la argumentación matemática, y no simplemente para obtener un resultado concreto. Esto fue muy positivo porque les permitió a los estudiantes adquirir otra mirada de lo que es las matemáticas, la cual no siempre busca respuestas definidas sino también la justificación.

5.2 EN CUANTO A LA CONCEPTUALIZACIÓN DE UN ELEMENTO TEÓRICO Y SU USO EXPERTO

El proceso de conceptualización del objeto geométrico punto medio se abordó inicialmente con la exploración con geometría dinámica de un punto que el software identifica como punto medio de un segmento, con el propósito de descubrir las propiedades que lo definen. Durante el desarrollo de la secuencia de tareas, la participación de los estudiantes era cada vez mayor. Empezó a caracterizarse por el uso de los elementos teóricos establecidos en clase. Los estudiantes ya no solo se fundamentaban en la exploración y la visualización para garantizar sus argumentos, sino que empleaban las propiedades de punto medio para validar sus afirmaciones. Se identificó que la definición de punto medio se usa de manera experta al desencapsular las propiedades para resolver tareas que conllevan a la relación del punto medio con otros objetos geométricos como la mediana y el perímetro de un triángulo. De igual manera, se identificó el uso experto de un hecho geométrico en la última tarea en la que la relación entre los perímetros de dos triángulos: Sergio evoca el hecho geométrico y Nancy lo reafirma.

952	Nancy	[Nancy propone medir los segmentos] Estamos midiendo los segmentos del triángulo que son BA, BC y AC. Vamos a medir los segmentos del triángulo más pequeño [le muestra a la profesora lo que hizo utilizando el software]
953	Sergio	No los midamos. El hecho geométrico que encontramos la clase pasada dice que esto mide la mitad [señala el segmento DF]

954 Nancy Sería la mitad de cada segmento. Eso da.

A raíz de la exigencia de la profesora de explicar cómo obtuvieron la relación entre los perímetros, los estudiantes expusieron sus ideas y recurrieron al hecho geométrico para validarlas. Esto muestra cómo los profesores pueden mediar en el proceso de conceptualización de los estudiantes, para que ellos logren construir y desarrollar argumentos para sustentar sus ideas, utilizando los elementos teóricos construidos en clase.

En resumen, el proceso de conformar conjuntamente un sistema teórico local, permitió que los estudiantes fueran adquiriendo elementos que podían usar como garantías en sus argumentos. Durante las sesiones de clase, se evidenció cómo los estudiantes mejoraban su vocabulario, incorporando en él el lenguaje geométrico. Estas ganancias permitieron que, en las últimas tareas, los estudiantes se remitieran de manera explícita a las definiciones para desencapsular las propiedades de punto medio y de mediana de un triángulo, para justificar sus soluciones. El profesor juega un papel importante, con sus interacciones, en la construcción de significado de los elementos teóricos que pueden ser usados como garantías (Samper y Plazas, 2016).

5.3 EN CUANTO A LA GESTIÓN DEL DOCENTE

Durante el desarrollo de las tareas se evidenció el papel fundamental de la profesora para promover la argumentación a través de preguntas que orientaron el proceso de solución de las tareas e impulsaron la justificación matemática. No se trataba solamente de que el estudiante encontrara la solución a la tarea, sino que pudiera justificar la validez matemática de lo que hace en el proceso. También se resalta el espacio que la profesora destinó para que los estudiantes expusieran sus estrategias y procesos realizados para resolver las tareas. En este espacio, los estudiantes no solo formulaban argumentos sino que también se basaban en argumentos expuestos por sus compañeros para fundamentarse.

Enseñar a argumentar es un proceso que implica un cambio en las prácticas docentes, puesto que en un modelo de enseñanza tradicional esto puede ser muy difícil. Es necesario innovar las tareas que se proponen, vincular en ellas el uso de diferentes tipos de recursos y promover un espacio de participación de los estudiantes. Así el docente se convertirá en mediador del proceso y el estudiante en verdadero protagonista de su proceso de aprendizaje. Para ello es necesario que el aula de clase se convierta en un espacio de construcción social del conocimiento, donde el profesor deje de ser el que expone el conocimiento matemático ya elaborado, para convertirse en mediador en la construcción de dicho conocimiento. Los profesores deben mediar en el proceso de conceptualización de los estudiantes, para que ellos logren construir, y desarrollar argumentos para sustentar sus ideas, utilizando los elementos teóricos construidos en clase.

Como habitualmente en las clases de matemáticas no se acostumbra a justificar ideas, afirmaciones, resultados, ello es difícil para los estudiantes. Por lo tanto, establecer como norma de la clase de geometría justificar, no asegura resultados inmediatos. Justificar es un proceso que requiere el acompañamiento directo y continúo del profesor, a través de preguntas orientadoras y claves.

Esta experiencia enriqueció nuestra práctica docente, motivándonos a dedicar más tiempo y esfuerzo al diseño de las tareas. Esto no es suficiente ya que debemos pensar en cómo gestionarlas, tener prevista preguntas y posibles respuestas para saber cómo promover la argumentación matemática en cada caso. También reflexionamos sobre el impacto de la gestión docente en el desarrollo de las diferentes tareas, donde la comunicación es parte fundamental del aprendizaje. Es necesario cambiar la concepción del modelo tradicional del término “tarea” para incluir diferentes tipos de estas pues con ello se ofrecen oportunidades variadas para la argumentación. Creemos que esta experiencia se puede realizar desde grados iniciales, teniendo en cuenta que lo que se acepta como justificación debe ser acorde a la edad de los estudiantes.

5.4 EN CUANTO A LA CLASE DE GEOMETRÍA

Durante el desarrollo de la secuencia de tareas, se evidenció que los estudiantes cambiaron su actitud y disposición hacia la clase. Estudiantes que casi nunca participaban en clase, porque se les dificultaba y/o se consideraban "malos" para las matemáticas, aportaron ideas. La metodología empleada en clase fortaleció la capacidad de trabajar en equipo, fomentó el respeto a la palabra y favoreció la participación activa.

Esta experiencia nos llevó a reflexionar que, generalmente, en clase el profesor es quien toma la palabra durante el desarrollo de esta, formula y responde las preguntas, y establece conclusiones. El cambio de paradigma sobre la metodología de enseñanza que se propone en esta secuencia didáctica, coloca la participación genuina del estudiante como parte fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Al participar en las actividades que tienen como fin descubrir, establecer y usar definiciones o hechos geométricos, los estudiantes van adquiriendo elementos que les permite hacer uso experto de las definiciones y hechos geométricos como garantía en sus argumentos. Así se van empoderando de su proceso de aprendizaje, se vuelven propositivos y más analíticos de las situaciones que se les presentan. Durante el desarrollo de la propuesta didáctica, la clase de geometría se convirtió en un espacio de socialización, de participación y de exploración de cosas "nuevas".

También se quiere resaltar el papel de la geometría dinámica en la clase geometría. Los estudiantes aprendieron a utilizar GeoGebra sin mucha dificultad, y dada la curiosidad de los mismos, poco a poco fueron explorando otras herramientas del programa que no fueron ilustradas. El apoyo de este tipo de recursos es fundamental en la enseñanza de la geometría dado que le permite al estudiante, con la opción de arrastre, identificar propiedades y relaciones, que favorecen la formulación de conjeturas y la argumentación. Es un recurso didáctico que permite vincular al estudiante con la tarea propuesta y el uso de esta genera situaciones que despiertan el interés del estudiante. Esto promueve una mayor participación autónoma y activa durante el desarrollo y socialización de las tareas. Sin embargo, este tipo de recursos debe ser orientado y gestionado por el profesor, a través de tareas que requieran el uso de la geometría dinámica para construir, explorar, descubrir propiedades geométricas, en las que el estudiante debe poner en juego el conocimiento teórico con que cuenta para resolver un problema. Es así que se apoya el proceso de conceptualización.

BIBLIOGRAFÍA

Aya, O., Echeverry, A., y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometria dinamica. *TED*, 63-86.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*(25), 49-60.

Blanco, L., y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometria escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Relime, 6*(2), 107-132.

Camargo, L., y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. (. En Perry, *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (págs. 55-77). Bogotá: Sistema de Publicaciones y Dif.

Christiansen, B., y Walther, G. (1986). Task and activity. En A. G. In B. Christiansen, *Perspectives on mathematics education* (págs. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Da Ponte, J. P. (2004). La actividad matemática en el aula. En J. Giménez, & &. J. L. Santos, *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos.* (págs. 25-34). Barcelona: Graó.

Douek, N., y Scali, N. (2000). About argumentation and conceptualisation. *PME CONFERENCE*, (págs. (Vol. 2, pp. 2-249)).

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En B. (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (págs. 137-161). The Netherlands: Sense Publishers.

Gonzalez, A. (2015). *Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria.* Cantabria-España: Universidad de Cantabria.

Gorgorio, N., Artigues, F., Banyuls, F., Moyano, D., Planas, N., Roca, M., y otros. (1999). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo las rotaciones. *Suma, 33*, 59-71.

Gravemeijer, K. P. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular. *J. Cúrriculo Studies, 32*(6), 777-796.

Henningsen, M., y Stein, M. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics Learning in Narrative Classroom Cultures: Studies of Argumentation in Primary Mathematics Education. *Learning of Mathematio*, 22-32.

Marín, A. (2015). Selección de tareas "ricas" para el aprendizaje matemático en educación secundaria. *Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad* , (págs. 1-46). Bogotá.

Martínez, R. A. (2001). La demostración en matemáticas. Una aproximación espistemológica y didáctica. (U. d. Cordoba, Ed.) *Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática.*, (págs 29 - 43).

Miles, M., y Huberman, M. (1994). Qualitative Data Analysis. An Expanded Sourcebook. *Sage Publications: segunda edición:*, 5-11.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un Acercamiento a la investigación de diseño a traves de los experimentos de enseñanza . *Enseñanza de las Ciencias* , 75-89.

Ouvrier-bufé, C. (2006). Explorando los Procesos Definición construcción matemática. *Ciencias de la Educación en Matemáticas* , *63*(3), 259-282.

Rivera, A. (20 de Enero de 2012). Recuperado el 16 de Julio de 2016, de http://eltiempo.lasprovincias.es/meteorologia/signos-naturales-prediccion-del-tiempo

Samper, C. (2016). *En Geometría: Vía al razonamiento reporte de investigación.* Bogotá: Grupo Æ•G.

Samper, C., y Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. Revista Educación Matemática. N 29-1. En prensa.

Samper, C., y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de Geometría Dinamica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. En prensa.

Samper, C., Camargo, L., y Leguizamon, C. (2003). *Tareas que promuven el razonamiento en el aula a travez de la geometria.* Colombia: Asocolme.

Silva, L. H. (2013). *Argumnetar para definir y definir para argumentar.* Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Stein, M., Grover, B., y M, H. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform. *American EducationalR esearch Journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M., Schwan, M., y Henningsen, A. (2000). Analyzing Mathematical Instructional Tasks. En M. S. Mary Kay Stein, *Implementing Standards Based Mathematics Instruction: A Casebook for Profesorassional Development* (págs. 1-5). New York: Columbia University.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument* . (M. M. (2007), Trad.) Barcelona: Grup Editorial62, S.L.U. Ediciones Península.

Valles, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social.Reflexión metodológica y práctica Profesorasional.* Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Vinner, S. (1991). El rol de las definiciones en la enseñanza y aprendizaje de las matematicas. *Pensamiento Matematico Avanzado*, 65-81.

Watson, A., y Mason, J. (2007). Taken-as-Shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 205-215.

Yeo, J. B. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. (N. T. University, Ed.) *Mathematics and Mathematics Education*, 1-28.

Zakaryan, D. (2013). El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años . *I-Cemacyc* (págs. 1-12). Santo Domingo-Republica Dominicana: Congreso de Educación matemática de America Central y el Caribe.

ANEXOS

ANEXO A. Tabla de la estructura de las tareas de introducción

Tareas	Fecha de implementación	Estructura de la tarea	Elementos teóricos
Exploración con el software	Agosto 12 2015	Iniciar el programa en modo geometría, establecer tamaño de fuente y nombrar puntos. Conocer los iconos y las herramientas de GeoGebra	Herramientas del software
Relaciones entre los elementos básicos de la Geometría euclidiana plana	Agosto 19 2015	Reconocer que la pantalla es un plano Identificar que el plano contiene muchos puntos Alinear puntos La recta como herramienta para alinear puntos - Puntos colineales y no colineales	HG Plano – puntos: El plano es un conjunto infinito de puntos. HG Recta – puntos: La recta es un conjunto infinito puntos. HG Puntos – recta: dos puntos, determinan una recta.
Rectas	Agosto 26 2015	Construcción de dos rectas Construcción de un punto de intersección de las dos rectas Puntos de intersección	HG Intersección – rectas: Si dos rectas se intersecan, la intersección es exactamente un punto.
Recta/Rayo/ Segmento	Septiembre 16 2016	Construcción de recta, segmento y rayo usando las herramientas del software. Cuadro de semejanzas y diferencia entre recta, segmento y rayo. Describir el desplazamiento de un punto en la recta, segmento y rayo.	HG Segmentos y rayos: Los segmentos y los rayos son subconjuntos de una recta. El segmento es subconjunto de un rayo.

ANEXO B. Elementos teóricos geométricos trabajados en la secuencia de tareas punto medio

A continuación se presentan los hechos geométricos y definiciones que se descubren y se trabajan en las diferentes tareas de la secuencia didáctica.

Definiciones:

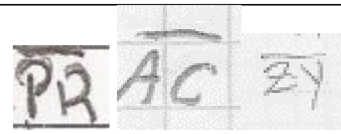
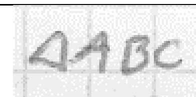
- **D**. Un **segmento** es un subconjunto de una recta que comprende dos extremos y los puntos que están entre los extremos.
- **D.** Un **triángulo** es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales.
- **D.** La **distancia** de un punto D a un punto C es la medida de la longitud del $\overline{DC}$.
- **D.** Dos puntos D y B **equidistan** de un punto C si la distancia de D a C es igual a la distancia de B a C.
- **D.** Dos **segmentos** son **congruentes** si sus medidas son iguales.
- **D.** El **punto medio** de un segmento es un punto entre los extremos del segmento que equidista de estos.
- **D.** Dado un triángulo, una **mediana del triángulo** es un segmento con un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto a ese vértice.

Hechos geométricos:

- **HG Puntos Recta**: Dos puntos A y B determinan una recta.
- **HG Puntos Plano**: Un plano tiene infinitos puntos
- **HG Punto Medio:** Si M es el punto medio del $\overline{AB}$, entonces $AM = \frac{1}{2}AB = MB$.
- **HG Segmento Extremos Punto Medio:** Dado el ΔABC, si D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{BC}$, entonces la medida del $\overline{DE}$ es igual a la mitad de la medida del $\overline{AC}$.

Durante el desarrollo de las tareas se iba introduciendo la notación de los objetos geométricos trabajados, como se presenta en la tabla 4:

Tabla 25 Notación utilizada en la secuencia de tareas

Puntos: se nombran utilizando letras mayúsculas	
Segmentos: se nombran usando los nombres de los extremos del segmento y el símbolo geométrico correspondiente	
Triángulo: se nombran con el símbolo geométrico de esta figura y los nombres de sus vértices.	
Segmentos congruentes: se utiliza el símbolo correspondiente	
Distancia o longitud: se nombra usando los nombres de los extremos del segmento	

ANEXO C. Roles de los investigadores

Las dos autoras de este trabajo participaron en la adaptación del diseño de las tareas, y el análisis de los datos fue realizado con el apoyo de la asesora del trabajo de grado. En este sentido, los roles fueron:

- ***Rol del asesor del trabajo de grado:*** colaborador en la adaptación del diseño de la secuencia de actividades, orientador de la forma como la profesora investigadora debía intervenir en el aula, guía en el proceso de análisis de los datos, y contribuyente a la formación de las autoras de este trabajo.
- ***Rol de las investigadoras:*** colaboradores en el diseño metodológico orientado en un marco teórico que sustenta el fenómeno de estudio. Participantes del proceso de investigación, aportando con su saber empírico, teórico y didáctico, en la preparación de las guías de trabajo, en la planeación de las sesiones de clase, en la preparación de las preguntas que se debían hacer en el aula para propiciar la argumentación. Partícipes en el diseño, adaptación y evaluación de las tareas propuestas y en el análisis de los datos obtenidos.
- ***Rol del Profesor investigador:*** Implementador de la secuencia de tareas, promotor de las discusiones sobre relaciones, propiedades y definiciones de objetos geométricos propiciando un espacio de construcción social de conocimiento. Reportero de los acontecimientos relevantes para la investigación sucedidos en el aula.
- ***Rol del estudiante:*** Participante activo en el desarrollo de las tareas propuestas. Expositor de sus ideas de manera oral y escrita.

ANEXO D. Transcripciones

Transcripción Tarea 1

1	Profesora:	Entonces la definición que podríamos encontrar de segmento ¿cuál podría ser? Ya tenemos…
2	Profesora:	¿Qué caracteriza el segmento?
3	Profesora	Pero sé más específico, porqué esa definición no quedó bien.
4	Gina	Es parte, digámoslo así, de un, digámoslo así, de una figura geométrica. Es parte.
5	Profesora	Correcto. Pero digamos que reunamos la característica, digo ¿qué?
6	Sergio	Profesora eee… creo que es como un subconjunto de la recta o algo así.
7	Profesora	Bueno un subconjunto de la recta, si porque pertenece a la recta y es una parte de la recta. Pero complementando lo que dice Kevin, uno no puede decir solamente tiene un inicio y un final. ¿Qué elemento me indica que tiene inicio?
8	Juan	El punto de inicio el punto A.
9	Profesora	Entonces redondeemos esa definición. Entonces ¿qué es el segmento?
10	Sergio	Que tiene un punto inicial y un punto final.
11	Profesora	Bueno ya tenemos esa característica. Entonces si unimos las dos, ¿cómo diríamos la definición? Lo que tu dijiste más la característica, ¿cómo sería? Entonces segmento es un
12	Juan	Profesora una parte de la recta que tiene un inicio y un final.
13	Profesora	¿Qué tiene que? Un inicio ¿qué es? Un punto de inicio y un punto final. Eso es una definición más elaborada listo. Entonces todos ya sabemos que es segmento. ¿Hay alguien que todavía no sabe que es segmento? Todos ya lo sabemos, ya lo hemos representado, ¿cierto? Entonces lo primero que vamos a hacer en GeoGebra es, van a representar.
14	Profesora	Recuerden las normas de entrada. Primero lo ponemos en modo de geometría, en letra 28 y etiquetado solo puntos nuevos. Todos deben estar ahí.
15	Profesora	La primera indicación es la siguiente: van a representar un segmento AB. Representen un segmento AB.
16	Estudiantes	Listo Profesora.
17	Profesora	Listo. Ah bueno. Entonces van (llama la atención a una estudiante). Listo todos tienen el segmento AB. Una indicación, una negociación que se hizo en las matemáticas es la notación de un segmento. ¿Cómo notamos un segmento? Escribimos ¡ojo! el punto inicial y final del segmento. ¿El punto de inicio como se llama?
18	Estudiantes	A.
19	Profesora	A. ¿El punto final?
20	Estudiantes	B.
21	Profesora	Y lo que me denota, en matemáticas, que es un segmento, es una raya sobre AB y esto se lee segmento AB. Listo. Ahora vamos a decir ya tengo el segmento AB. Ahora van a ir al icono que tiene como figurita un punto y la letra A. En ese icono van a buscar una herramienta que se llama Medio o Centro, o a la herramienta que se llama Medio o Centro. Listo. Luego van a seleccionar el punto A y el punto B

22	Estudiantes	Listo.
23	Profesora	Listo. A ver, ¿alguien me puede explicar qué significa ese nuevo punto que apareció?
24	Mauricio	Que es un punto central.
25	Profesora	¿Qué es un punto central?
26	Juan	Si… que es el medio de la recta.
27	Profesora	¿Será que es una recta?
28	Juan	Bueno AB.
29	Profesora	Bueno. ¿Qué diferencia ese punto de los otros de los otros dos?
30	Mauricio	Que es negro y más pequeño que los otros.
31	Profesora	…ahora van a ir al icono y van a ver el icono. ¿Cómo es el dibujo del icono?
32	Estudiantes	Es rojo y los extremos azules.
33	Profesora	El dibujito del icono que mensaje nos quiere dar…
34	Gina	El punto de la mitad es diferente al principio y al final. Es decir, a los lados.
35	Profesora	Listo. Ya sabemos que el icono nos está diciendo algo. Ahora vamos… Cuando en geometría hablamos de explorar, la exploración tiene que ver con tomar medidas, mover puntos. Listo. Entonces lo primero que vamos a hacer es tomar medidas. ¿Cómo tomamos medidas? Van a buscar en los iconos, el icono que dice, que tiene un ángulo dibujado. ¿Cuál es el que tiene como un ángulo dibujado? Van a desglosar las herramientas. Correcto. Van a desglosar las herramientas y van a seleccionar la que dicen distancia o longitud. Listo. Ahora van a medir. ¿Qué van a medir?
36	Estudiantes	Los segmentos.
37	Profesora	El segmento… van a medir, van a tomar las medidas que ustedes consideren importantes para mirar las características a ese nuevo punto que salió. Primero vamos a medir. ¿Será que pueden sacar una sola medida?
38	Estudiantes	No, muchas.
39	Profesora	¿Ustedes qué midieron? (se dirige al grupo de Gina y Laura)
40	Gina	Medimos el segmento.
41	Profesora	Listo. ¿Pueden tomar otra medida?
42	Gina	Sí. De AC y CB.
43	Profesora	¿Qué pueden decir según las medidas que tomaron?
44	Gina	Que si muevo A y B el punto C…
45	Profesora	Van a tomar todas las medidas que puedan ser posibles, que puedan hacer con esa figura geométrica. Listo. ¿Pueden tomar otras medidas? ¿Cuál? Van a tomar medidas, van a explorar tomando medidas.
46	Profesora	Listo todos tomamos medidas; todos tomamos medidas. (llama la atención a Arturo) La siguiente, vamos a mirar cuántas medidas puedes tener de ese segmento.
47	Gina	¿Qué medidas tomamos de ese segmento?
48	Gina	De BA
49	Profesora	¿Qué otra?
50	Laura	CB y CA
51	Profesora	¿Qué pueden decir según las medidas que tomaron?

52	Gina	Que si muevo a A y B el punto C siempre está en la mitad, porque, mire Profesora, miden los mismo.
53	Profesora	Ahora vamos a hacer otra actividad para seguir explorando para mirar que puntos se pueden mover. ¿Qué puntos se pueden mover? y ¿Qué puntos no se pueden mover?
54	Juan	La C no se puede mover.
55	Profesora	¿La C se puede mover?
56	Estudiantes	No.
57	Profesora	¿El punto C se puede mover?
58	Estudiantes	No.
59	Profesora	¿Cuáles puntos se pueden mover? ¿Todos se pueden mover?
60	Estudiantes	No, solo la A y B se pueden mover.
61	Profesora	Bueno, vamos a socializar. ¿Todos hicieron la exploración de tomar medidas? Bueno. Van a poner atención a la siguiente pregunta. Si nosotros, primero vamos a pensar que puntos se pueden mover. El punto A y el B, ¿cierto? ¿El punto C se puede mover?
62	Estudiantes	No.
63	Profesora	¿Por qué se pueden mover los puntos A y B, y no se puede mover el punto?
64	Mauricio	Porque el punto C se queda en un solo lugar.
65	Gina	Porque C hace parte del segmento.
66	Sergio	Porque ahí decía punto centro; entonces no se puede mover. Se tiene que quedar quieto.
67	Bayron	La C pertenece al segmento y no se puede mover.
68	Sergio	Y también se mueve C y se mueve B .
69	Profesora	Bueno vamos a tomar las siguientes ideas y van a escuchar y van a decir si están de acuerdo. Nancy nos dijo el punto C ya pertenece al segmento, ¿están de acuerdo?
70	Estudiantes	Si
71	Profesora	No lo podemos mover.
72	Estudiantes	No
73	Profesora	Ahora los puntos A y B son los extremos del segmento, ¿cierto? Vamos a mirar lo siguiente. Si yo muevo a A, ¿qué pasa con el punto C?
74	Juan	El C no se mueve; solamente se queda ahí. El único que se mueve es el punto A y el segmento… Si cogemos A solo se mueve la A y la B.
75	Mauricio	No.
76	Profesora	Ahora vamos hacer una mirada a las medidas que tomamos. ¿Qué relación tienen cuando muevo el punto A? ¿Qué relación se mantiene o cambia con las medidas? O sea, muevan el punto A y hay ahí una medidas. ¿Qué pasa con esas medidas?
77	Estudiantes	Cambian.
78	Mauricio	Profesora es como decir que cuando uno alarga el segmento empieza a cambiar las medidas (señala con la mano).
79	Profesora	¿Qué relación hay entre las medidas de los segmentos AC y BC?
80	Miriam	Que son iguales; que AC y BC son iguales

81	Mauricio	Al mover el punto cambia la medida del segmento, pero las medidas AC y BC siempre van a ser iguales.
82	Profesora	Listo, a medida que cambio a A cambian las medidas ¿cierto? Pero, ¿qué relación hay entre las medidas AC y BC?
83	Miriam	Que son iguales; que AC y BC son iguales.
84	Profesora	¿Qué dices Mauricio?
85	Mauricio	Yo creo que porque cuando uno coge el punto A y lo mueve.
86	Profesora	Pero, ¿qué relación se mantiene?
87	Estudiantes	Al mover el punto cambia la medida del segmento, pero las medidas AC y BC son iguales siempre.
88	Profesora	Escribamos las características, que el punto C pertenece al segmento, que la distancia AC y BC son las mismas. Explicación del símbolo congruente.
89	Estudiantes	[Escriben en el cuaderno que hicieron en el primer momento y que relaciones encontraron.]
90	Profesora	Socialicemos las relaciones que encontraron.
91	Juan	Que los puntos A, B y C están en el mismo segmento
92	Bayron	La distancia entre los puntos A, C y B, C se mantiene, así cambien.

Transcripción Tarea 2

93	Profesora	Vamos a cerrar GeoGebra y vamos a abrir el documento que dice Tarea 2. Van a observar las representaciones que hay ahí. En la hoja van a escribir que pasa en cada una de las representaciones. Van a escribir que sucede con esos puntos.
94	Gina	Ahí lo que sucede es que debajo del punto A, hay una letra A.
95	Profesora	[Da la orientación de la tarea 2, moviendo el punto rojo [los estudiantes exploran 11 minutos]. ¿Qué sucede con el punto rojo?
96	Bayron	Se mueve y cambia la medida.
97	Profesora	¿Qué sucede con el punto rojo?
98	Bayron	Que el punto C se puede mover sobre el segmento del punto A y B. Nada más.
99	Juan	Que el punto C no se sale del segmento y que …
100	Bayron	Acá lo que tenemos es que el punto C ya se hizo parte del segmento. No se puede mover afuera de segmento, solo dentro del segmento.
101	Juan	Se mueve de un punto a otro.
102	Bayron	Entonces el punto C pertenece al segmento.
103	Profesora	En la primera representación, ¿tenemos qué?
104	Juan	Profesora…el punto C se mueve dentro del segmento.
105	Profesora	¿Podría ser el punto C punto medio del segmento?

106	Juan	No porque creo que deba estar sólo en mitad y este se puede mover (señalando con el cursor el movimiento del punto C sobre el segmento).
107	Profesora	En la representación dos vamos a ver.
108	Bayron	No se puede mover de izquierda a derecha
109	Profesora	Una observación. No se puede mover de izquierda a derecha sino que se puede mover ¿en?
110	Estudiantes	En circulo
111	Profesora	¿Qué significa eso?
112	Mauricio	Al moverlo (señala punto G) cuando se mueve, sale en círculo.
113	Miriam	El punto G solo se puede salir del segmento en forma circular al lado izquierdo.
114	Profesora	En la segunda representación, ¿será que ese punto pertenece al segmento?
115	Miriam	No, porque se sale.
116	Profesora	¿El punto G está en la mitad? ¿Por qué se puede decir que está en la mitad?
117	Kevin	Porque está centrada.
118	Nancy	El punto G solo se puede salir del segmento en forma circular al lado izquierdo.
119	Miriam	El punto G se puede mover fuera del segmento pero en una distancia mínima.
120	Profesora	Como dijo Kevin en la segunda representación en algún momento queda sobre el segmento. ¿Cómo saben que ese punto que queda ahí es la mitad?
121	Sergio	El punto G está en la mitad cuando está sobre el segmento.
122	Profesora	¿El punto G está en la mitad? ¿Por qué se puede decir que está en la mitad?
123	Sergio	Porque está centrado.
124	Profesora	¿A qué te refieres con estar centrado?
125	Nancy	Si Profesora…Lo podemos medir (señala la representación). Mira el D con el G y la G con la E (explica cómo mide utilizando la herramienta Distancia y longitud de GeoGebra).
126	Sergio	Mira Profesora. Miden lo mismo.
127	Kevin	Porque uno se trata de mover para otro lado y no da.
128	Profesora	Pero, ¿cómo sabes que queda exactamente en la mitad?
129	Nancy	Yo diría que como aquí hay unas medidas uno podría saber.
130	Profesora	Listo y ahí sabes que está en la mitad.
131	Nancy	Pues no.
132	Profesora	¿Qué herramienta pueden utilizar para saber que es la mitad?
133	Nancy	Medirla Profesora. Mira el D con el G y la G con la E.
134	Profesora	En la segunda representación, ¿será que ese punto pertenece al segmento?
135	Estudiantes	No.
136	Profesora	Vamos a ver la tercera, esperen ¿Por qué no pertenece al segmento? En la segunda representación.
137	Gina	Porque tú tienes el punto en el segmento y el segmento tú lo puedes mover en cualquier lugar. Entonces lo que significa que el punto no se hizo parte del segmento.

138	Laura	El punto no pertenece al segmento porque se puede mover en todo el plano.
139	Profesora	No. Por todo el plano.
140	Gina	Si porque si fuera parte del segmento entonces se movería solo por el segmento. Pero como no pertenece.
141	Profesora	¿Puede ser el punto O medio o centro del segmento MN?
142	Gina	No Profesora porque ni siquiera está ahí en el segmento.
143	Profesora	Listo.
144	Bayron	Que el punto O se puede mover por todo el plano
145	Mauricio	Que el punto O se puede mover por todo el plano
146	Profesora	¿Qué pasa con la cuarta?
147	Michell	Que el punto no se puede mover para ningún lado.
148	Profesora	¿Qué característica debe tener?
149	Nancy	Que pertenece al segmento [trata de mover el punto con el cursor]. No se puede mover porque ya es parte del segmento.
150	Sergio	Yo veo que el punto está centrado en el segmento y no se puede mover […] Pertenece al segmento y él es el único que es pequeño.
151	Nancy	Que pertenece; ya pertenece.
152	Profesora	¿A qué te refieres con centrado?
153	Gina	Es pequeño. Bueno es peculiar que todos los puntos centrales son grandes y él es el único que está pequeño y pertenece al segmento.
154	Sergio	El punto J es como el punto C del ejercicio anterior [Tarea 1] que no se podía mover. Es el que sale de aquí [señala la herramienta *Medio o Centro*].
155	Profesora	¿Será? ¿Cómo podríamos saber eso?
156	Estudiantes	Que no se puede mover.
157	Profesora	Listo. ¿Qué otra cosa me puede garantizar que ese punto sea especial?
158	Juan	Que cuando uno mueve el punto H [J] mantiene la misma distancia.
159	Profesora	¿Tiene la misma distancia?
160	Juan	Sí.
161	Profesora	¿Cómo lo puedes garantizar?
162	Juan	Distancia o longitud. La que usamos la vez pasada. Midiendo del punto H al punto J y al revés
163	Profesora	¿Todos lo probaron? ¿Tiene la misma medida?
164	Estudiantes	Sí.
165	Profesora	Vamos a ver el último. ¿Qué pasa con el ultimo?
166	Juan	Es un segmento y no existe el punto medio. No hay otro punto.
167	Profesora	Entonces, de acuerdo con la observación y exploración, ¿cuál representación es punto medio?
168	Gina	La tercera, Profesora, porque pertenece al segmento. No se puede mover.

Transcripción Tarea 3

169	Bayron	Pusimos un punto aquí y el otro allá [señala los puntos A y B en el papel].
170	Juan	Luego doblamos así [señala el doblez que contiene a los puntos A y B].
171	Profesora	¿Por qué realizas ese doblez?
172	Juan	Para que se alineen.
173	Profesora	¿Por qué es necesario que estén alineados?
174	Juan	Pues Profesora, yo creo que deben estar en una sola línea porque entonces no se puede buscar la mitad. Debe estar en el segmento.
175	Bayron	Porque primero hay que hacer la línea del segmento, y después se busca la mitad.
176	Profesora	Bueno. Ya tienes alineados los puntos A y B[…]. Y ahora, ¿qué haces?
177	Bayron	Doblamos vertical y horizontal.
178	Profesora	¿Por qué realizas ese doblez?
179	Bayron	Profesora porque doblamos la hoja por la mitad [señalando el doblez vertical] y luego por la otra mitad [señalando el doblez horizontal] y eso nos dará la mitad[…]. Mire Profesora
180	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que es el punto medio?
181	Juan	Pues porque medimos y nos dio la mismo.
182	Profesora	Y ¿si no pudieras utilizar la regla para medir? ¿Cómo puedes garantizar que ese punto es punto medio?
183	Juan	Pues podría recortar este lado [señala el $\overline{CA}$] y lo pongo con este otro lado [señala el $\overline{CB}$] y si están iguales miden lo mismo, miden lo mismo.
184	Profesora	Y ustedes ¿cómo lo hicieron?
185	Mauricio	Primero colocamos los puntos A y B en cualquier parte de la hoja y luego los alineamos doblando así [señala el doblez].
186	Profesora	¿Por qué los alinean?
187	Miriam	Para que queden en una misma línea
188	Profesora	¿Por qué deben quedar en la misma línea?
189	Mauricio	Para que los puntos A y B estén en un segmento.
190	Profesora	¿Y luego que hacen?
191	Miriam	Doblamos por la mitad.
192	Profesora	¿Cómo lo hacen?
193	Mauricio	Pues colocando el punto A sobre el punto B, y se dobla un poquito y ese es el punto medio.
194	Profesora	Bueno. ¿Cómo van ustedes? ¿Cómo lo hicieron?
195	Sergio	Nosotros pusimos los puntos A y B en la hoja, doblamos por la mitad la hoja así [señala el doblez]. Por este lado también [señala la base y la altura].
196	Profesora	¿Por qué realizas esos dobleces?
197	Sergio	Porque así se busca el punto medio. Para que dé la mitad.
198	Nancy	Sí Profesora. Porque medimos y dio la mitad.
199	Profesora	Gina, ¿cómo hicieron su construcción?
200	Gina	Ubicamos los puntos A y B en el plano y por medio de dobleces encontramos la mitad y marcamos el punto C.

201	Profesora	¿Cuáles dobleces?
202	Nancy	Profesora pues el primero es uniendo los puntos A y B para hacer esta línea [señala el doblez].
203	Gina	Y ahi tenemos el punto medio.

Transcripción Tarea 4

204	Profesora	De los que hicieron la tarea, levanten la mano los que cumplieron haciendo la tarea, que tenían que hacer los pasos y todo eso, en una hoja. Listo. Me van a hacer el favor, voluntariamente. ¿Quién quiere compartir su tarea al frente?
205	Díaz	Profesora yo quiero pasar pero usted no me entregó la tarea.
206	Profesora	No porque, ojo, no es lo que hicimos en clase; es lo que me entregaron como tarea.
207	Estudiantes	¿El martes’
208	Profesora	El martes. Listo. Voy a buscarla y ya regreso.
209	Estudiante	Profesora, una pregunta. ¿La tarea que usted nos daba el punto A y el punto C y tocaba hallar el punto B?
210	Profesora	Correcto. Ya busco tu tarea Díaz. Pasa Bayron y expones tu tarea; pasa al frente.
211	Bayron	¿Cómo así?
212	Profesora	Explica como hiciste la tarea. Primero, ¿cuál era la tarea?
213	Bayron	Bueno, la tarea era que la profesora nos daba el punto A y el punto C y nos toca e…
214	Profesora	¿Qué era el punto C?
215	Bayron	El punto medio.
216	Profesora	Y, ¿qué te tocaba hacer?
217	Bayron	Buscar el punto B.
218	Profesora	Y, ¿qué es el punto B?
219	Bayron	El punto final del segmento.
220	Profesora	Del segmento.
221	Bayron	Bueno yo primero puse en el papel pergamino puse el punto A y el punto C, los alinee, o sea, la doble para sacar el segmento. Después, para sacar el punto B cogí el punto C y lo alinee. Le hice así, para poder [la profesora interrumpe]
222	Profesora	Le hice así, ¿qué es?
223	Bayron	O sea, lo doblé pues en el punto C para poder sacar el A y el punto B, para que queden de la misma distancia.
224	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que el punto B es el extremo del segmento, para que el punto C sea el punto medio?
225	Bayron	Porque C pertenece al segmento y está en la mitad
226	Profesora	¿Qué garantiza que el punto C sea el punto medio del segmento AB?
227	Bayron	¿Cómo profesora?
228	Juan	Tener la misma distancia del punto A al punto C y del punto C al B.
229	Bayron	Que pertenece al segmento.
230	Profesora	Listo. Y ¿la otra?

231	Bayron	Eh no se puede salir de él.
232	Profesora	Correcto.
233	Estudiante	Es un punto fijo.
234	Bayron	Sí es un punto fijo.
235	Profesora	Listo. Y ¿qué caracteriza que sea punto medio específicamente?
236	Estudiante	Que está en la mitad.
237	Bayron	Que está entre el segmento A y B.
238	Profesora	Bueno tú dices que está entre el segmento. Entonces yo tengo, para los demás, dibuja un segmento AB [en el tablero].
239	Bayron	[Dibuja los puntos A, B, en el tablero].
240	Profesora	¿Dónde está el segmento?
241	Estudiantes	La línea. Esos son puntos, no segmentos.
242	Profesora	[Le da una escuadra a Bayron].
243	Bayron	[Traza el segmento AB].
244	Profesora	Listo, tenemos ahí el segmento AB. Ubica un punto cualquiera que pertenezca al segmento AB.
245	Bayron	[Ubica el punto C. Visualmente el punto C parece el punto medio].
246	Profesora	Ubica otro punto, un punto D que pertenezca al segmento.
247	Bayron	¿Al segmento?
248	Profesora	Si, cualquier punto en otra ubicación.
249	Bayron	¿Afuera profesora?
250	Profesora	No, que pertenezca al segmento.
251	Bayron	[Dibuja el punto D].
252	Profesora	Listo. Sí déjalo ahí. Ahora, tenemos los puntos A, B, C y D. La pregunta es: ¿qué característica tiene el punto D? Ustedes pueden participar, igual Bayron. ¿Qué característica tiene ahí el punto D Bayron? ¿Qué puedo decir del punto D?
253	Bayron	Que pertenece al segmento.
254	Profesora	Listo. Que pertenece al segmento. ¿Puedo decir otra característica? ¿Kevin que otra característica?
255	Kevin	Que está más cerca al punto B que al punto A, la distancia.
256	Profesora	Miriam.
257	Miriam	Que pertenece al segmento pero que no es el punto medio.
258	Profesora	¿Qué otra cosa podemos decir? Para ti, Bayron, ¿el punto C es punto medio? ¿Sí? Digamos en este dibujo, ¿es el punto medio?
259	Estudiante	No.
260	Estudiante	Puede ser.
261	Profesora	Bueno, Bayron representó A, B y C como punto medio. Tenemos dos puntos en el segmento que es el punto C y el punto D. La pregunta es para Bayron y la pregunta es para ustedes. Tengo el punto C y el punto D ¿En qué se parecen esos dos puntos? Juan, sientate en esa silla de por allá para que te puedan ver. ¿En qué se parece el punto C y el punto D, Bayron?
262	Bayron	Profesora, se parecerían en que pertenecen al segmento,

263	Profesora	Pertenecen al segmento,
264	Bayron	Sí.
265	Profesora	¿Todos estamos de acuerdo en que pertenecen al segmento?
266	Estudiantes	Sí.
267	Bayron	Profesora, espere.
268	Estudiante	Profesora, yo dirá que del punto A al punto B son la C, es el medio. Y del punto C al B, el D es el punto medio, ¿no?
269	Profesora	Digamos que tú lo dices porque lo ves, que sea el punto medio. El D sería el punto medio entre C y B. Gina.
270	Gina	Ni que el punto C y D, dígamolo así, no son el principio ni el fin de la recta. Están dentro de él y no están, digamolo así, en el final ni el principio de la recta. Puede ser.
271	Profesora	Digamos otras características. El punto C y el punto D pertenece al segmento ¿cierto?
272	Estudiantes	Sí.
273	Profesora	Pero tenemos una condición que yo les di en el problema y es que el punto C es el punto medio. Fue lo que yo les dije ¿cierto? La tarea era encontrar el punto B, pero ahora estamos tratando de llegar, a ¿por qué puedo garantizar, hecho el segmento, que C es el punto medio? Entonces recordemos las características que trabajamos la clase anterior. Una es que el punto debe pertenecer al segmento ¿cierto? Otra Sergio.
274	Sergio	Que debe tener la misma distancia que el segmento AC y el segmento CB.
275	Profesora	Sí. Entonces dos características vamos ahí: una, ¿cuál es? que pertenezca al segmento. ¿Dos?
276	Bayron	Que tengan la misma distancia del punto A al punto C y del punto C al punto B.
277	Profesora	Listo otra característica que es una relación que trabajamos. ¿Qué relación debe tener? El punto C por ejemplo debe estar dentro del segmento, o sea debe pertenecer pero debe tener una característica, por ejemplo. Dime.
278	Juan	Tener la misma distancia del punto A al punto C y del punto C al B.
279	Profesora	La misma distancia. Entonces vamos a enumerar las características. La primera es que el punto C debe pertenecer al segmento. ¿Ahí quedo bien escrito?
280	Estudiantes	Sí.
281	Profesora	¿Sí?
282	Estudiantes	No.
283	Profesora	La segunda característica es que el punto C, debe estar … ¿Cómo fue que dijiste Sergio?
284	Sergio	Pues debe estar a la misma distancia
285	Profesora	¿Debe estár a la misma distancia al punto…?
286	Estudiantes	La misma distancia del punto A al punto C y del punto C al punto B.
287	Profesora	Del punto A al punto C y del punto C al punto B. ¿Cómo escribimos esto geométricamente? Dime, Frank.
288	Frank	Pues escriba la A y la C y la línea.

289	Profesora	Entonces el segmento AC. Listo.
290	Frank	Y después el viñete.
291	Profesora	¿Qué significa el viñete?
292	Estudiantes	Congruente.
293	Profesora	¿Qué significa ser congruente?
294	Bayron	Que tiene la misma distancia.
295	Profesora	Que tiene la misma distancia.
296	Bayron	Le gané [señala a un estudiante].
297	Profesora	Ahora nos falta una sola característica y es la relación estar. Por ejemplo, yo tengo el segmento. Voy a poner otro segmento HK, cierto, y voy a decir que tengo un punto que esta por acá y este punto va a hacer el punto M. Y yo tome medidas ¿sí? Y yo puedo garantizar que las medidas de MK es la misma que MH, entonces puedo decir que están a la misma distancia. Van a suponer que yo tomé medidas y que efectivamente es la misma. ¿Yo puedo decir que es punto medio?
298	Estudiantes	Sí… o No…
299	Profesora	A ver. Vamos a escuchar: si y no ¿Por qué no?
300	Estudiante	No, porque, Profesora, el punto medio debe estar dentro de la recta.
301	Bayron	El punto M debe pertenecer al segmento.
302	Profesora	Listo, pertenece al segmento, debe tener la misma distancia y…
303	Estudiante	Pero ahí está en la misma distancia pero no está en el segmento.
304	Profesora	Bueno no pertenece, ¿cumple con la condición de ser punto medio?
305	Estudiante	No…
306	Profesora	Entonces la condición que ya tenemos es que debe pertenecer al segmento y …
307	Estudiante	Estar entre el segmento.
308	Profesora	Entonces la tercera característica deber ser: debe estar entre el segmento. Bueno aquí lo escribimos mal. El tercero es ese. ¿Cómo lo podríamos escribir? El punto C
309	Estudiante	Tiene que estar entre el segmento.
310	Profesora	¿Estar en o cómo es la relación?
311	Bayron	Entre A y B y la rayita.
312	Profesora	Entre A y el punto B listo. Hasta ahí. Gracias a Bayron que compartió su tarea.
313	Bayron	Profesora, otra cosa. Aquí pueda que el punto C sea el punto medio. El punto D se pueda mover dentro de todo el plano o entre el segmento o encima.
314	Profesora	Vamos a hacer un ejercicio ahí. Siéntate Bayron. Vamos a hablar y de pronto otra persona quiere pasar. Listo. Vamos a mirar parte de la tarea. Si tenemos el segmento CB, Juan si quieres pasas, si tenemos el segmento CB, ¿cómo podemos representar el punto D cómo punto medio?
315	Estudiante	Eso es lo que le dijo a Bayron, que ubicara un punto D. Entonces usted podía ir a la herramienta punto y podía crear punto y lo podía mover encima de la recta y así.
316	Profesora	Correcto, vamos a suponer que tenemos aquí el programa. La pregunta es en este momento, ¿dime?

317	Estudiante	Pero en la hojita salía dos rectas ¿no?
318	Profesora	¿Cuál? ¿La hojita de Bayron?
319	Bayron	No hay era para medir cual punto era…
320	Profesora	Vamos a retomar lo que hizo Bayron. Lo primero que Bayron hizo fue alinear el punto A y B. Y luego lo que hizo fue coincidir los puntos. Como era pergamino hizo una línea vertical y la intercesión de estas dos rectas me da el punto …
321	Estudiante	C.
322	Profesora	El punto medio que es el punto C.
323	Estudiante	Yo creo así como rectas.
324	Profesora	Lo que hizo Bayron fue la intercesión entre dos rectas. ¿aAlguien hizo la tarea de otra forma? ¿Quién quiere pasar a compartirla? ¿Tú cómo la hiciste Miriam? Ángel, pasa y nos explica la tarea. Yo vi como la hiciste y me pareció bien como la hiciste. Pasa y nos compartes la tarea. Pasa que aquí nadie está mordiendo. Listo muéstrale a tus compañeros como hiciste la tarea. Ponemos atención
325	Miriam	Pues primero me quedó un punto A al inicio del segmento. Después ubiqué un punto C como el punto medio del segmento. Entonces en la hoja pergamino ubiqué el punto A y el punto C. Después como ya tenemos el punto A y C entonces hice un doblecillo así por el punto C. Como ya tenemos el doblecillo del punto C entonces hacemos otro doblecillo entre A y C así. Ya tenemos dos doblecillos el primer fue por el punto C y el segundo doblecillo de los puntos A y C. Entonces hacemos un punto que quede de la misma medida del punto A al punto C y bueno hicimos un puntico.
326	Profesora	¿Tú viste como lo hizo Bayron? ¿Qué diferencia hay en lo que tú hiciste y el que hizo Bayron?
327	Miriam	Pues porque
328	Profesora	¿Ves alguna diferencia o son parecidos?
329	Miriam	Pues como yo lo hice, con más pasos. ¿Algo así?
330	Profesora	Listo Michael que diferencias viste tú en los pasos. Recordemos lo que hizo Bayron en los pasos. Primero fue alinear los punto A y C. ¿Por qué creen que lo primero que hizo Bayron fue alinear?
331	Estudiante	Para conseguir el segmento.
332	Profesora	Para conseguir el segmento representando, ¿qué Bayron?
333	Bayron	Representando el segmento.
334	Profesora	Ah bueno. Lo primero que hizo Bayron fue representar esto en un segmento. Lo que hizo primero Miriam fue ubicar una recta por la que pasara el punto C. Luego Miriam hizo el segmento ¿sí? Hicieron le mismo procedimiento pero Bayron primero alineo los punto A y C para hacer el segmento y luego hizo la recta vertical sobre el segmento, y Miriam lo hizo al contrario. Pero las dos tareas estuvieron muy bien. Ahora ¿me ayudas a recoger las tareas? Listo. Vamos a trabajar. Hoy vamos a resolver un problema que implique el uso del punto medio. Para hacer el problema… No quiero que escriban inicialmente. Solo quiero que pongan atención. ¿Un qué?
335	Michael	Triángulo.
336	Estudiante	Rectángulo.

337	Profesora	Entonces vamos a señalar los vértices de este rectángulo. Entonces tenemos A, B, C y D. Listo. Ahora vamos a poner atención. Vamos a suponer que yo hice esta representación en el programa GeoGebra, y ustedes la van a ver, y yo voy a decir que este punto de acá E es el punto medio del segmento BC. Ese es un dato que yo les doy. E es punto medio del segmento BC. Y ahora yo voy a trazar… Bueno, cuando yo les hablé de congruencia, la forma de señalar esa relación. Entonces la congruencia, ¿cómo se señala? [Escribe en el tablero] Con una raya. ¿Qué quiere decir esto? Que este segmento AE es congruente con ED. ¿Dayana qué significa que sean congruentes?
338	Estudiante	Que tienen la misma distancia.
339	Profesora	Que tienen la misma distancia; que la distancia entre AE es la misma que DE. Listo. Miremos esta representación. Yo ya les dije que E es punto medio. ¿Podemos hacer otro tipo de conclusiones de E?
340	Kevin	Profesora, ahí se puede decir que entre el punto A, E tiene la misma distancia que el punto E, B.
341	Profesora	Vamos a escribir la hipótesis de Kevin. El segmento AE puede tener la misma distancia que EB. Quiero escuchar ustedes que opinan.
342	Frank	Yo digo que no.
343	Profesora	¿Por qué?
344	Frank	Porque el AE es como más largo que el BE.
345	Profesora	Bueno dice Frank que es más largo. ¿Por qué podemos decir que mide más?
346	Juan	Profesora, ¿por qué le hizo esa líneas ahí?
347	Frank	Eso es congruencia.
348	Profesora	Congruencia, Juan, esto significa congruencia; que este segmento es congruente a este. ¿Qué significa que sea congruente?
349	Juan	[No se entiende qué responde].
350	Profesora	Sí. Entonces deciamos lo siguiente. Pongan atención. Tenemos lo que dice Kevin. ¿Será que podemos decir que este segmento tiene la misma longitud que EB? Entonces ¿cómo podemos garantizar que no tengan?
351	Estudiante	Yo usaría una herramienta.
352	Profesora	¿Cuál? Puede ser medir los segmentos. Pero digamos que no tenemos esa herramienta, porque esa la utilizamos la clase anterior, pero el resto no sabíamos que se podía medir.
353	Estudiante	Con la regla
354	Profesora	¿La regla? No podemos medir.
355	Estudiante	Haciendo un doblez.
356	Profesora	Haciendo un doblez. Listo. Los dobleces. Entonces vamos a hacer lo siguiente. Si nosotros comparamos con el doblez este segmento con este segmento, ¿qué posiblemente resultado nos dará? ¿Qué? Si nosotros hacemos la comparación con dobleces, ¿qué posible resultado nos da?
357	Estudiante	Nos daría que AE
358	Profesora	El segmento AE.
359	Estudiante	Mediría más que EB.
360	Profesora	Listo. Mediría más que EB. ¿Qué otra observación o conclusión podemos tener en esta figura?

361	Bayron	Si uno dobla el A con el E por tal mitad, y después uno dobla el punto E con el punto B, no va a dar la misma distancia porque va a medir más del punto A al punto E.
362	Profesora	Bueno digamos que Bayron dice que del punto A al punto E va a hacer mayor la distancia que de E a B. Listo. Eso ya lo vimos. Ahora yo les voy a decir una cosa y ustedes me van a decir si es correcto o no es correcto. Yo les voy a decir un argumento y ustedes me van a decir si es verdadero o es falso o si está de acuerdo. Yo les digo: para mí el punto E es el punto medio entre el segmento AD porque está a la misma distancia. Yo les estoy diciendo que para mí el punto E es punto medio del segmento AD porque está en la misma distancia porque la distancia de ED es la misma que la distancia AE.
363	Miriam	Yo iba a decir otro punto medio.
364	Profesora	A ver escuchemos.
365	Miriam	El punto B puede ser el punto medio del segmento AE.
366	Profesora	Tenemos una afirmación: el punto B es el punto medio del segmento AE. Listo Gina.
367	Gina	Profesora no podría ser porque se supone que el rectángulo tiene lados más largos que otros. En este caso digámoslo así el segmento AE es más largo es decir tiene más distancia que entre B y E; el BE es más cortico que el AE.
368	Juan	Por sobre la pregunta que hizo ahorita, que no, porque debe pertenecer al segmento de A y D.
369	Profesora	Entonces para Juan, E no es el punto medio.
370	Juan	De A y D no.
371	Profesora	Pero cumple la condición de que tengan la misma distancia.
372	Juan	Pero tiene que pertenecer al segmento.
373	Profesora	Ah bueno. Debe pertenecer al segmento. Entonces no es punto medio del segmento AD
374	Sergio	Porque no cumple una de las tres reglas.
375	Profesora	¿Cuáles cumple?
376	Sergio	La segunda que debe tener las misma distancia.
377	Profesora	Entonces por cumplir una característica, ¿puede ser punto medio?
378	Estudiantes	No.
379	Profesora	Tiene que cumplir
380	Estudiantes	Todas.
381	Profesora	Las tres. Entonces que características le falta a E para ser punto medio de AD.
382	Bayron	Le falta la primera característica que es pertenecer al segmento A y D.
383	Juan	Y la tercera es que punto E debe estar entre el punto A y el punto D, o sea entre el segmento.
384	Profesora	Listo. Pero ahora quiero que aterricemos sobre el comentario que hizo Miriam. Listo. Miriam nos dice los siguiente: el punto B es el punto medio entre E y A ¿podemos decir que eso se puede dar?

385	Bayron	Pues yo diría que no se puede dar porque debe tener la misma distancia del punto A al punto E, para que el punto B sea el punto medio
386	Profesora	Es parecido a lo que tu dijiste Gina. Frank y ya te doy la palabra
387	Frank	De pronto digamos que entre A y B; el de allá se puede bajar.
388	Félix	Según lo que dijo Miriam la recta A y el punto B
389	Estudiante	No, es el segmento.
390	Félix	El segmento A y el segmento B Miriam Ángel que el punto es B creo que es imposible porque el segmento A y el segmento B tiene la misma distancia pero el segmento B no es el punto. porque no está dentro de la recta.
391	Profesora	Vamos a escuchar lo que dice Félix y vamos procesando la información.
392	Miriam	Yo estoy diciendo que digamos que el punto E que tuviera la misma alineación con entre A y el punto D.
393	Profesora	¿Explícame que es alineación?
394	Miriam	O sea, mire. Todos dicen, que el segmento va así y así [hace el movimiento de una L con su mano en el tablero] pero yo lo estoy explicando así así [hace el movimiento de un segmento con su mano en el tablero]
395	Profesora	Dibújalo para entenderlo.
396	Juan	Tal vez sí se puede pero debería coger un punto en el plano y ponerlo entre la media. Pero no pertenecería al segmento porque se puede mover por todo el plano.
397	Profesora	Juan dibújalo para entenderlo.
398	Juan	Vamos a la herramienta punto y uno puede poner un punto en cualquier lado y uno lo puede movilizar por cualquier lado hasta en el segmento.

Transcripción Tarea 5

339	Juan	Si el punto N se puede mover por todo lado, no es parte del segmento $[AB]$.
340	Bayron	No es parte del segmento.
341	Profesora	Según lo que dice Juan es que si yo hago un punto y puedo moverlo, lo puedo poner sobre el segmento, ¿ese punto pertenece al segmento?
342	Juan	No, porque el punto debe moverse solo por el segmento
343	Bayron	No pertenece al segmento y no podría ser punto medio. Si el punto N se puede mover por todo lado, pertenecería es al plano más no al segmento
344	Juan	Pero si el punto N está quieto, entonces pertenece al segmento y sí podría ser punto medio.
345	Miriam	O sea todos decían que [hace el movimiento de una L con su mano en el tablero] hasta el E pero yo lo quería hacer de este modo así [hace el movimiento de un segmento con su mano en el tablero] del A al E, entonces digamos que si este punto estuviera corrido hacia acá, bueno hacia la mitad, entonces B seria el punto medio
346	Profesora	¿Qué condición cumple [el punto N] para que pudieras decir que es el punto medio [del $\overline{CD}$]?
347	Miriam	Pues lo que yo dije es algo así como lo de Bayron. Yo digo que no porque al igual no pertenece al segmento. [Hace referencia al punto N]

348	Profesora	¿Ahí sería punto medio? [Dibuja un punto sobre el DC que visualmente parece ser el punto medio.]
349	Miriam	Pues si se puede correr pues obvio no
350	Bayron	Pues lo que dice Miriam, que se puede correr el punto N al segmento, del mismo modo no cumpliría con ninguna de esas características del punto medio. [Hace referencia a mover el punto N al segmento DC de tal forma que visualmente pareciera punto medio]
351	Profesora	B pertenece al segmento
352	Estudiantes	No
353	Profesora	Podemos garantizar que la distancia entre AB es la misma que ña distancia entre BE ¿Podemos garantizarla?
354	Estudiantes	De pronto
355	Profesora	Teniendo este ejercicio podemos garantizarla ¿ahí que garantía tenemos? ¿Qué tenemos que ya está aprobado? Y contamos con esa información ¿qué información nos dan acá? ¿Qué información nos da la representación? ¿Qué nos dice?
356	Estudiante	Pues nos toca medir
357	Profesora	Nos toca medir cierto, pero solamente con el dibujo ¿Qué información nos da el dibujo? Primero veamos qué información da el dibujo
358	Gina	Ya sabemos que el segmento A y B es congruente los dos si se hace lo que dice Miriam de correr no daría porque digámoslo así la herramienta, uno mueve al punto y no estaría en el medio estaría corrido
359	Profesora	Gina y con respecto a la pregunta que yo hice, solo vamos a tomar este dibujo ¿qué información nos da el dibujo?
360	Kevin	Pues yo veo un rectángulo
361	Profesora	Algo que dijo Kevin es un rectángulo
362	Estudiante	que la distancia de BE es la misma que EC
363	Profesora	Primera información que la distancia de BE es la misma que EC ¿Qué otra información me dice el dibujo?
364	Sergio	Que hay cuatro segmentos que conforman un rectángulo
365	Profesora	¿Cuáles segmentos?
399	Sergio	AB, AD, DC, BC
400	Profesora	¿Cuál segmento tiene el punto medio?
401	Estudiantes	BC
402	Profesora	¿Qué otra información me dan?
403	Miriam	Entre el rectángulo hay dos segmentos
404	Profesora	¿Cuáles serían?
405	Miriam	El AE y DE
406	Profesora	¿Qué relación hay entre esos dos segmentos?
407	Miriam	Tiene la misma medida son congruentes
408	Profesora	Miren toda la información que sacamos de un dibujo
409	Kevin	No respondieron mi pregunta

410	Estudiante	Ya dijimos que AE es más largo
411	Profesora	Ya dijimos que lo medimos
412	Kevin	Que este en manera diagonal no significa que no esté a la misma distancia.
413	Profesora	Que AE este diagonal no significa que no tenga la misma medida de BE ¿Esa es tú pregunta Kevin?
414	Kevin	Si
415	Profesora	Vamos a hacer el siguiente ejercicio para abordar lo que dice Kevin y lo vamos a hacer de la siguiente manera para que quede claro y podamos descubrir cosas, vamos a representar ahí en su cuaderno Tres triángulos diferentes en las que ustedes puedan identificar una diagonal o sea que sean rectos. [dibuja en el tablero un triángulo rectángulo] Este triángulo tiene diagonal
416	Estudiante	Pues claro

Transcripción Tarea 6

418	Estudiante	Pues lo que se puede decir [no se entiende] pertenece a todo el conjunto porque está a la misma distancia entre todos
419	Profesora	Si
420	Estudiante	Porque estos dos tiene la misma distancia y estos dos también tiene la misma distancia
421	Profesora	Si puedes usar ese argumento pero además tiene otra característica. Bueno ustedes que están haciendo
422	Bayron	Primero aquí aparece que el segmento PR. El punto medio es X, porque es congruente porque tienen la misma distancia [señalan en la hoja $\overline{PX}$ y $\overline{RX}$ y el símbolo de congruencia].
423	Profesora	¿Qué es congruente?
424	Juan	Las rayitas de acá significa que son congruentes
425	Bayron	Que miden lo mismo. Por eso tienen esa rayita.
426	Juan	Los segmentos
427	Profesora	¿PR? Esta rayita significa que qué segmento es congruente
428	Bayron	PR
429	Profesora	No porque esta congruencia de PR ¿Es esta rayita?
430	Estudiante	No
431	Profesora	Esta rayita me simboliza la congruencia de quién con quién
432	Estudiante	Que tiene la misma distancia de PR
433	Profesora	Si PQ [aunque señala es X] y tiene la rayita X y R y tiene la rayita ¿Qué significa eso? ¿Quiénes son congruentes?
434	Estudiante	Por eso el segmento PR porque tiene la misma distancia RX y XP
435	Profesora	Muy bien pero ahí vamos a corregir una cosa lo que es congruente es el segmento PX es congruente con el segmento XR estas rayitas quiere decir que este segmento es congruente con este segmento eso es lo que simboliza listo. Entonces tú partes de eso listo y ¿Qué más?
436	Sergio	Miramos que el punto X pues sí pertenece al segmento. Pero no es el punto medio del segmento QS.

437	Profesora	¿Cómo sabes qué no?
438	Nancy	Porque se nota acá que tiene más distancia que acá [señala XQ y luego XS]
439	Profesora	Ah bueno. Se nota. Pero, ¿cómo puedes garantizar que efectivamente no tienen la misma distancia?
440	Sergio	Midiéndolo
441	Profesora	Entonces mídelo
442	Sergio	[Usan la herramienta Longitud o Distancia de GeoGebra.] De aquí a aquí tiene uno y medio. Y aquí, uno dos.
443	Profesora	Bueno entonces ahí
444	Sergio	y aquí uno dos
445	Profesora	Aquí X cumple una característica ¿Cuál es?
446	Nancy	Que es punto del segmento PR
447	Profesora	Y ¿Cuánto al segmento SQ? ¿Qué cumple y que no cumple? Yo puedo decir es punto medio que puede cumplir y que no puede cumplir
448	Sergio	Que pertenece al segmento
449	Profesora	Listo
450	Sergio	Y cual no cumple. es que sea segmento medio de QS
451	Profesora	Entonces, ¿qué puedes concluir ahora?
452	Sergio	Pues que como tienen diferente medida no es el punto medio; deben medir lo mismo.
453	Profesora	A bueno y tú lo puedes probar tomando la medida listo [Se va para otro grupo]
454	Gina	[Señala lo que escribió en la hoja: X es punto medio del $\overline{PR}$] Nosotros hicimos una que fue un hecho geométrico que hicimos en el cuaderno [Se refiere a la definición de punto medio que consignaron en sus cuadernos.]. Entonces acá nosotros decimos que el punto X es punto del segmento PR
455	Profesora	¿Por qué lo puedes decir?
456	Gina	Porque por el hecho número uno que nos dice que el punto X pertenece al $\overline{PR}$. Y también tenemos otra que es por el hecho número dos que estos son congruentes o sea que el $\overline{PX}$ es congruente con el $\overline{XR}$
457	Profesora	¿Qué entiendes por congruencia?
458	Gina	Que si tú lo mides, debe dar la misma medida, o sea el mismo número.
459	Profesora	Bueno, entre PX y XR tienen la misma distancia porque este símbolo me lo está diciendo pero ¿Segura que de S a Q, X es el punto medio? ¿Está segura? Puedes hacer cualquier cosa para garantizar si es verdad o no [se va para otro grupo]
460	Miriam	Yo le iba a preguntar ¿sí le podía hacer otra línea acá?
461	Profesora	Claro si tú necesitas hacerle más líneas puedes hacer la línea, listo. ¿Aquí en que van?
462	Estudiante	Que este punto [señala X] Es punto medio de estos dos segmentos
463	Profesora	¿De cuales dos segmentos?
464	Estudiante	Del segmento SQ y del segmento PR

465	Profesora	Vamos a mirar primero un segmento ¿Cuál de los dos vamos a mirar?
466	Estudiante	SQ
467	Profesora	¿Tú por qué puedes garantizar que X es punto medio del segmento SQ?
468	Estudiante	Porque tiene …
469	Miriam	No es
470	Estudiante	No es
471	Profesora	Pero ¿Cómo sabes qué no?
472	Estudiante	Porque no tiene la misma distancia
473	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que no tiene la misma distancia?
474	Miriam	Profesora pues yo no garantizo nada porque se supone que el plano esta, como en esta dirección, algo así
475	Profesora	Pero ¿Qué podrían hacer para garantizar que efectivamente o es o no es punto medio?
476	Estudiante	Medirlo
477	Profesora	Pues eso sería una estrategia, para garantizar [se va para otro grupo]
478	Estudiante	Profesora vea, como dice que no tenemos regla ni nada de eso, entonces yo cogí el lápiz e hice así [mide con el lápiz] no le cabe toda esa cosita gris sino que queda hasta por acá. Esto significa que no es punto medio porque acá si cabe toda esa cosita profesora
479	Profesora	Bueno, vas a focalizar ¿tú ya escribiste si X es punto del segmento PR?
480	Estudiante	Yo digo que es X porque va para este lado y para este lado [señala los segmentos PR y QS]
481	Profesora	Ahí hay dos segmentos ¿Cuáles serían los dos segmentos?
482	Estudiante	Estos dos
483	Profesora	¿Cómo se llaman?
484	Estudiante	El PR y el QS
485	Profesora	¿Yo puedo decir que es punto medio del segmento PR?
486	Estudiante	Si
487	Profesora	¿Por qué?
488	Estudiante	Porque ahí si se ve que tiene la misma distancia
489	Profesora	A bueno, eso es lo que tienes que escribir y después vas a explicar si es el punto medio del segmento QS [se va para otro grupo]
490	Michael	¿Qué sabemos? Que el punto X es punto medio del punto PR
491	Profesora	¿Por qué?
492	Michael	Porque si usted lo mide da lo mismo
493	Profesora	Pero digamos que no tuvieras regla que te garantiza que el punto X es la mitad del segmento
494	Michael	Mediría así, doblamos la hoja
495	Profesora	¿Sí?
496	Michael	Si
497	Profesora	Pues si tú la doblas puedes garantizar qué es la mitad

498	Michael	Pues si
499	Profesora	¿Sí? Y la información que te da la imagen no te sirve
500	Michael	Claro sirve para harto
501	Profesora	¿Qué de la imagen te sirve para garantizar que es la mitad?
502	Michael	Estas [señala las rayitas de congruencia]
503	Profesora	¿Qué significa esas rayitas?
504	Michael	Profesora se me olvido el nombre
505	Profesora	No pero, digamos que no te acuerdas del nombre ¿Cuál es el contenido? O sea ¿Qué significa esas dos rayitas?
506	Estudiante	Que es congruentes
507	Profesora	¿Qué es congruente? Explícalo con tus palabras
508	Michael	Congruentes
509	Profesora	Pero ¿Qué significa que son congruentes?
510	Michael	Que son iguales
511	Profesora	¿Qué son iguales en qué?
512	Michael	Puede ser en la diferencia
513	Profesora	Pero son iguales en ¿Qué?
514	Michael	En la distancia
515	Profesora	En la distancia correcto, entonces quiere decir que es congruentes porque tienen la misma distancia o longitud, bueno entonces tu puedes decir que PR. Listo explícame
516	Michael	Pues que la mitad de PR es X
517	Profesora	¿X por qué? Que dice acá que el punto X tiene la misma distancia. Listo ahora puedes decir qué X es el punto medio del segmento SQ
518	Michael	Pues si se podría decir
519	Profesora	No, pues explícalo [se va para otro grupo]
520	Profesora	De acuerdo en la imagen, en la imagen tienes una figura cierto ¿Cuántos segmentos puedes ubicar en la figura? Bueno vamos a decir que nos vamos a focalizar en dos segmentos básicamente que sería el PR y SQ listo entonces viendo esos segmentos vamos a mirar que hay un punto que se llama X ¿Qué podemos decir de ese punto X?
521	Estudiante	Que es la mitad de PR
522	Profesora	¿Tú cómo puedes decir que es la mitad? ¿Qué es lo que te garantiza que es la mitad?
523	Estudiante	Pues toca medirlo
524	Profesora	Bueno pertenece al segmento
525	Estudiante	Pero de pronto se puede decir que pertenece al SQ
526	Profesora	Bueno pero ¿tú por qué puedes decir que es la mitad? Qué información te da la figura para decir que es la mitad
527	Estudiante	¿No se puede medir?

528	Profesora	Sí, pero digamos que no tuvieras la regla y no pudieras medir, dentro del dibujo que te dice qué, bueno de acuerdo a lo que hemos visto de punto medio ¿Por qué puedo decir que X es el punto medio entre PR?
529	Estudiante	Porque está en la mitad y de PR y tiene la misma distancia
530	Profesora	¿Cuál distancia?
531	Estudiante	De PX y de XR
532	Profesora	Listo, y éstas rayitas que significa, digamos que no te sabes el nombre pero qué significa
533	Estudiante	Qué son equivalentes
534	Profesora	¿Qué son equivalentes que quiere decir eso?
535	Estudiantes	Que son iguales
536	Profesora	Que son iguales en qué
537	Estudiante	En la misma distancia
538	Profesora	Ya tenemos que PR, X es el punto medio eso lo tienes que escribir acá, ahora tienes que decir se X es el punto medio de SQ [se va para otro grupo]
539	Estudiante	En el segundo que dijiste sobre QS encontramos el hecho número dos que dice que el punto X no está en la misma distancia ya que, el hecho dice que debe ser congruente estar en la misma distancia para que sea punto medio
540	Profesora	Listo marcan por favor
541	Estudiante	Profesora nos falta uno sobre la congruencia de estos dos
542	Profesora	Puede ser [se va para otro grupo]
543	Estudiante	Así profesora
544	Profesora	Si, que sé que el X es punto medio porqué puedes decir que es el punto medio, que argumento utilizas para decir que X es punto medio
545	Estudiante	La regla
546	Profesora	Digamos que no pueden utilizar la regla, que argumento me pueden decir, que parte de la imagen me puede dar esa garantía
547	Estudiante	¿El punto X?
548	Profesora	El punto X está ahí pero como puedo decir que X es el punto medio
549	Estudiante	Porque están en el medio de la recta PR y QS
550	Profesora	Vamos a mirar primero un segmento PR ¿Cómo puedes decir que X está en la mitad?
551	Estudiante	La regla
552	Profesora	Pues si tú crees ¿Para qué la regla? ¿Qué vas a medir?
553	Estudiante	El PX y XR
554	Profesora	Y qué te tiene que dar
555	Estudiante	El mismo resultado
556	Profesora	Si te da el mismo resultado que quiere decir
557	Estudiante	Que si esta está en el punto medio
558	Profesora	A Bueno esos son los argumento que voy a utilizar con la regla ¿Qué significa éstas dos rayitas?
559	Estudiante	La distancia

560	Profesora	¿Qué significa la distancia? ¿Qué significa que hay puesto éstas dos rayitas ahí?
561	Estudiante	Que es congruente
562	Profesora	¿Qué es congruencia? No se acuerdan ya paso y les explico [se va para otro grupo]
563	Estudiante	Lo primero es que sé, que PX y XR eran congruente
564	Profesora	¿Por qué lo puedes decir?
565	Estudiante	Porque saque los datos de la imagen
566	Profesora	¿Qué parte especifica de la imagen e dicen que es congruente?
567	Estudiante	Las dos rayitas que significa que es congruente yo concluí que son congruente porque X es el punto medio
568	Profesora	Y ahora qué utilizaste
569	Estudiante	Que X es el punto medio de PR, que use la definición de lo que usted nos explicó antes, que concluyo que tienen la misma distancia de PX a XR
570	Profesora	En la última casilla que hiciste
571	Estudiante	Que X esta en el segmento SQ use los datos de la imagen y que X esta en el segmento SQ pero no pertenece
572	Profesora	¿Está en el segmento y no pertenece? Porque yo aquí si veo que si pertenece, que es lo que dice que no pertenece
573	Estudiante	O sea que no es el punto medio
574	Profesora	Tu puedes decir si está ahí es porque pertenece que puedes modificar acá para qué puedas comprobar que no es punto medio, ¿Qué te haría falta?
575	Estudiante	Que tenga la misma distancia
576	Profesora	¿Esa la cumple?
577	Estudiante	Creo que no
578	Profesora	Vas a mirar cómo lo puedes justificar

Transcripción Tarea 7

579	Profesora	Dime ¿Qué hiciste?
580	Sergio	Hice como una recta
581	Estudiante	Un segmento
582	Sergio	No profesora no sé
583	Profesora	Explícame
584	Sergio	Del punto B saque como una recta, clic derecho y saque el punto medio
585	Profesora	¿Cómo hallaste el punto medio?
586	Sergio	Pues le di en segmento y ahí uní el B, dentro de AC…
587	Profesora	Vamos a hacer una cosa, vamos a mover el punto C, ve a la flechita y mueve el punto C
588	Sergio	No se puede
589	Profesora	Vas a la flechita, elige y mueve, vas a mover el punto C, ahora yo puedo decir que en ese movimiento ¿ese es el punto medio?

590	Sergio	No profesora
591	Profesora	¿Crees que esa es la mediana?
592	Sergio	No
593	Profesora	Listo, arréglalo y me dices
594	Profesora	Listo quién me va a explicar ¿qué fue lo que hiciste?
595	Bayron	Bueno. Aquí donde dice punto; nos fuimos a *Medio o Centro*, entre el $\overline{BC}$, y pusimos el $\overline{AD}$.
596	Profesora	¿Puedo decir que ese segmento es la mediana?
597	Bayron	Si señora
598	Profesora	¿Por qué puedo decir que es la mediana?
599	Bayron	Porque está entre el segmento BC, en la mitad y tiene la misma distancia. Nosotros cogimos el punto A que está al frente del $\overline{BC}$.
600	Estudiante	O sea nosotros cogimos el A que está en el extremo del segmento BC
601	Profesora	O sea cogiste un vértice que es el punto A y luego ¿Qué más hiciste?
602	Sergio	Lo ponemos en el centro de BC
603	Profesora	Listo, ahora vas a calcular las medianas del triángulo ¿Cuántas medianas puede tener un triángulo?
604	Sergio	Si esto [señalando lo que había hecho en GeoGebra] se hace con cada lado, entonces sería tres medianas.
605	Profesora	¿Cuántas?
606	Sergio	Tres, porque el triángulo tiene tres lados y tres vértices, entonces también tiene tres medianas.
607	Profesora	Entonces van a mostrarme esas tres mediana
608	Profesora	Ahora vamos a mover el punto , ahora si explícame qué fue lo que hiciste
609	Mauricio	Medirlo, pues profesora primero lo medimos y no dio la misma distancia
610	Profesora	¿Con que lo mediste?
611	Mauricio	Con distancia y no daba el mismo resultado, entonces ella coloco *Medio o Centro* entonces salió el punto gris que era el punto E en toda la mitad
612	Profesora	Luego ¿Qué hicieron?
613	Mauricio	Estirar el punto
614	Miriam	Movimos el punto A para que, para que el triángulo se estirará y el punto Medio o el punto Centro se movía con…
615	Profesora	Con el segmento
616	Miriam	Con el punto A, pero siempre se quedaba en el centro, si usted estira más el punto A
617	Mauricio	Va a quedar en la mitad
618	Profesora	¿Y si estiramos el B?
619	Mauricio	Va a dar lo mismo
620	Profesora	Bájalo a listo entonces ese punto ¿siempre será el punto medio?
621	Miriam	Si
622	Profesora	¿Qué me puede garantizar que siempre va a ser el punto medio?

623	Miriam	Que no se mueva
624	Mauricio	Medirlo también, que tenga las mismas medidas
625	Miriam	Que pertenezca al segmento
626	Mauricio	Tenga las mismas medidas de los segmentos EB y EA.
627	Profesora	¿Por qué puedo garantizar que el $\overline{CE}$ es una mediana?
628	Mauricio	Porque es más pequeña
629	Profesora	No, la mediana, según la definición de mediana ¿Qué me dice la definición?
630	Miriam	Porque están
631	Mauricio	La definición dice que dado un triángulo… [Lee la definición dada por la profesora de mediana de su cuaderno].
632	Profesora	¿Cumple esas condiciones?
633	Mauricio	Si señora
634	Profesora	¿Cuál condición cumple la mediana?
635	Mauricio	Que digamos que es un segmento
636	Profesora	¿Un segmento con que característica?
637	Mauricio	Que está en un vértice del triángulo. Del contrario, del que está al frente, como es que se llama...del lado opuesto [lee de la definición]
638	Miriam	Del opuesto
639	Profesora	¿Cuál vértice?
640	Mauricio	Sería el vértice C. Y el otro extremo está en punto medio.
641	Gina	Bueno yo tenía una idea como la definición decía que estaba en un vértice pues escogimos C y nos decía también que está en contra digámoslo así en el otro segmento
642	Profesora	¿Cómo se llama el segmento que está al frente?
643	Gina	BA
644	Profesora	El nombre es segmento opuesto
645	Gina	Bueno entonces en este caso sería este [señala el segmento AB] como estamos hablando de mediana del triángulo me imagine que era como la mitad, creo yo
646	Profesora	Bueno yo, según la definición tomaste un vértice, está bien, ¿Cómo determinas que este es el punto del otro extremo del segmento? ¿Qué característica debe tener ese punto?
647	Gina	Debe tener las misma medidas
648	Laura	Distancias
649	Profesora	Por favor Laura mueve el punto B estíralo, perdón, tienes ahí el triángulo, explícame ahí como hiciste la median
650	Laura	Hice segmento en el punto C y lo coloque el extremo en el segmento BA
651	Profesora	¿Qué característica debe tener ese punto D?
652	Laura	Yo creería que debe tener la mismas medida DA…
653	Profesora	Y ¿Ahí tiene la misma medida?
654	Laura	No
655	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que tenga la misma medida?

656	Laura	Pues sería con punto medio, puede ser, no sé, sería un hecho geométrico que podría decir que miden la misma distancia y por eso puede ser un punto medio
657	Profesora	Y ¿Ahí tiene la misma distancia?
658	Laura	Aun no lo hemos comprobado
659	Sergio	Primero yo hice un triángulo con la herramienta polígono después tome la herramienta para hacer un segmento tome la B y la puse aquí
660	Profesora	¿Qué característica debe tener ese segmento que acabas de hacer?
661	Sergio	Que debe tener un inicio y un final
662	Profesora	Y ¿El inicio dónde debe estar?
663	Sergio	Acá
664	Profesora	Y tiene qué ser B o pude ser A o C
665	Sergio	Puede ser A, B y C
666	Profesora	Y el otro punto el extremo del segmento, o sea qué característica debe tener
667	Sergio	Que tiene que ser el final, si este es el inicio entonces este debe ser el final
668	Profesora	Mueve a D pegándolo a A ¿Lo puedes mover?
669	Sergio	No
670	Profesora	¿Por qué no lo puedes mover?
671	Sergio	Porque ahí sería como si estuviera colocando…
672	Profesora	Ve a la flechita y mueve a D, déjalo ahí ¿Ahí sería la mediana?
673	Sergio	No
674	Profesora	¿Por qué no?
675	Sergio	Porque no está en la mitad entonces porque este está muy pegado…
676	Profesora	¿Cómo garantizo que es la mitad?
677	Sergio	Midiéndolo
678	Estudiantes	Fui a la herramienta recta y cogí la opción de segmento, cogí el punto B y lo moví que quedará en el centro del punto A y C
679	Profesora	Tu dijiste que lo moviste de tal manera que quedará qué, explícame ese pedacito
680	Estudiante	Que quedara de la misma medida
681	Profesora	Y será que tendrán la misma distancia
682	Estudiante	Claro
683	Profesora	Ve un momentico a elige y mueve, mueve el punto D ¿Ahí será la mediana?
684	Estudiante	No
685	Profesora	Mueve el punto C bien estirado, me va a construir la mediana ¿Qué te puede garantizar qué ese punto sea medio? ¿Qué te puede garantizar?
686	Estudiante	Que el punto queda en el medio de AC
687	Profesora	Lo vas a hacer y me cuentas
688	Félix	Ya aquí tenemos el triángulo con los puntos
689	Profesora	Pero ¿será qué ese es el triángulo?
690	Félix	No

691	Profesora	¿Qué debemos hacer para que sea un triángulo? [le explica al estudiante como quitar la opacidad]
692	Félix	Tenemos que trazar las medias
693	Profesora	Las mediana
694	Félix	Nos vamos aquí donde dice segmento de acá podemos trazar una mediana [señala el punto C] también podemos hace otra mediana …
695	Profesora	Seguro ¿Cuál es la definición de mediana?
696	Félix	La que tiene … [va borrando lo que hizo]
697	Profesora	Mira la definición que tienes en el cuaderno
698	Félix	El extremo del punto medio del lado opuesto de ese vértice
699	Profesora	Bueno un extremo del segmento es el vértice y el otro extremo es el punto medio del lado opuesto, ahí ya cumples una condición ¿Cuál cumples?
700	Félix	Trazar de un extremo a otro extremo
701	Profesora	Listo, al segmento opuesto ¿Qué condición te falta garantizar?
702	Félix	Hacer otros
703	Profesora	¿Será que D es punto medio?
704	Félix	No
705	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que sea punto?
706	Félix	Sí fuera punto medio estaría entre AB, el cual está aquí o sea que esta sería la mediana
707	Profesora	¿Será que D es un punto medio? ¿Cómo me puedes decir que en verdad es punto medio?
708	Félix	Porque
709	Frank	Como ya le explique la de AD le voy a explicar la BF
710	Profesora	Explícame cómo lo hiciste
711	Frank	Primero le doy acá
712	Profesora	¿Acá qué es?
713	Frank	En *Medio o Centro*, luego le di de A a C y me salió la F acá, le puse en segmento le di en la BF
714	Profesora	De acuerdo a eso ¿Qué es la mediana?
715	Frank	Es acá…
716	Profesora	El segmento
717	Frank	Por eso, el segmento opuesto
718	Profesora	El segmento opuesto no ¿Qué es la mediana? Es un segmento ¿Dónde está el segmento? En un triángulo ¿Qué característica tiene ese segmento? Mira el segmento
719	Frank	¿Qué característica tiene? No profesora
720	Profesora	O sea ¿Qué característica tiene? ¿Cómo armo ese segmento?
721	Frank	Con …
722	Profesora	Primera característica
723	Frank	*Medio o Centro*
724	Profesora	Si pero un extremo de segmento qué es

725	Frank	Es un punto
726	Profesora	Pero qué punto
727	Frank	El punto A o el punto C
728	Profesora	Y el siguiente extremo
729	Frank	El punto C o el punto A
730	Profesora	No, o sea un extremo es el punto A por ejemplo y el otro extremo cuál sería
731	Frank	D
732	Estudiante	Del segmento BC
733	Profesora	Pero qué es D
734	Frank	El punto medio de BC
735	Estudiante	Que es la mediana
736	Profesora	¿Qué hiciste?
737	Estudiante	Cogí el segmento y lo pase así por la mitad y hice que quedara de la misma medida en AD y DC y ahí dio la misma medida
738	Profesora	Entonces para ti ¿Qué es la mediana? Muéstrame una mediana ahí
739	Estudiante	Esta
740	Profesora	De color verde ¿Qué es la mediana?
741	Estudiante	Algo que no da
742	Profesora	Algo no, ¿Cómo se llama esto?
743	Estudiante	Un segmento
744	Profesora	Un segmento ¿Qué?
745	Estudiante	Que nos da la mitad del triángulo o algo así
746	Profesora	¿La mitad del triángulo?
747	Gina	Sí, nos da un punto en la mitad de un segmento.
748	Laura	Yo medí de AD y me dio 3.93 y de CD me dio 3.93 esto me garantiza que sea el punto medio D del segmento AC porque tienen la misma distancia.
749	Gina	Luego unimos el punto D con el punto B [Señala el vértice del triángulo] entonces si D es punto medio esta parte del triángulo debe ser igual a esta parte. [Señala la región del triángulo]. Como se divide la pizza, algo así.
750	Laura	Tiene tres medianas
751	Profesora	Vas a construir otra mediana de ese triángulo
752	Anderson	Puse una línea en la mitad y hice el segmento del punto C al F, y el punto F es el punto medio del punto A y el punto B
753	Profesora	¿Qué es la mediana?
754	Anderson	Es un triángulo
755	Profesora	¿Un triángulo? No, tú tienes el triángulo y en el triángulo hiciste un segmento ese segmento qué característica tiene
756	Anderson	Que tiene un principio
757	Profesora	¿Dónde es principio?
758	Anderson	Acá
759	Profesora	Y eso cómo se llama

760	Anderson	El punto C
761	Profesora	Pero en el triángulo como se llama
762	Anderson	Punto medio, ¿No?
763	Profesora	Míralo y ¿Cómo se llama eso? Se llama vértice, el principio entonces e llama vértice y el otro extremo qué es
764	Anderson	Punto F
765	Profesora	Me lo acabaste de decir
766	Anderson	Es un vértice y el otro es
767	Estudiante	El punto medio entre AB
768	Profesora	Entonces la mediana es un segmento que cumple con dos características ¿Cuáles características?
769	Estudiante	Que tiene que tener un vértice
770	Profesora	No, que un extremo es un vértice y el otro
771	Estudiante	es la mitad
772	Anderson	Punto medio
773	Profesora	Punto medio
774	Estudiante	Del punto AB

Transcripción Tarea 8

775	Nancy	Que el punto C puede pertenecer al segmento porque no se sale
776	Profesora	El punto C ¿Qué parte es del triángulo? ¿Cómo se llama ese punto?
777	Nancy	Vértice
778	Profesora	El vértice lo puedes mover ¿Cierto?
779	Nancy	Si
780	Profesora	¿Qué característica tiene el punto D del ΔABC?
781	Nancy	Este es un vértice [señala el punto A]. El punto D no se puede mover porque pertenece al segmento y es punto medio.
782	Sergio	El punto D también es punto medio.
783	Profesora	¿Cómo sabes que es punto medio?
784	Nancy	Se puede decir que tiene la misma distancia. [Hace referencia a la longitud de AD y DC]
785	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que tiene la misma distancia?
786	Nancy	Midiendo
787	Profesora	Con qué herramientas puedes medir
788	Nancy	[Hace el proceso en GeoGebra]
789	Profesora	¿Qué van a medir?
790	Profesora	Esa medida qué te garantiza
791	Nancy	Que D es el punto medio de AC
792	Profesora	¿Qué características tiene E?
793	Nancy	Que se puede mover por todo el segmento.
794	Sergio	Si fuera punto medio no se podría mover

795	Profesora	[Explica la actividad]
796	Nancy	Bueno profesora. Yo lo puedo mover para que este exactamente en la mitad, pero si muevo la esquina del triángulo deja de ser punto medio.
797	Profesora	¿Qué características tiene el triángulo?
798	Juan	El triángulo ABC la característica principal que yo vi el punto A es el punto del segmento AB
799	Profesora	¿Cómo puedes saber que es el punto medio del segmento?
800	Juan	Midiendo
801	Profesora	¿Qué Herramienta utilizas?
802	Juan	[Explica cómo medir en GeoGebra] Mido del punto A al punto D
803	Profesora	¿Qué te dio?
804	Juan	Que tiene la misma distancia de AD y DC
805	Profesora	¿Eso quiere decir qué es punto medio? ¿Qué otra característica puede tener?
806	Juan	Que el punto E lo puedo mover dentro del segmento BC, para poder que tenga la misma distancia…
807	Profesora	Listo
808	Juan	Cómo punto medio
809	Profesora	¿En qué punto debe estar D para qué mida la mitad del segmento AB? ¿Cómo podrías decir en qué punto?
810	Juan	Entre el segmento BC
811	Profesora	Ese punto D lo puedo poner en otro lado del segmento para qué mida 10
812	Juan	No
813	Profesora	Solamente en ese punto y ese punto lo puedo caracterizar o lo puedo describir
814	Juan	No, el punto D yo lo puedo mover entre el segmento CB
815	Profesora	Mueve el punto C ¿Cambia la medida de 10?
816	Juan	No
817	Profesora	¿Qué característica tiene ese punto D para que el segmento mida la mitad?
818	Miriam	Que tiene un punto medio el segmento AC, pero el punto medio no pertenece a un vértice
819	Mauricio	Este es el punto medio del segmento AC pero el punto E no pertenece al segmento de CB
820	Profesora	¿Por qué?
821	Mauricio	Si puede pertenecer pero no es un punto fijo, se puede mover
822	Profesora	Sera que si yo muevo a E tengo otra posición diferente de E para que me de 10
823	Mauricio	No
824	Profesora	Muévelo
825	Mauricio	No
826	Profesora	Solamente en ese punto

827	Mauricio	Si señora
828	Profesora	¿Qué características debe tener ese punto E para que de la mitad del segmento AB?
829	Mauricio	Creería que puede ser la mitad del segmento
830	Profesora	¿Cómo sabes qué es la mitad del segmento? ¿Qué herramienta podrías utilizar?
831	Miriam	[Mide los segmento CE y CB]
832	Profesora	¿Qué características puede tener ese punto E?
833	Mauricio	Que puede ser el punto medio del segmento CB
834	Miriam	No, Que está en la mitad de CB
835	Mauricio	Por eso...
836	Miriam	Pero no es un punto …
837	Mauricio	Fijo
838	Miriam	Que está en la mitad
839	Profesora	Está en la mitad del segmento CB
840	Miriam	Si
841	Profesora	Si está en la mitad y pertenece al segmento ¿no puede ser punto medio?
842	Mauricio	Si
843	Sergio	El punto específico para que tenga la mitad de la medida del segmento
844	Profesora	¿Para que qué?
845	Sergio	Para que el punto E tenga la mitad, para que el punto E tenga la medida del punto AB
846	Profesora	Pero hablamos del punto o del segmento
847	Sergio	Bueno del segmento para que el punto E debe ser el punto medio del segmento CB para que el segmento DE tenga la mitad de la medida del segmento AB
846	Bayron	Pues que el segmento AB no tiene punto medio, o sea tiene la distancia pero no tiene ningún punto y no tiene mediana porque no está cogida con un vértice
847	Estudiante	[Mide los segmentos CE y EB]
848	Profesora	¿Para qué hace eso?
849	Estudiante	Para saber si tiene punto medio
850	Profesora	¿Qué me quieres mostrar?
851	Estudiante	Para saber si tiene mediana
852	Profesora	¿Eso es la mediana?
853	Estudiante	A ver si tiene punto medio
854	Bayron	De todos modos no, tiene la distancia donde iría el punto pero no
855	Profesora	¿Qué característica tiene el triángulo ABC? Tiene un punto D ¿Ese punto D qué es?
856	Bayron	La característica es que esta entre AC y es el punto medio
857	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que es el punto medio?
858	Bayron	Midiéndolo [Mide en GeoGebra AD y DC]
859	Profesora	¿Eso garantiza qué D es punto medio?

860	Estudiante	Entonces es congruente AD con DC
861	Profesora	¿Qué característica debe tener el punto E para que el segmento ED sea la mitad del segmento AB? Mueve E ¿En otro punto medirá 10?
862	Bayron	Si se puede creo, no se puede
863	Profesora	¿Qué característica debe tener el punto E para que el segmento ED sea la mitad del segmento AB?
864	Bayron	Que pertenezca al segmento
865	Profesora	Pero si yo lo muevo pertenece al segmento pero para que mida 10
866	Estudiante	Estar en la mitad de este segmento [Señala CB]
867	Bayron	Está en la mitad de CB
868	Profesora	¿Cómo puedes garantizar que está en la mitad?
869	Estudiante	Midiéndolo
870	Bayron	No da [En CE da 7.32 y en CB da 7.33]
871	Estudiante	Yo haría esto [Usa la herramienta de punto medio]
872	Bayron	Por un milímetro
873	Profesora	Pero podría estar ahí
874	Bayron	Si, moverlo un poquitico para que sea el punto medio de CB [Movió el punto E, y el segmento DE mide ahora 9.99]
875	Profesora	Si ponemos el punto E en el punto medio del segmento CB, el segmento DE medirá la mitad del segmento AB
876	Bayron	si
877	Estudiante	Miden diferentes segmentos

Transcripción Tarea 9

878	Sergio	Midiendo los segmentos
879	Profesora	¿Cuéntame cómo fue tu proceso?
880	Sergio	Primero hicimos el triángulo ABC, después sacamos los puntos medios de cada segmento AB, AC y BC, después hicimos un triángulo con los puntos medios y ahora estamos midiendo la distancia entre los segmentos
881	Profesora	¿Para qué mides los segmentos?
882	Nancy	Es que queremos mirar si la medida del perímetro del triángulo menor es la mitad del triángulo mayor.
883	Sergio	Debe ser la mitad porque
884	Profesora	¿Cuéntame cómo fue tu proceso?
885	Kevin	Aun no
886	Profesora	¿Qué hiciste?
887	Kevin	Hicimos el triángulo
888	Profesora	¿Cuál?
889	Kevin	El ABC y después hicimos el DEF

890	Profesora	¿Cómo hicieron el triángulo DEF?
891	Kevin	Con los segmentos
892	Profesora	¿Cómo salió el triángulo pequeño?
893	Kevin	Puse la herramienta punto medio, me salieron los tres puntos medios de cada lado AB, BC y AC
894	Estudiante	Hice un triángulo con el segmento
895	Profesora	¿Cómo se llama el triángulo?
896	Estudiante	ABC, luego le cambie el color a gris y después puse en puntos medios o centro, y los puso en la mitad y después hice otro triángulo pero con los medios y los medí
897	Profesora	¿Ahora qué vas a hacer? El perímetro del triángulo ABC comparado con el perímetro del triángulo DEF
898	Estudiante	Primero hicimos el triángulo y luego primero lo medimos, luego de eso en la hoja escribimos las medidas del segmento AB, AC y BC
899	Profesora	Y este resultado qué es
900	Estudiante	Ese fue el resultado del anterior
901	Profesora	Cómo lo obtuviste
902	Estudiante	Primero colocamos calculadora, luego sumamos estos en la calculadora y de la calculadora nos sacó el resultado
903	Profesora	O sea que ese resultado es la suma de los lados del triángulo ¿Eso cómo se llama?
904	Estudiante	El perímetro del triángulo ABC
905	Profesora	A la vez vas a medir el pequeño
906	Profesora	¿Cómo completaste la tabla?
907	Bayron	Primero cogimos la herramienta segmento pusimos el triángulo ABC, luego cogimos la herramienta medio o centro, la pusimos entre AB, BC y CA, luego ahí aparecieron D, F, y E otro triángulo al revés que se llama DFE, luego cogimos la herramienta distancia longitud A de B, B de C y C de A, ahí salían los resultados , luego hicimos la tabla que está en la hoja y pusimos los resultados y el resultado nos da 33, 07
908	Profesora	¿Y el pequeño?
909	Bayron	El pequeño lo medimos también D de a F, de F a E y de E a D, el resultado nos da 16,53
910	Bayron	El pequeño lo medimos también D a F, de F a E y de E a D, el resultado nos da 16,53
911	Profesora	¿Puedes mostrarme otro tipo de triángulo?
912	Bayron	Si, puedo moverlo
913	Profesora	¿Cuál vértice quieres mover?
914	Bayron	El vértice C [con el cursor y utilizando la función de arrastre desplaza el vértice C]
915	Profesora	¿Y ahora qué vas hacer?
916	Bayron	Mido el segmento DF que me tiene que dar la mitad del segmento BC.
917	Profesora	Y de acuerdo con el triángulo anterior [se refiere a lo que encontraron cuando hicieron el primer ejemplo.] y este, ¿qué puedes concluir?

918	Bayron	Todas las medidas del triángulo pequeño son la mitad de las medidas del triángulo grande.
919	Profesora	¿Si no utilizaras números en las medidas puedes comprobar lo que me acabas de decir?
920	Bayron	Pues son la mitad porque estos lados son como mitades por el punto medio [señala el triángulo DEF]
921	Profesora	Has memoria del nombre del hecho, mitad segmento algo así
922	Estudiante	No profesora yo no recuerdo
923	Profesora	Qué decimos la clase pasada
924	Estudiante	Que el segmento GF tiene que dar la mitad de este
925	Profesora	¿De cuál?
926	Estudiante	Que el segmento GF tiene que dar la mitad de AC
927	Profesora	¿Seguro?
928	Estudiante	Si
929	Profesora	Muéstrame el segmento GF
930	Estudiante	Este tiene que dar la mitad de AC
931	Profesora	¿Seguro?
932	Estudiante	¿No?
933	Profesora	¿De cuál?
934	Estudiante	¿De AC?
935	Profesora	Del opuesto ¿Cuál es el opuesto?
936	Estudiante	Este
937	Profesora	AB, ese es el hecho geométrico que encontramos la clase pasada, cuál sería el segmento de DG la mitad de cual segmento
938	Estudiante	De este
939	Profesora	¿De cuál?
940	Estudiante	AB
941	Sergio	Nosotros encontramos que los perímetros del triángulo DEF son la mitad de los perímetros del triángulo ABC
942	Profesora	Demuéstreme que lo que acabas de encontrar es cierto.
943	Nancy	[Nancy propone medir los segmentos] Estamos midiendo los segmentos del triángulo que son BA, BC y AC. Vamos a medir los segmentos del triángulo más pequeño [le muestra a la profesora lo que hizo utilizando el software]
944	Sergio	No los midamos. El hecho geométrico que encontramos la clase pasada dice que esto mide la mitad [señala el segmento DF]
945	Nancy	Sería la mitad de cada segmento. Eso da.
946	Profesora	¿Para todos los casos pasa lo mismo?
947	Sergio	Si
948	Profesora	¿Por qué?
949	Sergio	Por el hecho geométrico, pero podemos usar la herramienta punto medio y ahí nos garantiza que es punto medio y que tiene la misma distancia

950	Sergio	Hicimos el triángulo y sacamos los puntos medios y ahora vamos a hacer el triángulo pequeño
951	Profesora	¿Demuéstreme que lo que acabas de encontrar es cierto?
952	Juan	Estamos midiendo los segmentos BA, los segmentos del triángulo que son BA, BC y AC y también estamos midiendo los segmentos del triángulo más pequeño
953	Profesora	No midas el pequeño, quita esa medida, de acuerdo al hecho geométrico que encontramos la clase pasada ¿Cuál sería la medida del segmento DF sin que lo midieras?
954	Sergio	Sería la mitad de cada segmento
955	Profesora	¿De cuál?
956	Juan	DF seria la mitad del segmento BC
957	Profesora	Entonces cuál sería su medida
958	Juan	4.45
959	Profesora	Cuál sería la medida del segmento EF
960	Juan	Sería el segmento BA, sería 4.015
961	Profesora	Que decía el hecho geométrico de la clase anterior
962	Juan	Qué tiene que ser la mitad de cada segmento
963	Profesora	¿Debe ser el punto medio?
964	Juan	Si
965	Profesora	Para que
966	Juan	Debe ser la mitad del segmento porque es el punto medio del segmento AC y tiene que ser la mitad del resultado AC
967	Profesora	Como decía el segmento por ejemplo si yo tengo un triángulo y tengo los puntos medios DE, el segmento DE seria la mitad del segmento AC ¿Por qué? ¿Pueden ser cualquier punto?
968	Sergio	No, tiene que ser los puntos medios para poder que sea la mitad de esta medida
969	Profesora	Entonces como sería el enunciado del hecho geométrico [sigue explicando]
970	Mauricio	El triángulo DFE es parte del triángulo ABC
971	Miriam	Ese triángulo se saca de los puntos medios del triángulo
972	Profesora	¿Qué relación pueden encontrar en el perímetro de los dos triángulos?
973	Mauricio	El perímetro DEF es la mitad de ese perímetro
974	Profesora	¿Qué te puede garantizar que es la mitad?
975	Mauricio	Midiéndolo
976	Miriam	Que esta medida AB sea la mitad
977	Mauricio	EF
978	Profesora	¿Cómo?
979	Mauricio	digamos la medida del punto AB
980	Profesora	Del segmento
981	Mauricio	Bueno, el segmento AB sea la mitad, acá sale que es la mitad del segmento EF
982	Profesora	¿Qué otras mitades encuentro?

983	Mauricio	AC y BC
984	Miriam	AC y BC
985	Profesora	¿Cuál es la mitad de BC?
986	Miriam	El segmento DF
987	Profesora	¿Cuál es la mitad de AC?
988	Miriam	El segmento ED
989	Profesora	Porque puedo garantizar que la mitad del perímetro del triángulo mayor es la mitad del perímetro menor
990	Miriam	Porque las distancias que tiene el triángulo mayor es la mitad de las distancias que tiene el triángulo menor
991	Profesora	[Socializa con los estudiantes la tareas realizada]
992	Estudiante	[Le dicen a la profesora la construcción de los triángulos]
993	Profesora	Si el segmento CA mide 24 cuanto medie ñ segmento
994	Juan	12
995	Profesora	Cuál segmento
996	Juan	EF
997	Profesora	Por cuál segmento
998	Estudiante	Punto medio
999	Profesora	Lo llamamos mitad segmento, si el segmento AB mide 32 ¿Cuánto mide el segmento DF?
1000	Andrés	16
1001	Profesora	O será el segmento DE
1002	Estudiantes	DF
1003	Profesora	Si el segmento CB mide 27 cuánto mide el segmento DE
1004	Estudiantes	13,5
1005	Profesora	Esto lo hicimos con cuántos triángulos
1006	Estudiante	Dos
1007	Profesora	¿Con cuántos?
1008	Estudiantes	Con cinco
1009	Profesora	Después de hacerlo cinco veces tenían que mirar el perímetro
1010	Sergio	Los puntos D, E, F tienen que ser puntos medios para cumplir con el hecho geométrico mitad segmento
1011	Profesora	¿Qué relación hay entre el perímetro del triángulo ABC y DEF?
1012	Gina	Que en el triángulo pequeño DEF el resultado es la mitad de los punto AC y así
1013	Mauricio	El triángulo menor es la mitad del resultado del triángulo mayor
1014	Profesora	Pero el resultado de qué
1015	Estudiante	Perímetro, el triángulo menor DEF tiene la mitad del perímetro del mayor ABC

1016	Profesora	Digamos que no tomamos mediadas pero tenemos la relación del hecho geométrico mitad segmento, el perímetro del triángulo DEF es la mitad del perímetro del triángulo ABC, eso es una afirmación ¿Cómo podemos garantizar qué esto es verdad sin utilizar medidas?
1017	Adriana	Es muy fácil porque tenemos los puntos medios y el triángulo…
1018	Profesora	Pero qué es punto medio
1019	Adriana	Es el punto que está en la mitad del segmento AC, pues ahí ya se sabe que los puntos medios de cada segmento al trazar los segmentos da la mitad del triángulo ABC
1020	Juan	El triángulo menor que es DEF son los puntos medios del segmento ABC del perímetro
1021	Profesora	Entonces yo puedo decir que los puntos DEF son puntos medios del triangulo ABC, vamos a hacer el esquema qué se, qué uso y qué concluyo ¿qué es?
1022	Juan	Que el triángulo menor DEF son los puntos centrales, los puntos medios del triángulo ABC
1023	Profesora	¿Qué uso para saber que son puntos medios?
1024	Estudiantes	Medir, una regla
1025	Profesora	Usamos la definición, como ustedes ya saben la definición la pueden usar y la pueden ver ¿qué se concluye?
1026	Adriana	Que tiene la misma distancia
1027	Mauricio	Que tiene la misma distancia que el punto medio del segmento CB
1028	Profesora	Que tiene la misma distancia y ¿Cuál otro?
1029	Estudiante	Que son congruentes
1030	Estudiante	Que pertenezca al segmento
1031	Profesora	Y ¿Cuál otro?
1032	Michael	Que tengan la misma distancia
1031	Profesora	Entonces acá la distancia entre AE es la misma que la distancia EC, entonces yo ya uso algo que es que son punto medios ¿Qué otra cosa se para garantizar que esto se cumple? Recuerden el hecho geométrico ¿Qué nos dice?
1032	Charlie	Que la distancia entre CA digamos es 20 entonces la distancia entre DF es 10
1033	Profesora	Eso como lo decimos con palabras
1034	Mauricio	Podemos decir que
1035	Profesora	Usemos el lenguaje geométrico para explicar la idea
1036	Michael	El segmento AD debe tener la misma distancia que el segmento DC
1037	Profesora	Este hecho geométrico mitad segmento qué me dice [Realiza un contra ejemplo donde no funciona el hecho]
1038	Adriana	Porque no sale del vértice D y el punto F no está en la mitad del segmento, no es punto medio
1039	Profesora	Esto se cumple si D y F son
1040	Estudiantes	Puntos medios
1041	Profesora	Tenemos acá lo siguiente que se, sé que lo que me había dicho Mauricio, la distancia del segmento FE, es la mitad de cual

1042	Estudiante	De AC
1043	Profesora	Porque lo sé por el hecho geométrico mitad segmento [Escribe y explica el hecho geométrico] ¿Por qué puedo decir que el perímetro del triangulo DEF es la mitad del perímetro ABC? ¿El hecho geométrico me sirve?
1044	Bayron	Si
1045	Sergio	Porque el perímetro del triangulo DEF es la mitad del perímetro del triangulo ABC porque los puntos del triangulo pequeño son puntos medios
1046	Profesora	Como llamamos a este hecho geométrico
1047	Estudiante	Mitad perímetro
1048	Profesora	Redactemos este hecho geométrico
1049	Gina	Cuando uno tiene un perímetro determinado de ABC, tiene que tener otro perímetro que tenga la mitad de su distancia
1050	Sergio	Que el perímetro del triangulo DEF tiene que ser la mitad del perímetro del triángulo ABC
1051	Profesora	¿Sí?
1052	Adriana	Si DEF son puntos medios de ABC
1053	Profesora	De los lados de qué
1054	Estudiante	Del triángulos ABC