REPRESENTACIÓN GRÁFICA ADECUADA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA EN PRIMARIA

MARIO ALBERTO CAÑÓN GUTIÉRREZ

LILIANA ROZO GUTIÉRREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D. C.
2015

REPRESENTACIÓN GRÁFICA ADECUADA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA EN PRIMARIA

MARIO ALBERTO CAÑÓN GUTIÉRREZ

LILIANA ROZO GUTIÉRREZ

Tesis presentada ante el departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática.

Directora:
LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2015

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Representación gráfica adecuada de una figura geométrica en primaria"** Presentado por los estudiantes:

Mario Alberto Cañón Gutiérrez - 2013185005 - 80084376
Liliana Rozo Gutiérrez - 2013185021 - 52717590

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 48 Puntos.

Observaciones: Se recomienda otorgar la distinción Meritoria.

En constancia se firma a los 5 días del mes de marzo de 2015.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesora LEONOR CAMARGO URIBE

Jurados:

Profesora CARMEN SAMPER DE CAICEDO

Profesor FERNANDO SOTO

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

A ese ser que en todo momento de mi vida me acompaña, guia y muestra caminos para no desfallecer, Dios.

A Maito, que con su amor, paciencia, luz, dedicación y entrega ha llenado mi vida de momentos inolvidables.

A mi familia, por su apoyo, colaboración, entusiasmo y buena vibra.

A Leonor Camargo, como una pequeña retribución a su labor y por ser un ser humano tan especial.

GRACIAS

Liliana Rozo Gutiérrez

A Dios, por permitirme vivir lo que viví, por su mágica forma de estar junto a mi esposa y a mi, iluminando nuestro camino.

A Liliana, por decidir ser mi compañia en esta aventura. Por ser apoyo incondicional en los retos de cada semestre, por su infinita paciencia, por su comprensión y por ese deseo de hacer las cosas cada vez mejor. Especialmente por su amor, que me hace levantar cada día con el deseo de vivir.

A mi familia, por el sacrifico de mi ausencia, por su apoyo incondicional, que aunque lejos, se siente.

A Leonor Camargo, por su apoyo, comprensión y por ser aquella persona que Dios colocó en nuestro camino para orientarnos en esta aventura.

GRACIAS

Mario Alberto Cañón Gutiérrez

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado de maestría de investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Representación gráfica adecuada de una figura geométrica en primaria
Autor(es)	Cañón Gutiérrez, Mario Alberto; Rozo Gutiérrez, Liliana
Director	Camargo Uribe, Leonor
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 108 pp.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Representaciones geométricas, normas sociomatemáticas, geometría dinámica, congruencia, compartir un criterio.

2. Descripción
Tesis de grado donde presentamos una investigación realizada con estudiantes de quinto de primaria de un colegio distrital en el segundo semestre del año 2013. El propósito de esta investigación consistió en sugerir una vía que contribuyera al establecimiento de aspectos normativos que generaran compartir un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica. Al disponer de referentes teóricos sobre normas sociomatemáticas (Yackel y Coob, 1996), figura geométrica y sus representaciones (Laborde, 1995), y constitución colectiva de un criterio, se muestra que es posible establecer colectivamente un criterio sobre una representación adecuada de una figura geométrica, en particular triángulos isósceles y equiláteros, utilizando una convención que haga referencia a la propiedad de congruencia de lados en dichos triángulos. Esta investigación se desarrolló en cuatro momentos: en el primero se elaboró un marco de referencia acorde a lo presupuestado; en el segundo, se planeó un experimento de enseñanza, en el tercero se llevó a cabo la ejecución del experimento y se recolectaron datos; y finalmente se organizaron y analizaron los datos con la ayuda del programa Atlas.ti.

3. Fuentes
En total se consultaron 25 fuentes entre informes de proyectos de investigación, artículos publicados en revistas internacionales y artículos que hacen parte de las memorias de

encuentros de Educación Matemática. A continuación se mencionan las principales fuentes bibliográficas:

Cobb, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. En Kelly; Lesh. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Cap. 19, 517-545.

Laborde, C. (1996). Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En Puig, L (Eds.), Investigar y enseñar: Variedades de la educación matemática. Colombia: Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamérica.

Laborde, C. (2005). The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry. En C. H. J. Kilpatrick, *Meaning in Mathematics Education* (págs. 159-179). Springer US.

Mariotti, M. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. *Revised and extended version of the version published in: Hejny M., Novotna J. Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (págs. 21-26). Praga: Prometheus Publishing House.

Mariotti, M.A. (2001). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics. 44 (1), 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173–204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Martin, T., McCrone, S. S., Bower, M. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Matematics, 60*, 95 - 124.

Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas, 30, 114-124.

Sáenz-Ludlow, A., & Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture* (pp. 195–214). The Netherlands: Sense Publishers.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458. doi:10.2307/749877

4. Contenidos

El documento se organiza en cinco capítulos. El primero de ellos muestra el planteamiento de la investigación donde se describe el problema a investigar con base a evidencias empíricas y literarias, la pregunta de investigación, los objetivos de la investigación, las hipótesis de trabajo y una reseña de los antecedentes investigativos. En el segundo capítulo se muestra el marco de referencia teórico que configura la investigación. En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico del experimento de enseñanza que describe procesos, decisiones, herramientas y categorías de análisis seleccionadas. En el cuarto capítulo se encuentran los análisis y resultados más importantes de la investigación.

Finalmente, en el quinto capítulo, se enuncian las conclusiones arrojadas por la investigación en relación a los objetivos, a las hipótesis elaboradas, a la investigación en general, y aportes y cuestiones abiertas a posibles investigaciones que se puedan derivar de nuestra investigación.

5. Metodología

En el desarrollo de esta investigación se observan tres grandes momentos. El primero, relacionado con la elaboración del anteproyecto del trabajo de grado durante el cual se planteó el problema de investigación, se recolectaron evidencias empíricas que contribuyeron a ilustrarlo, se definieron los objetivos y la pregunta de investigación y se establecieron los referentes teóricos iniciales. El segundo lo configuran las fases de la metodología de un Experimento de Enseñanza: (i) planeación y diseño, (ii) experimentación y (iii) análisis retrospectivo. En el tercero, se presentan los resultados, conclusiones y reflexiones emergentes de la investigación.

6. Conclusiones

Uno de los resultados importantes de este trabajo es sugerir una vía para contribuir al establecimiento de aspectos normativos que posibiliten la constitución colectiva de un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica. Esta vía se fundamenta en: (i) crear un ambiente de aula de indagación y participación; (ii) establecer normas para explorar, representar y justificar; (iii) disponer de un lenguaje geométrico común con el cual se puedan referir a las representaciones geométricas; (iv) explorar las representaciones y justificar afirmaciones de manera cada vez más cercana a la forma como lo hace la comunidad matemática; (v) disponer de hechos geométricos como garantías con las cuales justificar propiedades geométricas; (vi) representar figuras de manera cada vez más cercana a la forma como lo hace la comunidad matemática; y (vii) hacer uso de la convención que indica congruencia de segmentos en una representación de una figura para obtener información de sus propiedades.

Un ambiente de indagación y participación se logra con el fomento de normas sociales como escuchar a los demás, seguir instrucciones entre otras, de manera persistente durante cada clase a través de las interacciones entre los participantes. De manera similar, las normas sociomatemáticas para explorar, representar y justificar, y el lenguaje geométrico, se establecen poco a poco al discutir las soluciones de las actividades matemáticas propuestas. Las normas para explorar orientaron las acciones en GeogebraPrim hacia la detección de invariantes de congruencia, los cuales posteriormente fueron aceptados, institucionalizados, y teorizados mediante hechos geométricos. Las normas para justificar orientaron las formas de justificación y convencimiento al establecer que las afirmaciones hechas en el aula se realizaban con base a los hechos geométricos establecidos previamente. Las normas para representar orientaron la representación de figuras geométricas en los tres ambientes (Geogebraprim, lápiz y papel con regla y compás y a mano alzada), en los que se estableció que una representación válida debe evocar las propiedades geométricas de la figura que representa. Por otro lado, el diseño de las actividades influyó de manera decisiva en la generación de un ambiente propicio para las discusiones matemáticas en el aula.

Destacamos que la constitución colectiva y con significado de la convención para representar la congruencia mejoró los procesos de argumentación de los estudiantes en el aula. Además se observaron los esfuerzos de la profesora para abordar varios frentes de acción como el impulso de distintas normas sociales y sociomatemáticas, la orientación del trabajo en GeogebraPrim y el tratamiento adecuado de las interacciones que puedan generarse en el aula en la solución de las actividades propuestas. También se observó que las actividades realizadas en los tres ambientes (Geogebraprim, lápiz y papel con regla y compás y a mano alzada) favorecieron los procesos de exploración, representación y justificación relacionados con representaciones geométricas válidas y con los hechos geométricos constituidos y aceptados colectivamente. Consideramos que esta investigación es un gran aporte a la comunidad de educadores e investigadores en educación matemática ya que proporciona elementos importantes para mejorar y orientar las prácticas de aula.

Esta investigación destaca y evidencia el alcance de las interacciones y las discusiones matemáticas en la constitución de un ambiente de aula cercano al de una comunidad matemática; acentúa el papel de las normas sociomatemáticas como un camino para orientar las practicas matemáticas del aula; evidencia un proceso estructurado donde se observa que es posible que los estudiantes a temprana edad vayan adquiriendo una práctica matemática donde se justifiquen y argumenten las aseveraciones mediante criterios teóricos acordados; muestra de manera práctica un transición favorable entre los ambientes donde se representan figuras geométricas (programas de geometría dinámica, lápiz y papel con instrumentos de trazo y a mano alzada).

Elaborado por:	Mario Alberto Cañón Gutiérrez Liliana Rozo Gutiérrez
Revisado por:	Camargo Uribe, Leonor

Fecha de elaboración del Resumen:	19	01	2015

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE IMÁGENES

LISTA DE ESQUEMAS

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la enseñanza y el aprendizaje de la geometría han sido considerados objetivos importantes de la educación matemática debido a que la geometría proporciona a las personas elementos para interpretar, modelar, razonar, argumentar y decidir; es decir, les brinda herramientas que les ayuda a desenvolverse mejor en la vida y configuran un adecuado reflejo mental de lo que es el mundo. De esta manera la geometría debe ser enseñada y aprendida desde los primeros años en la escuela. Como parte fundamental, las representaciones geométricas son un asunto que debe tratarse con cuidado puesto que los significados ligados a la representación de una figura geométrica no son necesariamente compartidos por los estudiantes y profesores, lo que puede perjudicar los procesos de argumentación en el aula. Este trabajo se enfoca en abordar la anterior problemática y está en sintonía con los intereses de la línea de investigación de Argumentación y Prueba del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional. Tiene como objetivo sugerir una vía que contribuya al establecimiento de aspectos normativos que generen compartir un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica.

El trabajo costa de cinco capítulos: el primero presenta el planteamiento de la investigación, donde se describe el problema a investigar con base a evidencias empíricas y literarias, la pregunta de investigación, los objetivos de la investigación, las hipótesis de trabajo y una reseña de los antecedentes investigativos. En el segundo capítulo se muestra el marco de referencia teórico que configura la investigación. En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico del experimento de enseñanza que describe los procesos, las decisiones, las herramientas y las unidades de análisis seleccionadas. En el cuarto capítulo se encuentran los análisis y resultados más importantes de la investigación. En el quinto capítulo, se enuncian las conclusiones arrojadas por la investigación en relación a los objetivos, a las hipótesis elaboradas, a la investigación en general, y aportes y cuestiones abiertas a posibles investigaciones.

1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Formulación del problema

En el presente capítulo se describe el proceso que se llevó a cabo para hacer el planteamiento de la investigación. Dicho proceso inicia con una preocupación personal y profesional que nos llevó a la necesidad de ubicarnos en una línea de investigación en la cual encontráramos fuentes teóricas que nos ayudaran a configurar nuestro problema de investigación y a centrar la investigación en un asunto específico. Luego, buscamos fuentes empíricas y teóricas que dieran soporte a la necesidad de abordar dicha problemática. Para realizar el anterior proceso fue necesario hacer una revisión de antecedentes investigativos centrada en el problema específico. Luego de la anterior revisión, planteamos el problema, la pregunta y los objetivos de la investigación. A continuación presentamos detalles de este recorrido.

1.1.1 Motivación

El interés en realizar esta investigación surgió del deseo constante de mejorar las prácticas de aula, puesto que, al observar nuestras clases de geometría y las de otros docentes, evidenciamos problemas para apoyar a los estudiantes en la elaboración de argumentaciones basadas en las representaciones gráficas de las figuras geométricas. Algunas de estos problemas podrían deberse a: la poca importancia que se le da a la geometría en las instituciones; la falta de utilización o la utilización inadecuada de instrumentos de trazo para realizar representaciones gráficas de parte de estudiantes y docentes; y la consideración de algunos docentes de pensar que la argumentación se debe dejar para grados superiores, entre otras.

1.1.2 Antecedentes del estudio

Luego de identificar las anteriores problemáticas buscamos estudios que estuvieran relacionados con nuestro interés. Identificamos en ellos otras causas de las dificultades más específicas como, por ejemplo: el descuido en las representaciones gráficas que se hacen de las figuras geométricas, en clase, ya sea con lápiz y papel, con instrumentos de trazo o con programas de geometría dinámica (Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008); la poca importancia que algunos docentes le dan al fomento de una cultura de la argumentación en geometría (Mariotti, 2006); el desconocimiento de la existencia e influencia de las normas sociomatemáticas[1]implícitas o explícitas acerca de este asunto (Voigt, 1995); y el significado que se le atribuye a una figura geométrica en el aula (Laborde, 1994). Los estudios señalan que la falta de atención a estos aspectos puede contribuir a la generación de ambientes de aula en el que cada quien "actúa matemáticamente" como lo considera pertinente.

Estos estudios hacen parte de investigaciones cuyo objetivo es la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la justificación, vista esta última desde una perspectiva amplia. Los trabajos de investigación que se centran en este objetivo han sido organizados en diferentes líneas de investigación (Mariotti, 2006; Harel & Sowder, 2007 y Boero, 2007). Por ejemplo, Mariotti (2006), organiza dichos trabajos en tres líneas principales que se identifican por tres grandes categorías de preguntas de investigación: (i) investigaciones en las que se cuestiona sobre el estado de la argumentación y la justificación en el aula; (ii) investigaciones en las que se indaga por las principales dificultades que enfrentan los estudiantes en relación a la argumentación y la justificación y su posible origen y (iii) investigaciones en las que se pregunta sobre el diseño de intervenciones de enseñanza que ayuden a superar las dificultades que los estudiantes tienen con relación a la argumentación y la justificación.

Teniendo en cuenta esta organización, enmarcamos nuestra investigación dentro de la línea de las intervenciones de enseñanza. Las investigaciones en esta línea analizan, entre otros asuntos, posibles actividades y tareas que se proponen a los estudiantes, los recursos utilizados, las interacciones entre estudiantes y estudiantes con el docente, las normas establecidas en el aula para aceptar argumentos y el rol del docente, todo esto con el fin de impulsar el aprendizaje de la justificación y la argumentación. Dentro de esta línea, en este estudio, nos centramos en las normas sociomatemáticas, puesto que asumimos que la

[1] En esta investigación el término norma sociomatemática hace referencia a los aspectos normativos establecidos en el transcurso de las interacciones en el aula entre los estudiantes y el docente y entre los estudiantes (de manera implícita o explícita), que regulan las acciones e interacciones de la microcultura del aula de matemáticas.

interacción social constituye un factor fundamental que afecta, motiva y alimenta el aprendizaje de la argumentación (Mariotti, 2006).

Así mismo, ubicamos nuestra investigación como parte de los proyectos de la línea de Argumentación y Prueba en geometría que lidera el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría Æ · G, de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. En esta línea se abordan problemáticas asociadas a los procesos de argumentación en la actividad matemática en el aula como: la argumentación que lleva a la formulación y validación de conjeturas, las tareas que favorecen dicha argumentación, los ambientes de aprendizaje que favorecen el desarrollo de la justificación, el papel de las herramientas de mediación en los procesos de argumentación, la interacción social que se evidencia cuándo se desarrollan esos procesos, y las aproximaciones metodológicas para orientar desarrollos curriculares en pro del desarrollo de los procesos mencionados.

Reconocimos que nuestro estudio podría contribuir a la anterior línea de investigación al abordar una problemática asociada a los procesos de argumentación. Estos procesos están presentes en las discusiones matemáticas generadas por los estudiantes y la profesora a partir de la búsqueda de representaciones adecuadas de las figuras geométricas en cuestión. Nuestro estudio sirve como insumo para: caracterizar prácticas de enseñanza en las que se enseña a argumentar, orientar la metodología de las clases y restaurar la importancia de la argumentación en geometría; diseñar, implementar y evaluar ambientes de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de las competencias de los estudiantes para argumentar y justificar; y estudiar la mediación de la tecnología computacional en procesos de conceptualización, argumentación y justificación.

1.1.3 Documentación empírica

Para concretar el problema registramos mediante un video, una clase típica de geometría de grado quinto de un colegio privado de Bogotá, en la que se hacía una introducción al perímetro y al área de figuras planas. Con el fin de analizar la clase nos basamos en los siguientes cuestionamientos: ¿Se usan representaciones? ¿Para qué se usan? ¿Qué instrumentos se utilizan para hacerlas? ¿Cómo y quién las valida? ¿Se argumenta a partir de ellas? El aspecto en el que centramos la atención fue el tratamiento dado a las representaciones gráficas de una figura geométrica en el aula. A manera de ilustración presentamos un fragmento de clase que ocurre en el momento en el que la profesora hace la introducción al tema recordando qué es una "figura plana". Subrayamos algunas frases sobre las que queremos enfocar la problemática.

(1) Profesora: Juan Diego, dime una figura plana.
(2) Juan Diego: El cuadrado.
(3) Profesora: Ven y lo dibujas [Juan Diego pasa al tablero y hace, a mano alzada, la representación gráfica que aparece en la Imagen 1.1].
(4) Profesora: ¿Eso qué es? [señala la representación hecha]
(5) Carlos: Una figura plana.
(6) Luisa: Un cuadrado.
(7) Profesora: ¿Qué características tiene un cuadrado?
(8) Camilo: Que tiene cuatro lados.
(9) Sofía: Y son iguales.
(10) Profesora: Vamos a mirar. Imaginemos que Juan Diego hizo esas líneas derechitas, derechitas.
(11) Mateo: ¡Humm imaginemos! [expresión sarcástica].
(12) Cristian: ¡Sí, súper derechitas! [expresión sarcástica].
(13) Profesora: [Cuenta la longitud de cada lado señalando las marcas de la cuadrícula del tablero]. Uno, dos, tres y cuatro; uno, dos, tres y cuatro; y cuatro y cuatro. Dime otra figura plana, Felipe [Felipe pasa al tablero y hace, a mano alzada, la representación gráfica que aparece en la parte inferior de la Imagen 1.2].
(14) Mateo: ¡Huiiii esa figura! [exclamación de protesta].
(15) Camilo: ¡Que se tiene que imaginar! Eso está perfecto. [responde ante la exclamación de su compañero].
(16) Profesora: Bueno, vamos a imaginarnos que es un rombo.

En la Imagen 1.3, se ilustra que la profesora también hace construcciones a mano alzada en otro momento de la clase.

Imagen 1.1 Juan Diego dibujando un cuadrado a mano alzada

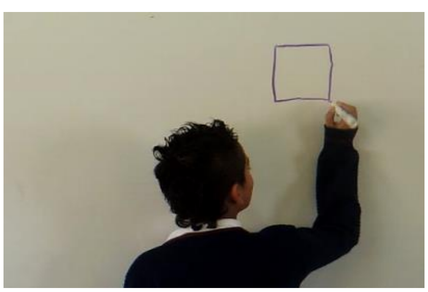


Imagen 1.2 Representación de un rombo a mano alzada

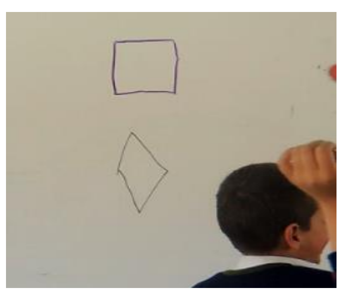
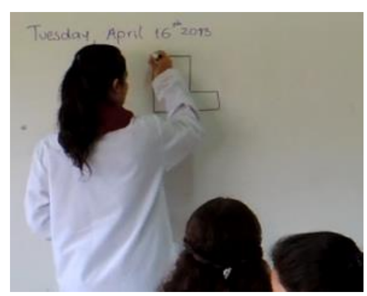


Imagen 1.3 Profesora dibujando una figura a mano alzada



Suponemos que el anterior diálogo, que se registró en el video, ilustra el tratamiento usual que se le da a las representaciones gráficas de una figura geométrica en clase a lo largo del año escolar, y que tal tratamiento es típico de muchas instituciones educativas. Esta afirmación se ha corroborado con docentes en ejercicio. Parece ser que en la clase de geometría:

- las representaciones gráficas se aceptan si se parecen a una representación construida teniendo en cuenta las propiedades de la figura que representa (3) y (13)[2].
- la intencionalidad de hacer representaciones gráficas es recordar perceptivamente la figura prototípica, puesto que también se puede acudir a la imaginación (4) a (13).
- las representaciones gráficas se pueden construir a mano alzada sin convenciones que evoquen propiedades de la figura geométrica (3), (10), (13) y (16).
- la aceptación de que una representación gráfica se hace aludiendo a imaginar que los trazos están bien hechos (10) y (15).
- las propiedades de las figuras geométricas se verifican en las representaciones midiendo la longitud de sus lados (13).

Lo anterior nos permitió inferir, desde nuestro punto de vista, que probablemente en la clase hay normas sociomatemáticas implícitas o explícitas que crean un ambiente de aula poco favorable para que los estudiantes desarrollen procesos de argumentación basados en las representaciones; esto porque: en el momento de realizar una representación gráfica de una figura geométrica se convence a los demás que está bien hecha valiéndose de la imaginación, sin tener en cuenta lo que cada uno se imagina sobre las propiedades de la misma; los estudiantes a partir de representaciones gráficas que no necesariamente están bien hechas explican, justifican y argumentan basándose en lo que ven en la representación; se asume como cierto lo que dice la profesora sobre una representación gráfica, el estudiante no tiene como comprobarlo; las representaciones gráficas se validan por lo que dice la profesora, por lo que se imaginan o suponen.

En los anteriores párrafos se pone de manifiesto que el tratamiento que se le da a las representaciones gráficas de las figuras geométricas influyen en el ambiente de aula y por ende los procesos de argumentación de los estudiantes. Esta problemática es señalada por

---

[2] Los números entre paréntesis hacen alusión a las líneas del diálogo citado anteriormente.

investigadores como Fishbein (1993), Mariotti (1995), Salin & Berthelot (1994) y Duval (1995) (citados en Laborde, 2005), quienes afirman que las representaciones gráficas[3] en geometría juegan un papel ambiguo: por un lado, se refieren a las propiedades geométricas teóricas, mientras que por el otro, ofrecen propiedades *graficoespaciales* que pueden generar una actividad perceptual en los estudiantes. Con frecuencia, los estudiantes concluyen que es posible construir una representación geométrica usando solamente claves visuales, o deducir una propiedad empíricamente revisando la representación geométrica. En tal sentido, las representaciones gráficas pueden llegar a convertirse en un obstáculo para el pensamiento geométrico porque los estudiantes pueden basarse en ellas y así evitar un razonamiento en términos teóricos. En relación a las representaciones hechas en programas de geometría dinámica, Hoyles (1996) y Jones (1999) (citados en Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008), han señalado que interactuar con dichas representaciones no necesariamente implica entender y apreciar las propiedades de los objetos geométricos. Laborde (2005) afirma que cuando el profesor pide a los estudiantes construir una representación gráfica, el profesor espera que ello trabajen en el ámbito de la geometría utilizando los conocimientos teóricos, mientras que los estudiantes a menudo se quedan en un nivel gráfico y tratan sólo de satisfacer las limitaciones visuales. Lo anterior evidencia que el significado que se liga a una representación gráfica de una figura geométrica no necesariamente es compartido por el docente y los estudiantes.

Lo anterior nos llevó a indagar sobre la problemática acerca de qué tanto se comparten los significados acerca de las representaciones gráficas en el aula de matemáticas. Investigadores como Yackel y Cobb (1996) afirman que para crear un ambiente de aula en el que se busque compartir significados, es necesario un esfuerzo sostenido tanto de los estudiantes como del profesor para establecer normas sociomatemáticas sobre diversos asuntos. Uno de dichos asuntos puede ser sobre las representaciones gráficas, por ejemplo: qué se considera una representación geométrica válida, que procedimientos son válidos para representar figuras, entre otros. Otros investigadores como Maher y Martino (1996) y Zack (1997) (citados en Mariotti, 2006), se enfocan en la creación de ambientes de aula en

---

[3] Laborde utiliza el término diagrama para referirse a lo que en este trabajo se menciona como representación gráfica.

los cuales los profesores desarrollan normas sociomatemáticas para favorecer los procesos de argumentación y justificación de los estudiantes, a partir de las representaciones gráficas.

Luego de ver que la problemática es pertinente, vigente, y de interés para la investigación en educación matemática, planteamos nuestro problema de investigación de la siguiente manera: En la clase de geometría usualmente no se promueve el establecimiento de normas sociomatemáticas que generen compartir un criterio[4] sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica (con lápiz y papel, con instrumentos de trazo o con programas de geometría dinámica), que contribuya a desarrollar procesos de argumentación en los estudiantes.

A partir del anterior problema planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aspectos normativos deben tenerse en cuenta para posibilitar compartir un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica?

Como un camino para dar respuesta a la anterior pregunta de investigación planteamos los siguientes objetivos.

1.1.4 Objetivos

General

Sugerir una vía que contribuya al establecimiento de aspectos normativos que generen compartir un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica.

Específicos

- Diseñar, implementar y evaluar una intervención de enseñanza que posibilite compartir el criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica.
- Identificar aspectos normativos que contribuyan a compartir el criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica.

[4] : Para esta investigación la palabra *criterio* hace referencia a un juicio que permite diferenciar algo de otra cosa. Por tanto, una situación puede entenderse de formas distintas de acuerdo al criterio utilizado.

- Estudiar el potencial de la geometría dinámica en el paso de la representación en GeogebraPrim a la representación con instrumentos de trazo y a la representación con convenciones y su relación con el establecimiento de aspectos normativos.

1.2 Justificación

La pertinencia de esta investigación, respecto a la necesidad de compartir criterios en el aula de matemáticas, se evidencia en los planteamientos de varios investigadores como Bartolini Bussi (1991, 1998), Arsac (1992), Maher y Martino (1996) y Yackel y Cobb (1996) (citados en Mariotti, 2006), quienes mencionan que uno de los objetivos básicos para fomentar el desarrollo de significados matemáticos es el de establecer una comunidad matemática en el aula, y una herramienta que posibilita tal establecimiento es la de compartir criterios. Esta idea también es apoyada por el Ministerio de Educación Nacional (2006), al afirmar que es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir, compartir y validar conocimiento. Y para lograr tal fin, es necesario que el docente planee, gestione y proponga situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo para sus estudiantes, y con ellas permitir que el estudiante interactúe con sus compañeros, profesores y materiales para reconstruir y validar personal y colectivamente el saber matemático.

Respecto a la necesidad de establecer normas sociomatemáticas en el aula, Yackel y Cobb (1996) enfatizan en que estas regulan los aspectos específicos de las discusiones matemáticas de los estudiantes (acuerdos normativos acerca de lo que cuenta como una explicación o justificación matemática aceptable, matemáticamente diferente, matemáticamente sofisticada, matemáticamente eficiente, y matemáticamente elegante en un aula de clase, etc.) e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Planas y Font (2003) resaltan que las normas, además de regular las prácticas del aula, están en la base misma de los procesos de comunicación matemática. Mariotti, (2006) apoya los anteriores planteamientos y además menciona que es crucial establecer dichas normas no solo para apoyar las afirmaciones propias sino para negociar criterios de aceptabilidad de argumentos matemáticos.

1.3 Hipótesis

En esta investigación compartimos los siguientes planteamientos, que proponemos a manera de hipótesis.

H_1 El reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las figuras geométricas no es espontáneo y debe ser objeto de aprendizaje (Laborde, 1996).

H_2 Es importante que los alumnos aprendan a controlar, a través de conocimientos teóricos, los aspectos perceptivos ligados a las representaciones (Laborde y Capponi, 1994).

H_3 Es recomendable trabajar con programas de geometría dinámica porque estos ofrecen un campo de experimentación con las representaciones que no es limitado, contrario a lo que ocurre al trabajar con representaciones en lápiz y papel (Laborde, 1996).

H_4 Los programas de geometría dinámica son herramientas técnico-simbólicas que (i) median el paso de la construcción a la representación y a la figura, (ii) median la comunicación sobre geometría entre profesor y estudiantes y (iii) inducen y facilitan los procesos de clasificación (Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008).

H_5 La evolución de una cultura matemática en el aula es un proceso a largo plazo, que requiere de estrategias específicas de intervención que comienzan temprano y se desarrollan durante un largo período (Mariotti, 2006).

1.4 Antecedentes investigativos

En esta sección realizamos una breve descripción de investigaciones que consideramos afines a la nuestra y que nos aportaron elementos teóricos o metodológicos. La revisión se centró en dos aspectos: el primero hace referencia a las normas sociomatemáticas y el segundo a la figura geométrica y su representación.

1.4.1 Normas sociomatemáticas

Al revisar la literatura centrándonos en estudios en los que se hace alusión a las normas sociomatemáticas observamos que este tema ha sido de interés de varios investigadores en Educación Matemática; de esto da cuenta el número de artículos publicados en las últimas décadas. Con el fin de sintetizar la revisión, decidimos enfocarnos en dos aspectos de las normas sociomatemáticas. En primer lugar, referenciamos la definición de norma sociomatemática que utiliza cada investigador y su diferenciación con norma social; y en segundo lugar, mencionamos algunas investigaciones en las que se ilustra cómo se establece una norma sociomatemática.

Normas sociales y normas sociomatemáticas

El constructo norma sociomatemática se relaciona con investigaciones cuyo propósito radica en el análisis del proceso por el cual los profesores inician y guían el desarrollo de las normas sociales generales al considerarlo un eje fundamental para sustentar una microcultura del aula caracterizada por la explicación, la justificación y la argumentación (Yackel y Cobb, 1996). Investigadores como Voigt (1995) afirman que las normas sociales en el aula, en general se aplican a cualquier área temática (ciencias, sociales, castellano, etc.) y no son exclusivas de las matemáticas. Menciona que las normas sociomatemáticas son utilizadas para describir un criterio de valores respecto a la actividad matemática en particular, como por ejemplo, reconocer cuando una solución matemática es elegante. Además Voigt hace mención a que no son obligaciones que los estudiantes tienen que cumplir, sino convenciones establecidas en el trascurso de las interacciones de clase para orientar sus actividades en la clase de matemáticas.

Yackel y Coob (1996), a partir de su trabajo sobre normas sociales, avanzan en el concepto de normas sociomatemáticas describiéndolas como aquellos aspectos normativos de las discusiones específicas en la actividad matemática de los estudiantes. Los autores suponen que después de trabajar y negociar un tiempo en el aula, se asume que todos comparten la misma interpretación de la norma. Por ejemplo, acuerdos normativos acerca de lo que cuenta como una explicación o justificación matemática aceptable, matemáticamente diferente, matemáticamente sofisticada, matemáticamente eficiente, y matemáticamente elegante en un aula de clase. Además, los dos investigadores mencionan que la distinción entre las normas sociales y las normas sociomatemáticas es sutil y ofrecen los siguientes ejemplos: i) La exigencia de explicar sus soluciones y sus formas de pensar es una norma social, en tanto que lo que cuenta como una explicación matemática aceptable es una norma sociomatemática. ii) El ofrecer soluciones diferentes de las que ya se han dado como respuesta a un problema es una norma social, mientras que lo que constituye la diferencia matemática de la solución es una norma sociomatemática.

Por su parte Planas y Gorgorió (2001) y Planas (2002), a partir de una reinterpretación de la definición dada por Yackel y Coob (1996), y bajo la premisa de que las personas pueden tener distintas interpretaciones de las normas, construyen definiciones de norma social, norma matemática y norma sociomatemática. Según las autoras, las normas sociales son el conjunto de explícitos o implícitos que regulan la estructura de participación y la dinámica entre profesor y estudiantes, y entre estudiante y estudiante, en el transcurso de las acciones e interacciones que ocurren en el aula; las normas matemáticas regulan las prácticas matemáticas en el aula y las diferentes trayectorias posibles en el comportamiento matemático de alumnos y profesor ante una actividad propuesta; por ejemplo, los criterios de legitimación de una solución matemática son normas matemáticas. Las normas sociomatemáticas son consideradas como un conjunto de explícitos o implícitos en el aula de matemáticas que influyen favoreciendo, obstaculizando o regulando el desarrollo y la interpretación de la práctica matemática.

La lectura de las investigaciones en las que se hace explícita la definición de norma sociomatemática y la diferenciación entre esta y una norma social nos sirvió para hacer nuestra propia construcción de lo que en este trabajo vamos a entender por norma sociomatemática; nos ayudó a reflexionar sobre la posibilidad de que ciertas normas sociales contribuyan al establecimiento de las normas sociomatemáticas, y también a evidenciar el potencial y la necesidad del establecimiento de normas sociomatemáticas en el aula de clase.

Establecimiento de normas sociomatemáticas

La revisión bibliográfica que se realizó sobre el establecimiento de normas sociomatemáticas se enfoca en los trabajos de Voigt (1995), Yackel y Coob (1996), Hershkowitz & Schwarz (1999) y Martin, McCrone y otros (2005).

Voigt (1995) menciona que las normas sociomatemáticas se establecen durante los procesos de interacción mediante la negociación de los significados matemáticos y cuando se trata de llegar a un acuerdo sobre qué resultados y qué argumentos podrían ser tomados como soluciones matemáticas y explicaciones matemáticas apropiadas. Estos acuerdos y negociaciones son un camino para liberar de ambigüedades e interpretaciones a las tareas, los cuestionamientos y los símbolos, etc., en el aula. De la misma manera, Voigt explica mediante un ejemplo, cómo se constituye la norma sociomatemática de lo que se considera "matemáticamente diferente (o elegante)". Muestra que la constitución de dicha norma sociomatemática surge en la interacción entre los participantes, a partir de las distintas soluciones brindadas por los estudiantes a una situación y por las valoraciones positivas que el profesor, como representante de la disciplina de las matemáticas, realiza a cada una de ellas. De esta manera evidencia cómo el profesor puede influir positivamente en el pensamiento matemático de los estudiantes y en el desarrollo cognitivo, de una forma indirecta y sutil.

Yackel y Coob (1996) consideran que las normas se establecen en el curso de las interacciones entre docentes y estudiantes. En su investigación dan cuenta de la negociación de significados y el establecimiento de normas sociomatemáticas, como por ejemplo, lo que cuenta como "matemáticamente diferente". Al presentar soluciones diferentes a una actividad, las respuestas de los estudiantes contribuyeron a la comprensión acerca de tal diferencia y por medio de las valoraciones que hacía el docente sobre la diferencia matemática, se generó un ambiente donde los significados se compartieron. En este proceso, se constituyó interactivamente lo que cuenta como "matemáticamente diferente" y se negoció el significado de diferencia matemática.

Yackel y Coob (1996) también describen como se constituye lo que cuenta como una "explicación y justificación aceptable". Las explicaciones y justificaciones aceptables tienen como base el tipo de razones matemáticas que deberían ser aceptadas. Además como acto comunicativo, lo que se comparte sobre noción de explicación y justificación aceptable es establecido durante las discusiones en el aula y evoluciona a medida que pasa el tiempo siempre y cuando se logre establecer un ambiente de indagación.

Hershkowitz y Schwarz (1999) utilizan un programa en computador diseñado intencionalmente para trabajar en el aula de matemáticas y muestran que ciertas normas sociomatemáticas no surgen únicamente de las interacciones entre alumnos y profesor, sino también a partir de manipulaciones informáticas como acciones no verbales de comunicación. Los investigadores consideran no solo las interacciones entre docente y estudiantes y entre estudiantes, sino además las interacciones entre los estudiantes y la herramienta, y los estudiantes y la actividad. De esta manera las interacciones entre lo que se visualiza en el computador, las acciones que realiza el estudiante en el programa multi-representacional y la retroacción del programa ante una situación problema, permiten la aparición de la norma "lo que cuenta como evidencia de un fenómeno".

Finalmente, Martin, McCrone y otros (2005) llevan a cabo un estudio cuyo objetivo se centra en la interpretación de las interacciones que conducen al desarrollo de comprensiones compartidas o individuales acerca de la argumentación y la justificación en geometría, en una escuela de secundaria. Para ello, toma el marco interpretativo de Coob (2000), y otros elementos teóricos como la comprensión de los estudiantes sobre la argumentación y la justificación de Harel y Sowder (1998), y el papel y las decisiones del maestro en la clase de Herbst (2002). En dicha investigación se concluye que las decisiones pedagógicas tomadas por el profesor son claves para la generación de un ambiente de aula en el que se brindan oportunidades a los estudiantes para perfeccionar sus argumentaciones, justificaciones y habilidades de razonamiento.

El estudio de investigaciones en las que se menciona el recorrido para llegar a establecer una norma sociomatemática en el aula, fue de gran ayuda en nuestra investigación en el momento de establecer nuestra trayectoria hipotética de enseñanza y para determinar la metodología adecuada para esta trayectoria.

1.4.2 Estudios acerca de las representaciones de las figuras geométricas

La revisión de la literatura en este aspecto se centró en estudios que hacen una diferenciación entre figura geométrica y representación geométrica (incluso en el contexto de la geometría dinámica) y en algunas investigaciones relacionadas con las representaciones geométricas y la enseñanza de la geometría.

Figura geométrica y representación geométrica

Fischbein (1993), en su teoría de los conceptos figurales, establece que las figuras geométricas poseen dos aspectos interrelacionados: los conceptuales y los figurales. Las figuras geométricas no tienen únicamente de uno u otro, sino que en ellas conviven los dos tipos de propiedades: “Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño). Al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección.” (1993, p.143). Indica que una figura geométrica, por ejemplo un trapecio isósceles, es una figura controlada por la definición de trapecio isósceles y por las propiedades geométricas derivadas de poseer dos lados paralelos y dos lados no paralelos congruentes. Esta doble naturaleza de la figura geométrica, relacionada a los aspectos figurales y conceptuales, define una nueva entidad mental que Fischbein llamó "concepto figural". La idea del concepto figural resalta el hecho según el cual imponer relaciones a las representaciones no depende de la propia representación sino de las definiciones y teoremas previos que tienen relación con el concepto. Además, Fischbein indica que las conclusiones que se deriven de la figura no proceden de considerar de manera separada la imagen y las condiciones formales, sino de un único proceso en el que la figura se "ve de otra manera" permitiendo revelar relaciones lógicas. Fischbein caracteriza este proceso indicando que la figura no es una imagen ordinaria sino una estructura controlada lógicamente.

Por su parte, Laborde (1996) considera a la figura geométrica como una relación entre la representación y el objeto geométrico; es decir, se constituye a partir del emparejamiento de un referente dado abstracto con todas sus representaciones. Así, una figura geométrica queda definida como el conjunto de pares formados por dos elementos: un referente y una representación que refiere al universo de todas las representaciones posibles del referente. En ese sentido, una representación geométrica es cualquier representación de la figura en un ámbito teórico (geometría euclídea, proyectiva, etc.). Sin embargo también manifiesta que en esta relación, las propiedades del objeto geométrico se traducen gráficamente en relaciones espaciales y se complejizan en la medida en que el paso de la representación al objeto geométrico se ve abocado por la interpretación que se le dé a la representación.

Al pasar al ámbito de los programas de geometría dinámica, Laborde (1996) menciona que los entornos informáticos, como Cabri, ofrecen un sistema de representación de objetos geométricos mediante Cabri-dibujos en la pantalla del computador que pueden ser producidos por medio de comandos dados en un lenguaje geométrico. Estas representaciones permiten un dominio de funcionamiento más extenso que las representaciones con lápiz y papel debido al movimiento que se les puede realizar a los elementos que las constituyen. Dichos Cabri-dibujos pueden ser elaborados con herramientas predeterminadas en el programa, denominadas primitivas de dibujo puro (segmento, recta, punto, etc.), o por primitivas geométricas (punto medio, mediatriz, recta paralela, recta perpendicular, etc.). El trazado en la pantalla de una representación ligada a un objeto geométrico tiene que conservar en el transcurso del desplazamiento las propiedades espaciales que dan cuenta de las propiedades geométricas de ese objeto; entonces tiene que hacerse mediante las primitivas geométricas.

Mariotti (1997), teniendo en cuenta la teoría de los conceptos figurales de Fischbein, relaciona los conceptos figurales y conceptuales de un objeto geométrico con las imágenes producidas por los programas de geometría dinámica. A partir de la idea que una construcción geométrica consiste de un procedimiento que, (a través del uso de herramientas específicas y según normas específicas), produce una representación, menciona que en un computador una representación posee su propia lógica y depende de los procedimientos que se usaron para producirlo; es decir, el programa produce imágenes en la pantalla que son controladas lógicamente por un menú de comandos donde ambos componentes, el perceptual y el figural, pueden estar presentes en la representación. De esta manera una figura geométrica y sus elementos están relacionados por una jerarquía de relaciones, correspondiente al procedimiento de construcción. La función de “arrastre” en el programa de geometría dinámica permite mover los elementos, mientras se mantienen todas las relaciones geométricas definidas por el menú de comandos usado en su construcción. De esta manera, el movimiento llega a ser un componente esencial del significado de figura.

Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008) consideran que uno de los problemas de la geometría es el de determinar métodos para hacer representaciones de figuras geométricas con ciertas propiedades. A estos métodos les llaman construcciones. Una representación es entonces el producto de una construcción sin importar el método con que se logró. Las autoras mencionan que las representaciones pueden ser robustas y blandas. Una representación robusta pasa la prueba del "arrastre", es decir mantiene sus propiedades al mover sus elementos de lo contrario es una representación blanda. Para hablar de figura geométrica aluden a que es una familia que está constituida por todas las representaciones robustas (reales o posibles). En esta conceptualización, cada representación llega a ser un ejemplo de una figura geométrica en vez de confundirse con la figura geométrica misma. La representación se refiere a objetos materiales en la arena, el papel o la pantalla de computador; en contraste, la figura se refiere a un objeto geométrico teórico. Finalmente mencionan que para conceptualizar una figura es necesario observar (en el arrastre de las representaciones robustas) la variación o cambio de algunos atributos (sus atributos no esenciales) lo mismo que la invariabilidad de otros atributos (sus atributos esenciales).

En Gutiérrez (2005) se utilizan los términos figura y representación con los significados habituales en el contexto de la geometría dinámica: Una figura es un objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades matemáticas derivadas de los elementos y herramientas usadas para su creación. Una representación es un dibujo particular de una figura en la pantalla. Por lo cual, una figura se puede mostrar mediante representaciones derivadas del cambio de posición o tamaño de los elementos de la figura.

La revisión de investigaciones en las que se hace una diferenciación entre figura geométrica y representación geométrica fue de gran ayuda para la creación de un constructo sobre los diferentes tipos de representaciones de una figura geométrica que se pueden dar en los ambientes que se utilizaron en la investigación (programas de geometría dinámica y lápiz y papel con y sin instrumentos de trazo).

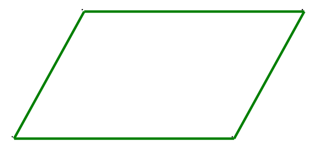
Representaciones en programas de geometría dinámica y el aprendizaje de la geometría

La revisión sobre las investigaciones relacionadas con las representaciones en programas de geometría dinámica se realizó prefiriendo aquellas que muestran las potencialidades de la geometría dinámica para el aprendizaje de la geometría.

Laborde (2005) investiga las relaciones entre el dominio de las representaciones en papel y lápiz o en entornos de geometría dinámica y el dominio de objetos teóricos de la geometría. La autora analiza algunas actividades realizadas con estudiantes y hace hincapié en el papel ambiguo de las representaciones. Lo anterior debido a que las representaciones hacen referencia a propiedades geométricas teóricas y ofrecen propiedades gráfico espaciales que generan una actividad perceptual en el estudiante que puede llevar a convertirse en un obstáculo o fuente potencial para el desarrollo de su pensamiento geométrico. A continuación se presenta un ejemplo con el cual Laborde ilustra lo anterior (Laborde, 2005 p. 160).

> “La representación de la Imagen 1.4 representa un paralelogramo. Muestra varias propiedades graficoespaciales: dos lados son horizontales; los otros dos son oblicuos en una dirección dada (de izquierda a derecha); los lados opuestos son paralelos; los lados horizontales tienen una longitud dada. Nótese que estas propiedades están seleccionadas de un conjunto más extenso de propiedades como color o espesor de los lados. Algunas de estas propiedades graficoespaciales se pueden interpretar de una manera geométrica, mientras que las otras no se consideran interesantes desde un punto de vista geométrico; por ejemplo, la posición del diagrama en la hoja de papel es generalmente considerada irrelevante en geometría, lo mismo que la pendiente de los lados ya que dependen del problema en el que ocurre el paralelogramo. Así que, algunas propiedades graficoespaciales del diagrama son *incidentales* al problema geométrico, mientras que otras son *necesarias* como, por ejemplo, las propiedades de paralelismo. Además, las propiedades graficoespaciales necesariamente se siguen de otras: hay un vínculo *necesario* entre el paralelismo de lados opuestos y el hecho de que el punto de intersección de las diagonales es también su punto medio. La enseñanza de la geometría trata con estos vínculos necesarios entre propiedades graficoespaciales, pero se puede entender la naturaleza de estos vínculos si y sólo si también se puede entender que algunos otros vínculos son meramente incidentales. *La necesidad tiene sentido en oposición a la contingencia*. La geometría se puede ver útil si le permite a uno predecir, producir o explicar propiedades graficoespaciales de los diagramas debido a estos vínculos necesarios; pero primero se requiere una consciencia de la distinción entre tales propiedades y las que son teóricas.”

Imagen 1.4 Representación de un paralelogramo



Además muestra, entre otros hallazgos, que los entornos de geometría dinámica refuerzan el movimiento entre el dominio espacial y el dominio teórico de las figuras.

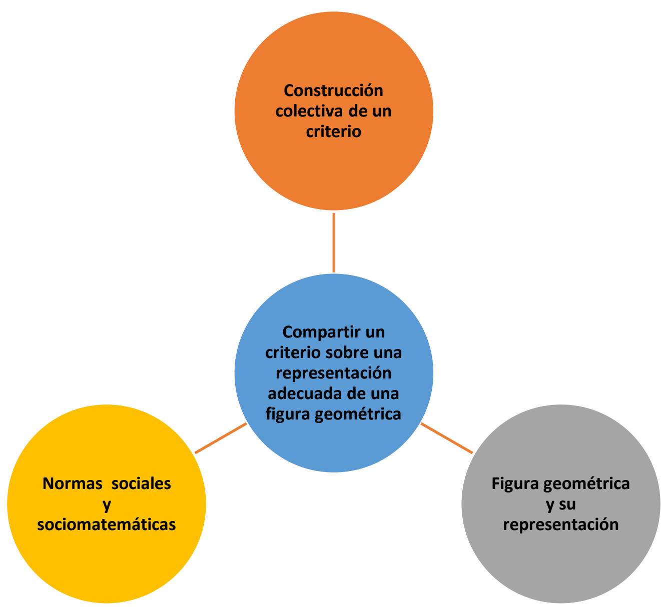
Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008) basadas en sus definiciones, mostradas en el apartado anterior, y por medio del análisis de una entrevista tomada de un experimento de enseñanza con un profesor en formación, encuentran argumentos para sostener que los programas de geometría dinámica se pueden ver como herramientas de mediación técnico-simbólica que median el paso de la construcción al dibujo y a la figura, median la comunicación sobre geometría entre el profesor y los estudiantes, e induce y facilita los procesos de clasificación. Además muestra ejemplos sobre el tipo de tareas (no estructuradas, semiestructuradas, o estructuradas) que se pueden proponer para trabajar en el aula.

La revisión de estas investigaciones fue de gran ayuda en el momento de diseñar las tareas del experimento de enseñanza y en el momento de diseñar la norma de exploración con las que los estudiantes debían explorar las representaciones en GeogebraPrim.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se expone el marco de referencia que sustenta la investigación. Para poder dar cuenta de la constitución colectiva del criterio sobre lo que es una representación geométrica adecuada, inicialmente exponemos nuestro punto de vista sobre la constitución colectiva de criterios. Posteriormente, describimos lo que en esta investigación se entiende por figura geométrica y su representación. En ese apartado consideramos las representaciones hechas en programas de geometría dinámica, con instrumentos de trazo y a mano alzada con convenciones para así poder hacer un acercamiento a la idea de representación geométrica adecuada. Además proponemos una estructura de organización para la actividad de representación en los ámbitos mencionados anteriormente. Finalmente, presentamos los significados y procesos relacionados con las normas sociales y sociomatemáticas y su relación con la constitución colectiva del criterio. El siguiente esquema orienta nuestro marco de referencia.

Esquema 2.1 Componentes del marco de referencia



2.1 Constitución colectiva de un criterio

En nuestra investigación consideramos que el aprendizaje es un proceso social de participación en prácticas que las comunidades en las que nos desenvolvemos consideran relevantes. Particularmente, tal como lo señala Camargo (2010), aprender geometría es un proceso de participación en prácticas que son valoradas por comunidades que producen y usan la geometría. De esta manera, el aula de clase de geometría puede llegar a convertirse en una comunidad cuyos fines sean, por ejemplo, descubrir y validar hechos científicos articulando dos tipos de prácticas: *descubrir* y *justificar*. Otro de los fines es que procesos como el de participación, conlleven a actividades colectivas donde se discute, se practica, se negocian significados y se determinan criterios de aceptación Wenger (1998), (citado en Camargo, 2010).

Puntualmente, entendemos que en una comunidad, como el aula de clase de geometría, al solucionar y socializar actividades matemáticas es posible construir interactivamente entre los participantes un ambiente social adecuado que permita la práctica de la participación y la indagación. Además, a través de la discusión mediante la explicación y la justificación con argumentos es posible negociar significados, establecer acuerdos y criterios, con los cuales la comunidad continuará evolucionando en el trascurso de las clases.

Otro aspecto importante que contribuye a la constitución de un criterio es que la comunicación y la participación sean direccionadas por un motivo de discusión, es decir una discusión matemática que como lo menciona Bartolini Bussi (1996), (citados en Mariotti, 1997), se convierta en una polifonía de voces articuladas sobre un objeto de discusión, en este caso los objetos matemáticos. En correspondencia con este hecho, el objeto de discusión puede proponerse por medio de actividades debidamente planeadas, organizadas y ejecutadas.

Para lograr lo anterior, es necesario el desarrollo de un lenguaje común con el cual comunicarse y participar. Sin un lenguaje común difícilmente se llegará a compartir significados con los cuales se establezcan acuerdos y criterios colectivos. Un lenguaje común se logra a partir de la interacción entre docente y estudiantes en las discusiones sobre los objetos matemáticos; este se refina poco a poco.

Las normas que regulan las prácticas de la comunidad matemática del aula, entre ellas las normas sociomatemáticas, también contribuyen a la constitución colectiva de criterios.

Estas normas se van constituyendo poco a poco a través de la interacción de los participantes y van afectando sus formas de comunicar, participar, justificar, representar y validar.

Otro aspecto importante tiene que ver con la guía de un experto cuya misión es acercar a la comunidad de aula a las prácticas y conocimientos que determinan el criterio. Durante el proceso de constitución, el papel del profesor es fundamental puesto que es el representante de la comunidad matemática en el aula, y como tal debe guiar las discusiones matemáticas y facilitar el establecimiento del ambiente de aula mencionado anteriormente.

A continuación presentamos los referentes teóricos que fundamentan el estudio, especialmente la conceptualización de figura geométrica y de su representación. En ellos, nos enfocamos en los tipos de representaciones que puedan orientarnos para la constitución del criterio y en las posibilidades que nos brinda la geometría dinámica para este fin.

2.2 Figura geométrica y su representación

Arsac (1989), Fischbein (1993), Mariotti (1995), (citados en Mariotti, 2006) y Laborde (1996), han mostrado la importancia de realizar la diferenciación entre representación y figura geométrica en la enseñanza de la geometría. Por tal razón, se recurrió a la elaboración de un referente teórico que respondiera a ese llamado, utilizando un lenguaje según nuestro contexto nacional, con el fin de orientar y mostrar las consideraciones con las cuales abordamos la investigación.

Como punto de partida, consideramos que los objetos de la geometría euclidiana escolar son figuras, trasformaciones/operaciones, y relaciones. Respecto a las figuras geométricas, estas pueden ser representadas mediante símbolos ($\measuredangle ABC$, $\square ABCD$, $\triangle ABC$), con lenguaje corriente (por ejemplo una descripción verbal teniendo en cuenta sus propiedades) o de forma visual, gráfica o pictórica. Esta última clase de representaciones se pueden construir mediante objetos reales o físicos (como el trazado de una circunferencia en la arena), con lápiz y papel y en un programa de geometría dinámica.

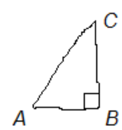
Las representaciones en lápiz y papel pueden ser construidas con instrumentos de trazo (regla y compás, entre otros), a mano alzada con convenciones (convenciones que aluden a propiedades geométricas) y a mano alzada sin convenciones. Las representaciones construidas en un programa de geometría dinámica, como lo mencionan Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008), pueden ser robustas (pasan la prueba del arrastre) o blandas (no pasan la prueba del arrastre). Las anteriores clasificaciones se presentan en el Esquema 2.2.

Esquema 2.2 Figura geométrica y su representación

Al representar una figura o al interactuar con una representación pueden surgir varios problemas. Uno de ellos es mencionado por Parzysz (1988) al manifestar que al representar una figura geométrica, quien la representa puede centrarse en aspectos ligados a cómo se ve la figura y no a propiedades de la figura en sí y esto genera una pérdida de información de la figura en su representación. También manifiesta que cuando una persona interactúa con una representación tiende a considerarla como la figura a la que alude. Por su parte Laborde (1996), en relación a la enseñanza de la geometría, menciona que la geometría escolar ha ignorado la lectura espacial de las representaciones y se ha enfocado en su lectura simbólica y no tiene en cuenta la ambigüedad que una representación puede generar debido a su configuración gráfico-espacial. Por ejemplo, una persona puede ver la representación de un paralelogramo como un rectángulo en perspectiva.

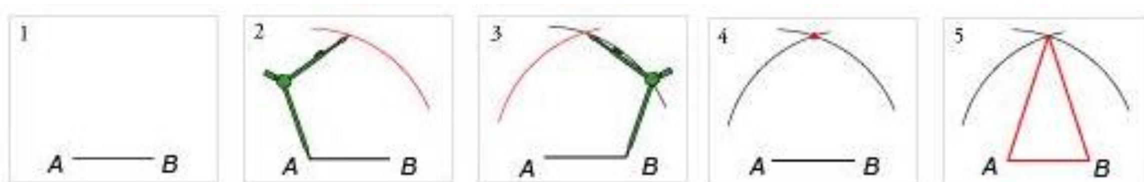
Para evitar tales ambiguedades asumimos que una figura representada adecuadamente debe aludir a sus propiedades presuponiendo mínimos acuerdos en su interpretación. Por ejemplo, una representación de una figura a mano alzada sin convenciones sobre las medidas de lados o ángulos, puede generar ambigüedad en su interpretación y quedar sujeta a la interpretación de quien interactúa con ella. Por el contrario, una representación de una figura a mano alzada con convenciones relacionadas con la medida, alude a propiedades geométricas que son identificadas por el intérprete quien conoce el significado de la convención. Así, aunque una representación no tenga trazos "uniformes" o "rectos", la convención informa a quien se enfrente a ella que la figura representada posee una propiedad. Por ejemplo, en el siguiente triángulo, la convención muestra que el triángulo es rectángulo.

Imagen 2.1 Triángulo construido a mano alzada con convenciones



Por otro lado, las representaciones adecuadas de las figuras geométricas con instrumentos de trazo (regla no graduada y compás) se derivan de su construcción. Es decir, la forma en la que son construidas valida la representación, ya que los instrumentos utilizados imprimen o evocan la propiedad de la figura. En la Imagen 2.2 se proporciona un ejemplo de una secuencia de construcción para hacer una representación adecuada de un triángulo isósceles en el ambiente de lápiz y papel con instrumentos de trazo. El uso del compás, con igual amplitud, en los pasos 2 y 3 garantiza la congruencia de segmentos y por tanto que el triángulo sea isósceles.

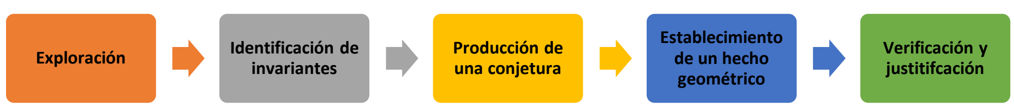
Imagen 2.2 Secuencia de construcción para hacer una representación adecuada de un triángulo isósceles con instrumentos de trazo



En los programas de geometría dinámica, las representaciones posibilitan un campo de experimentación que las representaciones en lápiz y papel no brindan. Los programas de geometría dinámica son potentes mediadores que favorecen la interacción de los estudiantes con las representaciones geométricas. Como lo mencionan Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008), los programas de geometría dinámica son herramientas técnico-simbólicas que median el paso de la construcción a la representación y a la figura, y median la comunicación entre el profesor y los estudiantes sobre geometría. Esto se debe en gran parte a que han sido elaborados intencionalmente bajo una teoría geométrica, para poder representar objetos geométricos por medio de herramientas predeterminadas y la combinación de ellas, y luego permitir acciones directas de movimiento y arrastre sobre estas representaciones (Laborde 1997, 2005).

El movimiento y/o arrastre de una representación permite un campo de experimentación en donde es posible hacer énfasis en las propiedades de las figuras más que en su aspecto visual. La exploración de las representaciones puede desencadenar en la detección de propiedades invariantes, que pueden ser enunciadas como conjeturas y finalmente constituirse en hechos geométricos que más adelante servirán para verificar y justificar (Esquema 2.3).

Esquema 2.3 Acciones que puede generar la exploración en un ambiente de geometría dinámica



Por otro lado, el movimiento y/o arrastre de los elementos constitutivos de las representaciones introduce un criterio de validación: soportar la prueba por arrastre. Esto lleva como consecuencia que el criterio de validación no dependa de la apariencia perceptual. La función de arrastre permite seleccionar ciertos elementos de las representaciones y arrastrarlos, mientras se mantienen todas las relaciones geométricas usadas en su construcción. Después del arrastre, la nueva representación puede parecer diferente, pero sus propiedades geométricas se preservan, es decir se mantienen invariantes (Mariotti, 1997). Así, no es suficiente que dos segmentos se "vean" de igual medida para asegurar que son congruentes sino que la igualdad de medidas debe preservarse al arrastrar la representación. En este sentido, por medio del movimiento y/o arrastre se pueden validar representaciones adecuadas de las figuras. En este ambiente una representación adecuada de una figura geométrica es una representación robusta.

De esta manera las siguientes funciones del movimiento y/o arrastre mencionadas por Olivero (2003), adquieren sentido en esta investigación: (i) retroalimentar las acciones que realiza el usuario, permitiéndole tener control sobre la representación; (ii) mediar entre la figura y la representación, permitiéndole al usuario hacer una distinción entre ambas nociones; y (iii) examinar representaciones y buscar propiedades invariantes.

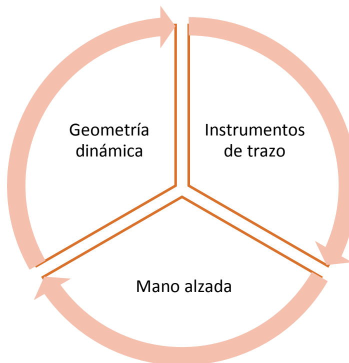
En el siguiente apartado hacemos mención a la propuesta de articulación de los tres ambientes de las representaciones en la organización del diseño de las tareas y actividades.

2.3 Diseño de tareas que articulan los ambientes de las representaciones

La representación de las figuras y la manipulación de estas en la pantalla, haciendo uso de las herramientas del menú predeterminado, no necesariamente llevan a entender y apreciar las propiedades de los objetos geométricos. Por lo tanto, el diseño de tareas se convierte en una prioridad para desarrollar una adecuada mediación. Las tareas diseñadas para trabajar en geometría dinámica deben ser diferentes a las tareas diseñadas para entornos de papel y lápiz, ya que cambiar las herramientas conduce a cambiar la manera en que las tareas son realizadas. Es decir, las tareas propuestas deben permitir la exploración, las preguntas abiertas, la elaboración de conjeturas, entre otras.

Como mencionamos anteriormente, las representaciones geométricas también se hacen y se usan en contextos de lápiz y papel con instrumentos de trazo y a mano alzada. Por lo tanto es importante realizar una articulación de los tres ambientes, de tal manera que en cualquiera de ellos la representación evoque las propiedades de la figura representada. Una posible vía para lograr tal articulación consiste en aprovechar inicialmente el poder de la geometría dinámica y su función de arrastre como un mecanismo para la detección de propiedades invariantes, para que luego, por medio de tareas y actividades de enlace, trabajar con representaciones construidas con regla y compás y representaciones en lápiz y papel que los evoquen. Para esto, es necesario establecer relaciones entre las herramientas utilizadas en el programa de geometría dinámica y las herramientas regla no graduada y compás. Posteriormente, se propone abordar representaciones hechas a mano alzada en las cuales converjan los significados de las propiedades invariantes en una convención. El Esquema 2.4 proporciona una visión gráfica de la articulación de los tres ambientes.

Esquema 2.4 Articulación de los ambientes en los que se trabajan las representaciones



En el siguiente apartado determinamos el significado de las normas sociales y sociomatemáticas en la investigación y su relación con la constitución colectiva del criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica.

2.4 Normas sociales y normas sociomatemáticas

Como se mencionó anteriormente, para lograr que una comunidad, como la conformada por los integrantes de un aula de clase de geometría, en el que se constituyan criterios colectivos, se negocien significados y se establezcan acuerdos, es importante constituir un ambiente social basado en normas sociales que posibiliten la participación y por ende la comunicación al interior de la comunidad. Consideramos a las normas sociales como aquellos aspectos normativos explícitos e implícitos de cualquier aula, que regulan las acciones e interacciones entre estudiantes y docentes y entre estudiantes. Compartimos la afirmación de Yackel y Coob (1996) al mencionar que una norma social se aplica a cualquier área temática en la escuela (ciencias, sociales, castellano, etc.). Por ejemplo, que los estudiantes deban explicar sus soluciones y sus formas de pensar, son normas sociales no exclusivas de la clase de matemáticas o de geometría, y se pueden exigir en clases de otras asignaturas. Estas normas, por lo tanto, pueden regular los procesos de participación, indagación y justificación en un aula de matemáticas, de ciencias, de idiomas, etc.

En el ámbito de las interacciones entre estudiantes y profesor, el esfuerzo sostenido del profesor constituye una característica primordial para impulsar, practicar y constituir las normas sociales. Mediante las intervenciones del profesor sobre las acciones o expresiones favorables o desfavorables de los estudiantes, este impulsa el establecimiento de las normas de manera individual y colectiva.

Otro de los esfuerzos que debe hacer el profesor para la constitución de un criterio tiene que ver con el impulso por establecer normas sociomatemáticas con las que pueda regular la actividad matemática de los estudiantes. Las normas sociomatemáticas son entendidas como los aspectos normativos establecidos en el transcurso de las interacciones en el aula entre los estudiantes y el docente y entre los estudiantes (de manera implícita o explícita), relacionados con la actividad matemática. Estas regulan las acciones e interacciones de la microcultura del aula de matemáticas.

Asumimos la idea de que en el trascurso de los procesos de interacción en el aula, al solucionar tareas matemáticas es posible el desarrollo de normas sociomatemáticas adecuadas que puede llevar a la determinación de criterios de aceptación de representaciones, justificaciones, etc. Por ejemplo, como se mencionó en el Capítulo 1, en relación a la constitución de la norma sociomatemática de lo que se considera "matemáticamente diferente", Yackel y Coob (1996) mencionan en su investigación que en el aula analizada no se tenía el significado de diferencia matemática. Los estudiantes resolvieron una tarea propuesta y en la discusión con todo el grupo se compararon los diferentes modos de resolución. Mediante la interacción derivada de la indagación insistente de resolver la tarea de modo diferente, las respuestas de los estudiantes, la valoración y respuestas del profesor, se estableció el significado de matemáticamente diferente. La norma sociomatemática de lo que se considera "matemáticamente diferente" se fue constituyendo interactivamente al igual que el criterio de diferencia matemática.

Análogamente, en esta investigación consideramos que mediante la interacción del estudiante y el profesor sobre la solución de las tareas propuestas es posible generar un ambiente de negociación donde se compartan los significados de las normas sociomatemáticas relacionados con la representación de figuras geométricas y se constituya el criterio colectivo de la convención que indica congruencia de segmentos en una representación como una herramienta para hacer una representación geométrica adecuada.

Para compartir un criterio sobre una representación adecuada de una figura geométrica, las normas sociomatemáticas estarán relacionadas con la configuración de un ambiente de aula de indagación, participativo y explicativo, así como con aspectos derivados de lo que consideramos una figura geométrica y su representación y los ambientes donde se utilizan representaciones (programas de geometría dinámica, lápiz y papel con instrumentos de trazo y a mano alzada).

3. METODOLOGÍA

De manera general, en el desarrollo de esta investigación se observan tres grandes momentos (Esquema 3.1). El primero, relacionado con la elaboración del anteproyecto del trabajo de grado, durante el cual se planteó el problema de investigación, se recolectaron evidencias empíricas que contribuyeron a ilustrarlo, se definieron los objetivos y la pregunta de investigación y se establecieron los referentes teóricos iniciales. El segundo, lo configuran las fases de la metodología de Experimento de Enseñanza: (i) planeación y diseño, (ii) experimentación y (iii) análisis retrospectivo. En el tercero, se presentan los resultados, conclusiones y reflexiones surgidos de la investigación. Particularmente, este capítulo describe la aproximación metodológica, y caracteriza y describe las fases de la metodología.

Esquema 3.1 Momentos de la investigación

Teniendo presentes los objetivos y la pregunta de investigación, esta tesis se enmarca dentro de la perspectiva cualitativa de diseño, ya que pretende analizar el aprendizaje en el contexto del aula, mediante el diseño sistemático de estrategias, herramientas, tareas y actividades. Es de tipo descriptivo, interpretativo y analítico, ya que a partir de unos datos derivados de la implementación de un diseño planeado de tareas y actividades, se describe, interpreta y analiza la constitución colectiva de un criterio sobre qué es una representación gráfica adecuada de una figura geométrica en un aula de geometría. Las acciones realizadas por los estudiantes en la solución de tareas y actividades fueron interpretadas y analizadas a partir de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño.

La metodología usada es una adaptación de un Experimento de Enseñanza. De manera general, un Experimento de Enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza donde participan un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores. Los investigadores están motivados por el propósito de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000) (citados en Molina, M.; Castro, E.; Molina J. y Castro, E., 2011). Se espera que los estudiantes construyan conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones (Molina, M.; Castro, E.; Molina J. y Castro, E., 2011).

En la presente investigación no se siguió exactamente esta metodología sino que se hizo una adaptación a partir de las siguientes situaciones: (i) la profesora del aula con la cual se llevó a cabo la investigación no hacía parte del equipo de investigación. Su participación fue colaborativa en dos aspectos: el primero, por la apropiación y aportes dados a los diseños elaborados por el equipo investigador, en el momento de socializarlos con ella antes de la experimentación; segundo, por llevar a cabo la ejecución de los diseños de las actividades. (ii) Entre la elaboración del diseño de actividades por parte del equipo de investigación y la implementación, se creó un paso intermedio que consistió en socializar con la profesora del aula el diseño elaborado en el equipo investigador. A partir de algunas consideraciones observadas en la socialización y los aportes de la profesora, en ocasiones surgía un rediseño que finalmente era el que se implementaba. (iii) Dos investigadores asistían a las sesiones de clase y tenían un papel participativo en el aula. Este papel consistió en servir de apoyo a la profesora ejemplificando ocasionalmente las acciones que podía implementar con los estudiantes en los pequeños grupos de trabajo.

En esta adaptación de la metodología de Experimento de Enseñanza se reafirman las tres fases que la componen: (i) planeación y diseño, (ii) experimentación y (iii) análisis retrospectivo. En la fase (ii), se llevó a cabo la experimentación de los diseños, creándose un ciclo iterativo de diseño, puesta en práctica, recolección de datos y microanálisis. A continuación describimos las fases del experimento de enseñanza y acciones específicas realizadas en cada una de ellas.

3.1 Fase de planeación y diseño

En esta fase, el equipo de investigación seleccionó el contexto experimental, definió roles de los participantes, retomó, afianzó y amplió los referentes teóricos iniciales, eligió el dominio matemático específico a abordar, elaboró la trayectoria hipotética de enseñanza y diseñó tareas y actividades iniciales.

3.1.1 Contexto experimental y definición de roles en el aula

El equipo de investigación se conformó por tres personas: la directora de la tesis, y dos estudiantes de maestría (autores de este informe). Las reuniones se realizaban semanalmente y se utilizaban para planear, diseñar actividades y realizar microanálisis, una vez se experimentaban los diseños en el aula.

Se tomó la decisión de implementar el experimento de enseñanza en el Colegio Distrital Ciudadela de Bosa (jornada mañana) en el grado quinto, con el curso 504 y con la profesora titular de la asignatura de matemáticas. La profesora colaboradora, a la cual nos referiremos como *Rosa*, es Licenciada en Básica Primaria con estudios de postgrado en educación, en la línea de lenguaje. *Rosa* no ha hecho estudios relacionados con Educación Matemática. Al contactar a *Rosa* se le explicaron los objetivos de la investigación y su intervención en la misma. Se realizaron entrevistas para conocer el ambiente de la clase, las temáticas que había trabajado en el año, así como las que tenía presupuestado abordar en el cuarto período.

El rol de *Rosa* era implementar en clase el diseño instruccional bajo las pautas que el equipo de investigación le proponía y con los aportes que ella como profesora del aula consideraba. El rol de los investigadores dentro del aula consistía en intervenir ocasionalmente en los pequeños grupos de trabajo, pero *Rosa* era la encargada de liderar las socializaciones con el grupo completo.

3.1.2 Afianzamiento y ampliación de los referentes teóricos iniciales

En esta etapa se retomaron los documentos previamente estudiados para formular el anteproyecto y se amplió el estudio sobre las representaciones de las figuras geométricas, la relación entre las representaciones geométricas y el aprendizaje de la geometría (Fischbein, 1993; Laborde, 1996-2005, Mariotti, 1997; Gutierrez 2005; y Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008), y las normas sociomatemáticas, su instauración y el establecimiento colectivo de criterios en el aula (Voigt, 1995; Yackel y Coob, 1996; Planas y Gorgorió, 2001 y Planas, 2002; Hershkowitz y Schwarz,1999). Este estudio se realizó con el fin de estructurar el marco de referencia de la investigación.

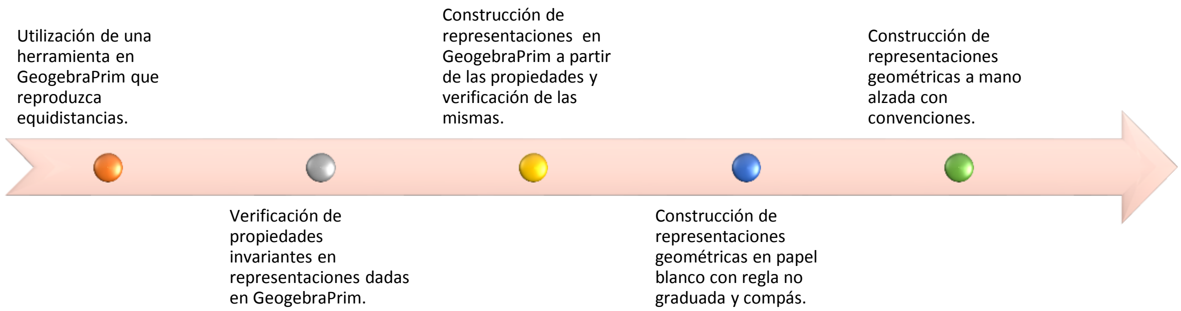
3.1.3 Elección del dominio matemático específico

Luego de las entrevistas con la profesora *Rosa* y de analizar el contexto, el equipo investigador tomó la decisión de trabajar con las propiedades de congruencia de segmentos (a partir de la congruencia de los radios de una circunferencia) y la de congruencia de ángulos de 90º (a partir de la relación de perpendicularidad) en los cuadrados, rombos y triángulos isósceles y equiláteros.

3.1.4 Elaboración de la trayectoria hipotética de enseñanza

La confluencia de los referentes teóricos para la elaboración del diseño de tareas y actividades y la elección del dominio matemático específico, llevó a plantear una trayectoria hipotética de enseñanza relacionada con la constitución colectiva de un criterio sobre una representación gráfica adecuada de una figura geométrica, relacionada con la propiedad de congruencia de lados y ángulos. La trayectoria hipotética de enseñanza inicial se fundamenta en las hipótesis mencionadas en el Capítulo 1 (sección 1.3) y se puede visualizar en el Esquema 3.2. Esta trayectoria incluye las siguientes fases: comienza con la utilización de una herramienta en GeogebraPrim que reproduzca equidistancias; luego, los estudiantes verifican propiedades invariantes en representaciones que el equipo investigador construye en GeogebraPrim; posteriormente, los estudiantes construyen representaciones de cuadrados, rombos y triángulos isósceles y equiláteros en GeogebraPrim a partir de sus propiedades con la finalidad de verificar invariantes; a continuación los estudiantes, a partir de estrategias como ponerle marcas a la regla no graduada o utilizar el compás para trasladar medidas, construyen en papel blanco representaciones de figuras que tienen lados y ángulos congruentes; por último, los estudiantes construyen representaciones a mano alzada, en las que utilizan la convención que indica congruencia en una representación, al evocar los invariantes de lados y ángulos de las figuras geométricas estudiadas, observados en GeogebraPrim. Al plantear esta trayectoria se previó utilizar los computadores de la sala de sistemas de la institución en los cuales se instalaría el programa GeogebraPrim.

Esquema 3.2 Trayectoria hipotética de enseñanza inicial



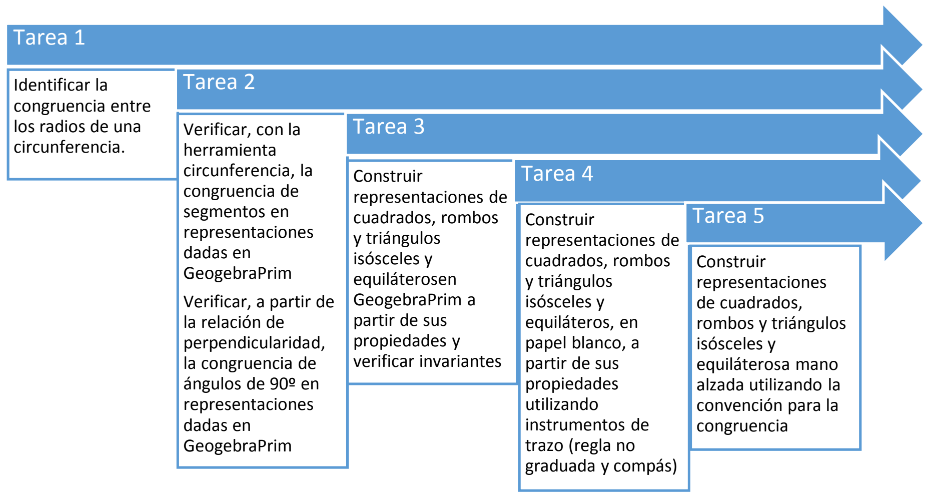
En esta trayectoria hipotética se pretendió aprovechar las potencialidades que brinda el entorno de geometría dinámica como son las herramientas que permiten la exploración, las posibilidades de detección de invariantes y la representación de figuras geométricas. Para lograr el anterior fin, se presupuestó la norma sociomatemática de exploración (N_1): al explorar una representación mediante el arrastre es necesario observar lo que cambia, lo que no cambia y lo que cambia simultáneamente. También se pretendió que los estudiantes representaran con geometría dinámica figuras geométricas, a partir de sus propiedades, luego las representaran en el entorno de papel blanco con instrumentos de trazo (regla no graduada y compás) y que por último las representaran a mano alzada con convenciones (congruencia de lados y ángulos). Se buscaba desligarlos de la idea de que una representación está bien hecha si se ve bien hecha, y que empezaran a considerar la idea de representación con convenciones que hacen referencia a las propiedades de la misma. Para lograr el anterior fin, se presupuestó la norma sociomatemática de validación de una representación de figura geométrica hecha en lápiz y papel a mano alzada (N_2): una representación debe hacer alusión a las propiedades de la figura a través de una convención. El equipo de investigación presupuso inicialmente que mediante esta trayectoria, se podría establecer un proceso en el que las propiedades de las figuras pudieran ser significativas y representadas adecuadamente.

3.1.5 Elaboración de las tareas del diseño

Para elaborar el diseño inicial de instrucción, se partió de la trayectoria hipotética de enseñanza y se plantearon inicialmente cinco tareas. Para cada tarea se previeron actividades que se llevan a cabo en los diferentes entornos: Tareas 1, 2 y 3, en

GeogebraPrim; Tarea 4, en lápiz y papel con instrumentos de trazo; Tarea 5, en lápiz y papel sin instrumentos de trazo. Las Tareas 2, 3, 4 y 5 se realizan para cada una de las figuras del dominio matemático seleccionado, es decir, segmentos y triángulos. El Esquema 3.3 muestra las acciones que el estudiante debía realizar en cada tarea.

Esquema 3.3 Tareas previstas inicialmente



3.2 Fase de experimentación

En esta fase se describen aspectos de la implementación y los instrumentos utilizados para llevar a término la implementación y la recolección de la información. También se abordan las decisiones y modificaciones que durante el ciclo iterativo de diseño se presentaron en la trayectoria hipotética, en la secuencia de tareas y actividades y en las demás características del diseño.

3.2.1 Concreción del contexto experimental

El curso tenía 39 estudiantes. La edad de los niños oscilaba entre los 10 y los 12 años y su estrato socioeconómico era 2. Se utilizaron dos salones de clase: uno de ellos, organizado por mesas de trabajo, lo que permitía una organización por pequeños grupos; el segundo, contaba con un televisor que se utilizaba para hacer las socializaciones en las que era necesario mostrar videos o utilizar las construcciones hechas en GeogebraPrim. Aunque el colegio cuenta con salas de sistemas no se tuvo acceso a ellas debido a que son de uso exclusivo de las clases de tecnología. La anterior situación generó la necesidad de conseguir portátiles a los que se les instaló GeogebraPrim.

La implementación se realizó en el cuarto período del año escolar en las clases de geometría que tenían una intensidad horaria de dos horas semanales, cada una de 45 minutos. Cada semana se realizaba con *Rosa* una reunión previa a las clases en la que se le presentaba el diseño correspondiente, la finalidad del mismo y se resaltaban aspectos en los que debía hacer énfasis en cada sesión. A partir de los aportes de *Rosa*, en ocasiones, se rediseñaron las actividades a implementar.

3.2.2 Instrumentos utilizados para llevar a cabo la experimentación

A partir de las condiciones dadas por el contexto, los instrumentos utilizados para la experimentación fueron: siete computadores portátiles, en seis de los cuales se instaló GeogebraPrim y en uno Geogebra[5]; extensiones, televisor, mouse, compás, regla y actividades impresas.

3.2.3 Instrumentos utilizados para la recolección de la información

Por la naturaleza de la investigación y los objetivos trazados, fue necesario recurrir a varias formas de registrar la información. El registro se realizó en audio, video y notas de campo físicas y virtuales. La Tabla 3.1 muestra de manera detallada los instrumentos de recolección de la información y su uso.

Tabla 3.1 Instrumentos de recolección de información

Instrumento	A quién observa	Qué observa
Cámara 1	Dirigida al grupo completo	Registraba intervenciones de la profesora o los estudiantes, el ambiente y demás características durante las socializaciones que nos podían brindar información de interés.
Ipad	Dirigida al trabajo individual o en pequeños grupos	Registraba intervenciones de los estudiantes, entre ellos, con la profesora o con los investigadores con preguntas puntuales referidas a las actividades, dirigidas a los estudiantes.
Camtasia	Dirigida al trabajo en pequeños grupos cuando se utilizaba GeogebraPrim	Registraba las intervenciones de los estudiantes al interactuar con el programa de geometría dinámica, con o sin la presencia de la profesora o los investigadores.
Actividades impresas	Dirigido al trabajo en pequeño grupo e	Registraba las intervenciones puntuales de interés, de los estudiantes, a raíz de las actividades propuestas.

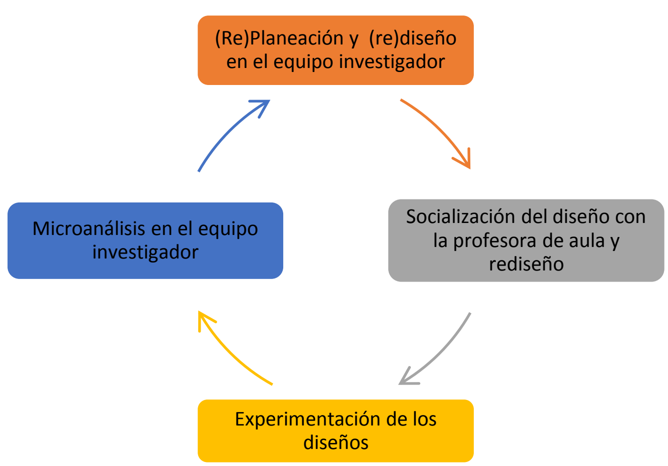
[5] En este computador por razones técnicas no fue posible instalar GeogebraPrim.

	individual	
Archivos GeogebraPrim	Dirigida al trabajo en pequeños grupos cuando se utilizaba GeogebraPrim	Registraba las respuestas, las conclusiones y los protocolos de construcción de los estudiantes.

3.2.4 Ciclo iterativo de diseño y microanálisis

La secuencia prevista para el diseño instruccional se fue modificando paulatinamente a partir de los análisis de la actividad de los estudiantes. Las reuniones semanales del equipo investigador se utilizaron para planear, diseñar actividades y realizar un microanálisis de la sesión, una vez se experimentaba con los diseños de la semana. Luego de planear las tareas y actividades, estas se socializaban con la profesora *Rosa* mediante un guion de trabajo que acompañaba las actividades. A partir de esta socialización, de ser necesario, se realizaba un rediseño. Las experimentaciones se realizaron una vez a la semana en el aula, entre agosto y noviembre de 2013[6]. En total fueron ocho sesiones de 90 minutos. Dos de los investigadores (los estudiantes de maestría) asistieron a todas las sesiones. El Esquema 3.4 ilustra la anterior dinámica.

Esquema 3.4 Ciclo iterativo de diseño y microanálisis



Los microanálisis de las sesiones de trabajo con los estudiantes eran de dos tipos:

- Realizados por el equipo de investigación. Se centraban en hacer seguimiento a la información partiendo de la trayectoria hipotética.
- Realizados con la profesora *Rosa*, sin la presencia de la profesora asesora, en el momento en que se socializaban con ella las actividades de una sesión para planear

[6] La profesora modificó su horario para posibilitar el trabajo en dos horas de clase seguidas.

la siguiente. Se centraban en las preocupaciones de la profesora sobre el aprendizaje de los estudiantes y sobre la forma cómo se llevaron a cabo las actividades.

Como resultado de los microanálisis se realizó una reducción del dominio matemático. El equipo investigador tomó la decisión de trabajar únicamente con triángulos isósceles y equiláteros y específicamente con la propiedad de congruencia de lados[7]. Se previó que en el desarrollo del trabajo se institucionalizarían los siguientes hechos geométricos:

Hecho geométrico 1: Cualquier punto de la circunferencia equidista del centro de la misma.

Hecho geométrico 2: Los radios de una circunferencia son congruentes.

Hecho geométrico 3: Un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes.

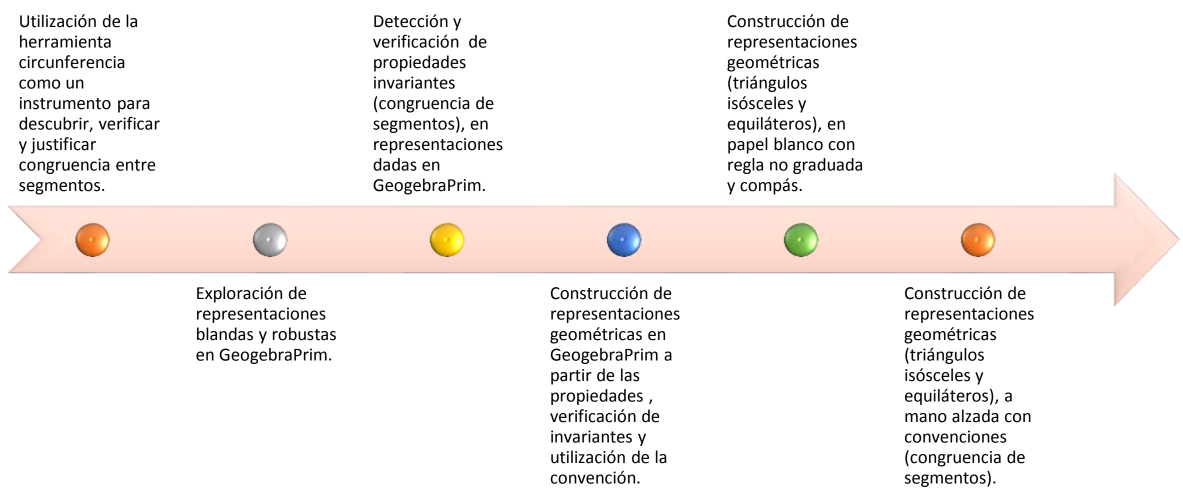
Hecho geométrico 4: Un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes.

A partir de los microanálisis se realizó una redefinición de la trayectoria hipotética de enseñanza. El Esquema 3.5 muestra la trayectoria modificada. En esta trayectoria, a diferencia de la prevista (Esquema 3.2), se especificaron y ampliaron las acciones en cada fase y apareció una nueva fase. En la primera fase se ampliaron los usos de las funciones de la herramienta circunferencia, al utilizarla como instrumento para descubrir, verificar y justificar la congruencia entre segmentos (la justificación surge de la institucionalización de los hechos geométricos mencionados anteriormente). De esta manera surgió la norma sociomatemática de justificación (N_3): las justificaciones deben aludir al uso de los hechos geométricos establecidos en el aula. La segunda fase, que era nueva, apareció para suplir la necesidad de que los estudiantes diferenciaran representaciones robustas de representaciones blandas, para así poder aprovechar el potencial de la función de arrastre como herramienta para verificar la validez de una representación. Por lo anterior, surgió la norma sociomatemática de validación de una representación en GeogebraPrim (N_4): al arrastrar los elementos constitutivos de una representación se deben conservar las propiedades de la figura que representa (prueba del arrastre). En la tercera fase se esperó que la exploración de las representaciones diera lugar a la detección de invariantes (congruencia de segmentos), que luego debían ser verificados. En la cuarta fase se introdujo el uso de la convención para la congruencia de segmentos; esta surgió luego de la

[7] Se optó por no incluir propiedades de los ángulos porque esto implicaba mayor tiempo para que los estudiantes pudieran manejar instrumentos para medir ángulos.

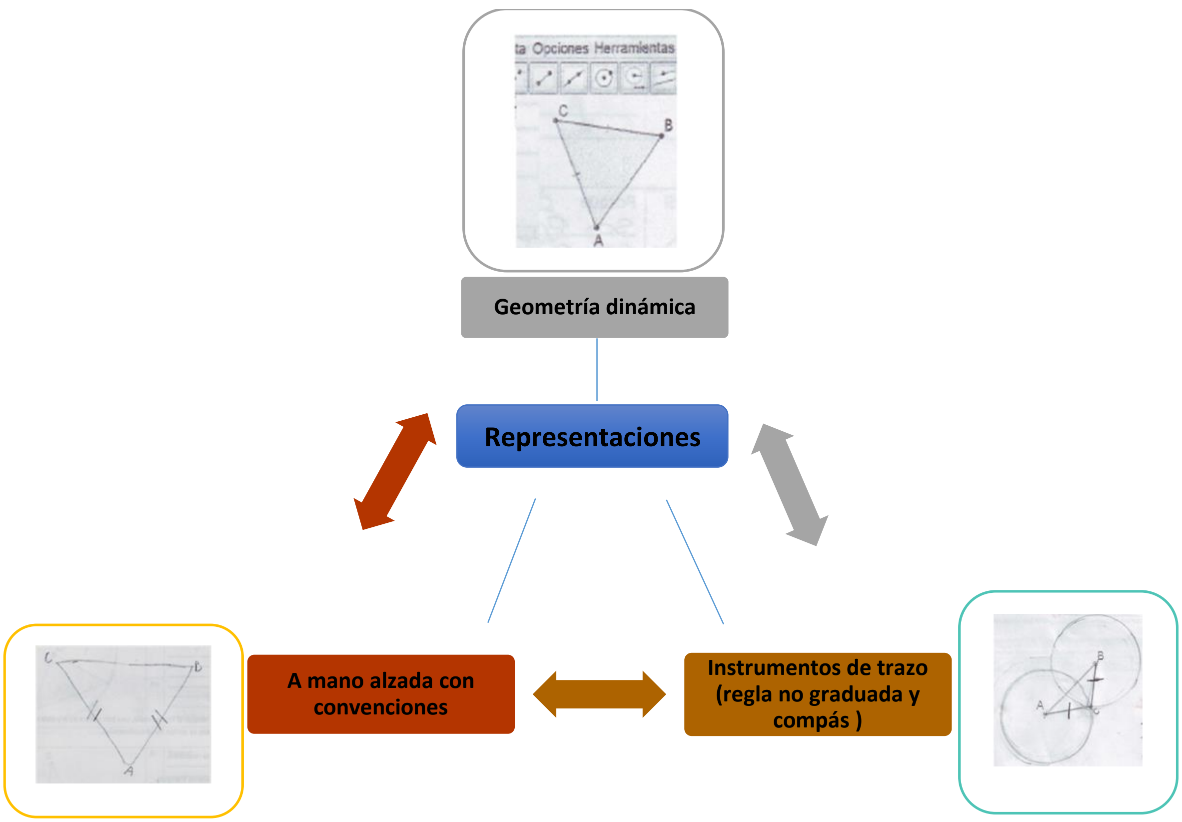
verificación de la congruencia de segmentos en los triángulos isósceles y equiláteros. Las dos últimas fases se mantuvieron iguales a las previstas pero se hizo explícito el paso de las representaciones en cada ambiente (GeogebraPrim, instrumentos de trazo y mano alzada). Entre las representaciones hechas en GeogebraPrim y las realizadas con instrumentos de trazo o a mano alzada se debía hacer evidente, por parte de los estudiantes, la evocación de los invariantes detectados en el programa de geometría dinámica y debían establecer una relación entre las herramientas del programa y los instrumentos de trazo. Es así como surgió la norma sociomatemática de validación de una representación en el ambiente de lápiz y papel con instrumentos de trazo (N_5): la representación debe evocar los invariantes detectados en GeogebraPrim a través de los instrumentos de trazo utilizados.

Esquema 3.5 Trayectoria de enseñanza final



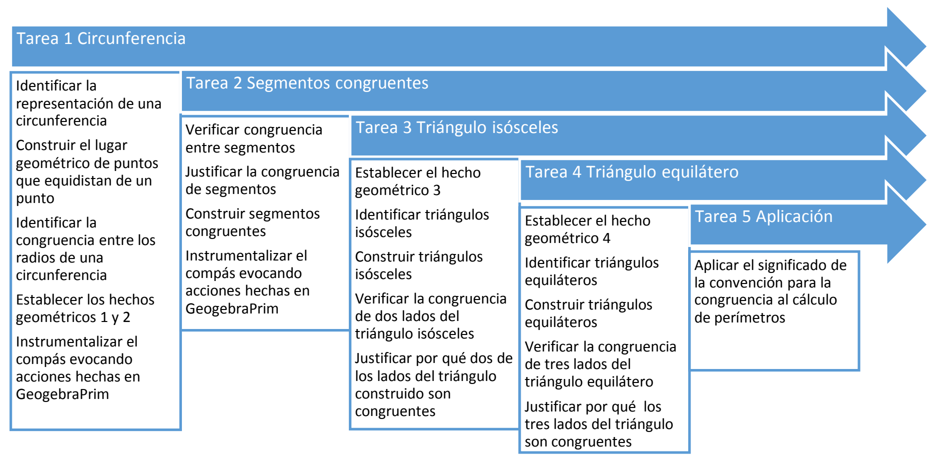
En esta trayectoria el equipo de investigación procuró vincular las representaciones de las figuras geométricas en distintos ambientes, con el fin de lograr una interrelación y no utilizarlos por separado como comúnmente se hace en las aulas de clase. Esta interrelación tiene como finalidad que las representaciones hechas por los estudiantes en cada ambiente, estén sustentadas por los hechos geométricos. Para esto, se parte de representaciones hechas en geometría dinámica en las que, a partir de procesos de exploración y construcción, se debe detectar un invariante (congruencia de segmentos) que se debe justificar a partir de los Hechos Geométricos 1 y 2 y a este invariante se le debe asignar una convención para su representación; luego, en el entorno de lápiz y papel con instrumentos de trazo (regla no graduada y compás), al evocar el invariante detectado en el programa, se debe establece una relación entre los usos de la herramienta circunferencia en el programa y las formas de usar el compás físico, la cual permite hacer uso de la convención en este ambiente. Luego de que la convención para la congruencia tenga significado para los estudiantes en los ambientes anteriores, se llega al ambiente de lápiz y papel sin instrumentos de trazo, en donde las representaciones se deben hacer a mano alzada utilizando la convención de congruencia. Esta convención, como se ha descrito anteriormente habrá surgido de un proceso de construcción geométrico teórico, habrá sido consolidada en distintos ambientes y no habrá sido impuesta por el profesor logrando así que no carezca de significado para los estudiantes. El Esquema 3.6 muestra tal interrelación.

Esquema 3.6 Interrelación entre los ambientes en torno a la convención



Al realizar los cambios y ajustes a la trayectoria de enseñanza fue necesario reestructurar y diseñar nuevas tareas y actividades. Una de las diferencias entre las tareas previstas y las modificadas es que las actividades de las tareas previstas se desarrollaban en un solo entorno (GeogebraPrim o lápiz y papel con instrumentos o lápiz y papel sin instrumentos), mientras que en las tareas modificadas, para cada tarea, hay actividades para realizar en los tres ambientes. El Esquema 3.7 muestra el nombre de las tareas y las acciones que el estudiante debe realizar en cada una de ellas.[8]

Esquema 3.7 Tareas planteadas



En la Tabla 3.2 se presentan las actividades diseñadas para la Tarea 1. La tarea se desarrolló durante las sesiones 1 y 2, aunque inicialmente estaba prevista para realizarse en una sesión. Fue necesario prolongar las actividades porque el equipo investigador vio oportuno hacer una socialización, en la siguiente sesión, de los procedimientos que los estudiantes habían seguido para dar solución a las actividades propuestas. Lo anterior, para poder verificar si los estudiantes empezaban a acercarse a una cultura participativa y de indagación, en la que es necesario que las soluciones que dé un estudiante estén validados por las normas sociomatemáticas establecidas en el aula. Las actividades tuvieron como finalidad que los estudiantes reconozcan la circunferencia como una herramienta para descubrir, verificar y justificar congruencia entre segmentos. Para poder lograrlo se invitó a los estudiantes a: (i) observar las características que hacen que a partir de un segmento, la activación del rastro de un vértice y su movimiento, se represente una circunferencia; (ii) realizar en GeogebraPrim la representación de una circunferencia a través de la propiedad de equidistancia entre el centro y cualquier punto de la misma; (iii) detectar invariantes de

[8] Las actividades propuestas a los estudiantes se encuentran en el anexo A.

la figura geométrica circunferencia; (iv) establecer la relación entre la herramienta circunferencia de GeogebraPrim y el instrumento de trazo compás. En estas sesiones se establecieron los dos primeros hechos geométricos.

Tabla 3.2 Actividades Tarea 1 Circunferencia

Actividad 1	
Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Dibujar un segmento. Activar el rastro a uno de los extremos del segmento. Conservando la longitud del segmento, mover el extremo que tiene activo el rastro.
Preguntas orientadoras	¿Qué se dibujó en la pantalla? ¿Por qué a unos les quedó mejor el dibujo que a otros? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien hecho el dibujo?
Finalidad	Identificar en la representación de una circunferencia el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. Justificar que para que el trazo se asemeje a una circunferencia es necesario que la longitud del segmento se mantenga fija.
Actividad 2	
Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Dibujar un segmento. Activar el rastro a uno de los extremos del segmento. Dibujar algunos puntos por donde debe pasar el extremo con rastro para que la representación de la circunferencia quede bien dibujada. Pasar el extremo con rastro por los puntos que se dibujaron.
Preguntas orientadoras	¿Quedó bien dibujada la circunferencia? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien dibujada? ¿Qué condiciones deben cumplir los puntos que dibujé para que la representación de la circunferencia quede bien?
Finalidad	Identificar la equidistancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro de la misma (primer hecho geométrico).
Actividad 3	
Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Dibujar una circunferencia utilizando la herramienta del programa GeogebraPrim. Identificar los elementos que aparecen en la pantalla (centro, circunferencia y punto sobre circunferencia[9])
Preguntas y acciones orientadoras	¿Qué objetos aparecen en la pantalla? ¿Dónde están ubicados los puntos? Mover los puntos para observar: qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente. Construir un segmento que una los dos puntos (centro y punto sobre circunferencia). Volver a mover los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente. Construir otro radio, mover nuevamente los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.
Finalidad	Identificar la congruencia entre los radios de una circunferencia (segundo hecho geométrico).
Actividad 4	
Entorno	Lápiz y papel con instrumentos de trazo (ver anexo A.1).
Finalidad	Evocar en un contexto de lápiz y papel los dos hechos geométricos de la circunferencia. Utilizar el compás como instrumento de construcción en papel y lápiz. Relacionar la función del compás con los hechos geométricos de la circunferencia.

[9] En GeogebraPrim cuando se utiliza la herramienta predeterminada para construir una circunferencia, en la pantalla aparecen los objetos centro, circunferencia y punto sobre circunferencia.

La Tarea 2 y sus actividades se enfocaron en utilizar la herramienta circunferencia para descubrir, verificar y justificar congruencia de segmentos. Esta tarea se llevó a cabo en la Sesión 2. En la Tabla 3.3 se presentan las actividades diseñadas para esta tarea. Los hechos geométricos establecidos fueron vinculados a este proceso. Se propuso a los estudiantes (i) utilizar la circunferencia para determinar parejas de segmentos congruentes en GeogebraPrim, (ii) identificar y determinar parejas de segmentos congruentes utilizando el compás y (iii) justificar, a partir de los hechos geométricos, la congruencia de segmentos.

Tabla 3.3 Actividades Tarea 2 Segmentos congruentes

Actividad 1	
Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Se presenta en GeogebraPrim un archivo con segmentos de diferentes longitudes no modificables y una circunferencia con radio fijo[10] (ver anexo A.2).
Preguntas orientadoras	¿Cuáles segmentos son congruentes con el segmento *d*? (el segmento *d* es congruente con el radio de la circunferencia). ¿Por qué?
Finalidad	Utilizar los dos hechos geométricos para establecer congruencia entre segmentos.
Actividad 2	
Entorno	Lápiz y papel con instrumentos de trazo (ver anexo A.2).
Finalidad	Utilizar el compás como instrumento para transportar medidas. Evocar en un contexto de lápiz y papel los dos hechos geométricos de la circunferencia.

Las actividades propuestas para la Tarea 3 se presentan en la Tabla 3.4. Esta tarea se llevó a cabo en las Sesiones 3, 4 y 5. En las actividades para esta tarea se propone a los estudiantes (i) explorar representaciones blandas y robustas de triángulos isósceles para identificar la propiedad invariante (congruencia de dos lados), (ii) construir triángulos isósceles a partir de la propiedad de congruencia de dos de sus lados, (iii) justificar la congruencia de lados en triángulos mediante hechos geométricos y (iv) utilizar la convención para indicar la congruencia de segmentos.

Tabla 3.4 Actividades Tarea 3 Triángulo isósceles

Actividad 1	
Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Se menciona a los estudiantes que un triángulo que tiene dos lados congruentes se denomina triángulo isósceles (tercer hecho geométrico). Se presenta en GeogebraPrim un archivo, en el que hay tres representaciones robustas de triángulos isósceles y tres blandas (ver anexo A.3).
Finalidad	Detectar el invariante de dos lados congruentes en las representaciones robustas.
Actividades 2, 3 y 4	

[10] Los segmentos de longitud fija están estáticos. La circunferencia de radio fijo se puede mover por toda la interfaz.

Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Se presenta en GeogebraPrim tres archivos en los que se les pide construir un triángulo isósceles a partir de condiciones dadas (ver anexo A.3).
Finalidad	Identificar la naturaleza múltiple[11] de un elemento en una construcción. Establecer que un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes (tercer hecho geométrico). Utilizar la herramienta circunferencia para construir triángulos isósceles. Utilizar los hechos geométricos para justificar la construcción de los triángulos isósceles. Utilizar la convención para la congruencia.
Actividad 5	
Entorno	Lápiz y papel con instrumentos de trazo y sin instrumentos de trazo (ver anexo A.3).
Finalidad	Establecer si la convención para la congruencia evoca el invariante detectado en GeogebraPrim en el contexto de lápiz y papel. Evocar en el contexto de lápiz y papel los dos hechos geométricos de la circunferencia. Utilizar la herramienta compás para construir triángulos isósceles. Utilizar los hechos geométricos para justificar la construcción de los triángulos isósceles. Utilizar la convención para la congruencia para representar triángulos isósceles a mano alzada.

Las actividades propuestas para la Tarea 4 se desarrollaron en las Sesiones 6 y 7 y se presentan en la Tabla 3.5. En ellas se propone a los estudiantes (i) construir triángulos equiláteros a partir de la propiedad de congruencia de tres de sus lados, (ii) justificar la congruencia de los lados de triángulos mediante hechos geométricos y (iii) utilizar la convención para la congruencia de segmentos.

Tabla 3.5 Actividades Tarea 4 Triángulo equilátero

Actividades 1 y 2	
Entorno	GeogebraPrim
Enunciado	Se menciona a los estudiantes que un triángulo que tiene sus tres lados congruentes se denomina triángulo equilátero (cuarto hecho geométrico). Se presenta en GeogebraPrim dos archivos en los que se les pide construir un triángulo equilátero a partir de condiciones dadas (ver anexo A.4).
Finalidad	Identificar la naturaleza múltiple de un elemento en una construcción. Utilizar la herramienta circunferencia para construir triángulos equiláteros. Utilizar los hechos geométricos para justificar la construcción de los triángulos equiláteros. Utilizar la convención para la congruencia.
Actividad 3	
Entorno	Lápiz y papel con instrumentos de trazo y sin instrumentos de trazo (ver anexo A.4).
Finalidad	Establecer si la convención para la congruencia evoca el invariante detectado en GeogebraPrim en el contexto de lápiz y papel. Evocar en el contexto de lápiz y papel los dos hechos geométricos de la circunferencia. Utilizar la herramienta compás para construir triángulos equiláteros. Utilizar los hechos geométricos para justificar la construcción de los triángulos

[11] Con *naturaleza múltiple de un elemento* nos referimos a que un elemento de una construcción puede identificado y nombrado a la vez de diferentes formas. Por ejemplo, en una construcción un elemento puede ser a la vez segmento, radio de una circunferencia y lado de un triángulo.

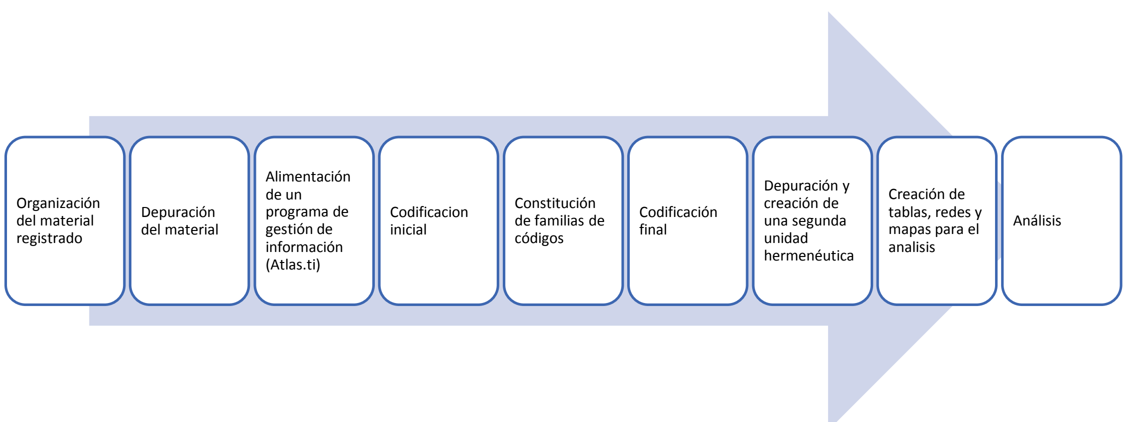
	equiláteros. Utilizar la convención para la congruencia para representar triángulos equiláteros a mano alzada.

Las cuatro primeras tareas se implementaron en siete sesiones de la clase de geometría. La Tarea 5 se realizó, en la Sesión 8, en una clase de aritmética. En esta sesión se propuso a los estudiantes un taller sobre el cálculo de perímetros de dibujos en los que había segmentos congruentes (ver anexo A.5). La finalidad de esta actividad era observar y verificar el uso del significado de la convención, en un contexto aritmético, para la congruencia de segmentos, establecida en clase de geometría.

3.3 Fase de análisis retrospectivo

El análisis retrospectivo generó, de manera articulada, el conjunto de datos a analizar y los códigos emergentes. El proceso seguido se muestra en el Esquema 3.8. A continuación se hace una descripción de cada una de las etapas de dicho proceso.

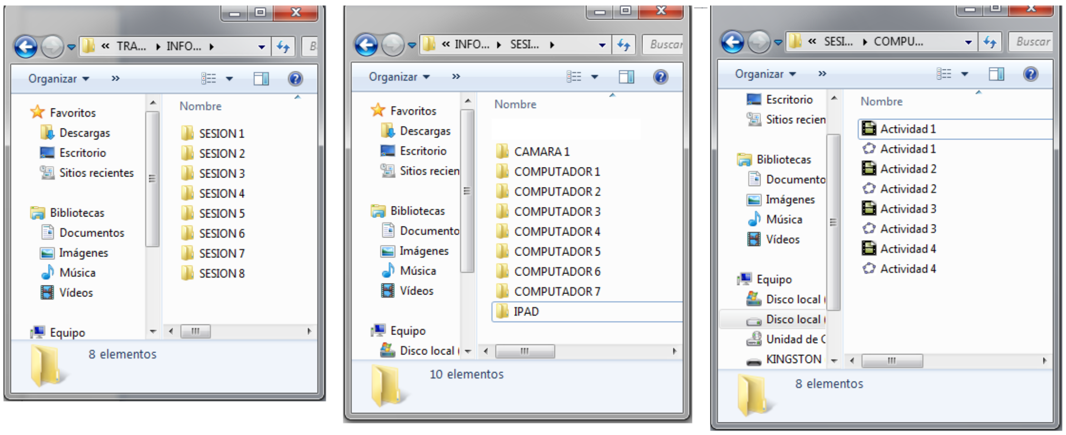
Esquema 3.8 Proceso seguido para el análisis



3.3.1 Organización de material registrado

En esta etapa del proceso se organizó la información recolectada mediante los diferentes registros. Para cada sesión se organizó una carpeta virtual y una carpeta física, con archivos digitales y con material impreso, respectivamente. Se obtuvieron ocho carpetas virtuales, cada una correspondiente a una sesión y cinco carpetas físicas correspondientes a las sesiones en las que se dio material impreso a los estudiantes. Dentro de cada carpeta virtual se crearon carpetas que correspondían a cada instrumento de recolección de información que se había usado en la sesión, salvo de los instrumentos Camtasia y GeogebraPrim que se organizaron en carpetas llamadas Computador 1, Computador 2, etc., según correspondiera. En la Imagen 3.1 se muestran las ventanas que ilustran la anterior organización.

Imagen 3.1 Organización de material registrado



Con la anterior organización, se obtuvieron 16 archivos del instrumento Cámara 1, 50 archivos para el instrumento Ipad, 80 archivos para las carpetas Computador (40 Camtasia y 40 GeogebraPrim) y del material impreso se tenían 160 talleres.

3.3.2 Depuración del material

Debido a la gran cantidad de archivos, a la larga duración de los videos y a la intención de configurar un conjunto inicial de datos, se realizaron dos depuraciones de la información recolectada.

Primera depuración: Se observaron los videos de la Cámara 1 y del Ipad y se seleccionaron aquellos donde la calidad del audio y del video fueran óptimas y donde estuviera el registro de hechos que inicialmente creímos eran importantes para el establecimiento del criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica, como por ejemplo, las intervenciones provechosas de los estudiantes y de la profesora.

Los archivos de Camtasia, registrados cuando se utilizaba GeogebraPrim, fueron observados y escuchados detalladamente eligiendo aquellos donde el audio y el video fueran óptimos. Luego, se seleccionaron tres archivos para cada sesión, es decir, el registro de tres grupos de estudiantes.

En cuanto al material impreso se seleccionaron los registros de fácil lectura de las respuestas de los estudiantes y aquellos que estuvieran resueltos completamente.

Los archivos de GeogebraPrim fueron desechados ya que el programa Camtasia recolectó de mejor manera las acciones y productos de los estudiantes al dar solución a las actividades propuestas en GeogebraPrim.

Segunda depuración: Se realizó la edición de los archivos de video (Cámara 1, Ipad y Camtasia) seleccionados en la anterior depuración. Esta edición consistió en cortar las partes del video donde se interrumpía el desarrollo de la actividad, o donde lo que hablaban los estudiantes no era significante para nuestros propósitos (visita de un profesor o del coordinador, charla de los estudiantes sobre lo que hicieron el fin de semana, etc.). Esta edición tuvo como finalidad seleccionar los fragmentos relevantes en donde los estudiantes intervenían en la solución de las actividades. Las actividades impresas seleccionadas en la anterior depuración fueron observadas nuevamente y se seleccionaron las que representaban a grupos de respuestas semejantes o comunes. El material seleccionado fue escaneado y se guardaron los archivos de las imágenes en formato PDF en las carpetas de las sesiones correspondientes. Con esta selección se obtuvo un número considerable, representable y manejable de registros del material impreso.

Los archivos finalmente seleccionados fueron etiquetados nuevamente y se creó una hoja de Excel (Imagen 3.2), en la que aparece el tipo y el nombre del archivo para cada sesión (de esta misma manera fueron organizadas las demás sesiones). En esta etapa se incluyeron los archivos de los audios de las reuniones del equipo investigador y los archivos de los guiones que se elaboraron para la interacción con la profesora *Rosa*.

Imagen 3.2 Ventana de Excel con los archivos depurados

	A	B	C
1	Tipo	Nombre archivo	Fecha
2	Reunion 1 Equipo investigador sesion 1	REU_1_EI_S1	15-ago-13
3	Reunion 2 Equipo investigador sesion 1	REU_2_EI_S1	22-ago-13
4	Reunion Equipo investigador 3 sesion 1	REU_3_EI_S1	05-sep-13
5	Guión Sesión 1	GUION1	09-sep-13
6	Camara 1 inicio sesion 1	CA_a_S1	09-sep-13
7	Camara 1 socializacion actividad 1 sesion 1	CA_b_S1	09-sep-13
8	Camara 1 socializacion actividad 2 sesion 1	CA_c_S1	09-sep-13
9	Camara 1 socializacion actividad 3 sesion 1	CA_d_S1	09-sep-13
10	Camara 1 socializacion cierre	CA_e_S1	09-sep-13
11	Computador 1 sesion 1	COMP_1_S1	09-sep-13
12	Computador 3 sesion 1	COMP_3_S1	09-sep-13
13	Computador 5 sesion 1	COMP_5_S1	09-sep-13
14	ipad 1 sesion 1	IPD_1_S1	09-sep-13
15	ipad 2 sesion 1	IPD_2_S1	09-sep-13
16	Actividad lapiz y papel sesion 1	ALP_a_S1	09-sep-13
17	Actividad lapiz y papel sesion 1	ALP_b_S1	09-sep-13
18	Actividad lapiz y papel sesion 1	ALP_c_S1	09-sep-13
19	Actividad lapiz y papel sesion 1	ALP_d_S1	09-sep-13

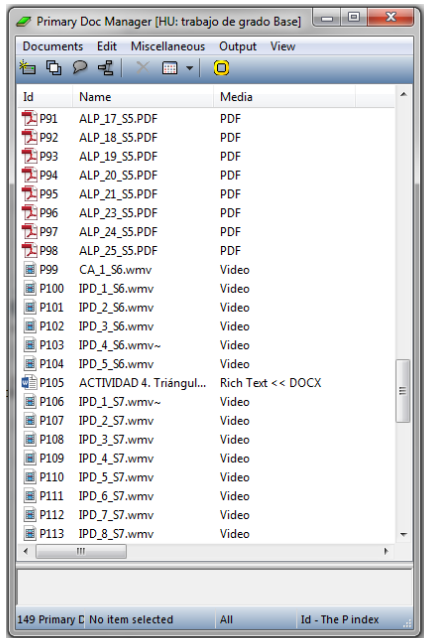
A partir de las anteriores depuraciones se obtuvieron los registros que sirvieron como insumo para alimentar el programa Atlas.ti.

3.3.3 Alimentación de un programa de gestión de la información

Optamos por utilizar Atlas.ti porque es un programa que permite recolectar, conectar y analizar información. Debido a las cualidades que posee para gestionar la información nos permitió manejar los archivos seleccionados sin importar el tipo de registro (video, audio e imagen), de una manera sistematizada. Lo usamos como medio de almacenamiento, categorización, codificación y estructuración de la información depurada, con el fin analizar la información por medio de tablas, diagramas y redes. Los 149 archivos que se obtuvieron como resultado de las depuraciones fueron formateados según el tipo de archivo que permite el programa (los archivos de video en formato WMV, los de audio en MP3, los guiones en Word y las imágenes en PDF), y luego fueron incorporados en él. Este primer conjunto de documentos constituyeron los documentos primarios (DP) de la primera unidad hermenéutica (UH_1)[12]. En total, se incorporaron 149 documentos primarios. En la Imagen 3.3 se muestra la ventana donde aparecen los documentos primarios.

[12] Los archivos en el programa Atlas.ti se denominan “unidad hermenéutica”.

Imagen 3.3 Ventana documentos primarios Atlas.ti



3.3.4 Conformación de las familias de códigos

Una vez subidos los documentos primarios a la unidad hermenéutica (UH_1) se empezó la conformación de las categorías de análisis. Para ello, se creó una hoja de Excel (Imagen 3.4), en la que describimos las actividades realizadas en cada sesión, revisadas a través de los documentos primarios y los posibles asuntos que se podían rastrear para hacer seguimiento a la constitución del criterio.

Imagen 3.4 Ventana hoja de Excel actividades y asuntos a rastrear

SESIÓN	TEMA	ACTIVIDADES REALIZADAS EN LA SESIÓN DE CLASE					POSIBLES ASUNTOS A RASTRAR PARA HACERLE EL SEGUIMIENTO A LA CONSTITUCIÓN DE LA NORMA							
1	CIRCUNFERENCIA	Actividad Geogebra: Se propuso construir un segmento, activar el arrastre en un extremo y mover el extremo sin que cambie la longitud del segmento.	Aplicar la técnica del hilvanado para obtener la circunferencia.	Construir la circunferencia con las herramientas del programa	Introducción de términos geométricos (centro, radio, circunferencia, punto sobre circunferencia)	Actividad lapiz y papel: circunferencia (interfaz: determinar segmentos que forman circunferncias, ilvanado y contruccion de una circnufernciia con	Uso de un programa que permite explorar las figuras. (Ambiente)	Reglas para tener en cuenta cuando se maneja Geogebra. (Reglas explicitas)	Uso de vocabulario geométrico. (NS o NSM)	Manipulación de elementos con el fin de realizar conjeturas. (Reglas explicitas)	Seguimiento de instrucciones. (NS no útil para lo que necesitamos mirar)	Producción de figuras de los niños en Geogebra	Tipo de actividades propuestas por el profesor. (NSM)	Validación o refutación de cojeturas entre compañeros. (NS util)
2	CONGRUENCIA DE SEGMENTOS	Socialización actividad 1 mediante videos.	Actividad Geogebra: segmentos congruentes (segmentos fijos y una circunferencia móvil para coparar los radios)	Actividad compás papel y lápiz. Manejo compás. Elaboración de circunferencias con compás.		Actividad lápiz, compás y papel: cuáles segmentos son congruentes con otro dado.		Reglas para tener en cuenta cuando se maneja Geogebra.	Uso de vocabulario geométrico adecuado.				Tipo de actividades propuestas por el profesor.	Validación o refutación de cojeturas entre compañeros.
3	TRIANGULOS ISÓSCELES I	Recordación hecho geométrico. Todos los radios de una circunferencia son congruentes. Elaboracion de cartel. Identificacion de segmentos congruentes.	Actividad 1 Geogebra: Exploración de triángulos blandos y robustos para identificar dos segmentos congruentes.	Actividad 2 Geogebra. Construir un triángulo isósceles utilizando una circunferencia.	Actividad 3 Geogebra. Construir un triángulo isósceles a partir de un segmento.	Actividad 4 Geogebra. Construir un triángulo isósceles a partir de un segmento que no es un lado congruente.	Uso de un programa que permite explorar las figuras.	Reglas para tener en cuenta cuando se maneja Geogebra.	Uso de vocabulario geométrico.	Manipulación de elementos con el fin de realizar conjeturas.	Seguimiento de instrucciones.		Tipo de actividades propuestas por el profesor.	Validación o refutación de cojeturas entre compañeros.
4	TRIANGULOS ISÓSCELES II	Socializar lo trabajado hasta el momento (Hecho geométrico y normas)	Recuento actividad 1	Retomar las actividades 2, 3 y 4 ya que no se alcanzó la sesión pasada.			Uso de un programa que permite explorar las figuras.	Reglas para tener en cuenta cuando se maneja Geogebra.	Uso de vocabulario geométrico.	Manipulación de elementos con el fin de realizar conjeturas.	Seguimiento de instrucciones.		Tipo de actividades propuestas por el profesor.	Validación o refutación de cojeturas entre compañeros.

De la anterior hoja de Excel surgieron los posibles asuntos a rastrear (en total 16), los cuales se organizaron en otra hoja de Excel con su correspondiente descripción y código asignado (Imagen 3.5).

Imagen 3.5 Ventana hoja de Excel asuntos a rastrear

	Nombre	Descripción	Código
1	Reglas de exploración	Se hace mención de la norma explicita de las tres reglas a seguir cuando se explora en GeogebraPrim: qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.	REG_EXP
2	Lenguaje geométrico	Expresiones con las que los estudiantes se refieren a la geometría o la profesora y los investigadores discuten sobre el lenguaje geométrico.	LEN_GEO
3	PrOcedimientos de dibujo o construcción	Técnicas de construcción de dibujos geométricos que utilizan los estudiantes: en geogebra, con instrumentos y a mano alzada.	PRO_DI_CONS
4	Validez de una construcción	Se hace mención a que dibujo se acepta y cuál no en la comunidad de la clase.	DIB_GEO_VAL
5	Justificación teórica	Creación de un hecho geométrico y utilización del hecho para justificar.	JUST_T
6	Justificación desde la norma	Justificación con base a la norma (convención)	JUST_N
7	Justificación no geométrica	Justificación sin uso de los hechos geometricos.	JUST_NO_G

	Nombre	Descripción	Código
8	Detección de Invariantes	Identificación de invariantes en la Exploración	IDENT_INVA
9	Estrategia de verificación	Estrategias con las que los estudiantes verifican una propiedad	ESTR_VER
10	Tratamiento de las intervenciones de los estudiantes	Intervenciones del profesor respecto a las intervenciones del estudiante donde saca provecho en funcion de la construccion del criterios compartidos	TRA_INTER_EST
11	Promoción de seguimiento de instrucciones	Se hace mención a instrucciones para realizar actividades.	NS_SEG_INSTR
12	Promoción del ambiente participativo	Se fomenta la participación de los estudiantes.	NS_AMB_PART
13	Promoción del ambiente indagativo	Se fomenta la formulación de preguntas.	NS_AMB_INDAG
14	Fomento de la escucha de las ideas de los demás	La profesora crea estrategias para que los estudiantes vean la necesidad de escuchar a sus compañeros.	NS_ESCU
15	Discriminación de elementos constitutivos de los dibujos	Identificación de las unidades configurales que componen la figura.	DISC_PROP_GEO
16	Producción de conjetura	Cuando hacen una formulación explicita de una propiedad.	PROD_CONJE

A partir de este listado inicial de códigos se empezaron a codificar fragmentos en los documentos primarios. En varias reuniones del equipo investigador, se revisaban nuevamente las descripciones de los códigos, la información codificada con ellos y en ocasiones surgieron nuevos códigos. Se obtuvieron en total 25 códigos. En este proceso se establecieron relaciones entre los códigos y estas relaciones determinaron las familias de códigos. En la Imagen 3.6 se presentan, a modo de ejemplo, algunas familias de códigos (para visualizar todas las familias ver Anexo B).

Imagen 3.6 Familias de códigos

Familia	Descripción	Código asignado
Normas	El código se usa cuando profesora, estudiantes o investigadores hacen mención explícita de las normas acordadas para representar una figura geométrica, a mano alzada (se usa la convención), con instrumentos de trazo (se usa el compás y la regla no graduada) o en GeogebraPrim (soporte el arrastre).	NORM_REPR_VAL
	El código se usa cuando profesora, investigadores o estudiantes hacen mención explícita a la norma que se debe poner en práctica al hacer una exploración en GeogebraPrim: identificar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente al mover los elementos constitutivos de la representación.	NORM _EXP
	El código se usa cuando profesora, estudiantes o investigadores hacen mención explícita a la norma de justificar propiedades con base en los hechos geométricos aceptados previamente.	NORM _JUST
Lenguaje geométrico	El código se usa cuando los estudiantes hacen uso (o intentan hacer uso) de lenguaje geométrico especializado al comunicar la solución a un problema, al explicar una idea, al justificar sus afirmaciones, etc.	USO_LEN_GEO
	El código se usa cuando profesora, investigadores o estudiantes fomentan el uso de lenguaje geométrico para favorecer el intercambio comunicativo al referirse a las representaciones geométricas.	FOM_LEN_GEO
Exploración	El código se usa cuando los estudiantes reconocen en una representación los elementos constitutivos o unidades configurales de una figura.	DISC_ELE_REP
	El código se usa cuando la profesora, los investigadores o los estudiantes mencionan que un elemento de una figura geométrica puede desempeñar un rol diferente en las representaciones existentes.	DIF_ROL_ELEM_FIG
	El código se usa cuando los estudiantes intervienen sobre una representación hecha en GeogebraPrim, en busca de invariantes.	EXP_IDENT_INVA
	El código se usa cuando los estudiantes intervienen sobre una representación para verificar que cumple una propiedad.	EXP_VER_PROP
	El código se usa cuando los estudiantes hacen una formulación explícita de una conjetura relacionada con una propiedad de la figura geométrica.	PROD_CONJE

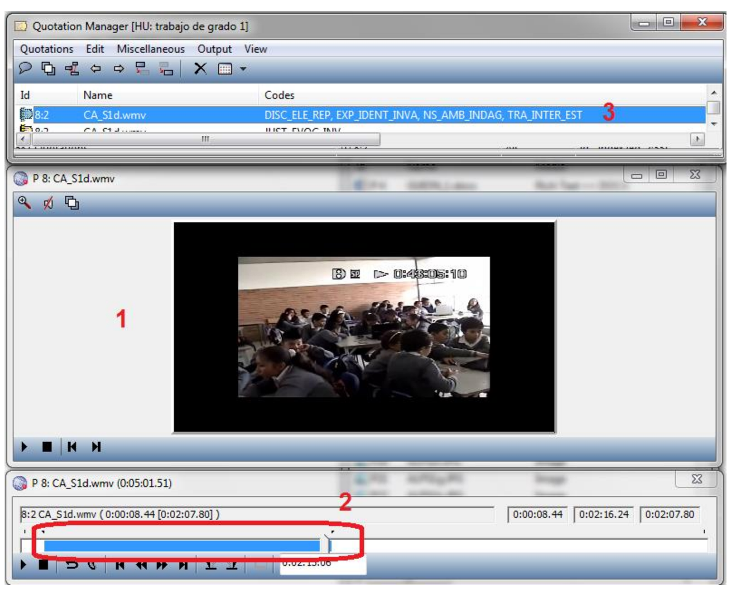
3.3.5 Codificación

En Atlas.ti se realizó la codificación de la información que estuvo caracterizada por ser emergente, puesto que los códigos no estaban establecidos previamente por una teoría y porque fueron surgiendo a partir de la observación de los DP, tal como se describió previamente.

Particularmente, la codificación de la primera sesión fue realizada por separado por dos de los investigadores (estudiantes de la maestría). Esta codificación fue socializada y analizada por el equipo investigador para discutir los significados asignados a cada fragmento y a los códigos utilizados. Con ello, se buscaba triangular la información. Posteriormente, se llevó a cabo la codificación de los DP de las demás sesiones. En las reuniones con el equipo investigador se analizaron los casos en los que existía duda frente al código para codificar algún fragmento en particular. Por lo anterior, en estas reuniones se describían de mejor manera los códigos y en ocasiones surgían nuevos.

La Imagen 3.7 muestra la interfaz de Atlas.ti cuando se estaba codificando el documento primario número 8 (DP8:CA_S1d.wmv), registrado en la cámara 1 y que presentaba una socialización. En la zona etiquetada con 1 se observa la imagen del video; en la zona 2 se observa el fragmento del video a codificar; y en la zona 3 se observan los códigos asignados al fragmento. En este fragmento se observó que la profesora, a partir de las intervenciones de los estudiantes, hizo preguntas enfocadas a que evidenciaran la necesidad de discriminar los elementos de una representación de una circunferencia (centro, punto sobre circunferencia y circunferencia), para identificar invariantes al hacer una exploración en GeogebraPrim. De esta manera se asignaron los códigos: TRAT_INTER_EST (tratamiento de las intervenciones de los estudiantes), NS_AMB_INDAG (ambiente de indagación), EXPL_VER_INV (exploración para verificar invariantes) y DISC_ELE_REP (discriminar elementos de las representaciones).

Imagen 3.7 Ventana Quotation Manager de Atlas.ti



3.3.6 Preparación de una segunda unidad hermenéutica

La primera unidad hermenéutica creada fue utilizada para la selección y codificación de los fragmentos y para realizar un primer análisis, que nos llevó a la configuración final de los códigos y las familias de códigos. El primer análisis también nos permitió contrastar y encontrar regularidades en los datos, sesión por sesión, lo cual sirvió para disminuir la cantidad de documentos primarios. A partir de esta decisión, se constituyó una segunda unidad hermenéutica (UH_2) con los documentos primarios en los que encontramos mayor información en los fragmentos codificados. A estos nuevos documentos primarios con sus respectivos códigos se les hizo un análisis detallado, por medio de tablas, diagramas y redes. Este análisis se describe en el siguiente capítulo. A continuación esbozamos el procedimiento llevado a cabo para la constitución de la segunda unidad hermenéutica (UH_2).

Para este proceso se observaron los DP por instrumento de registro y fueron seleccionados aquellos que eran representativos por sesión. Esta representatividad surgió del análisis de los registros que proporcionan los administradores de Atlas.ti: (i) documentos primarios (Primary Doc Manager), (ii) fragmentos (Quotation Manager), (iii) códigos (Code Manager), y (iv) redes (Networks). Por ejemplo, el administrador de DP permite comparar los DP por la cantidad de fragmentos que este tiene; luego, en el administrador de fragmentos se pueden comparar las códigos que tiene cada fragmento y por medio del administrador de códigos y las redes generadas se analiza y decide cuales DP elegir.

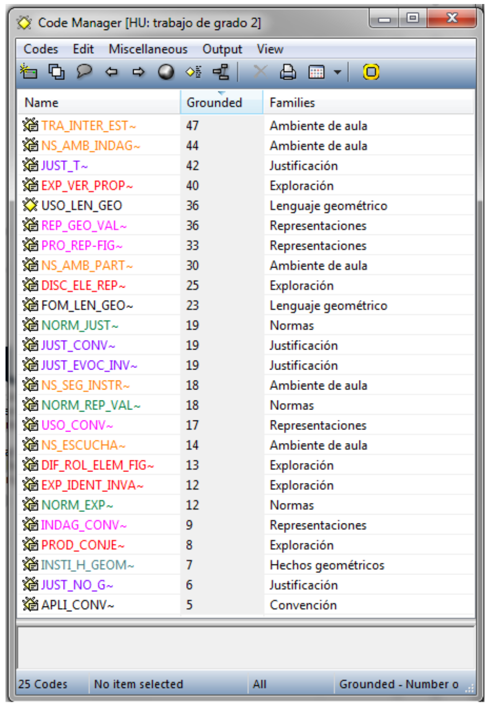
3.3.7 Configuración de las categorías de análisis

Una vez se generó la segunda unidad hermenéutica se configuraron tres categorías de análisis: (i) Administrador de códigos; (ii) Redes por instrumento de registro; y (iii) Familias de códigos.

Administrador de códigos

Según el objetivo de nuestra investigación, el administrador de códigos nos brinda una información valiosa para ser analizada, ya que nos muestra una panorámica de la frecuencia de los códigos y la familia a la que pertenecen. La Imagen 3.8 muestra el administrador de códigos que será analizado en el Capítulo 4. En la primera columna aparece el nombre de cada código; en la siguiente, la cantidad de fragmentos que se codificaron con cada código; y en la última se indica la familia a la que pertenece cada código.

Imagen 3.8 Ventana Administrador de códigos de Atlas.ti



Name	Grounded	Families
TRA_INTER_EST~	47	Ambiente de aula
NS_AMB_INDAG~	44	Ambiente de aula
JUST_T~	42	Justificación
EXP_VER_PROP~	40	Exploración
USO_LEN_GEO	36	Lenguaje geométrico
REP_GEO_VAL~	36	Representaciones
PRO_REP-FIG~	33	Representaciones
NS_AMB_PART~	30	Ambiente de aula
DISC_ELE_REP~	25	Exploración
FOM_LEN_GEO~	23	Lenguaje geométrico
NORM_JUST~	19	Normas
JUST_CONV~	19	Justificación
JUST_EVOC_INV~	19	Justificación
NS_SEG_INSTR~	18	Ambiente de aula
NORM_REP_VAL~	18	Normas
USO_CONV~	17	Representaciones
NS_ESCUCHA~	14	Ambiente de aula
DIF_ROL_ELEM_FIG~	13	Exploración
EXP_IDENT_INVA~	12	Exploración
NORM_EXP~	12	Normas
INDAG_CONV~	9	Representaciones
PROD_CONJE~	8	Exploración
INSTI_H_GEOM~	7	Hechos geométricos
JUST_NO_G~	6	Justificación
APLI_CONV~	5	Convención

Redes por instrumento de registro

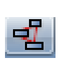
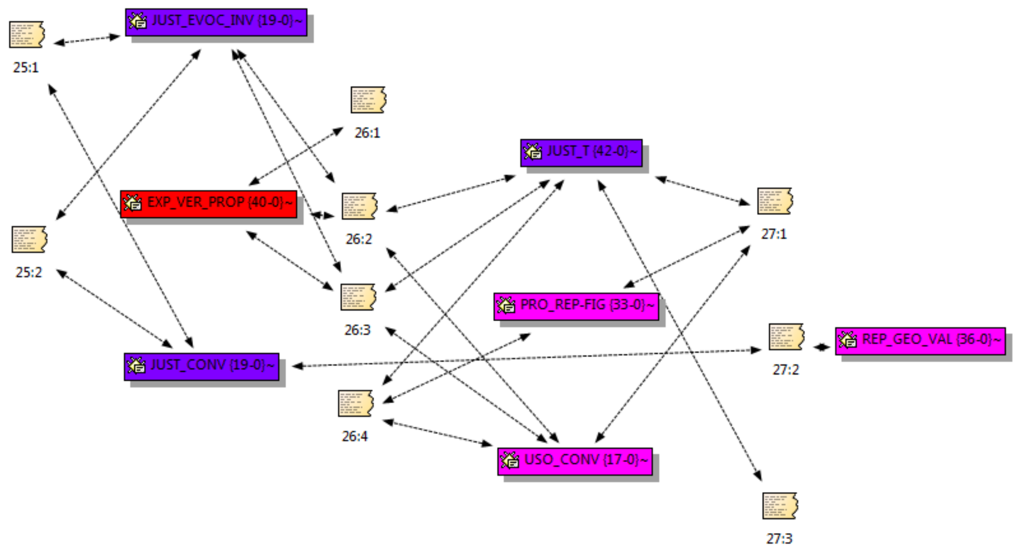
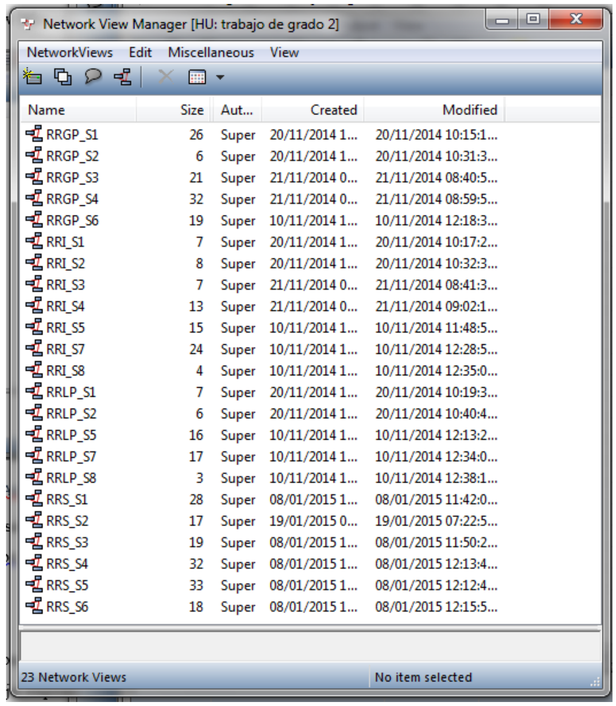
Las redes elaboradas por Atlas.ti se configuraron por tipo de instrumento de registro y por sesión. Para elaborar una red se seleccionan todos los fragmentos asociados a un instrumento de registro de la sesión deseada. Por ejemplo, para elaborar la red del instrumento de registro Actividades impresas de la Sesión 5, se seleccionaron en la ventana *Quotation Manager* los fragmentos de dicho instrumento de esa sesión. Se seleccionó la herramienta  y aparecieron en otra ventana los fragmentos seleccionados. Luego, se aplicó la opción *Import Neighbors* a cada fragmento y apareció la red que se muestra en la Imagen 3.9. La red está constituida por los fragmentos asociados al registro Lápiz y papel de la Sesión 5 y por los códigos asignados a dichos fragmentos.

Imagen 3.9 Red de relaciones lápiz y papel Sesión 5 (RRLP_S5)



Las redes de relaciones se elaboraron con el fin de observar la presencia y evolución de algunos códigos a lo largo del experimento de enseñanza. Se elaboraron redes relacionadas con cada instrumento de registro. Las redes del instrumento Cámara 1 se construyeron para analizar y comparar las socializaciones; a estas redes se les dio el nombre de redes de relaciones de socializaciones (RRS). Las redes del instrumento Camtasia se elaboraron para analizar y comparar las acciones de los estudiantes en GeogebraPrim. A estas redes se les dio el nombre de redes de relaciones de trabajo en GeogebraPrim (RRGP). También se elaboraron redes de los instrumentos Ipad (RRI) y actividades impresas (RRLP), para que junto con las redes anteriores sirvieran para alimentar la hoja de Excel de las familias de códigos que se menciona en la siguiente sección. Las redes generadas en Atlas.ti se pueden observar en la ventana de administrador de redes (Network View Manager) (Imagen 3.10).

Imagen 3.10 Ventana Administrador de redes de Atlas.ti

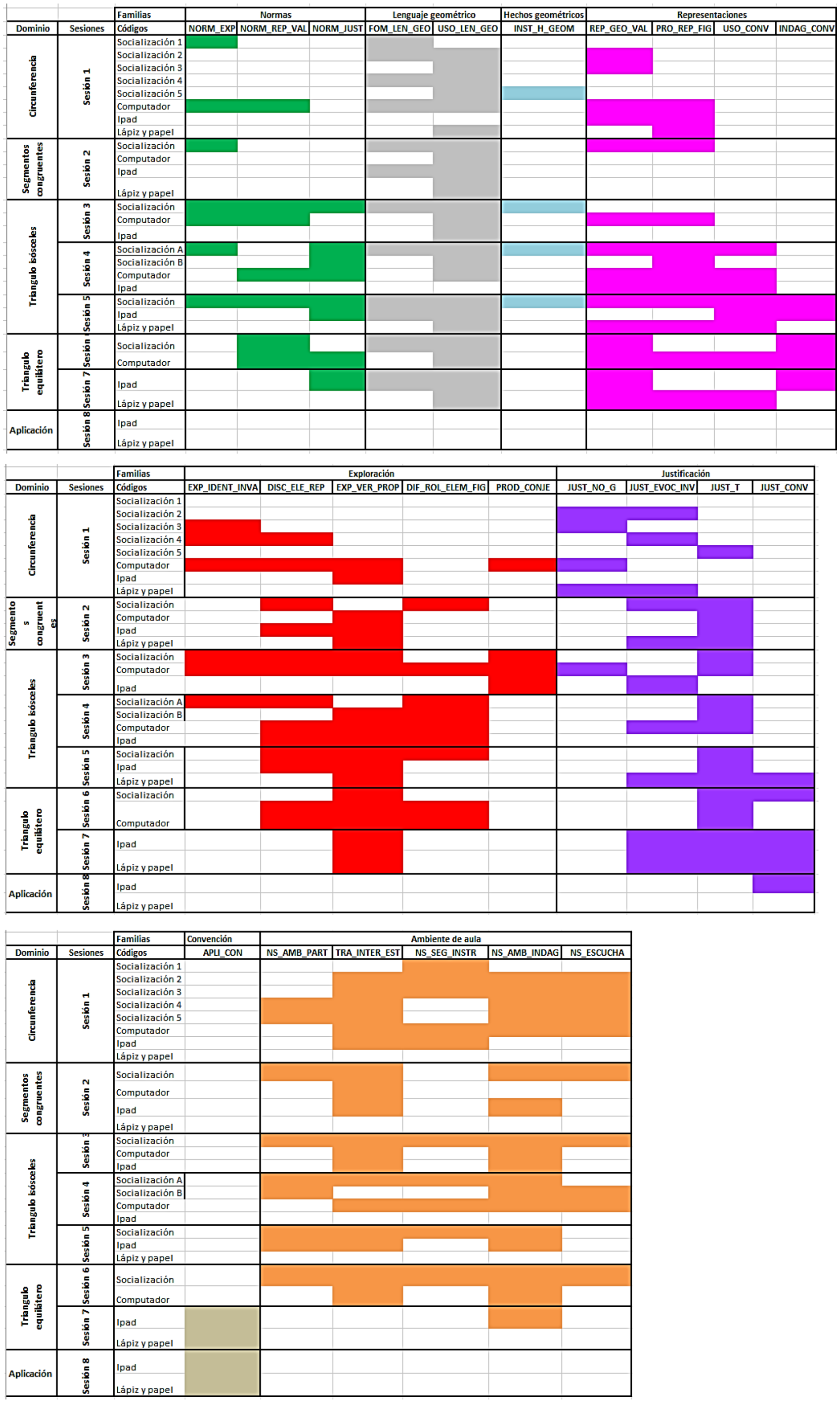


En la primera columna se encuentra el nombre de la red por sesión. En la segunda aparece la cantidad de códigos asociados a la red y en las siguientes columnas autor, fecha de creación y fecha de modificación de la red, respectivamente.

Familias de códigos

Como se mencionó anteriormente los códigos fueron clasificados por familias. En Atlas.ti a cada familia se le asignó un color (morado-justificación, rojo-exploración, etc.). Estos colores hicieron posible distinguir en las redes la familia a la que pertenece cada código (ver Imagen 3.8). A partir de las redes se creó en una hoja de Excel una tabla (Imagen 3.11), en la que se hicieron evidentes los códigos, de cada familia, utilizados por instrumento de registro y por sesión. Al observar la tabla fue posible entrever relaciones entre códigos de una misma familia y una dinámica interna durante todo el experimento de enseñanza.

Imagen 3.11 Ventana Excel aparición de códigos durante el experimento



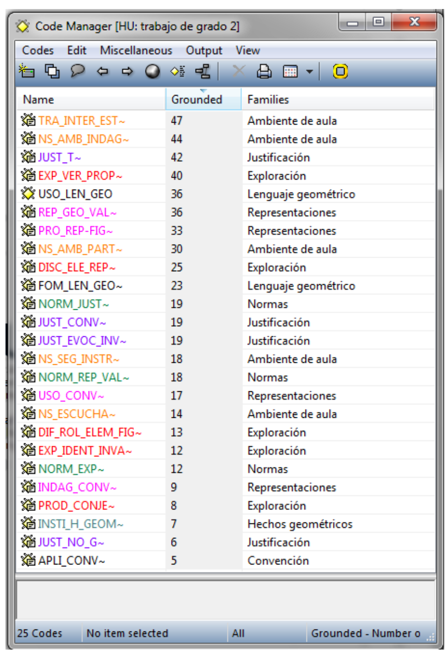
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de las tres categorías descritas en el capítulo anterior (Apartado 3.3.7) y configuradas con la ayuda de las herramientas del programa Atlas.ti. En primer lugar, se presenta el análisis de las frecuencias de códigos; en el segundo lugar, se muestra el análisis de las redes de relaciones; y en tercer lugar, se encuentra el análisis por familias de códigos.

4.1 Análisis frecuencia de códigos

Para este análisis se utilizó la ventana *Administrador de códigos* (Code Manager) de Atlas.ti, con la información de las columnas que se muestran en la Imagen 4.1. En la primera columna de esta ventana se observa cada uno de los 25 códigos definidos (Imagen 3.6); en la siguiente columna está la cantidad de fragmentos (de los 154 obtenidos), que están conectados con cada código (frecuencia de cada código); y en la última se indica la familia a la que pertenece el código.

Imagen 4.1 Ventana Administrador de códigos de Atlas.ti


Code Manager [HU: trabajo de grado 2]

Codes Edit Miscellaneous Output View

Name	Grounded	Families
TRA_INTER_EST~	47	Ambiente de aula
NS_AMB_INDAG~	44	Ambiente de aula
JUST_T~	42	Justificación
EXP_VER_PROP~	40	Exploración
USO_LEN_GEO	36	Lenguaje geométrico
REP_GEO_VAL~	36	Representaciones
PRO_REP-FIG~	33	Representaciones
NS_AMB_PART~	30	Ambiente de aula
DISC_ELE_REP~	25	Exploración
FOM_LEN_GEO~	23	Lenguaje geométrico
NORM_JUST~	19	Normas
JUST_CONV~	19	Justificación
JUST_EVOC_INV~	19	Justificación
NS_SEG_INSTR~	18	Ambiente de aula
NORM_REP_VAL~	18	Normas
USO_CONV~	17	Representaciones
NS_ESCUCHA~	14	Ambiente de aula
DIF_ROL_ELEM_FIG~	13	Exploración
EXP_IDENT_INVA~	12	Exploración
NORM_EXP~	12	Normas
INDAG_CONV~	9	Representaciones
PROD_CONJE~	8	Exploración
INSTI_H_GEOM~	7	Hechos geométricos
JUST_NO_G~	6	Justificación
APLI_CONV~	5	Convención

25 Codes | No item selected | All | Grounded - Number o

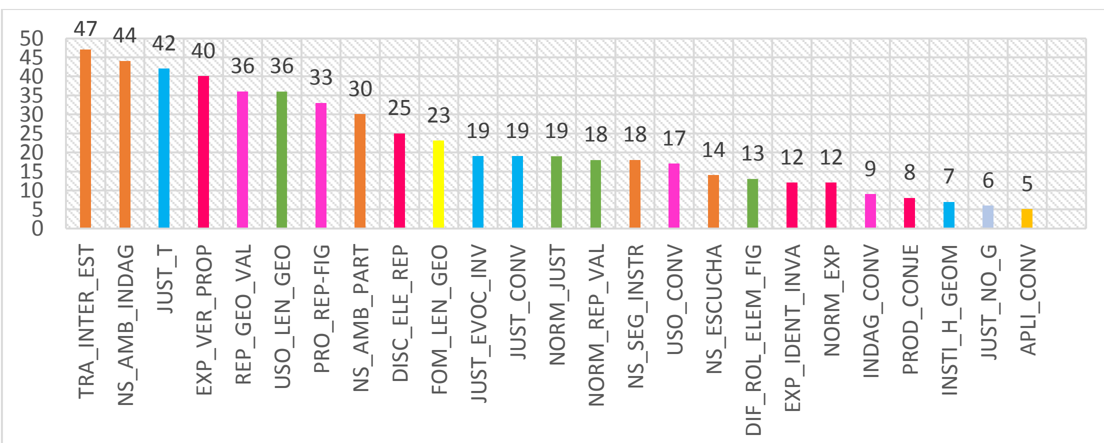
En la Imagen 4.1 se observa que cada código aparece con un color. Este representa la familia a la que pertenece. Por ejemplo, los códigos que aparecen en color verde

(NORM_JUST, NORM_REP_VAL y NORM_EXP), pertenecen a la familia Normas; esto se constata con la información de la tercera columna. Por ejemplo, se puede observar que 42 fragmentos se conectaron con el código JUST_T, que pertenece a la familia Justificación.

La información que brinda esta herramienta se convierte en una vía para el análisis, en términos de identificar los códigos que tuvieron mayor y menor protagonismo en el experimento de enseñanza. Esto nos permite entablar una relación entre las acciones que describen cada código y el establecimiento colectivo del criterio sobre la representación gráfica adecuada de una figura geométrica.

En el Esquema 4.1 se representa la misma información que proporcionó el *Administrador de códigos*. A continuación se mencionan las descripciones de las acciones que encierran cada uno de los cinco códigos que obtuvieron las frecuencias más altas para así analizar este hecho.

Esquema 4.1 Frecuencia de códigos



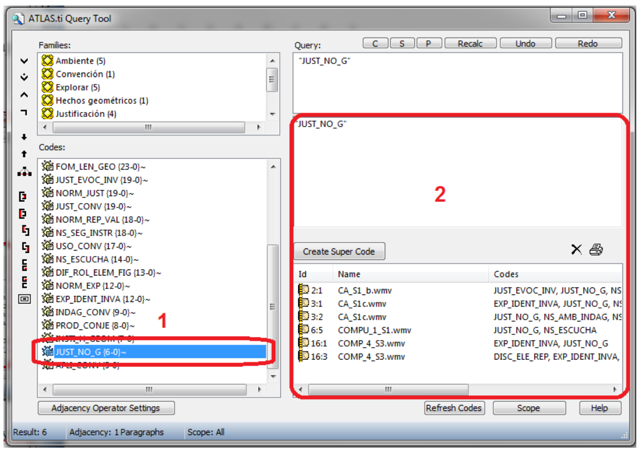
Con el código TRAT_INTER_EST se codificaron fragmentos que evidenciaban que la profesora sacaba provecho de la intervención de un estudiante para favorecer la constitución colectiva del criterio; esto se evidenció, por ejemplo, en el uso del lenguaje adecuado, y en la identificación de los elementos constitutivos de una representación. Con el código NS_AMB_INDAG se codificaron fragmentos que evidenciaban que la profesora o los investigadores promovían intervenciones que motivaban a los estudiantes a justificar afirmaciones, a hacer (o hacerse) preguntas sobre el porqué de ciertos hechos geométricos, de algunos comportamientos al arrastre, de las construcciones que realizan, de sus respuestas, etc., con expresiones como "¿Qué pasa cuando movemos el punto sobre la circunferencia?" o "¿Qué significa que el triángulo sea isósceles?" El código JUST_T se usó cuando en los fragmentos se observaba que los estudiantes justifican una propiedad geométrica utilizando uno de los hechos geométricos aceptados en el aula. Por ejemplo, ante la pregunta ¿Cómo puedes convencer a tu compañero que el triángulo es isósceles? encontramos respuestas como "Porque el segmento AB y el segmento AC son radios de la circunferencia, así que son congruentes". El código EXP_VER_PROP se usó cuando los estudiantes intervenían sobre una representación para verificar que existe una propiedad y para convencerse de que sí se cumplía. Por ejemplo, cuando la profesora preguntaba sobre cómo hicieron para darse cuenta que el triángulo era isósceles o equilátero los estudiantes respondieron respectivamente, "Utilizamos la circunferencia para verificar que tenemos dos lados congruentes" o "Arrastramos para verificar que sí era equilátero". Por último, con el código REP_GEO_VAL se codificó información que evidenciaba que la profesora, investigadores o estudiantes juzgaban si una representación (a mano alzada, con instrumentos de trazo o en GeogebraPrim) era correcta o no, según lo acordado con las normas de representación.

Las frecuencias de los códigos TRAT_INTER_EST y NS_AMB_INDAG, que pertenecen a la familia de Ambiente de aula, pone en evidencia el esfuerzo sostenido que realizó la profesora *Rosa* por sacar provecho a las intervenciones de los estudiantes, haciéndolos sentir y actuar como participantes activos de las discusiones que surgían en el aula. Para lograr el anterior objetivo, la profesora *Rosa* tuvo que fomentar un ambiente de clase de indagación fundamentado en la justificación de afirmaciones propias y ajenas. Por ejemplo, para explicar sobre los comportamientos de las representaciones al arrastrarlas, el funcionamiento de las construcciones, el porqué de las respuestas, entre otras.

Para analizar la frecuencia del código JUST_T es necesario compararla con la de JUST_NO_G. Este código tuvo una frecuencia de seis. La anterior situación deja ver que los estudiantes en la etapa inicial del experimento (momento en el que aparecen los fragmentos codificados con JUST_NO_G, ver Imagen 4.2), justificaban sus afirmaciones con argumentos que no eran de índole geométrico, pero a partir del ambiente que se fue creando en la clase, es notoria la evolución de los argumentos de los estudiantes al tipo de justificación geométrica que se esperaba.

La Imagen 4.2 muestra el panel de herramienta de consulta de Atlas.ti (Query Tool) en donde se realizó la selección del código JUST_NO_G (1). Se realizó un filtro cuyo resultado (2), muestra que los fragmentos ligados a este código aparecen solamente en las sesiones 1 y 3 (esto se observa en la columna nombre).

Imagen 4.2 Filtro del código JUST_NO_GEO en Query Tool



La amplia aparición del código EXP_VER_PROP muestra que, durante el experimento, se realizó una ardua labor para que los estudiantes dudaran de todo lo que a simple vista veían en una representación. Esto ratifica que los estudiantes respondieron a los objetivos de exploración que tenían las actividades propuestas para cada uno de los ambientes. Esta exploración estuvo en estrecha relación con la utilización de los hechos geométricos de la circunferencia (JUST_T), como una herramienta de verificación de propiedades presentes en las representaciones. También, con la frecuencia de este código se hace evidente la buena transición lograda del ambiente de geometría dinámica al de instrumentos de trazo. Lo anterior debido a que los estudiantes lograron una asociación de las herramientas para verificar, en los dos ambientes mencionados; lograron establecer una relación entre la herramienta circunferencia de GeogebraPrim y el compás físico del ambiente instrumentos de trazo.

Por último, la frecuencia del código REP_GEO_VAL evidencia que en el aula constantemente se hizo alusión a la necesidad de hacer representaciones geométricas que estuvieran validadas por las normas sociomatemáticas que se habían establecido para cada uno de los ambientes (N_2, N_4 y N_5). Las normas de validación de las representaciones en cada ambiente tenían como finalidad que las representaciones no satisficieran únicamente la percepción visual sino que aludieran a las propiedades geométricas de la figura que representaban, uno de los objetivos de la investigación.

A continuación se presenta la transcripción del inicio del fragmento 16:5 al que se le asignaron los códigos JUST_T, EXP_VER_PROP, TRAT_INTER_EST, REP_GEO_VAL, NS_AMB_INDAG, entre otros. En este fragmento la profesora *Rosa* interactúa con un grupo de estudiantes que intentan dar solución a la Actividad 1 de la Tarea 3 (actividad de exploración de representaciones para identificar y posteriormente verificar invariantes). Los estudiantes del grupo han explorado visualmente los triángulos y han determinado que todos los triángulos tienen dos lados congruentes y que los triángulos son congruentes entre sí.

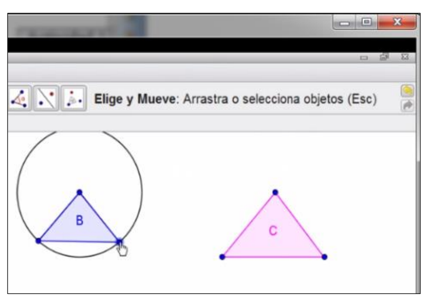
Profesora:	Bueno niños ustedes dijeron que todos los triángulos eran…
Niños del grupo:	Congruentes
Profesora:	Además dijeron que…
Arley:	Tienen la característica de que dos de sus lados son congruentes.
Profesora:	Ahora van a mover. Ustedes dijeron que estos dos lados son congruentes. [señala los dos lados que los estudiantes determinaron como congruentes]. Empiecen a mover los puntos y digan si esos dos lados siguen siendo congruentes [refiriéndose al triángulo A].
Arley:	A ver, movamos este punto [mueve un vértice del triángulo A].
Profesora:	Todos van a mirar que sucede. ¿Siguen siendo congruentes?
Arley:	No.
Juan:	Uno es más grande que el otro.
Profesora:	Mueve el otro punto [Arley mueve el otro vértice y los demás observan que el triángulo no tiene lados congruentes]. Si lo siguen moviendo igual ya se dan cuenta que no siguen siendo…
Grupo:	Congruentes.

[Inicio del fragmento 16:5]

En esta parte del fragmento se evidencia uno de los objetivos de la actividad: hacer ver a los estudiantes que las afirmaciones que hacen sobre una representación no deben surgir de lo que a simple vista se ve de ella, y que es necesario dudar de lo que se ve. Al inicio, la profesora utiliza las intervenciones de los estudiantes con la finalidad de que las justifiquen. Al final, se observa que las utiliza para que obtengan conclusiones. En el fragmento se observa que la profesora introduce la necesidad de utilizar las herramientas propias del ambiente para verificar las propiedades que se había presupuestado tenían las representaciones, en este caso el arrastre. También se observa que la profesora utiliza preguntas para guiar la exploración que realizan los estudiantes (ambiente de indagación) y centrarla en una característica puntual (congruencia de lados), ya que en la exploración por arrastre ellos pueden fijarse en otras cosas. Implícitamente los estudiantes determinan que el triángulo A no es una representación geométrica válida de un triángulo isósceles. Las acciones realizadas por la profesora confirman las afirmaciones de Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008), sobre los programas de geometría dinámica, mencionadas en el Capítulo 1 como Hipótesis 4: Los programas de geometría dinámica son herramientas técnico-simbólicas que (i) median el paso de la construcción a la representación y a la figura, (ii) median la comunicación sobre geometría entre profesor y estudiantes y (iii) inducen y facilitan los procesos de clasificación (Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008).

A continuación presentamos otra parte del Fragmento 16:5. En este momento, Arley utiliza la herramienta circunferencia y construye una circunferencia haciendo corresponder el centro de la misma con uno de los vértices del triángulo B, de tal manera que dos lados correspondan con los radios de la circunferencia (Imagen 4.3).

Imagen 4.3 Acción realizada por Arley



Arley:	Ahora sí.
Profesora:	Ya podemos seleccionar la flechita [La profesora toma el mouse, elige la herramienta arrastre y un vértice y arrastra para ejemplificar el arrastre por varios sitios de la interfaz del programa]. Si mueven para donde sea, para donde sea. ¿Qué pasa? Los lados que me dijeron que eran congruentes, ¿siguen siendo congruentes?

Arley:	Sí.
Varios niños:	¡No!
Arley:	¡Sí señora! [en un tono más alto] Claro porque…
Juan:	[Observa el movimiento del triángulo ligado a la circunferencia]. ¡Sí! Porque siguen teniendo la misma distancia del punto del centro al punto de la circunferencia.
Profesora:	¿Siguen siendo cómo?
Grupo de niños:	Congruentes
Profesora:	Pero este segmento, ¿cómo se llama?
Arley:	Radio
Profesora:	Sigue siendo radio. Entonces ustedes lo mueven y sigue pasando lo mismo.

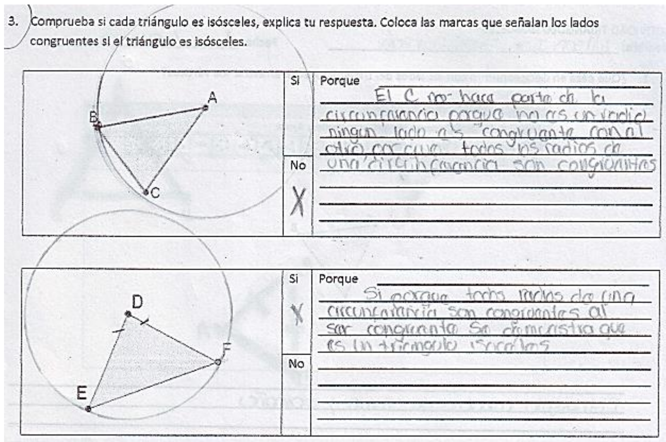
[Final del fragmento 16:5]

En esta parte del fragmento se muestra que los estudiantes, a partir de la exploración realizada con el triángulo A y la interacción llevada a cabo con la profesora, utilizaron las herramientas circunferencia y arrastre, del programa, para verificar la congruencia de los lados del triángulo y luego la necesidad de justificar tal afirmación con los hechos geométricos. Al comparar el inicio y el final del Fragmento 16:5 se ve cómo los estudiantes fueron puliendo las formas de explorar una representación y las formas de justificar, ya que estas eran normas que se estaban estableciendo en el aula.

A lo largo del Fragmento 16:5, se evidencia el papel primordial que tiene la profesora en la discusión que se está llevando a cabo; acción que apoya nuestra Hipótesis 5 sobre la evolución de una cultura matemática en el aula como lo menciona Mariotti (2006). En tal discusión se observa cómo se van constituyendo en el aula diferentes normas sociomatemáticas (N_1, N_3 y N_4), que ayudan a establecer colectivamente el criterio sobre una representación gráfica adecuada de una figura geométrica. Además de llevar el hilo conductor, la profesora, con las preguntas, va haciendo que los estudiantes recuerden las normas frente a las representaciones (N_1, N_3 y N_4).

En la Imagen 4.4 se muestran las respuestas de un estudiante en una actividad de exploración, en el ambiente de lápiz y papel con instrumentos de trazo, para verificar propiedades de dos representaciones. A esta solución se le asignaron los códigos EXP_VER_PROP, JUST_T, REP_GEO_VAL, entre otros.

Imagen 4.4 Respuesta de un estudiante a una actividad de verificación de congruencia



Transcripción

3. Comprueba si cada triángulo es isósceles, explica tu respuesta. Coloca las marcas que señalan los lados congruentes si el triángulo es isósceles.

No, el C no hace parte de la circunferencia porque no es un radio. Ningún lado es congruente con el otro porque todos los radios de una circunferencia son congruentes

Sí porque todos radios de una circunferencia son congruentes al ser congruentes se demuestra que es un triángulo isósceles

En la imagen se observa que el estudiante utiliza el compás para construir una circunferencia y así determinar si cada triángulo tiene lados congruentes; esto a partir de las relaciones que se crearon entre la herramienta circunferencia de GeogebraPrim y el instrumento compás. También se observa que para justificar la existencia de la congruencia, utiliza los hechos geométricos establecidos (justificación teórica). Pero también se evidencia que para usarlos primero establece una relación entre los elementos constitutivos de la representación y la circunferencia que dibuja con el compás. En la Imagen 4.4 se observa que la convención para la congruencia está cargada de un significado construido previamente y que el uso de la convención ratifica la validez de la representación.

En cuanto a la validez de las representaciones se observa que, aunque a simple vista la representación del primer triángulo pareciese la representación de un triángulo isósceles, el estudiante no se queda en el nivel visual sino que va un paso más allá. Tienen la necesidad de verificar la propiedad de congruencia, a partir de argumentos ostensivos (mediante el uso del compás) y teóricos (mediante hechos geométricos), para por último, determinar que la representación no es válida para representar un triángulo isósceles. Las acciones de los estudiantes validan nuestra Hipótesis 2 sobre la necesidad de que los estudiantes aprendan a controlar, a través de conocimientos teóricos, los aspectos perceptivos ligados a las representaciones (Laborde y Capponi, 1994).

Los códigos cuyas frecuencias están entre 12 y 23 evidencian que las acciones que se relacionaban con esos códigos estuvieron presentes en algunas sesiones y en otras no; esto se debe a la naturaleza y la finalidad de las actividades propuestas para cada sesión. Los códigos con menor frecuencia, entre 5 y 9 (ver Esquema 4.1) son códigos que hacían referencia a acciones que no se daban continuamente durante el experimento de enseñanza y que aunque eran claves, razón por la cual se crearon, su finalidad era la de servir como base para otros códigos. Por ejemplo, el código INSTI_H_GEOM, durante el experimento se institucionalizaron cuatro hechos geométricos con los cuales los estudiantes justificaron teóricamente sus afirmaciones y sus construcciones (JUST_T, REP_GEO_VAL).

4.2 Análisis redes de relaciones

El análisis de las redes de relaciones se realizó sobre las redes generadas por los instrumentos de registro en Atlas.ti, mencionadas en el apartado 3.3.7, redes de socializaciones y de trabajo en GeogebraPrim. Las redes se analizaron observando la presencia y evolución de los códigos y las relaciones generadas a lo largo del experimento de enseñanza. Para ello, se seleccionó una red de la sesión inicial, con la finalidad de tener un estado inicial; y otras dos de las demás sesiones, seleccionadas de acuerdo a la riqueza de relaciones que evidenciaban (el lector puede hacer un análisis similar con todas las redes, ver anexo C).

4.2.1 Redes de relaciones de las socializaciones

Para el análisis de las redes de relaciones de las socializaciones, nos centramos en las acciones asociadas a los códigos de las familias: normas (verde), lenguaje geométrico (blanco), ambiente de aula (anaranjado) y hechos geométricos (azul petróleo). Esta decisión obedece a que dichas familias describen las acciones centrales que buscábamos se dieran en las socializaciones.

Se seleccionaron las redes de socialización de las sesiones 1 (RRS__S1), 4 (RRS3_S4) y 6 (RRS5_S6). La RRS_S1 corresponde a la socialización de la Tarea 1 Circunferencia (Imagen 4.5); la RRS_S4 a la socialización de la Actividad 1 de la Tarea 3 Triángulo isósceles (Imagen 4.6) y la RRS_S6 a la socialización de la Actividad 3 de la Tarea 3 (Imagen 4.5). En las redes se muestran, a través de las flechas, los códigos asignados a cada fragmento.

Imagen 4.5 Red de relaciones socialización Sesión 1 (RRS_S1)

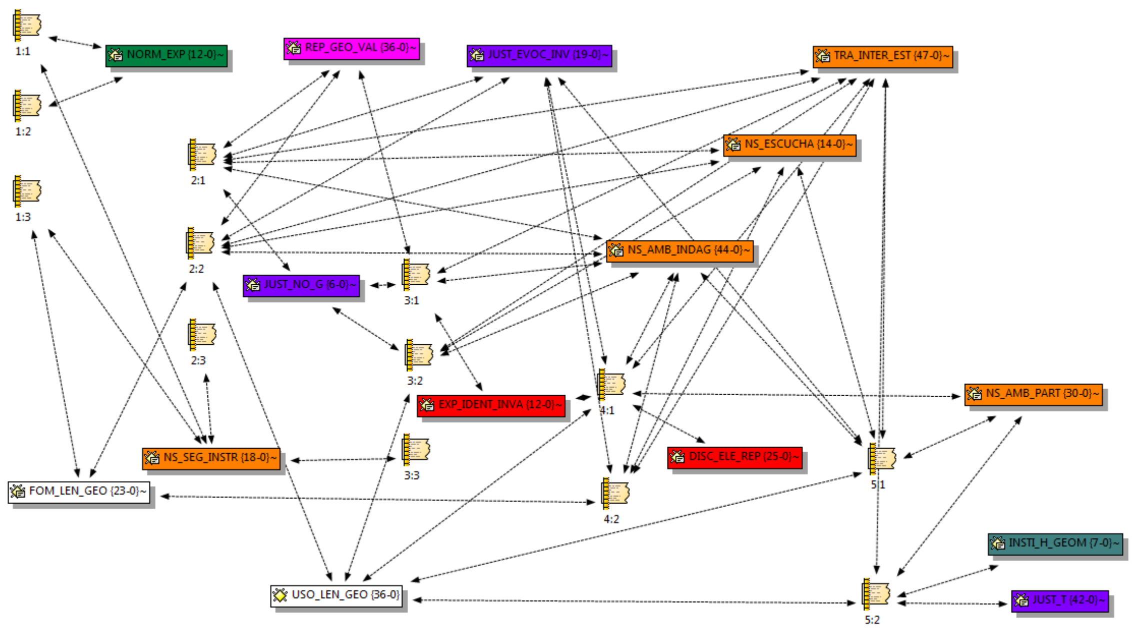


Imagen 4.6 Red de relaciones socialización Sesión 4 (RRS_S4)

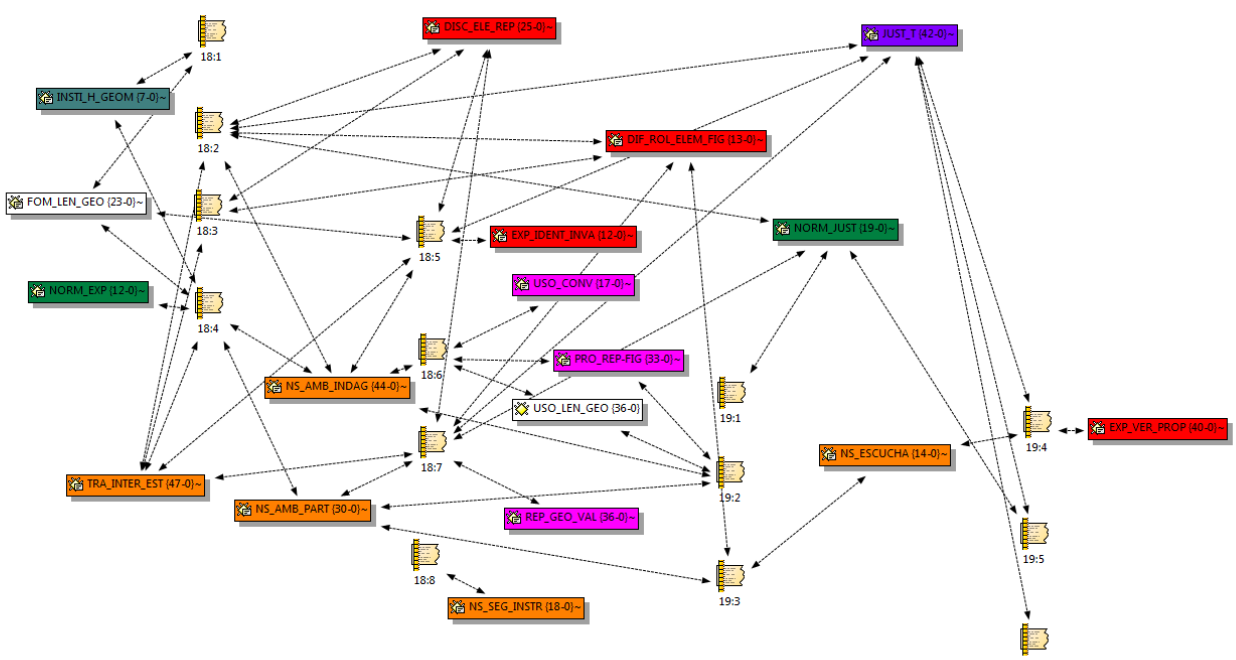
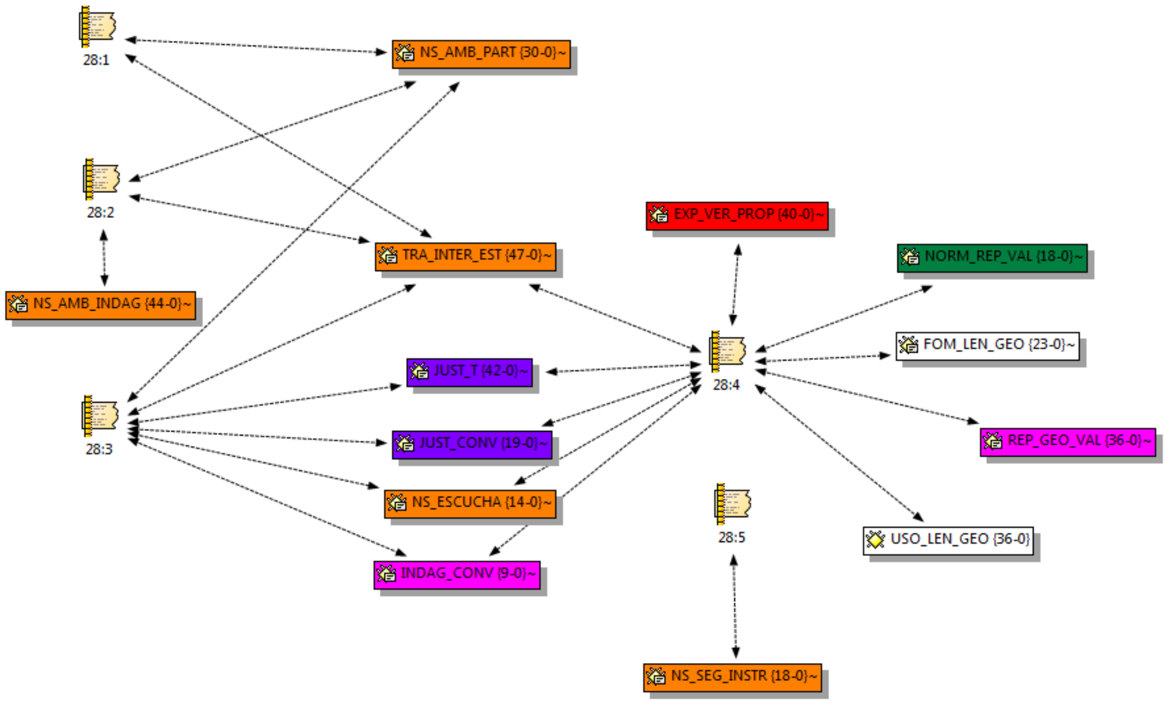


Imagen 4.7 Red de relaciones socialización Sesión 6 (RRS_S6)



Al comparar las redes se observó que las relaciones entre los fragmentos y los códigos se fueron complejizando a medida que avanzaba el experimento de enseñanza. Lo anterior se evidencia en la aparición y desaparición de códigos y familias de códigos que muestran las dinámicas de las socializaciones que colaboraron en la constitución colectiva del criterio.

En las redes se observó una fuerte presencia de los códigos pertenecientes a la familia ambiente de aula. Al analizar los fragmentos relacionados con estos códigos se evidencia que tal situación obedece al esfuerzo sostenido de la profesora *Rosa* porque en el aula se creara un ambiente en el que fuera primordial: seguir instrucciones para realizar las actividades propuestas (NS_SEG_INSTR); incentivar a los estudiantes a expresar sus ideas sin prejuicio al error y como un mecanismo de participación de los acuerdos (NS_AMB_PART); escuchar las opiniones de los compañeros con la finalidad de aprobar o desaprobar, con argumentos, las afirmaciones hechas (NS_ESCUCHA); preguntar el porqué de las afirmaciones (tanto estudiantes como profesora), y dudar de lo que se exprese si no está fundamentado en acuerdos establecidos (NS_AMB_INDAG); tratar adecuadamente las intervenciones de los estudiantes para direccionarlas en torno a la consecución de establecer de manera colectiva el criterio (TRAT_INTER_EST). En las redes se observa la presencia de estos códigos durante las tres sesiones. Esto permite deducir que para que se logre un ambiente de aula con tales características es necesario que durante las clases se generen situaciones que permitan poner en práctica dichas acciones y que la creación de tal ambiente no se da de manera espontánea o con la simple enunciación de normas que lo describan.

Es preciso aclarar que aunque los códigos de la familia ambiente de aula están presentes en las tres redes, la cantidad de acciones que se relacionaron con estos códigos varían de acuerdo a la sesión. Esto se debe a que la profesora debía fomentar en las primeras sesiones, con mayor énfasis, dichas actitudes en los estudiantes y en las siguientes sesiones solo era necesario recordarlas en algunas ocasiones.

Las acciones que enmarcan los códigos de la familia ambiente de aula fueron importantes en la constitución colectiva del criterio porque hacían énfasis en las formas de interactuar, entre estudiantes y profesora, que favorecieron el establecimiento de acuerdos.

Para lograr una mejor interacción entre los participantes fue necesario el fomento y uso de un lenguaje geométrico apropiado; dichas acciones se relacionaron con los códigos de la familia lenguaje geométrico: FOM_LEN_GEO y USO_LEN_GEO. La presencia del código FOM_LEN_GEO en las primeras socializaciones obedece al esfuerzo de la profesora por establecer un lenguaje geométrico común para referirse a los objetos, representaciones y relaciones geométricas. Por ejemplo, en la socialización de la Tarea 1 (RRS_S1), la profesora *Rosa* fomenta el uso del lenguaje geométrico adecuado para referirse a los elementos constitutivos de la circunferencia de GeogebraPrim (centro de la circunferencia, circunferencia, puntos sobre la circunferencia y radio). El fomento de este lenguaje facilitó la comunicación entre los estudiantes y la profesora y entre los estudiantes. El uso del lenguaje geométrico adecuado facilitó una mejor expresión y comprensión de los invariantes encontrados cuando exploraron los elementos de la circunferencia (USO_LEN_GEO). Lo anterior, nuevamente de la mano de un tratamiento adecuado de las intervenciones de los estudiantes cuya finalidad era establecer las relaciones entre los elementos de la circunferencia (Hechos Geométricos 1 y 2). La presencia de los anteriores códigos en las redes muestra la importancia del lenguaje geométrico apropiado en la constitución del criterio como una herramienta para referirse a los objetos geométricos adecuadamente y así poder participar al expresar, comprender, justificar y refutar ideas geométricas.

Las acciones que fomentaban el lenguaje geométrico en las socializaciones, también estaban relacionadas con la familia normas y con la familia hechos geométricos. Por ejemplo, en la red RRS_S1 se observa la presencia del código normas de exploración (NORM_EXP). Esto obedece a la enunciación por parte de la profesora de la norma para explorar las representaciones en GeogebraPrim (N_1). Esta enunciación fue uno de los pasos importantes dentro del experimento, puesto que con esta norma se esperaba que los estudiantes identificaran invariantes de las representaciones y con el lenguaje geométrico adecuado las expresaran.

En la primera sesión, la profesora direccionó las intervenciones de los estudiantes frente a lo que veían y a lo que expresaban para llegar a constituir entre todos los dos primeros hechos geométricos (INST_H_GEO). A continuación se presenta la trascripción del fragmento 4:1 perteneciente a la red RRS_S1. Previo a este momento los estudiantes exploraron, a partir de la regla de exploración, la representación de la circunferencia. Luego, se realizó la socialización sobre los elementos constitutivos de la misma.

Profesora:	Recuerden que vamos a escuchar las conclusiones. Ya movimos nuestra circunferencia y observamos qué cambia de posición, ¿cierto? Pero, cuando movemos el centro, ¿Qué le pasa a la circunferencia?
Diego:	Se agranda o se encoje dependiendo del movimiento.
Juan:	Cambia de tamaño.
Profesora:	Cambia de…
Varios estudiantes:	Tamaño.
Profesora:	Entonces, cuando cambia de tamaño, ¿su medida es igual o es diferente?
Varios estudiantes:	Es diferente.
Profesora:	¿Qué pasa cuando movemos el puntico que está sobre la circunferencia?
Juan:	Se aleja de la A… del centro.
Profesora:	¿Se aleja del centro?
Juan:	Sí, se aleja del centro.
Profesora:	¿Siempre se aleja del centro? [La profesora observa que Kevin levanta la mano]. Kevin…no te escuche.

Kevin: Sí, siempre se aleja del centro.

Profesora: ¿Eso qué quiere decir? Esta medida que tiene del centro [señala la distancia del centro al punto sobre la circunferencia], ¿de qué depende?

Juan: Depende del *D* [refiriéndose al punto sobre la circunferencia].

Kevin: Depende del *A* [refiriéndose al centro]. Si se mueve el *A*, se va agrandando y si se mueve el *D* también se va agrandando.

Profesora: Listo.

[Fragmento 4:1]

En la anterior transcripción se puede observar que la profesora fomenta un ambiente participativo y una actitud de escucha frente a lo que dice el otro. Esto a través de constantes preguntas y un tratamiento adecuado de las intervenciones de los estudiantes.

También vale la pena resaltar en este fragmento el uso de etiquetas para los puntos (centro con A y punto sobre la circunferencia con D). Esto surgió porque, como se mencionó anteriormente, un computador tenía instalado Geogebra y allí los puntos aparecen etiquetados (acción que no sucede en GeogebraPrim). Aunque a solo un grupo de estudiantes les sucedía esto, al expresar a sus compañeros los invariantes detectados haciendo alusión a dichas etiquetas, se observó que el resto de estudiantes comprendió lo que comunicaba y para expresar mejor y complementar lo dicho, también hicieron uso de las etiquetas. La anterior situación nos llevó a tomar la decisión de etiquetar algunos elementos de las representaciones en las futuras actividades para que los estudiantes tuvieran una herramienta que mejorara la comunicación.

A continuación trascribimos el fragmento 5:2 que finaliza la socialización de la Actividad 3, Tarea 1 y perteneciente a la red RRS_S1.

Profesora: Bueno niños, vamos a sacar las conclusiones de lo que aprendimos en la clase. Pero yo no las voy a sacar. Vamos a cerrar los computadores y vamos a participar. Cuándo yo mido la distancia la medida del segmento desde el centro a cualquier punto sobre la circunferencia, ¿qué pasa? [Señala dichos elementos en el tablero].

Arley: Miden exactamente lo mismo.

Mayra: Porque están a la misma distancia del centro.

Profesora: ¿Y qué podemos decir de los radios de la circunferencia? [Señala los radios en el tablero].

Tamara: Que los radios nunca cambian.

Profesora: ¿Qué quiere decir con que nunca cambian? [Pregunta a todos].

Tamara: Que uno los puede mover y miden lo mismo, pero nunca cambian su tamaño.

Profesora: ¿Escucharon lo que dijo Tamara? Yo puedo mover todo en la circunferencia y los radios van a medir siempre lo mismo… lo que va formar una circunferencia. Entonces, ¿qué podemos concluir respecto a los radios?

Kevin: Que todos los radios de una circunferencia son iguales.

Tamara: Que todos los radios de una circunferencia son iguales y no van a cambiar.

Profesora:	Entonces, todos los radios de una circunferencia miden…
Varios estudiantes:	Lo mismo.
Profesora:	Cuando algo mide lo mismo que otro, quiere decir que son congruentes. Entonces todos los radios de una circunferencia son…
Varios estudiantes:	Congruentes.

[Fragmento 5:2]

En el anterior fragmento se puede observar que la socialización sirvió para concluir sobre el invariante detectado en GeogebraPrim (primer hecho geométrico), y que esta conclusión era válida porque al arrastrar los elementos la propiedad se mantuvo. También se observa que dicha conclusión no fue mencionada por la profesora sino que fue constituida colectivamente (INST_H_GEO). La profesora llevó el hilo de la discusión por medio de sus intervenciones y del tratamiento adecuado de las intervenciones de los estudiantes guiando con sus preguntas hasta la explicitación del hecho geométrico observado. Finalmente, se introdujo un nuevo término geométrico: congruencia.

En las anteriores trascripciones se puede observar que el fomento y uso de un lenguaje geométrico, en las primeras sesiones, se enfocó en nombrar adecuadamente las representaciones, sus elementos constitutivos y sus relaciones; en las posteriores sesiones, se enfocó en la expresión coherente y clara de ideas y justificaciones relacionadas con representaciones dadas o con procedimientos llevados a cabo para construirlas a partir de los hechos geométricos establecidos. Es por ello que se agrupan estas acciones y se les asigna un código NORM_JUST y/o NORM_REP_VAL pertenecientes a la familia normas.

Luego de que los estudiantes detectaran los invariantes y colectivamente se constituyeran en los Hechos Geométricos 1 y 2, las acciones se enfocaron en la elaboración de justificaciones. Es importante mencionar que para esta finalidad, fue de gran ayuda el trabajo realizado con la circunferencia, puesto que se convirtió en una herramienta para descubrir, verificar, construir y justificar congruencias. La norma de justificación (NORM_JUST), se hizo explícita a los estudiantes mediante frases pronunciadas por la profesora *Rosa* como “utilicemos los hechos geométricos establecidos para responder” o “nosotros sabemos que debemos justificar con base a los hechos geométricos”. Es así, como en las socializaciones se logró que los estudiantes utilizaran los hechos geométricos establecidos en el aula para justificar sus afirmaciones.

En la socialización de las actividades de la Tarea 2 sobre segmentos congruentes se evidencia lo mencionado anteriormente. En dicha socialización, la profesora logró que los estudiantes utilizaran la circunferencia como herramienta para verificar congruencia de segmentos en GeogebraPrim. Posteriormente, en la solución de la actividad de lápiz y papel su esfuerzo se centró en que los estudiantes relacionaran las herramientas de GeogebraPrim con herramientas del ambiente de lápiz y papel; la herramienta circunferencia con el compás y el movimiento de arrastre con el cambio en la amplitud del compás. Es así como los estudiantes solucionaron la actividad de lápiz y papel utilizando el compás para trasportar la medida de los segmentos y compararlos. A continuación se presenta la transcripción del fragmento 14:2 correspondiente a la socialización de la Actividad 2 de la Tarea 2 sobre segmentos congruentes y perteneciente a la red RRS_S3.

Profesora:	Bueno niños, aquí hay una circunferencia y está identificado el centro. Vamos a identificar cuáles de estos segmentos son congruentes con el radio de la circunferencia. ¿Quién quiere pasar? [Wilson levanta la mano y la profesora le pide que pase al tablero. La profesora le da un marcador y un compás hecho con una cuerda y una chupa. Wilson coloca la chupa en el centro de la circunferencia y con la cuerda copia la longitud del radio como se muestra en la Imagen 4.8. Luego trasporta la medida para compararla con la de los otros segmentos e identificar los congruentes (Imagen 4.9)]. Vamos a simular como si la cuerda fuera qué…
Varios estudiantes:	Un compás.
Profesora:	Niños, todo esto lo hicimos la clase pasada. Por supuesto ustedes estuvieron trabajando con un compás. [Wilson escribe en el tablero “c y b son congruentes con la circunferencia”[13]].Todos atentos con lo que escribió Wilson porque muchos de ustedes escribieron cosas similares en el programa. Dice “El segmento c y el segmento b son congruentes con la circunferencia”. ¿Esto está bien escrito?
Varios estudiantes:	No
Profesora:	¿Por qué? A ver, escuchen atentos niños. Cuando Wilson midió, ¿qué midió? ¿La circunferencia?
Varios estudiantes:	No, el radio.
Profesora:	Él midió el radio. Sí el midió el radio. Pero me está diciendo acá, miren, que c y b son congruentes con la circunferencia. ¿Quedó algo mal escrito?

[13] Al inicio del experimento de enseñanza no se hizo énfasis en la notación para segmentos y se dio cierta libertad a los estudiantes para nombrarlos. Lo anterior fue abordado y modificado en las sesiones siguientes.

Varios estudiantes: Sí.

Tamara: Porque c y b… son congruentes con el radio.

Profesora: Muy bien Tamara. Ojo niños, esto nos muestra que ustedes no se están expresando correctamente. Recuerden que hemos dicho que todos los términos que aprendamos los vamos a utilizar correctamente, como los hechos geométricos. Wilson, corrígelo. [Wilson pasa al tablero y escribe c y b son congruentes con el radio].

[Fragmento14:2]

Imagen 4.8 Acción realizada por Wilson para copiar la longitud del radio

Imagen 4.9 Acción realizada por Wilson para determinar segmentos congruentes

Por último analizamos en las redes el código NORM_REP_VAL, perteneciente a la familia normas. Con este código se codificaron fragmentos en donde profesora o estudiantes hacían mención explícita de las normas acordadas para dar validez a la representación hecha en cada ambiente (N_2, N_4 y N_5).

La norma de representación en GeogebraPrim fue enunciada antes y durante las actividades de construcción de triángulos isósceles y equiláteros. Para ello, la profesora utilizó expresiones como: “luego que construyan el triángulo isósceles verifiquen, utilizando la herramienta arrastre, que debe mantener dos lados congruentes” o “ya construyeron el triángulo, recuerden que está bien construido si pasa la prueba del arrastre”. La siguiente trascripción del fragmento 23:11 corresponde a la socialización de la Actividad 3 de la Tarea 3 (RRS_S5), en donde se discute sobre el procedimiento de representación de un triángulo isósceles a partir de un segmento dado.

Profesora: A ustedes se les dio un segmento y tenían que construir un triángulo isósceles. Primero, algunos pensaron que construían a ojo los otros segmentos y así iba a ser isósceles [La profesora muestra en el televisor el segmento y en el computador completa el triángulo isósceles a ojo utilizando la herramienta segmento]. Pero ¿qué hicimos para comprobar que si correspondía a un triángulo isósceles?

Varios estudiantes: Hacer una circunferencia.

Profesora: Hacer una circunferencia [la profesora ubica el centro de una circunferencia en uno de los vértices haciendo corresponder visualmente los lados del triángulo con dos radios de la circunferencia (Imagen 4.10] y corroborar que dos de sus lados fueran…

Varios estudiantes: Congruentes.

Profesora: Pero que fuera ¿qué de la circunferencia?

Varios estudiantes: Radios.

Profesora: Que fueran radios…Pero recuerden que verificábamos la construcción arrastrando los vértices del triángulo. ¿Cierto? Vamos a ver [La profesora arrastra cada uno de los vértices]. Cuando construimos a ojo miren lo que pasa. [La profesora arrastra uno de los vértices dejándolo como lo muestra la Imagen 4.11]. ¿En este momento el triángulo sigue siendo isósceles?

Varios estudiantes: No.

Profesora: ¿Por qué?

Laura: Porque no hay dos lados congruentes.

Profesora: Muy bien. ¿Cuáles lados no son congruentes? Recuerden cómo se nombran los lados.

Juan: *BC* no es congruente con *AC*.

[Fragmento 23:11]

Imagen 4.10 Construcción realizada a ojo de un triángulo isósceles

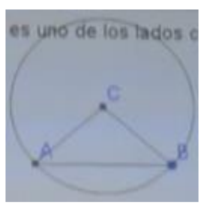
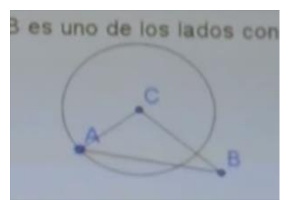


Imagen 4.11 Triángulo luego de mover uno de sus vértices



En el anterior fragmento se puede ver que algunos estudiantes solucionaron inicialmente la actividad realizando un proceso no válido para representar un triángulo isósceles, basándose en la percepción para dibujar segmentos congruentes. Esto conllevó a utilizar la norma de representación de arrastrar los elementos de dicho triángulo y mostrar así que esa representación no era válida. En la transcripción también se evidencia que la socialización buscó que los estudiantes comprendieran que el uso de la herramienta circunferencia era necesaria pero no suficiente para comprobar la congruencia de los lados. Esto porque al ubicar la circunferencia adecuadamente se percibía que dos lados podían ser los radios. Por esta razón fue importante mostrar a los estudiantes que arrastrar los elementos del triángulo permitía librarse de las falacias que puede dejar la percepción.

A continuación presentamos la continuación del fragmento 23:11, donde la profesora se enfoca en la construcción y representación adecuada del triángulo isósceles.

Profesora: Entonces ¿qué hicimos para construir bien un triángulo isósceles?

Varios estudiantes: Trazar una circunferencia. [La profesora deshace la construcción anterior, deja el segmento inicial y construye una circunferencia utilizando uno de los extremos del segmento como centro y el otro como punto sobre la circunferencia, por tanto el segmento se convierte en un radio].

Profesora: ¿Y después qué hacíamos?

Varios estudiantes: Construir un triángulo.

Profesora: Pero, ¿cómo?

Arley: Se construye otro radio y luego se unen.

Profesora: Muy bien [La profesora construye otro radio y un segmento cuyos extremos son los puntos de la circunferencia que pertenecen a cada radio y obtener un triángulo] y ahora movemos [La profesora arrastra cada uno de los vértices del triángulo].¿Sigue manteniendo dos lados congruentes?

Varios estudiantes: Sí.

Profesora: Ahora, nosotros aprendimos a señalar los dos lados que eran congruentes. ¿Cómo lo hacíamos?

Juan: Con decoración [Juan evoca la forma de colocar la convención en el programa].

Profesora: Cuando dos lados son congruentes colocamos la misma señal. [La profesora coloca la convención y luego pregunta]. Que el segmento AC y el segmento BC tengan la misma rayita, ¿qué significa?

Arley: Que esos dos lados son congruentes.

[Continuación del Fragmento 23:11]

El anterior fragmento evidencia que la socialización puso sobre la mesa el uso adecuado de la circunferencia para construir la representación del triángulo isósceles, ya que al usarla desde el inicio se asegura la obtención de radios y por ende la congruencia. Posteriormente, con el arrastre de los elementos del triángulo, se validó la representación. Finalmente, en el fragmento se evidencia que la profesora recuerda el uso de la convención.

El uso de la convención en GeogebraPrim se constituyó en un antecedente para abordar la norma de representación en lápiz y papel con instrumentos de trazo y a mano alzada. La norma de representación en el ambiente de lápiz y papel con instrumentos de trazo fue recordada por la profesora en expresiones como: “lo que hicimos en GeogebraPrim lo vamos a hacer ahora con la regla y el compás”. Estas expresiones hicieron que los estudiantes trajeran al ambiente de lápiz y papel lo explorado en GeogebraPrim, estableciendo una relación entre las herramientas del programa y la regla y el compás.

La norma de representación en el ambiente de lápiz y papel sin instrumentos de trazo (a mano alzada), constituyó uno de los retos más grandes de las socializaciones. Durante estas socializaciones se evocaron los hallazgos hechos durante el experimento para que los estudiantes lograran controlar, mediante aspectos teóricos, los aspectos perceptivos ligados a la representación. La siguiente trascripción corresponde al fragmento 28:4 perteneciente a la RRS_S6, donde se socializa la solución de la Actividad 5 de la Tarea 3, específicamente sobre la utilización de la convención para representar triángulos isósceles a mano alzada**.**

La profesora representa en el tablero un triángulo isósceles a mano alzada con convención.

Profesora:	Un triángulo que tiene las dos marcas me está señalando que el triángulo tiene...
Varios estudiantes:	Dos lados que son congruentes.
Profesora:	Yo utilizaba para corroborar una circunferencia o un compás y utilizábamos esos radios para medir y obtener dos radios iguales, pero ya pasamos a otro momento en la geometría donde estoy aprendiendo más conceptos y en este momento, ¿qué concepto aprendí?
Carlos:	Que un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes y se diferencian por las dos marcas que tiene.
Profesora:	Ahh entonces, ojo con esto…si tiene dos marcas que señalan [señala en el tablero las marcas en un triángulo], quiere decir que el triángulo es
Arley:	Isósceles.
Profesora:	Niños… si no tuviera una regla, si no tuviera un compás y de hecho muchos trazaron el triángulo sin regla ni compas ¿cierto?, pero señalaron que tenían dos lados congruentes yo ya aprendí que si tiene dos marcas quiere decir que son congruentes no importa cómo se vea, no importa la apariencia desde que tenga dos lados congruentes.

[Fragmento 28:4]

En este fragmento se evidencia que para responder la pregunta que hizo la profesora sobre la convención varios estudiantes recordaron que esta hacía referencia a la congruencia de lados. Finalmente, la profesora concluye que es posible representar un triángulo isósceles a mano alzada utilizando la convención y esta será una representación válida, aunque perceptualmente los lados no sean congruentes.

Según el análisis de las anteriores redes, se evidencia que las normas para explorar, representar y justificar fueron estableciendo poco a poco un ambiente propicio para la constitución colectiva del criterio.

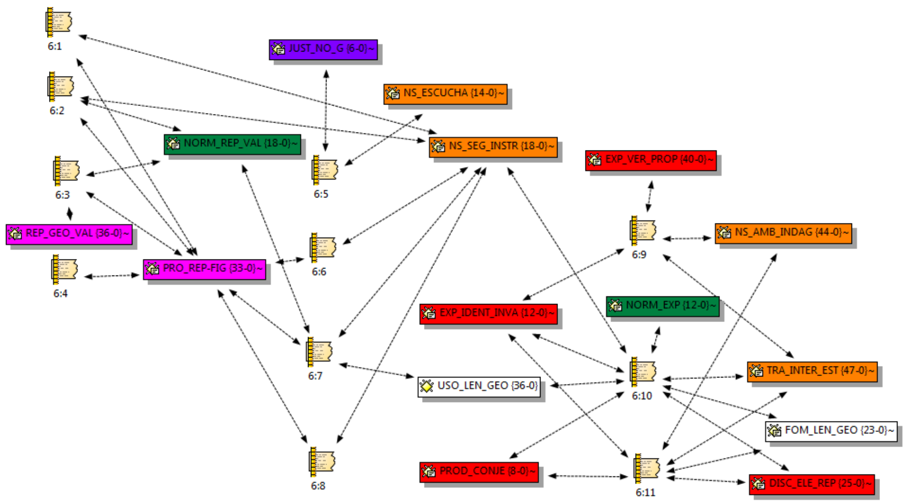
4.2.2 Redes de relaciones del trabajo en GeogebraPrim

Para el análisis de las redes de relaciones del trabajo en GeogebraPrim nos centramos en las acciones asociadas a los códigos de las familias exploración (rojo) y representaciones (fucsia). Esta decisión obedece a que en el trabajo realizado por los estudiantes con GeogebraPrim podemos analizar la forma en la que actuaron al explorar representaciones dadas y al representar figuras geométricas.

Se seleccionaron las redes del trabajo en GeogebraPrim de las sesiones 1 (RRGP_S1), 3 (RRGP_S3) y 4 (RRGP_S4). La RRGP_S1 corresponde a la Tarea 1 Circunferencia (Imagen 4.12); la RRGP_S3 a la Actividad 1 de la Tarea 3 Triángulo isósceles (Imagen 4.13) y la RRGP_S4 a las Actividades 2, 3 y 4 de la Tarea 3 (Imagen 4.15).

Inicialmente, al contrastar las tres redes, se observa la presencia reiterada de varias familias de códigos. Al igual que en las redes de relaciones de las socializaciones, la familia Ambiente de aula permaneció de manera constante durante el trabajo en GeogebraPrim. Interpretamos que el fomento del ambiente de indagación (NS_AMB_INDAG) también se evidenció en el trabajo en GeogebraPrim debido a la necesidad de cuestionar a los estudiantes sobre lo que observaban en la pantalla; por ejemplo, al preguntar por el porqué del comportamiento de las representaciones al arrastrar alguno de sus elementos. De la misma manera sucedió con el tratamiento de las intervenciones de los estudiantes (TRAT_INTER_EST), ya que la profesora se enfocó en sacar provecho de estas para: trabajar sobre la instrumentalización de GeogebraPrim, recordar continuamente la norma de exploración (NORM_EXP), fijar la atención en reconocer los elementos constitutivos de una representación (DISC_ELE_REP) y en los comportamientos particulares, luego del arrastre, para identificar invariantes (EXP_IDENT_INVA), entre otras.

Imagen 4.12 Red de relaciones del trabajo en GeogebraPrim Sesión 1 (RRGP_S1)



Aunque los códigos relacionados con la exploración y la representación aparecen en todas la redes, en la RRGP_S1 las acciones que enmarcan tienen características especiales porque evidencian los estados iniciales de estos procesos. Inicialmente, el trabajo en GeogebraPrim de la Sesión 1 se enfocó en la enunciación de normas sociales (escuchar NS_ESCUCHA y seguir instrucciones NS_SEG_INSTR), para dar recomendaciones del trabajo con el programa ya que era la primera vez que los estudiantes lo utilizaban. La norma de representación (NORM_REP_VAL) se enfocó en detectar las condiciones para representar adecuadamente una circunferencia por medio de un acercamiento basado en la experiencia mano-corporal de mantener fija la longitud de un segmento y mover uno de sus extremos.

Luego, al utilizar la herramienta circunferencia de GeogebraPrim para construir una circunferencia, las interacciones se enfocaron en la visualización de la representación para identificar sus elementos constitutivos (DISC_ELEM_REP). La norma de exploración (NORM_EXPL) y la identificación de los elementos constitutivos permitió iniciar la regulación de la práctica de explorar y su finalidad: explorar mediante el arrastre para identificar invariantes (EXPL_IDENT_INV). Por lo anterior, fue necesario que los estudiantes conocieran cómo se arrastra y qué se debe arrastrar. Además, el uso (USO_LEN_GEO) y fomento (FOM_LEN_GEO) del lenguaje geométrico que la profesora promovió en las interacciones con los estudiantes hizo que se fueran afinando la exploración, la expresión de los hallazgos, y la identificación y decantación de ideas para la detección de invariantes. De esta manera se fue abonando un camino para la producción de conjeturas (PROD_CONJ).

A continuación se presenta la trascripción del fragmento 6:10 perteneciente a la red RRGP_S1 que corresponde a la interacción entre la profesora y un grupo de estudiantes al solucionar la Actividad 3 de la Tarea 1. Los estudiantes han construido una circunferencia y un radio de esta.

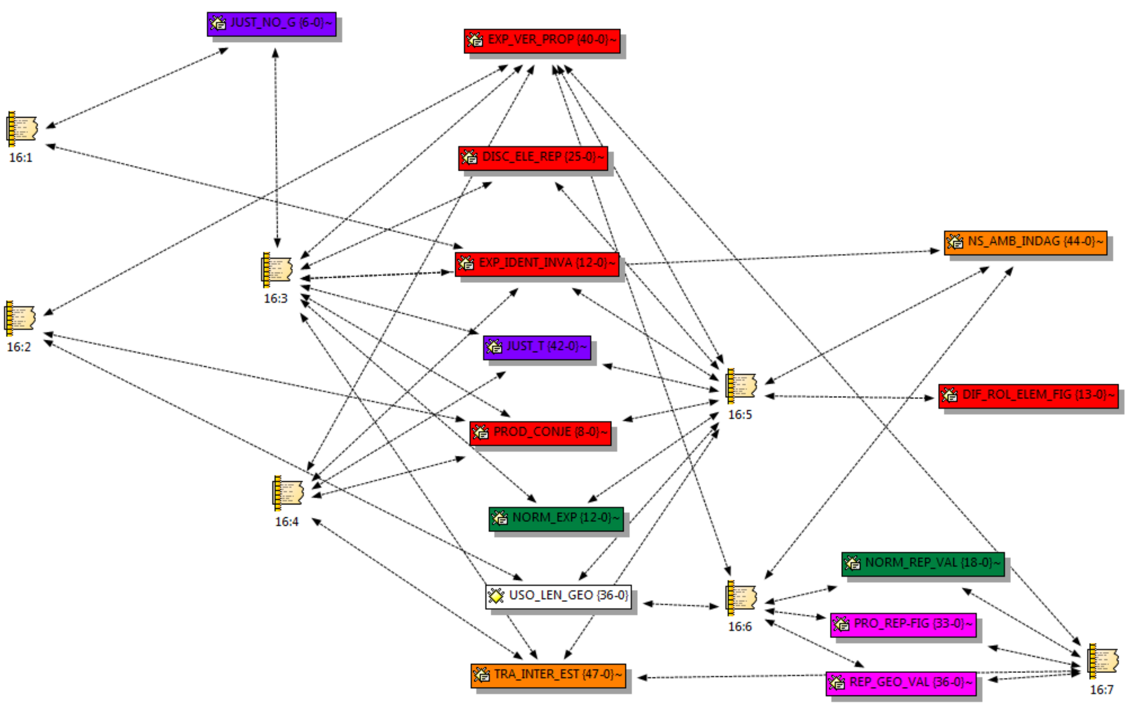
Profesora:	Siempre que construyamos algo vamos a mover y empiecen a decir qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente. [Nicoll mueve la circunferencia]. Por ejemplo ahí, ¿qué estas moviendo?
Nicoll:	La circunferencia.
Profesora:	¿Y qué pasa?
Carlos:	Pues todo se mueve a la vez.
Profesora:	Todo se mueve a la vez con la circunferencia. Muevan otra cosa. [Nicoll mueve el punto sobre la circunferencia].
Carlos:	Se agranda.
Mayra:	Se aleja.
Profesora:	¿Qué se agranda?
Carlos:	La circunferencia.
Profesora:	¿Algo más se agranda a la vez que se agranda la circunferencia?
Nicoll:	Cuando muevo este cosito, este cosito se va agrandando.
Profesora:	¿Cómo dijimos que se llaman esos cositos?
Carlos:	Punto sobre la circunferencia.
Mayra:	Segmento.
Profesora:	¿Entonces?
Nicoll:	El segmento se va agrandando también.
Profesora:	Cuando muevo el segmento, el segmento se va agrandando y ¿la circunferencia?
Mayra:	O también se achiquita.
Nicoll:	El punto del centro queda quieto.
Profesora:	Sí, muy bien. Muevan el punto del centro.
Mayra:	Pasa lo mismo, se agranda el segmento y la circunferencia…

[Fragmento 6:10]

En el anterior fragmento se evidencia la evocación de la norma de exploración por parte de la profesora. Luego, la interacción se enfoca en identificar el elemento constitutivo para moverlo. Una vez se mueve, la profesora realiza preguntas basadas en la norma de exploración y orienta las participaciones hacia los cambios significativos sobre los que se quería llamar la atención de los estudiantes. La profesora implícitamente mostró que la exploración se debía centrar en ciertas características puntuales que iban a determinar el invariante. De lo contrario, los estudiantes se podrían haber quedado en una exploración sin sentido. También se observa que la profesora fomentó el uso de un lenguaje adecuado según lo acordado, gracias a esto la comunicación se hizo más directa y comprensible.

En la Imagen 4.13 se presenta la RRGP_S3. En esta sesión la exploración generó otras acciones relacionadas con las representaciones. Al analizar los primeros fragmentos de la red (16:1 y 16:3), se observó que en las justificaciones hechas los estudiantes no usaban los hechos geométricos. Los estudiantes recurrieron a sobreponer los triángulos o a utilizar objetos externos como regla o escuadra para comparar el tamaño. Así establecieron que los triángulos eran congruentes. Luego, a partir de las intervenciones de la profesora en los grupos, los estudiantes usaron la circunferencia para verificar la congruencia de lados. Como resultado, las justificaciones se convirtieron en justificaciones teóricas.

Imagen 4.13 Red de relaciones del trabajo en GeogebraPrim Sesión 3 (RRGP_S3)



A continuación se presenta la transcripción del fragmento 16:5 perteneciente a la RRGP_S3. En este fragmento la profesora *Rosa* interactúa con un grupo de estudiantes que intentan dar solución a la Actividad 1, de la Tarea 3. Los estudiantes del grupo han determinado que todos los triángulos tienen dos lados congruentes y que los triángulos son congruentes entre sí.

Profesora: Bueno niños ustedes dijeron que todos los triángulos eran…

Niños del grupo: Congruentes.

Profesora: Además dijeron que…

Arley: Tienen la característica de que dos de sus lados son congruentes.

Profesora: Ahora van a mover. Ustedes dijeron que estos dos lados son congruentes. [Señala los dos lados que los estudiantes determinaron como congruentes]. Empiecen a mover los puntos y digan si esos dos lados siguen siendo congruentes [refiriéndose al triángulo A].

Arley: A ver movamos este punto [mueve un vértice del triángulo A].

Profesora: Todos van a mirar que sucede. ¿Siguen siendo congruentes?

Arley: No.

Juan: Uno es más grande que el otro.

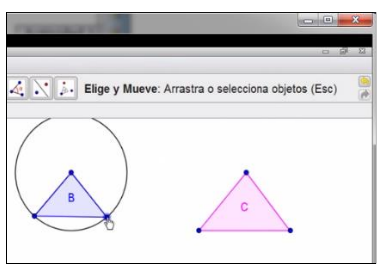
Profesora: Mueve el otro punto [Arley mueve el otro vértice y los demás observan que el triángulo no tiene lados congruentes]. Si lo siguen moviendo igual ya se dan cuenta que no siguen siendo…

Grupo: Congruentes.

[Inicio del fragmento 16:5]

En el anterior fragmento se muestra que los estudiantes no habían realizado una exploración utilizando la norma sino que habían concluido a partir de lo que veían en la pantalla. La profesora hizo explícito que debían mover los elementos constitutivos de cada triángulo, de manera ordenada, para verificar su conjetura inicial. A continuación otra parte del Fragmento 16:5. En este momento Arley utiliza la herramienta circunferencia para verificar la congruencia de lados (Imagen 4.14).

Imagen 4.14 Acción realizada por Arley



Arley: Ahora sí.

Profesora: Ya podemos seleccionar la flechita [Toma el mouse, elige la herramienta arrastre y un vértice y arrastra para ejemplificar el arrastre por varios sitios de la interfaz]. Si mueven para donde sea, para donde sea… ¿Qué pasa? Los lados que me dijeron que eran congruentes, ¿siguen siendo congruentes?

Arley: Sí. [El resto del grupo dice que no].

Arley: ¡Sí señora! [En un tono más alto]. Claro porque… [Juan observa el movimiento del triángulo ligado a la circunferencia].

Juan: ¡Sí! Porque siguen teniendo la misma distancia del punto del centro al punto de la circunferencia.

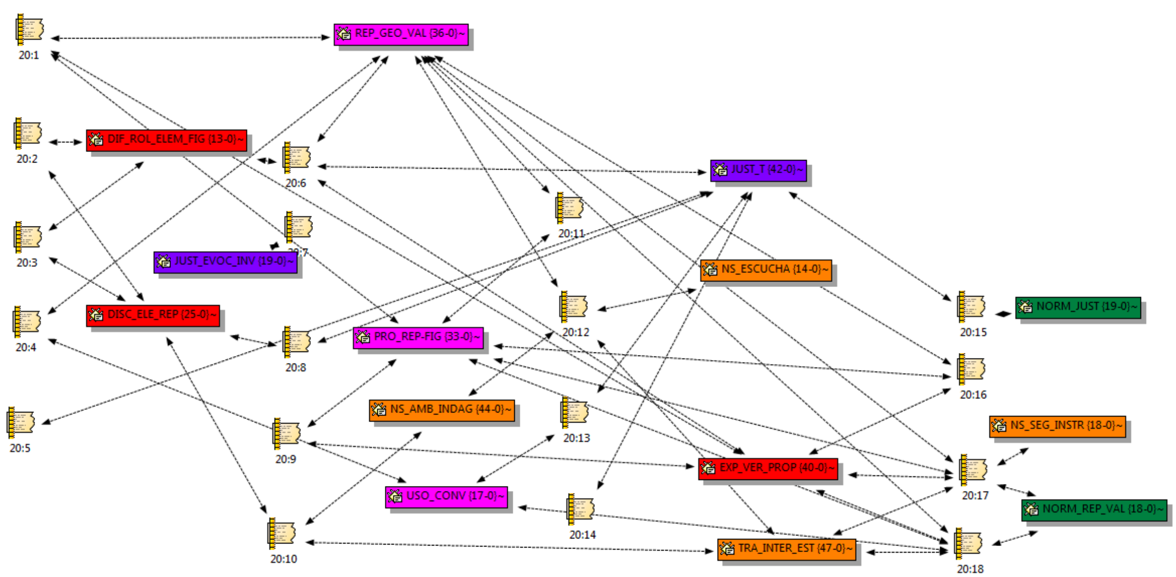
Profesora:	¿Siguen siendo cómo?
Niños del grupo:	Congruentes.
Profesora:	Pero este segmento, ¿cómo se llama?
Arley:	Radio.
Profesora:	Sigue siendo radio. Entonces ustedes lo mueven y sigue pasando lo mismo.

[Final de fragmento 16:5]

En el anterior fragmento se evidencia que la herramienta circunferencia fue utilizada para explorar un triángulo y así verificar la propiedad de congruencia de dos de sus lados. Aunque inicialmente, a través de la visualización se pudo inferir que los lados eran congruentes, la profesora por medio de su acción propuso que se debían arrastrar los elementos en todas las direcciones, ya que los estudiantes no lo hacían.

Para hablar de las representaciones en estas redes, abordaremos la RRGP_S4 cuya codificación está relacionada con las Actividades 2 y 3, de la Tarea 3 (Imagen 4.15).

Imagen 4.15 Red de relaciones del trabajo en GeogebraPrim Sesión 4 (RRGP_S4)

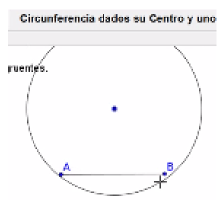


La construcción del triángulo isósceles a partir de la circunferencia no causó mayor dificultad ya que los estudiantes lograron identificar los lados congruentes al asociarlos con los radios de una circunferencia (DISC_ELEM_FIG y DIF_ROL_ELEM_FIG). De esta manera los estudiantes representaron el triángulo isósceles (PRO_REP_FIG) y mediante el arrastre se validó tal representación (REP_GEO_VAL).

A continuación se presenta la transcripción del fragmento 20:12 perteneciente a la RRGP_S4. Este fragmento corresponde a la solución de la Actividad 3, de la Tarea 3. Los estudiantes realizan la construcción de un triángulo isósceles a partir de un segmento AB dado como uno de los lados congruentes del triángulo.

Profesora:	¿Qué van a hacer?
Ricardo:	Vamos a utilizar la circunferencia primero.
Profesora:	¿Dónde crees que debes dibujar la circunferencia? [Ricardo dibuja una circunferencia como lo muestra la Imagen 4.16].

Imagen 4.16 Construcción realizada por Ricardo



Profesora:	Fíjense que el lado que les dieron debe ser un lado congruente. Para que el lado sea congruente, ¿qué parte de la circunferencia tenía que ser?
Esneider:	Un radio.
Profesora:	Un radio. ¿Y qué hacen para que ese segmento que está ahí sea un radio?
Esneider:	Poniendo una circunferencia aquí [señala el centro de la circunferencia].
Profesora:	Poniendo una circunferencia. Muy bien, escuchen a su compañero.
Diego:	Ah ya sé. [Diego toma el mouse y ubica una circunferencia con centro en A como se muestra en la Imagen 4.17].
Profesora:	¿Y ahora qué hacen?
Ricardo:	Un triángulo [Con la herramienta segmento Diego completa el triángulo. Exploran la representación para verificar que se mantienen dos lados congruentes y colocan la convención a los dos lados congruentes como se muestra en la Imagen 4.18].

[Fragmento 20:12]

Imagen 4.17 Acción realizada para que el segmento fuera uno de los lados congruentes

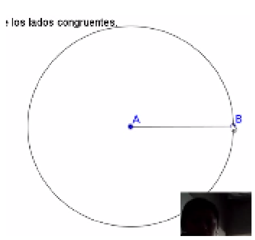
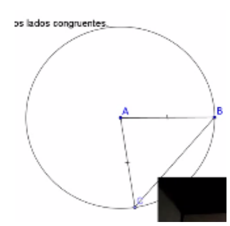


Imagen 4.18 Acción realizada para construir el triángulo isósceles



En el anterior fragmento se evidencia que los estudiantes inicialmente tuvieron dificultad sobre la ubicación adecuada de la circunferencia para construir el triángulo. La interacción entre el grupo y la profesora, a partir de la indagación, orientó el proceso de representación adecuado. Una vez se obtuvo la representación (PRO_REP_FIG), se recurrió a la exploración para verificar propiedades (EXP_VER PROP) y se usó la convención para simbolizar e identificar visualmente los lados congruentes (USO_CONV).

Los anteriores análisis, evidencian que las normas regularon las acciones específicas al explorar, justificar y representar. Estas acciones mediaron las interacciones y participaciones entre los estudiantes, el profesor y el ambiente en GeogebraPrim, apoyando la conformación de un ambiente de aula apropiado para la constitución colectiva del criterio.

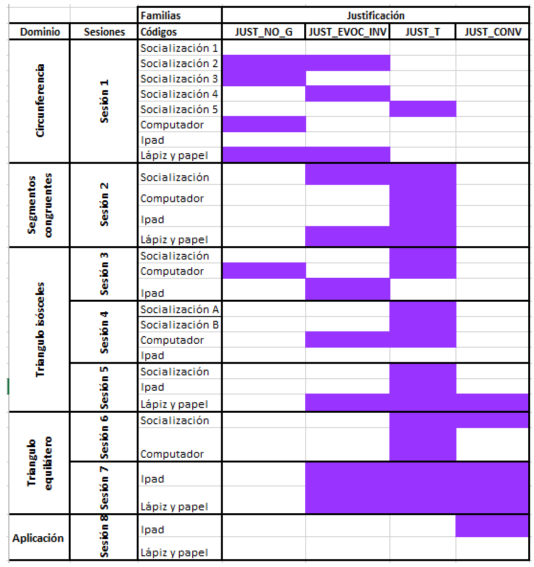
4.3 Análisis familias de códigos

Como se mencionó en el Capítulo 3, los códigos se agruparon por familias a las cuales se les asignó un color. En los análisis anteriores se pudieron entrever relaciones entre códigos de una misma familia y una posible dinámica interna durante el experimento de enseñanza. La dinámica interna de cada familia describe la presencia de los códigos a través de todas las sesiones, permitiendo ver gráficamente la vida e interrelación de los mismos. En este apartado se analizan dos familias que consideramos evidencian una evolución que apoya la constitución colectiva del criterio. Estas son: representaciones y justificación.

4.3.1 Familia justificación

En esta familia se analizaron aspectos de la justificación que fueron rastreados por los códigos que se muestran en la Imagen 4.19. En la imagen se puede observar que durante cada sesión y en cada registro se evidenciaron distintas formas de justificar.

Imagen 4.19 Dinámica interna familia Justificación



Durante el experimento se rastrearon justificaciones hechas por medio de la ostensión y la percepción; es decir los estudiantes realizaban explicaciones relacionadas con las propiedades refiriéndose a lo que veían en una representación. A este tipo de justificaciones se les asignó el código JUST_NO_G. La Imagen 4.19 muestra que este tipo de justificaciones tuvieron mayor presencia en la Sesión 1 y esporádicamente en la Sesión 3. La presencia de este código se interpretó como un estado inicial de las justificaciones de los estudiantes al inicio del experimento y nos permitió tener un punto de partida para observar el proceso y los avances.

El siguiente fragmento, correspondiente a la Actividad 1 de la Tarea 3, en donde un grupo de estudiantes realizan la actividad de exploración para detectar el invariante *tener dos lados congruentes*, muestra un ejemplo de justificación no geométrica.

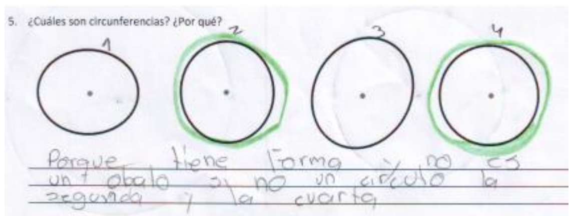
Juan:	Yo pienso que este lado es congruente con este [Señala en la pantalla dos lados del triángulo A que perceptualmente se ven congruentes].
Profesora:	¿Cuáles lados son congruentes?
Juan:	Este y este [Señala los dos lados].
Profesora:	¿Cómo pueden comprobar que este lado mide lo mismo que este?
Juan:	Uhmm…
David:	Miren esto se ve [Señala los dos lados del triángulo A que señaló Juan]. Mire Juan este se ve como perfecto.

[Fragmento 16:3]

En el anterior fragmento se observa que la justificación de David a la pregunta de la profesora se basa en la percepción es decir, para David es suficiente justificar que los lados del triángulo son congruentes porque se ven congruentes.

En la Imagen 4.20 se observa la justificación dada por un estudiante a la pregunta 5 de la Actividad 4, de la Tarea 1.

Imagen 4.20 Respuesta de un estudiante a la pregunta 5 de la Actividad 4 Tarea 1



Trascripción
5. ¿Cuáles son circunferencias? ¿Por qué?
Porque tiene forma y no es un ovalo sino un círculo la segunda y la cuarta

En la anterior respuesta se observa que el estudiante puso en juego una justificación basada en la percepción. El estudiante no utilizó instrumentos de verificación trabajados en las actividades previas. Para el estudiante fue suficiente identificar la forma o lo más cercano a ella para justificar su elección.

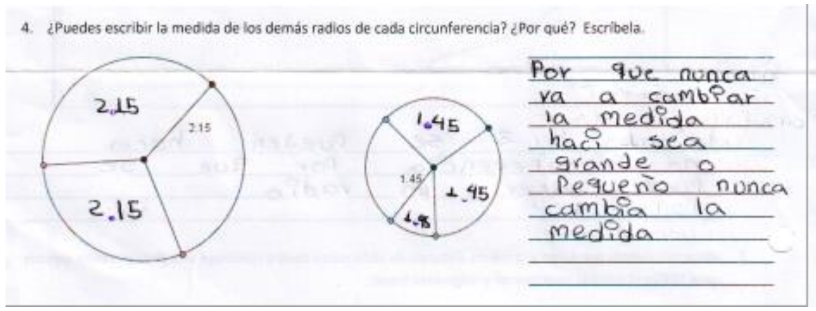
La Imagen 4.19 también muestra que el código JUST_NO_G está ausente a partir de la Sesión 4, lo que evidencia que los estudiantes avanzaron en sus formas de justificar.

Uno de estos avances se evidenció cuando los estudiantes utilizaron, para justificar, las acciones realizadas en GeogebraPrim es decir, evocaron las acciones que derivaron en los invariantes detectados en dicho programa al explorar las representaciones. A este tipo de justificación se le asignó el código JUST_EVOC_INV. En la Imagen 4.19 se observa que este tipo de justificaciones se presenta durante todas las sesiones trabajadas en las clases de geometría. Esto se debe a que se realizó un trabajo sostenido en GeogebraPrim sobre detección de invariantes que era importante para dar el paso a las representaciones en los ambientes de lápiz y papel con regla y compás y a mano alzada.

Este tipo de justificaciones se observó constantemente en las actividades en lápiz y papel. Esto se debe a que las algunas actividades se diseñaron para tal fin, es decir, para que las acciones realizadas en GeogebraPrim se utilizaran significativamente en las representaciones en lápiz y papel.

La Imagen 4.21 muestra un ejemplo de este tipo de justificaciones.

Imagen 4.21 Respuesta de un estudiante a la Actividad 4 de la Tarea 1, numeral 4



Transcripción

4. ¿Puedes escribir la medida de los demás radios de cada circunferencia? ¿Por qué? Escríbela.

Porque nunca va a cambiar la medida, así sea grande o pequeño nunca cambia la medida

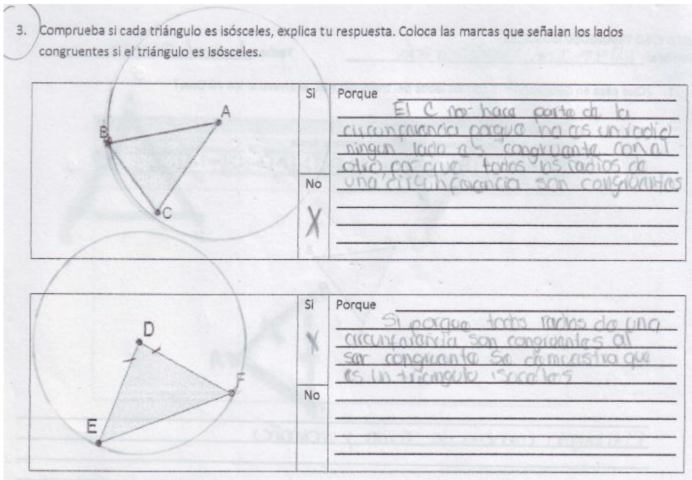
En la justificación anterior se puede evidenciar que el trabajo realizado en GeogebraPrim sobre el invariante se traslada a una representación en el ambiente de lápiz y papel. La expresión “nunca va cambiar así sea grande o pequeña” muestra que el estudiante evocó el movimiento de arrastre y la invariancia que deja tal movimiento en la circunferencia para justificar.

Al contrastar la presencia del código JUST_EVOC_INV con los demás de la familia Justificación (Imagen 4.19), se observa una coexistencia con cada uno de ellos. Por ejemplo, la coexistencia con el código JUST_NO_G se debe al paso transitorio de justificaciones por medio de la ostensión a justificaciones evocando el invariante. Esta emigración se debe, por un lado a las experiencias que van teniendo los estudiantes en GeogebraPrim y por otro, como fruto de la reflexión y las socializaciones.

La coexistencia con el código JUST_T (Sesión 2 en adelante), se debe a la relación con la instauración de los primeros hechos geométricos y la norma de justificación. Por ende, las justificaciones cambian al utilizar los hechos geométricos lo que las convierte en justificaciones que denominamos teóricas (JUST_T). Al igual que las justificaciones anteriores, las justificaciones teóricas comienzan a permear las socializaciones, el trabajo en GeogebraPrim y en lápiz y papel.

Las siguientes respuestas de los estudiantes dan cuenta de las ideas expuestas en los párrafos anteriores. La Imagen 4.22 corresponde a la respuesta de un estudiante a la Actividad 5 Tarea 3.

Imagen 4.22 Respuesta de un estudiante a la Actividad 5 de la Tarea 3, numeral 3



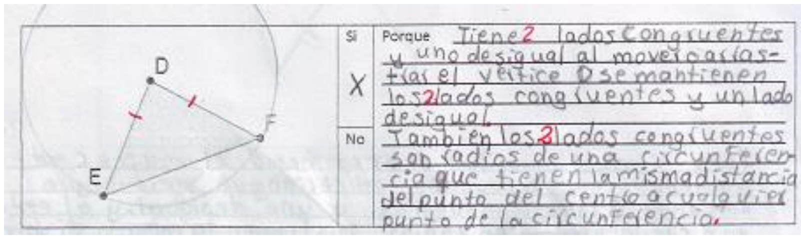
Trascripción
3. Comprueba si cada triángulo es isósceles, explica tu respuesta. Coloca las marcas que señalan los lados congruentes si el triángulo es isósceles.
No. El *C* no hace parte de la circunferencia porque no es un radio ningún lado es congruente con el otro, porque todos los radios de una circunferencia son congruentes

Sí. Si porque todos radios de una circunferencia son congruentes al ser congruentes se demuestra que es un triángulo isósceles

En la imagen anterior se evidencia que el estudiante utilizó la circunferencia para verificar la congruencia de lados y de esta manera relacionar los hechos geométricos que justificaran la comprobación. En la primera respuesta, el estudiante trazó la circunferencia y se dio cuenta que el punto *C* no hacía parte de esta. Este hecho lo pudo llevar a pensar en que si no pertenece a la circunferencia el segmento *AC* no es un radio y como no lo es no hay congruencia entre los segmentos *AB* y *AC* porque si fuera un radio se sabe que todos los radios de una circunferencia son congruentes. En la segunda respuesta, el estudiante trazó la circunferencia y se dio cuenta que dos lados *DE* y *DF* son radios de la misma. De esta manera enuncia el primer hecho geométrico “todos los radios de la circunferencia son congruentes” lo que le permite usar al tercer hecho geométrico, “al ser congruentes se demuestra que el triángulo es isósceles” y por tanto coloca la convención que denota tal congruencia. Finalmente podemos apreciar que para justificar el estudiante utilizó los hechos geométricos adecuadamente.

La Imagen 4.23 corresponde a otra respuesta de un estudiante a la misma pregunta.

Imagen 4.23 Respuesta de un estudiante a la Actividad 5 de la Tarea 3, numeral 3



Trascripción

Sí. Tiene dos lados congruentes y uno desigual al mover o arrastrar el vértice D se mantienen los dos lados congruentes y uno desigual. También los dos lados congruentes son radios de una circunferencia que tienen la misma distancia del punto del centro a cualquier punto de la circunferencia.

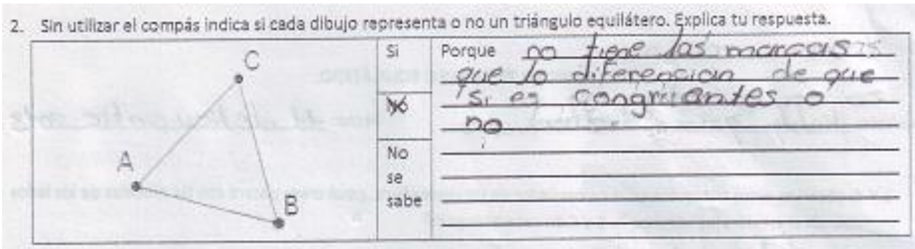
La anterior justificación hace uso de una justificación evocando el invariante y de una justificación teórica. Además en la justificación por invariante se incluye el lado desigual, donde a pesar del movimiento, las propiedades se mantienen, es decir, los lados congruentes se mantienen y el lado desigual también. Al comprobar que la representación cumplía las propiedades el estudiante colocó la convención. De esta manera se evidencia que la convención está cargada de significado.

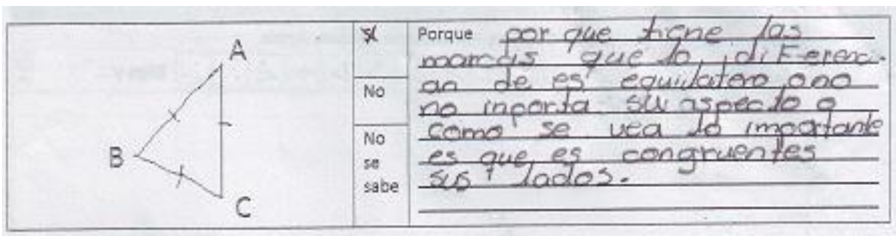
Es así, como las justificaciones de los estudiantes se ampliaron a un tipo de justificaciones en las que el uso de la convención servía para identificar y justificar la congruencia de lados en una representación. De esta manera aparecieron justificaciones en las que existía una convicción de la propiedad de congruencia de segmentos en una representación, mediante la convención (JUST_CONV).

Posteriormente poco a poco y con un esfuerzo constante, las justificaciones de que una representación fuera la representación de un triángulo equilátero o isósceles, se fueron desprendiendo de las características perceptuales y se enfocaron en la presencia de la propiedad de congruencia a través de la convención.

En la Imagen 4.24 se presenta la respuesta de un estudiante al proponérsele indicar y explicar si el triángulo dado es o no equilátero, sin utilizar el compás.

Imagen 4.24 Respuesta de un estudiante a la Actividad 3 de la Tarea 4, numeral 2





Trascripción
2. Sin utilizar el compás indica si cada dibujo representa o no un triángulo equilátero. Explica tu respuesta.
No. No tiene las marcas que lo diferencien de que si es congruentes o no
Sí. Porque tiene las marcas que lo diferencian que es equilátero no importa su aspecto o como se vea lo importante es que es congruentes sus lados.

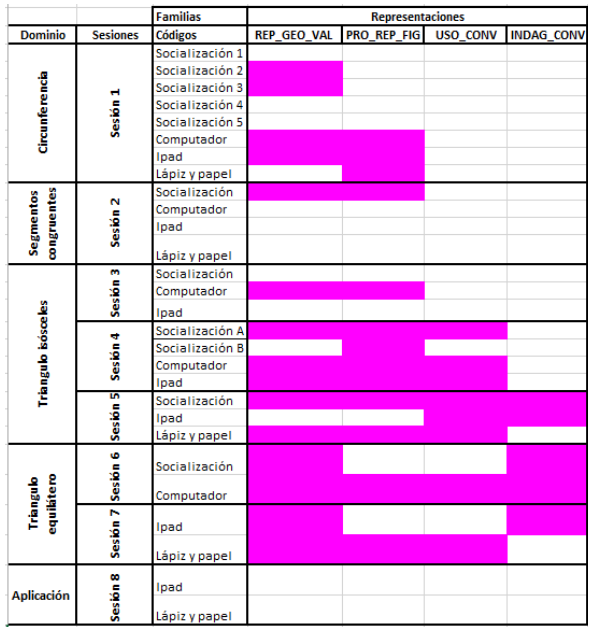
Las anteriores justificaciones evidencian que el estudiante se desligó de los aspectos perceptivos de la representación y usó el significado de la convención. En la primera respuesta, aunque el triángulo parecía equilátero, el estudiante enfatizó en la no presencia de la convención y por tanto no lo identificó como equilátero. En la segunda respuesta, el estudiante hizo énfasis en que no importa la apariencia, lo importante es la presencia de la convención. Esto significa que para el estudiante una representación adecuada de un triángulo equilátero debe tener la convención que evoque la propiedad de congruencia de lados.

4.3.2 Familia representaciones

En esta familia se analizaron aspectos de las representaciones que fueron rastreados con los códigos que se muestran en la Imagen 4.25. Se puede observar que la aparición de los códigos al inicio es escalonada y luego su presencia durante las sesiones es constante.

Como se observa en la imagen, el primer código en aparecer es REP_GEO_VAL; con este código se relacionaron los fragmentos en los que se realizaba un juicio sobre si una representación de una figura geométrica era válida, o no.

Imagen 4.25 Dinámica interna familia Representaciones



En la Sesión 1 estos juicios se enfocaron en determinar las características y propiedades para representar correctamente una circunferencia. En la trascripción del Fragmento 5:1 se ejemplifica el anterior hecho. El fragmento corresponde a la socialización de la Actividad 1 de la Tarea 1 y hace parte de la discusión sobre cómo debe ser el segmento para que al activar la herramienta traza a uno de los extremos y moverlo se represente una circunferencia.

Profesora: ¿Cómo debe ser el segmento que va desde el centro a cualquier punto sobre la circunferencia?

Pablo: El segmento debe medir lo mismo, deben medir exactamente lo mismo, porque si no mide lo mismo quedaría mal hecha. Entonces no daría circunferencia.

[Fragmento 5:1]

En el fragmento se evidencia que el estudiante entiende que la característica para que se represente adecuadamente una circunferencia es que el segmento radio conserve su longitud.

En las sesiones posteriores, los juicios sobre si una representación era válida, o no, dependieron del ambiente donde se representaban figuras y de las normas de representación enunciadas para cada ambiente (N_2, N_4 y N_5).

Las representaciones de las figuras triángulo isósceles y triángulo equilátero en los tres ambientes se derivaron de los procedimientos que los estudiantes utilizaron para realizar la representación. Estos procedimientos fueron codificados con el código PRO_REP_FIG. En la Imagen 4.25 se observa que constantemente se representaban figuras y se discutía sobre dichas representaciones. Además, su coexistencia con REP_GEO_VAL indica que los procedimientos de representación eran juzgados y discutidos para determinar su validez.

Los procedimientos y las normas de representación en cada ambiente se relacionaron durante las sesiones para dar significado a la convención de congruencia. Su proceso fue largo y mereció esfuerzo compartido por los estudiantes y la profesora. Al representar triángulos isósceles y triángulos equiláteros en GeogebraPrim, y verificar mediante el arrastre la congruencia de sus lados, la profesora propuso colocar la convención para identificarlos. Posteriormente esta convención se extiende a los procedimientos y normas de representación con regla y compás, y a los de mano alzada. En este tránsito, se comparan y se establecen relaciones entre las acciones, las herramientas y los procedimientos en cada ambiente durante las socializaciones, el trabajo en GeogebraPrim y en lápiz y papel. En este proceso se va logrando poco a poco que los estudiantes den sentido teórico a la convención de congruencia, para así constituirla y utilizarla.

Como consecuencia del anterior proceso los estudiantes usaron la convención cuando representaron triángulos isósceles y equiláteros en los tres ambientes. Se asignó el código USO_CONV al uso de la convención para indicar congruencia de segmentos en las representaciones. En la Imagen 4.25 se observa que este código aparece al desarrollar las actividades de la Tarea 3 sobre triángulos isósceles y permanece para las siguientes tareas, lo que ratifica que los estudiantes usaron la convención para indicar congruencia de lados.

A continuación se muestra una parte del fragmento 23:11, correspondiente a una socialización, con la cual queremos dar cuenta de algunas de las ideas anteriores. Previo a este momento la profesora mostró un procedimiento de representación de un triángulo isósceles a partir de un segmento dado, el cual era uno de los lados congruentes (al finalizar el procedimiento se obtenía una representación blanda de un triángulo isósceles).

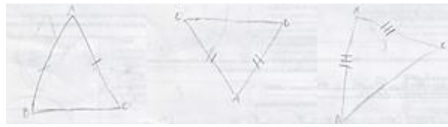
Profesora:	Entonces, ¿qué hicimos para construir bien un triángulo isósceles?
Varios estudiantes:	Trazar una circunferencia [La profesora deshace la construcción anterior, deja el segmento inicial y sobre él traza una circunferencia donde el segmento inicial se convierte en el radio].
Profesora:	¿Y después qué hacíamos?
Varios estudiantes:	Construir un triángulo.
Profesora:	Pero, ¿cómo?
Arley:	Se construye otro radio y luego se unen.
Profesora:	Muy bien [La profesora construye otro radio y los une en los extremos para construir un triángulo] y ahora movemos [La profesora arrastra cada uno de los vértices del triángulo] ¿se siguen manteniendo dos lados congruentes?
Varios estudiantes:	Sí.
Profesora:	Ahora, nosotros aprendimos a señalar los dos lados que eran congruentes. ¿Cómo lo hacíamos?
Juan:	Con decoración [Juan evoca la forma de colocar la convención en GeogebraPrim].
Profesora:	Cuando dos lados son congruentes colocamos la misma señal. [La profesora coloca la convención y luego pregunta]. Que el segmento *AC* y el segmento *BC* tengan la misma rayita, ¿qué significa?
Arley:	Que esos dos lados son congruentes.

[Fragmento 23:11]

Como se evidencia en el anterior fragmento, la profesora realizó preguntas para reconstruir el procedimiento adecuado de representación. Cuando se comprobó que la representación era robusta, se colocó la convención a los lados congruentes. Finalmente la profesora preguntó por el significado de la convención obteniendo una respuesta favorable.

Finalmente, en la Imagen 4.25 se observa el código INDAG_CONV. Este código se usó para los fragmentos en donde la profesora o los estudiantes preguntaban sobre la convención acordada para representar congruencia, o donde se impulsaba a los estudiantes a usarla. La presencia de este código durante las sesiones finales es interpretado como el esfuerzo por conformar un ambiente de indagación sobre el significado y uso de la convención para representar congruencias. Como se ha mostrado en varios ejemplos durante el capítulo de análisis, estos esfuerzos dieron sus frutos ya que los estudiantes se enfocaron en el significado de congruencia que provee la convención y lograron representar un triángulo isósceles y equilátero a mano alzada a partir de la propiedad de congruencia de lados. La Imagen 4.26 muestra las representaciones hechas por un estudiante de varios triángulos isósceles.

Imagen 4.26 Representaciones a mano alzada de un triángulo isósceles por parte de un estudiante



En la imagen se observa que el estudiante representó triángulos isósceles a mano alzada con convención. Además, usó una convención distinta en cada triángulo.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación, a partir de unos antecedentes y unas problemáticas detectadas en nuestras prácticas como docentes de geometría y en la literatura investigativa, se propuso sugerir una vía que contribuyera al establecimiento de aspectos normativos que generaran la constitución de un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica. Para tal fin, se elaboró y puso a prueba un experimento de enseñanza en un aula de geometría con estudiantes de quinto grado. El análisis y resultados de los datos recolectados evidencian el alcance del experimento de enseñanza. En este capítulo presentamos las conclusiones en relación a los objetivos propuestos, las hipótesis de la investigación, los aspectos generales de la investigación y algunas cuestiones abiertas a futuras investigaciones.

5.1 Respecto a los objetivos de la investigación

Presentamos a continuación las conclusiones en relación con los objetivos específicos de la investigación para luego determinar el alcance del objetivo general.

Respecto al primer objetivo específico que correspondía a diseñar, implementar y evaluar una intervención de enseñanza que posibilitara el establecimiento colectivo de un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica, consideramos que este se cumplió, como lo hemos mostrado en este escrito. Se logró llevar a cabo un experimento de enseñanza planeado cuidadosamente por el equipo investigador, se implementó la propuesta con estudiantes de quinto grado con el apoyo de la profesora titular del curso, y finalmente se logró recopilar, organizar y analizar la información con el fin de evidenciar, mediante el análisis hecho, que los estudiantes y la profesora lograron constituir colectivamente el criterio de representar un triángulo isósceles y un triángulo equilátero mediante una convención que indicara congruencia de lados.

En cuanto al objetivo de identificar aspectos normativos que contribuyeran a compartir el criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica, mediante las categorías emergentes derivadas del análisis se logró evidenciar que los aspectos normativos sociales y sociomatemáticos influyeron de manera positiva en la conformación del criterio. Por un lado, se determinó que el impulso de normas sociales como: seguir instrucciones para realizar las actividades propuestas; incentivar a los estudiantes a expresar sus ideas sin prejuicio al error y como un mecanismo de participación de los acuerdos; escuchar las opiniones de los compañeros con la finalidad de aprobar o desaprobar, con argumentos, las afirmaciones hechas; preguntar el porqué de las afirmaciones (tanto estudiantes como la profesora), y dudar de lo que se exprese si no está fundamentado en acuerdos establecidos; tratar adecuadamente las intervenciones de los estudiantes para direccionarlas en torno a la consecución de compartir el criterio; contribuyeron al establecimiento de un ambiente de aula de indagación y de participación.

Por otro lado, las normas sociomatemáticas que tenían relación con las normas de exploración, representación y justificación, fundamentaron las prácticas, las participaciones y las interacciones que determinaron la constitución del criterio sobre la representación gráfica adecuada de una figura geométrica. Las normas de exploración orientaron las acciones en GeogebraPrim hacia la detección de invariantes de congruencia, los cuales posteriormente fueron aceptados, institucionalizados, y teorizados mediante hechos geométricos. Las normas de justificación orientaron las formas de justificación y convencimiento al establecer que las afirmaciones hechas en el aula se sustentaban con los hechos geométricos establecidos previamente. Las normas de representación orientaron la representación de figuras geométricas en los tres ambientes (Geogebraprim, lápiz y papel con regla y compás y a mano alzada), en los que se estableció que una representación válida evoca las propiedades geométricas de la figura que representa.

Finalmente, respecto al tercer objetivo, estudiar el potencial de la geometría dinámica en el paso de la representación en GeogebraPrim a la representación con instrumentos de trazo y a la representación con convenciones y su relación con el establecimiento de aspectos normativos, consideramos que el estudio corroboró resultados investigativos previos y dio luces sobre otros elementos que tienen que ver con la exploración y la representación que son importantes considerar. La geometría dinámica permitió explorar las representaciones de una manera dinámica, lo que llevó a (i) la identificación de invariantes; (ii) la identificación de los elementos constitutivos de las representaciones y gracias a ello a centrar la atención de los estudiantes en los efectos del movimiento sobre ellos; (iii) la verificación de propiedades; (iv) la elaboración de conjeturas; (v) la identificación de propiedades; (vi) el establecimiento de hechos geométricos; (vii) la identificación de diferentes roles que pueden desempeñar los elementos constitutivos de una representación para poderlos relacionar con hechos geométricos establecidos y detectar invariantes para la elaboración de conjeturas. El programa de geometría dinámica facilitó la representación de figuras y la comprobación de la validez de las mismas.

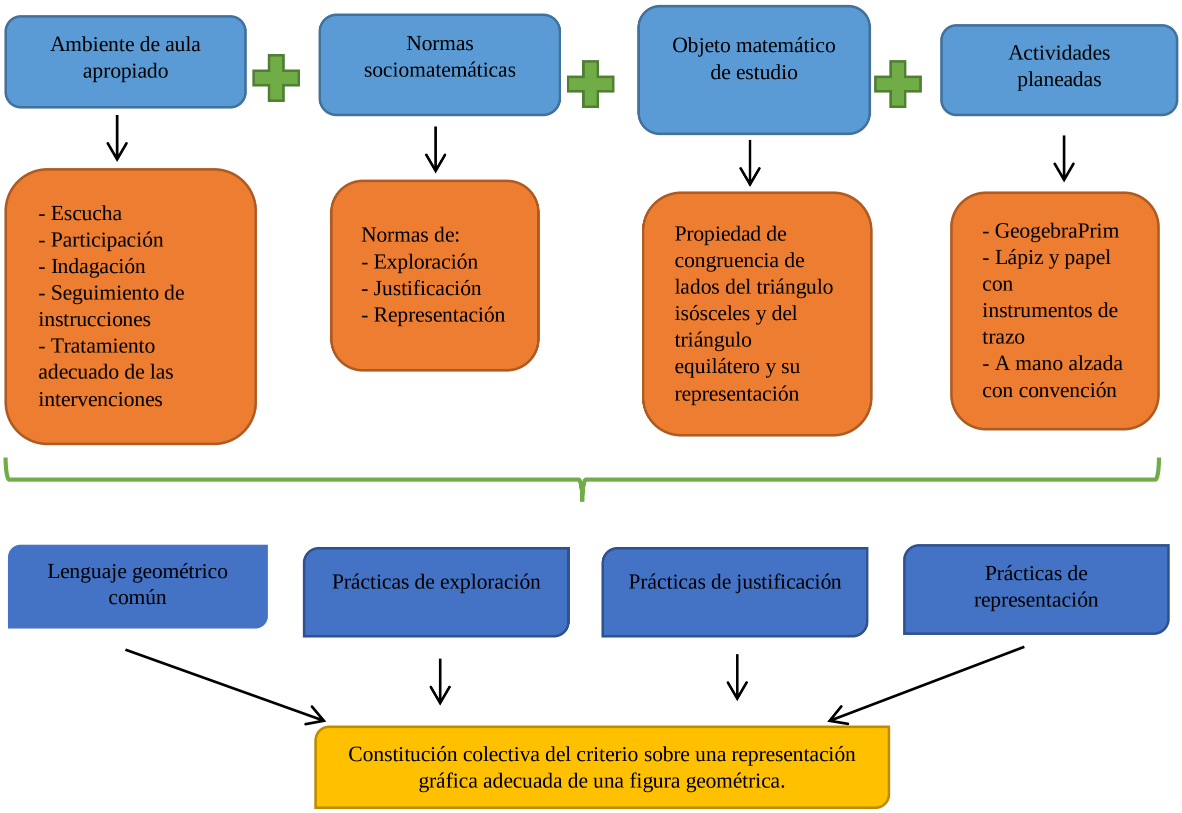
Respecto al tránsito entre los ambientes de representación, la geometría dinámica facilitó: (i) establecer relaciones entre las acciones y las herramientas del programa y los instrumentos de trazo (regla y compás); (ii) evocar el movimiento de una representación en Geogebraprim en una representación en lápiz y papel; (iii) trasferir los invariantes detectados (hechos geométricos) a las representaciones en los dos ambientes de lápiz y papel; (iv) utilizar la convención a partir de un significado teórico al representar figuras con los instrumentos de trazo y a mano alzada.

Respecto a la relación del programa con el establecimiento de aspectos normativos este facilitó la conformación de un ambiente de indagación y participación, y el establecimiento de normas sociomatemáticas de exploración y representación de figuras que permitieron que las prácticas de aula en las que se utilizan las representaciones de las figuras geométricas fueran cercanas a las prácticas matemáticas.

Finalmente, la consecución de los tres objetivos anteriores configuraron el alcance del objetivo general: sugerir una vía que contribuyera al establecimiento de aspectos normativos que generaran la posibilidad de compartir un criterio sobre lo que se considera una representación gráfica adecuada de una figura geométrica. La vía sugerida con la cual está enmarcado este experimento de enseñanza se muestra en el Esquema 5.1.

Manifestamos que un aula de clase, con un ambiente apropiado basado en normas sociales básicas y normas sociomatemáticas, que se constituyen en la práctica diaria a través de la solución y socialización de unas actividades planeadas cuidadosamente, referidas a una figura geométrica y su representación, van constituyendo en las interacciones de los participantes una comunidad. En esta comunidad el lenguaje geométrico, las prácticas de explorar, justificar y representar se van refinando poco a poco, y se van acercando al lenguaje y prácticas de la comunidad matemática generando un ambiente propicio que posibilita la constitución colectiva del criterio sobre una representación gráfica adecuada de una figura geométrica.

Esquema 5.1 Vía sugerida como resultado del experimento de enseñanza



5.2 Respecto a las hipótesis de investigación

Las hipótesis planteadas para esta investigación fueron comprobadas. Respecto a la Hipótesis 1 en la cual se menciona que el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las figuras geométricas no es espontáneo y debe ser objeto de aprendizaje (Laborde, 1993), corroboramos que para que los estudiantes reconocieran visualmente la propiedad de congruencia de lados en triángulos isósceles y equiláteros mediante una convención fue necesario la constitución de un ambiente de aula basado en normas sociales y sociomatemáticas, y que por medio de la interacción de profesor y estudiantes se constituyó poco a poco colectivamente el significado de la convención. De esta manera la representación de la propiedad de congruencia de lados de dichos triángulos a través de una convención no fue espontánea y fue objeto de aprendizaje.

Respecto a la Hipótesis 2 sobre la importancia de que los alumnos aprendan a controlar, a través de conocimientos teóricos, los aspectos perceptivos ligados a las representaciones, encontramos que los estudiantes fueron poco a poco hallándole significado a lo que la convención de congruencia representaba en cada uno de los ambientes. Por ejemplo, durante el proceso de representación de figuras a mano alzada, los estudiantes se fueron desligando de aspectos perceptivos en las representaciones de triángulos isósceles y equiláteros como la rectitud e igualdad de medidas de los lados, y se fueron fijando en el significado teórico de la convención de congruencia que evocaba la propiedad de congruencia de lados en dichos triángulos. De tal manera, encontramos que el uso de la convención en una representación a mano alzada libera al estudiante, de tratar con representaciones adecuadas únicamente en GeogebraPrim o con instrumentos de trazo, y le permiten utilizar los conocimientos teóricos al mismo tiempo que representa un triángulo isósceles o equilátero a mano alzada.

Sobre las Hipótesis 3 y 4 según las cuales es recomendable trabajar con programas de geometría dinámica por el potencial que poseen, corroboramos que GeogebraPrim fue un mediador indispensable para introducir a los estudiantes al universo geométrico respecto a la exploración de representaciones de figuras para determinar propiedades invariantes y representar figuras teniendo en cuenta aspectos teóricos. También corroboramos que fue un mediador de las interacciones del profesor y los estudiantes puesto que facilitó la constitución de conocimientos geométricos teóricos a partir de los invariantes encontrados en la interacción con el entorno informático. Además se corroboró que finalizado el trabajo en Geogebraprim los estudiantes podían discriminar entre un triángulo isósceles y equilátero a partir de sus lados congruentes.

Finalmente la Hipótesis 5 menciona que la evolución de una cultura matemática en el aula es un proceso a largo plazo, que requiere de estrategias específicas de intervención que comienzan muy temprano y se desarrollan durante un largo período. Ello se evidenció en los esfuerzos sostenidos y prolongados realizados por la profesora y el equipo investigador para crear un ambiente de aula de discusión y concertación de conocimiento matemático, de prácticas de exploración, justificación y representación y otros elementos que caracterizan la cultura matemática.

5.3 Generales de la investigación

Las conclusiones generales de la investigación se abordan en dos direcciones: la primera sobre conclusiones relativas a la investigación y la segunda sobre algunas conclusiones importantes de la metodología del experimento.

5.3.1 Relativas a la investigación

Como conclusión general de la investigación planteamos que para constituir colectivamente un criterio sobre una representación gráfica adecuada de una figura geométrica es necesario (i) crear un ambiente de aula de indagación y participación; (ii) establecer normas para explorar, representar y justificar; (iii) disponer de un lenguaje geométrico común con el cual se puedan referir a las representaciones geométricas; (iv) explorar las representaciones y justificar afirmaciones de manera cada vez más cercana a la forma de explorar y justificar de la comunidad matemática; (v) disponer de hechos geométricos como garantías con las cuales justificar propiedades geométricas; (vi) representar figuras de manera cada vez más cercana a la forma de representar de la comunidad matemática; y (vii) hacer uso de la convención para obtener información de las propiedades de una figura.

La implementación del experimento de enseñanza permitió observar aspectos importantes relacionados con la geometría dinámica. Uno de ellos es que aunque la geometría dinámica proporciona una herramienta predeterminada para representar una circunferencia, o un triángulo equilátero, su uso no implica el reconocimiento de las propiedades geométricas de dichas figuras. Por tanto, esta representación puede carecer de sentido teórico para los estudiantes. Por lo anterior, es necesario que previamente se desarrollen actividades que contribuyan a establecer las relaciones geométricas implícitas, no solo en la herramienta circunferencia o triángulo equilátero, sino en las demás las herramientas que ofrece el programa.

En cuanto a la exploración en geometría dinámica, concluimos que es apropiado, conveniente y necesario que los estudiantes: (i) identifiquen los elementos de una representación; (ii) expresen lo que observan al arrastrar los elementos de una representación; (iii) comprendan los hechos geométricos con los cuales están configuradas las herramientas predeterminadas de los programas de geometría dinámica.

Por otro lado, el diseño de las actividades influyó de manera decisiva en la generación de un ambiente propicio para la constitución del criterio. Por esta razón se propone un diseño de actividades de exploración para que los estudiantes identifiquen invariantes y relaciones entre los elementos de una figura y se acompañen los hallazgos de los estudiantes con cuestionamientos que ayuden a validar o refutar dichos hallazgos; se propone un diseño de actividades de justificación para que los estudiantes aprendan a justificar por medio de hechos geométricos; se propone un diseño de actividades de representación para que los estudiantes representen figuras geométricas aludiendo a sus propiedades y se acompañen los procedimientos de representación para validarlos o refutarlos; se diseñen secuencias de actividades que involucren el uso de los programas de geometría dinámica, instrumentos de trazo y las convenciones para la representación de figuras geométricas.

Finalmente, consideramos que esta investigación es un aporte a la comunidad de educadores e investigadores en educación matemática ya que proporciona elementos que pueden orientar las prácticas de aula. Esta investigación destaca y evidencia el alcance de las interacciones en la constitución de una ambiente de aula cercano al de una comunidad matemática; acentúa el papel de las normas sociomatemáticas como un camino para orientar las practicas matemáticas en el aula; evidencia un proceso estructurado donde se observa que es posible que los estudiantes a temprana edad vayan adquiriendo una práctica matemática en donde se justifiquen y argumenten las aseveraciones mediante criterios teóricos acordados; muestra de manera practica un dialogo favorable entre los ambientes de representación de figuras geométricas (en programas de geometría dinámica, en lápiz y papel con instrumentos de trazo y a mano alzada).

5.3.2 Sobre la metodología del experimento

Resaltamos dos aspectos metodológicos importantes que fueron favorables para nuestro trabajo de investigación y que pueden interesar a la comunidad de investigadores y docentes de la educación matemática. Por un lado, la dinámica entre el equipo investigador (dos de sus integrantes) y la profesora *Rosa*, y por otro, dos instrumentos tecnológicos que favorecieron la recolección y organización de la información para el análisis.

La dinámica de socialización de las actividades entre dos integrantes del equipo investigador y la profesora *Rosa* fue benéfica para todas las partes implicadas. Cuando la profesora realizaba las actividades antes de llevarlas a cabo en el aula, ampliaba sus conocimientos en geometría y en el uso de GeogebraPrim; al mismo tiempo se lograba afinar las actividades. En la interacción en el aula de clase en los momentos de trabajo en grupo, ella observó las dinámicas de interacción modeladas por los dos integrantes del equipo investigador lo que le permitió mejorar sus prácticas como profesora. Además ella vivenció durante el desarrollo del experimento de enseñanza que los estudiantes avanzaban en el conocimiento geométrico y se mejoraba el ambiente de aula. Por su parte, como investigadores, los autores de este estudio pudimos apreciar que los aportes de la profesora *Rosa* fueron importantes para la investigación al orientarnos sobre las dinámicas de su aula de clase y lograr una relación amena entre la investigación matemática y la práctica de aula.

En cuanto a los instrumentos tecnológicos utilizados, destacamos el uso del programa Camtasia, de los computadores portátiles, ya que permitió capturar por medio de video las producciones de los estudiantes en GeogebraPrim, y las interacciones entre profesora y grupo de estudiantes y entre estudiantes, lo que facilitó la interpretación de dichas interacciones. También queremos destacar el uso del programa Atlas.ti ya que facilitó la organización, categorización y codificación de la información, y la configuración de las categorías de análisis.

5.3.3 Sobre cuestiones abiertas a futuras investigaciones

En la investigación se evidenció que en el aula de clase de geometría se establecen de manera implícita y explícita diferentes normas sociales y sociomatemáticas que afectan el ambiente de clase; por ello, es oportuno investigar sobre otras normas sociomatemáticas que apoyen los procesos de argumentación en geometría.

Como se evidenció en el Capítulo 4, los programas de geometría dinámica favorecen la enseñanza de la geometría. Al mismo tiempo, introducen cuestionamientos y retos referidos a su función, los cuales son necesario conocer y abordar con la finalidad de mejorar la labor docente y aportar a la investigación en didáctica de las matemáticas. Uno de esos cuestionamientos fue detectado en nuestra investigación y está relacionado con el uso significativo de las herramientas predeterminadas del programa previo a su uso. Con lo anterior queremos llamar la atención sobre la necesidad de hacer, con los estudiantes, un trabajo previo que se centre en la identificación de las propiedades geométricas con las que están configuradas las herramientas del programa de geometría dinámica.

En esta investigación se presenta una vía para la constitución colectiva del criterio sobre una representación gráfica adecuada de una figura geométrica; es oportuno que tal vía se ponga en práctica para retroalimentarla y complementarla.

En la vía que se propone en la investigación se hace énfasis en la interrelación de los ambientes en los que se trabajan las representaciones; es oportuno que las investigaciones en educación matemática busquen otras formas de relacionar tales ambientes. Lo anterior con la finalidad de brindar a los estudiantes herramientas que les permitan desenvolverse adecuadamente en uno u otro ambiente.

Los análisis del experimento de enseñanza mostraron que estudiantes de quinto de primaria lograron avances significativos en sus conocimientos geométricos. Por tal razón es necesario y oportuno realizar investigaciones sobre establecimiento de normas con estudiantes de grados inferiores.

5.4 Aportes personales del ejercicio investigativo

A continuación mencionamos los principales aportes de este ejercicio investigativo a la formación de los autores del estudio.

Nos permitió reflexionar sobre una problemática de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva teórica y a profundizar en la literatura investigativa para analizarla con otros lentes.

La participación como ponentes en distintos eventos nos brindó la posibilidad de comunicar nuestros hallazgos ante la comunidad académica siguiendo los estándares que ella propone. Al mismo tiempo, nos permitió llamar la atención de los profesores asistentes sobre el manejo que le dan a las representaciones de las figuras en sus clases y a reflexionar sobre el efecto de las normas en un aula de clase.

La investigación nos dejó una experiencia importante frente al acompañamiento de profesores en el aula bajo el rol de investigadores. Este acompañamiento nos permitió brindar a la profesora estrategias de planeación y ejecución que mejoraran tanto la práctica de aula de la profesora como de la nuestra en las clases de geometría.

El ejercicio investigativo nos enfrentó al estudio y dominio de las herramientas de los programas Camtasía y Atlas.ti. El estudio de las herramientas de Camtasía nos permitió adquirir destrezas sobre la edición de archivos de audio y video. El estudio de Atlas.ti nos permitió adquirir habilidades sobre el manejo de información para facilitar su organización, depuración, codificación y categorización, habilidades necesarias en el ejercicio investigativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boero P., Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice, Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

Camargo, Leonor (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis de Doctorado, Universidad de Valencia.

Cobb, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. En Kelly; Lesh. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. cap. 19, 517-545

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics 24, 139-162.

Gutiérrez, A. (2005): Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp. 27-44.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 805-842). Charlotte, NC:

Hershkowitz, R y Schwarz, B. The emergent perspective in rich learning environments: some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. Educational Studies in Mathematics Vol. 39, No. 1/3, Teaching and Learning Mathematics in Context (1999), pp. 149-166

Laborde Colette, Bernard Capponi. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *RDM*, *14*(1 y 2), pp. 165–210.

Laborde, C. (1996). Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En Puig, L (Eds.), Investigar y enseñar: Variedades de la educación matemática. Colombia: Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamérica.

Laborde, C. (1997). Cabri-Geómetra. En L. Puig, & J. Calderon, *Investigación y didáctica de las matemáticas* (págs. 67-85). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Laborde, C. (2005). The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry. En C. H. J. Kilpatrick, *Meaning in Mathematics Education* (págs. 159-179). Springer US.

Mariotti, M. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. *Revised and extended version of the version published in: Hejny M., Novotna J. Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (págs. 21-26). Praga: Prometheus Publishing House.

Mariotti, M.A. (2001). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics. 44 (1), 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173–204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Martin, T., McCrone, S. S., Bower, M. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Matematics, 60,* 95 - 124.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar ! *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.

Molina, M; Castro, E; Molina, J; Castro, E (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las Ciencias, 29(1), pp. 75-88 .

Olivero, F. (2003). The proving process within a dynamic geometry environment. Tesis de doctorado, University of Bristol, Graduate School of Education, England.

Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics 19, 79-92.

Planas, N., y Gorgorió, N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. Enseñanza de las Ciencias, 19(1), 135-150.

Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas, 30, 114-124.

Planas, N.; Font, V. (2003). Una aproximación sociocultural a las dificultades de aprendizaje matemático. I Congrés Internacional: Educació i diversitats: formació, acció i recerca

Sáenz-Ludlow, A., & Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture* (pp. 195–214). The Netherlands: Sense Publishers.

Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En *The emergence of mathemaical meaning*. P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). (pp. 163-199).

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458. doi:10.2307/749877

ANEXOS

ANEXO A Actividades por tarea

Anexo A.1 Tarea 1 Circunferencia

Actividad 1
Dibujar un segmento.
Activar el rastro a uno de los extremos del segmento.
Conservando la longitud del segmento, mover el extremo que tiene activo el rastro.
Discutir: ¿Qué se dibujó en la pantalla? ¿Por qué a unos les quedó mejor el dibujo que a otros? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien hecho el dibujo?
Actividad 2
Dibujar un segmento.
Activar el rastro a uno de los extremos del segmento.
Dibujar algunos puntos por donde debe pasar el extremo con rastro para que la representación de la circunferencia quede bien dibujada.
Pasar el extremo con rastro por los puntos que se dibujaron.
Discutir: ¿Quedó bien dibujada la circunferencia? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien dibujada? ¿Qué condiciones deben cumplir los puntos que dibujé para que la representación de la circunferencia quede bien?
Actividad 3
Dibujar una circunferencia utilizando la herramienta del programa GeogebraPrim.
Identificar los elementos que aparecen en la pantalla (centro, circunferencia y punto sobre circunferencia[14]).
Discutir: ¿Qué objetos aparecen en la pantalla? ¿Dónde están ubicados los puntos? Mover los puntos para observar: qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.
Construir un segmento que una los dos puntos (centro y punto sobre circunferencia).
Volver a mover los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.
Construir otro radio, mover nuevamente los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.

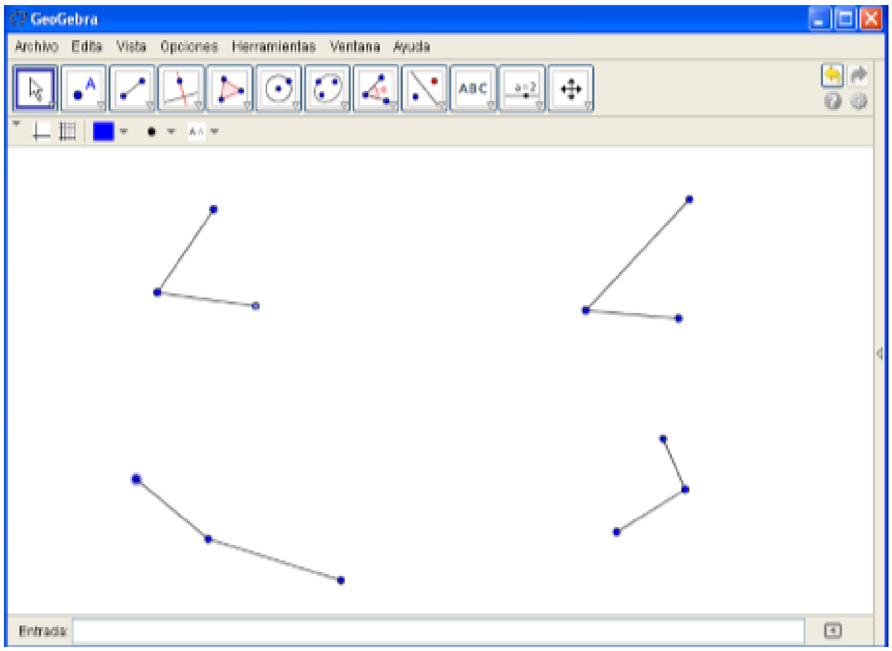
[14] En GeogebraPrim cuando se utiliza la herramienta predeterminada para construir una circunferencia, en la pantalla aparecen los objetos centro, circunferencia y punto sobre circunferencia.

Actividad 4

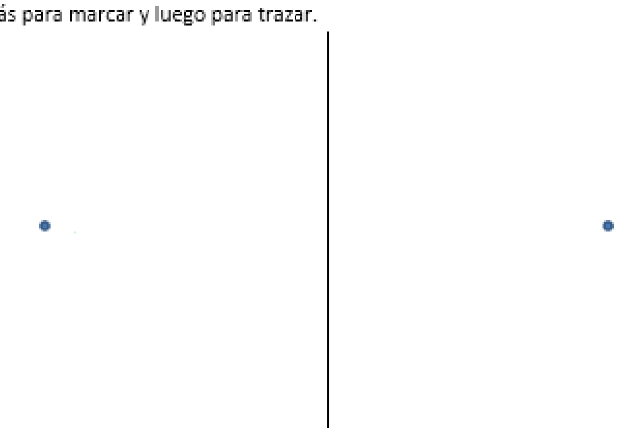
ACTIVIDAD CIRCUNFERENCIA

Nombre: ______________________________________ **Fecha:** ___________________________

1. ¿Cuál pareja de segmentos, al activar el rastro, forma una circunferencia? ¿Por qué?

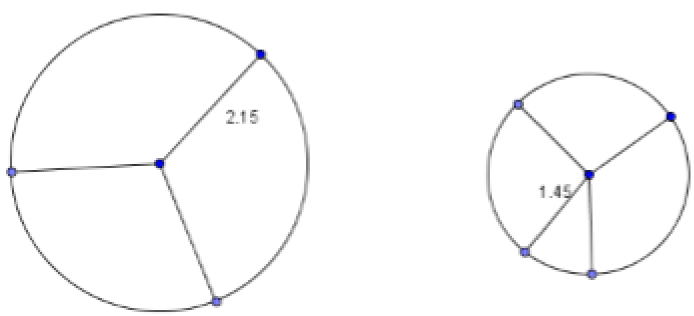


2. Ubica seis puntos que estén a la misma distancia de cada punto dado y construye una circunferencia en cada caso. Utiliza el compás para marcar y luego para trazar.

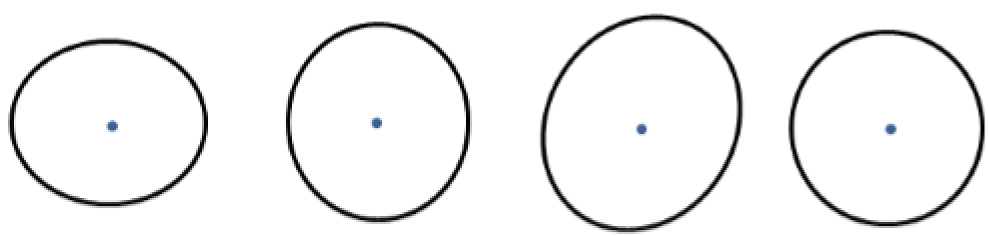


3. Construye una circunferencia en cada caso según la medida de cada radio.

4. ¿Puedes escribir la medida de los demás radios de cada circunferencia? ¿Por qué? Escríbela.



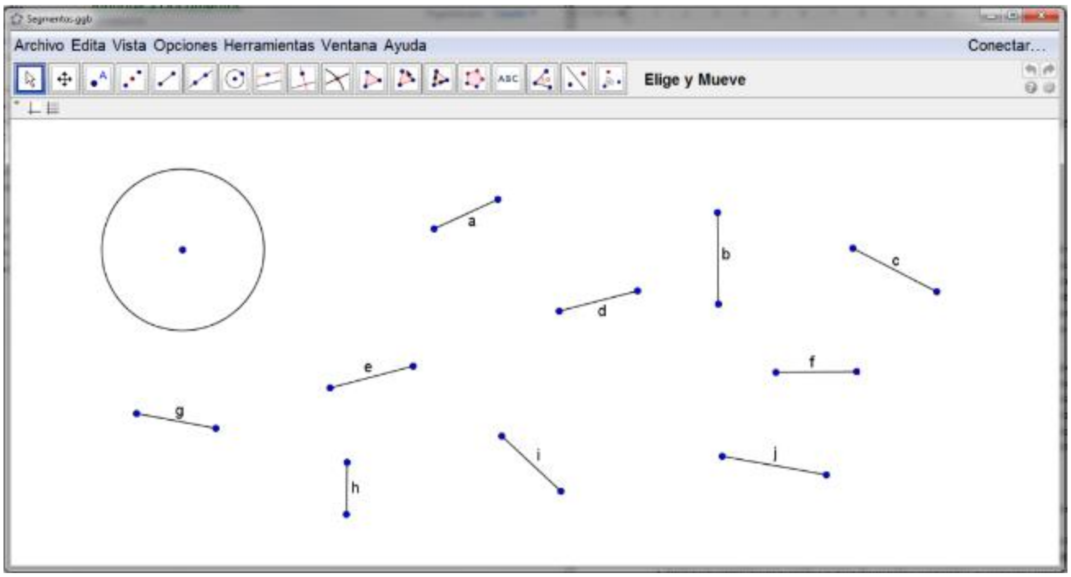
5. ¿Cuáles son circunferencias? ¿Por qué?



Anexo A.2 Tarea 2 Segmentos congruentes

Actividad 1

Se presenta en GeogebraPrim un archivo con segmentos de diferentes longitudes no modificables y una circunferencia con radio fijo[15]. Se les pide a los estudiantes que identifiquen los segmentos congruentes con el segmento *d* (el segmento *d* es congruente con el radio de la circunferencia).



[15] Los segmentos de longitud fija están estáticos. La circunferencia de radio fijo se puede mover por toda la interfaz.

Actividad 2

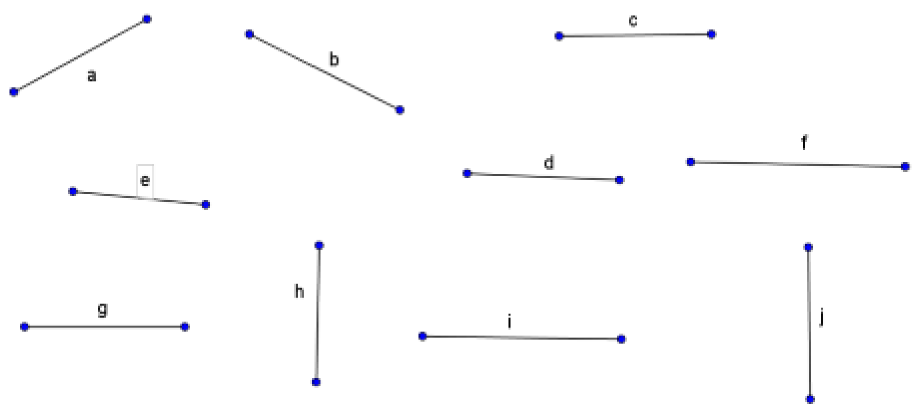
ACTIVIDAD SEGMENTOS CONGRUENTES

Nombres: ____
____

Fecha: ______________________

1. ¿Cuáles segmentos de los que aparecen en la pantalla son congruentes con el segmento d? ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

2. ¿Cuáles de estos segmentos son congruentes? ¿Cómo lo averiguaron?

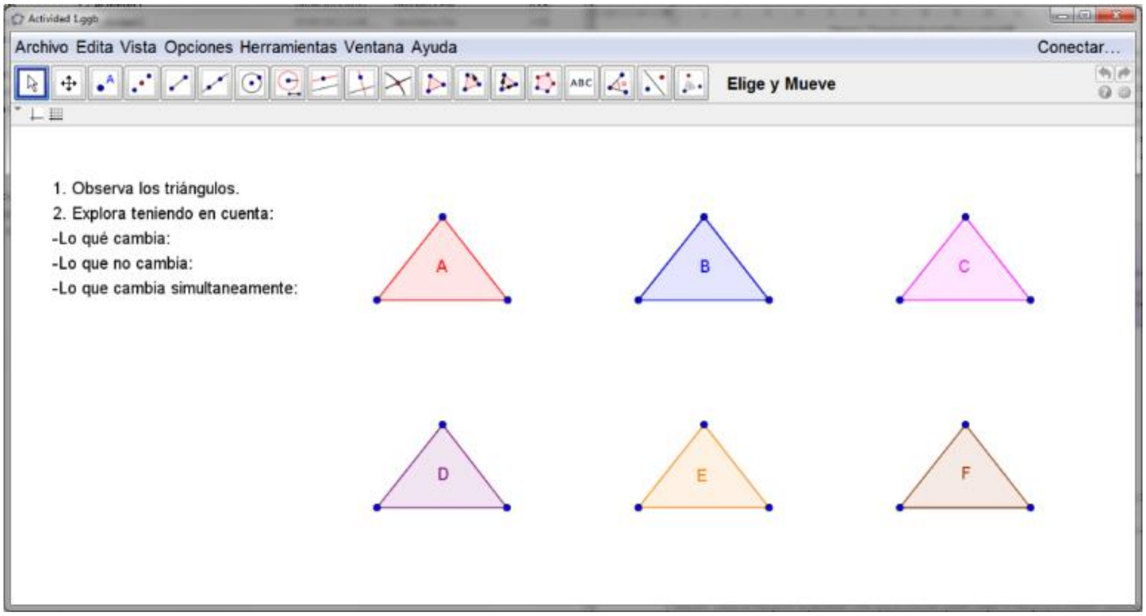


____
____
____
____
____
____

Anexo A.3 Tarea 3 Triángulo isósceles

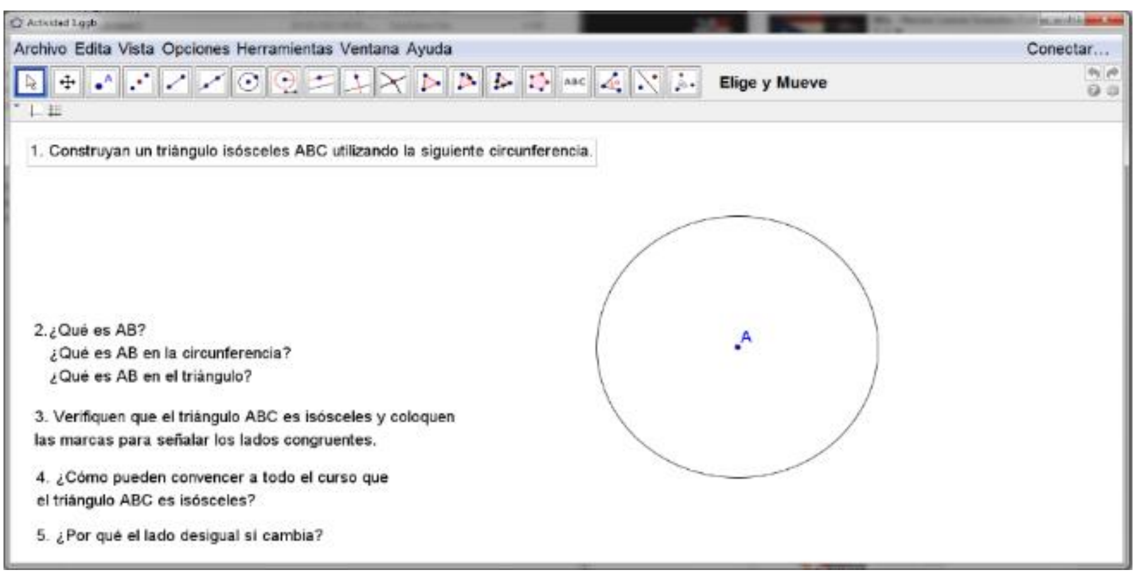
Actividad 1

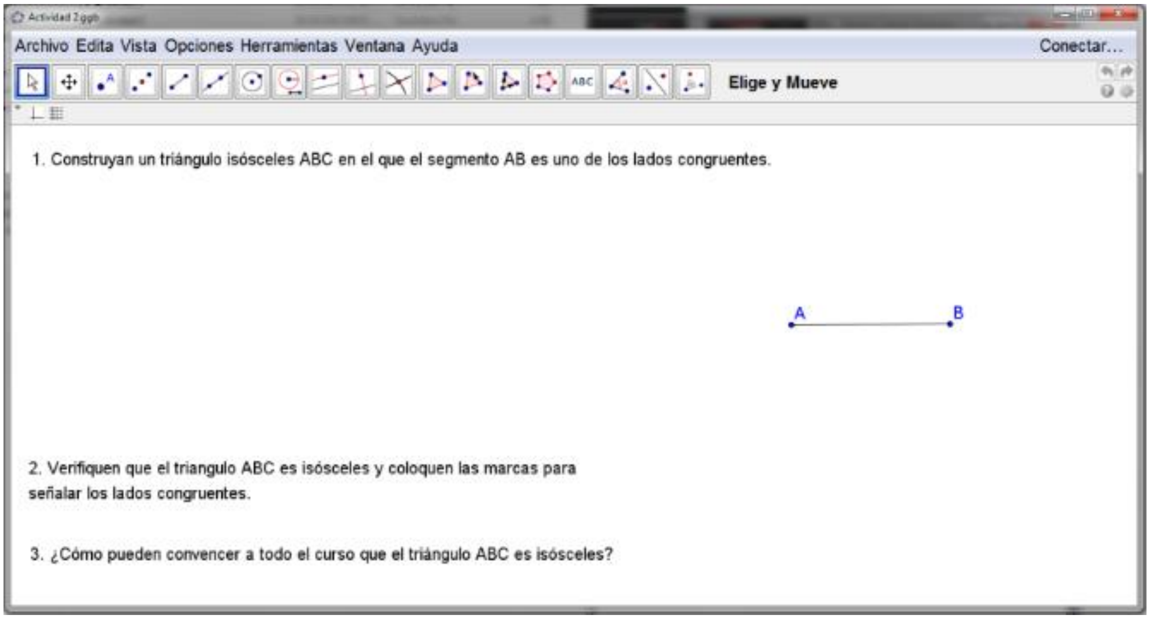
Se presenta en GeogebraPrim el siguiente archivo, en el que hay tres representaciones robustas de triángulos isósceles y tres blandas.

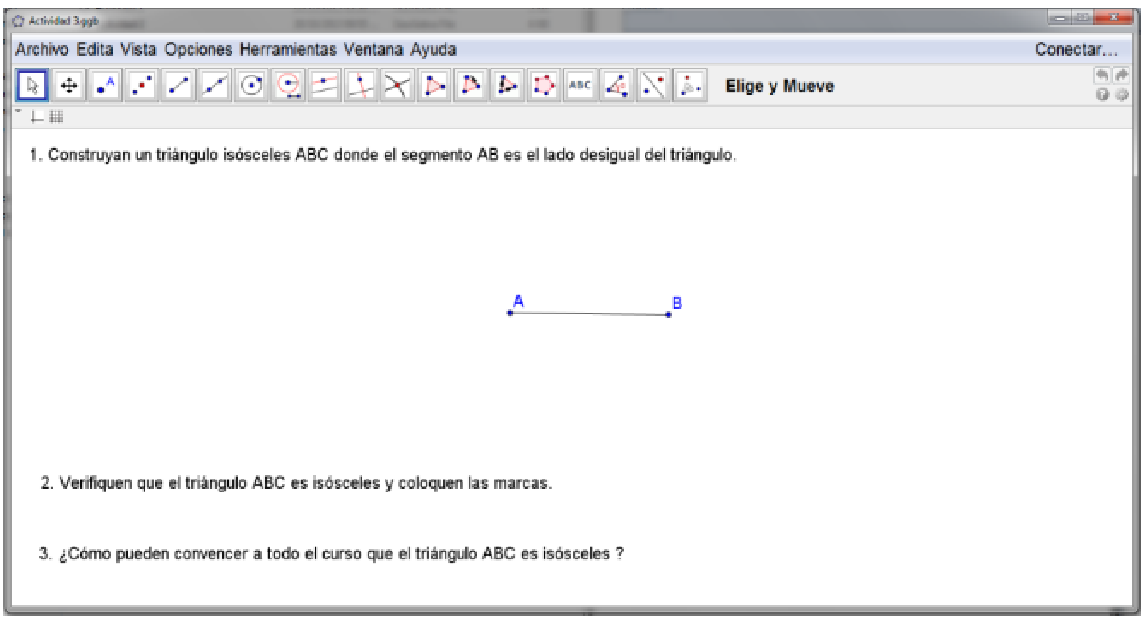


Actividades 2, 3 y 4

Se presenta a los estudiantes cada uno de los siguientes archivos.




Actividad 2.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Conectar...
Elige y Mueve
1. Construyan un triángulo isósceles ABC en el que el segmento AB es uno de los lados congruentes.
A
B
2. Verifiquen que el triangulo ABC es isósceles y coloquen las marcas para
señalar los lados congruentes.
3. ¿Cómo pueden convencer a todo el curso que el triángulo ABC es isósceles?

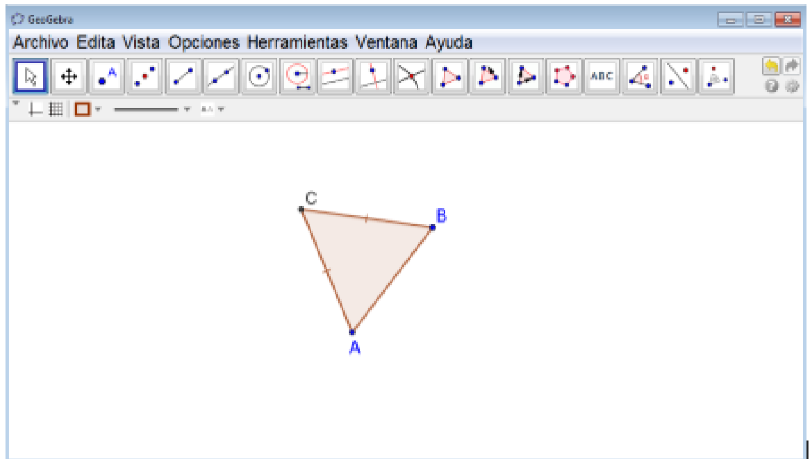

Actividad 3.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Conectar...
Elige y Mueve
1. Construyan un triángulo isósceles ABC donde el segmento AB es el lado desigual del triángulo.
A
B
2. Verifiquen que el triángulo ABC es isósceles y coloquen las marcas.
3. ¿Cómo pueden convencer a todo el curso que el triángulo ABC es isósceles ?

Actividad 5

ACTIVIDAD TRIÁNGULO ISÓSCELES

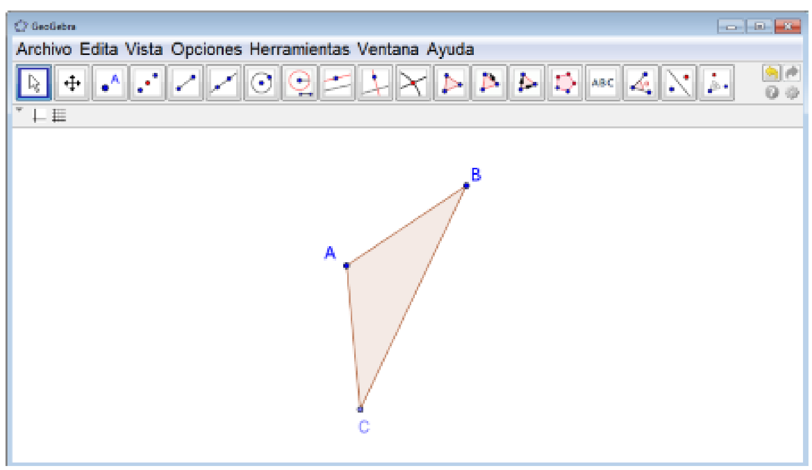
Nombre: ____ **Fecha:** ________________________________

1. ¿Qué pasa en GeogebraPrim con los lados del triángulo ABC al arrastrar los vértices?



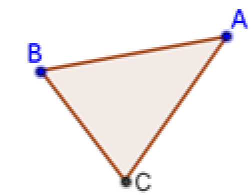
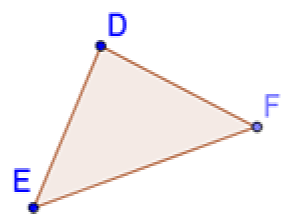
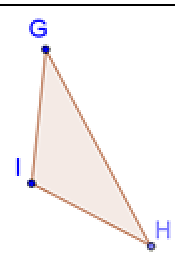
____
____
____
____

2. ¿Qué pasa en GeogebraPrim con los lados del triángulo ABC al arrastrar los vértices?



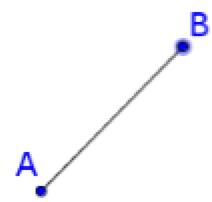
____
____
____
____

3. Comprueba si cada triángulo es isósceles, explica tu respuesta. Coloca las marcas que señalan los lados congruentes si el triángulo es isósceles.

	Si No	Porque ______
	Si No	Porque ______
	Si No	Porque ______

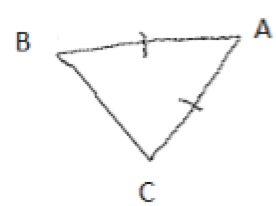
4. Construye un triángulo isósceles ABC y escribe cómo puedes convencer a tus compañeros que es isósceles.

5. Realiza los siguientes pasos para construir un triángulo a partir del segmento AB:



- Construye dos circunferencias que tengan el mismo radio, una con centro en A y otra con centro en B.
- Marca con C uno de los puntos donde se cortan las circunferencias.
- Construye el triángulo ABC.
- ¿Qué tipo de triángulo es? Explica tu respuesta.

6. El profesor Jorge dibujó en el tablero el siguiente triángulo.



¿Qué puedes decir de los segmentos AC y AB?

____

____

¿Qué puedes decir del triángulo ABC?

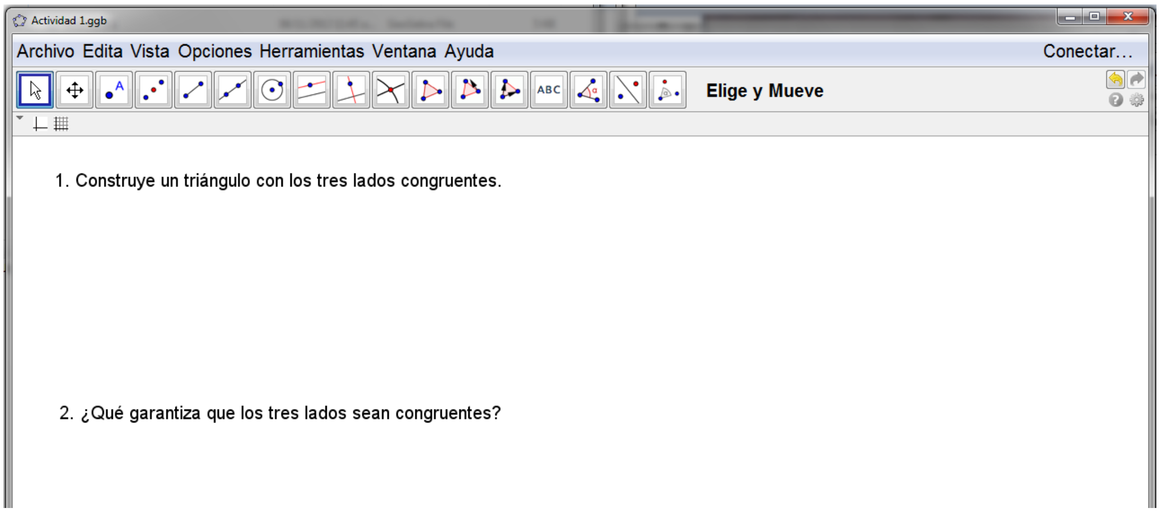
____

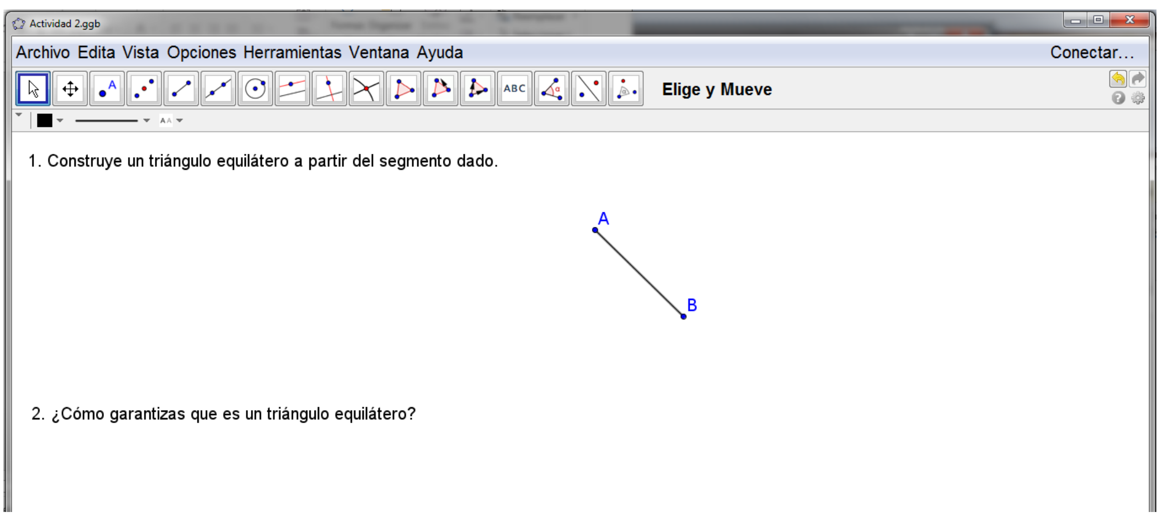
____

Anexo A.4 Tarea 4 Triángulo equilátero

Actividades 1 y 2

Se presenta a los estudiantes los siguientes archivos.



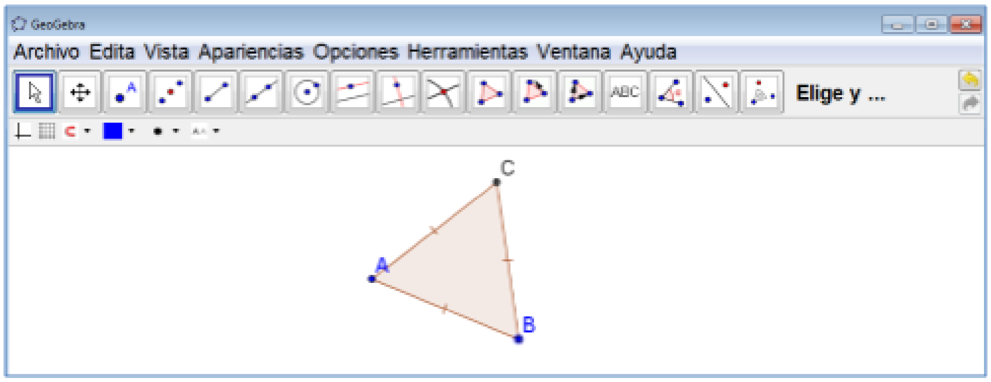


Actividad 3

ACTIVIDAD TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Nombre: ____ **Fecha:** ____________________________

1. Si observas estos triángulos en el computador de un compañero, ¿qué crees pasará con las medidas de los lados cuando él arrastre los vértices, A, B y C en cada triángulo?

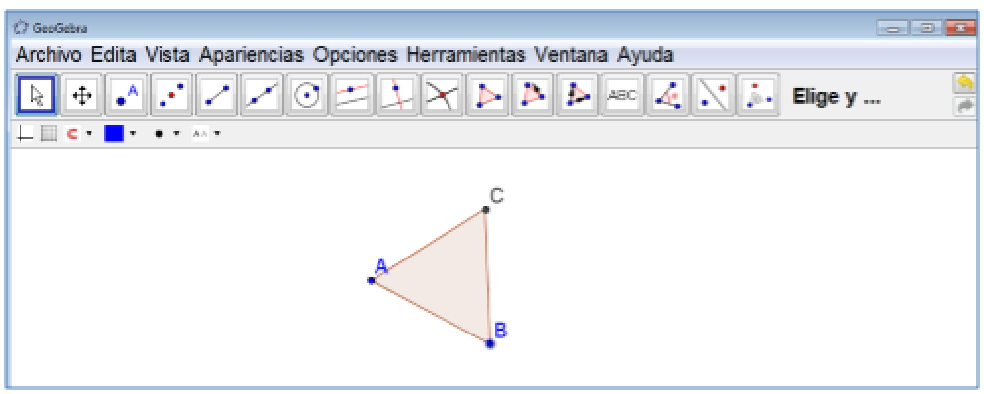


____

____

____

____



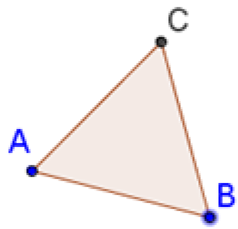
____

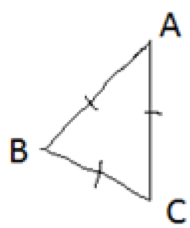
____

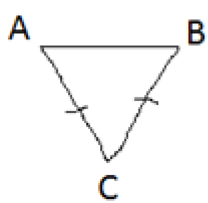
____

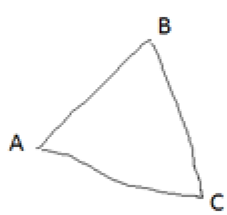
____

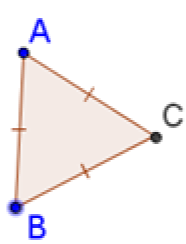
2. Sin utilizar el compás indica si cada dibujo representa o no un triángulo equilátero. Explica tu respuesta.

	Si	Porque
	No	
	No se sabe	

	Si	Porque
	No	
	No se sabe	

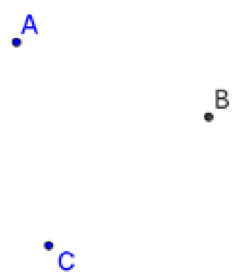
	Si	Porque
	No	
	No se sabe	

	Si	Porque
	No	
	No se sabe	

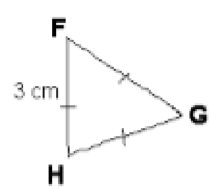
	Si	Porque
	No	
	No se sabe	

3. Construye un triángulo equilátero ABC utilizando regla y compás. Escribe cómo puedes convencer a tus compañeros que es equilátero.

4. Sin dibujar los lados del triángulo que se forma al unir los puntos A, B y C, determina si el triángulo es equilátero. Explica porque propones esa respuesta.



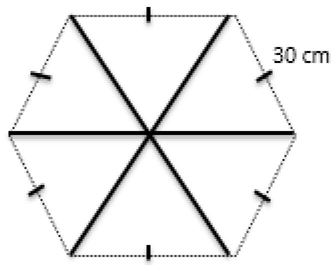
5. Calcula en el recuadro la suma de las medidas de los lados del triángulo FGH.



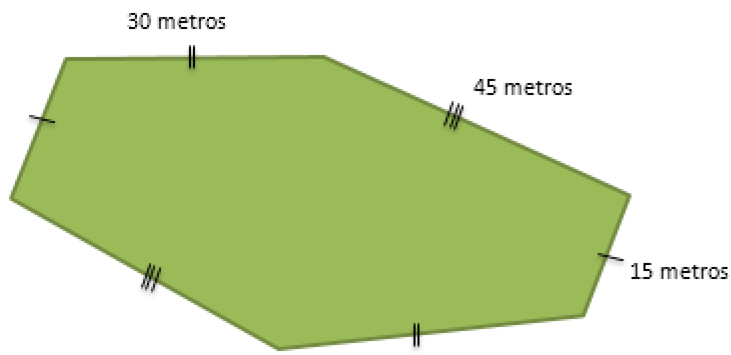
Anexo A.5 Tarea 5 Aplicación

Nombre: ______________________________ Fecha: ____________________

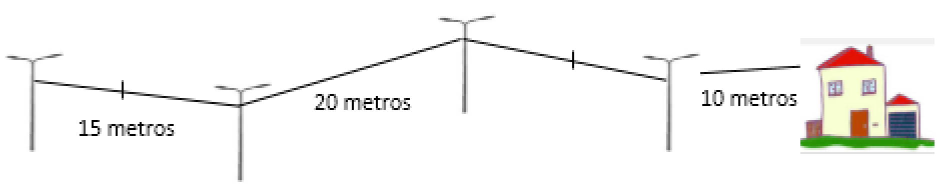
1. Andrés quiere colocarle pita al contorno de su cometa, ¿cuánta pita necesita?



2. Don Federico va a cercar un terreno para sembrar mazorca, ¿cuánto alambre de púa necesita comprar para cercar con una vuelta? ¿Cuánto para cercar con dos vueltas?



3. ¿Cuántos metros de cable se necesitan para que el servicio de luz llegue a la casa de Marcos?



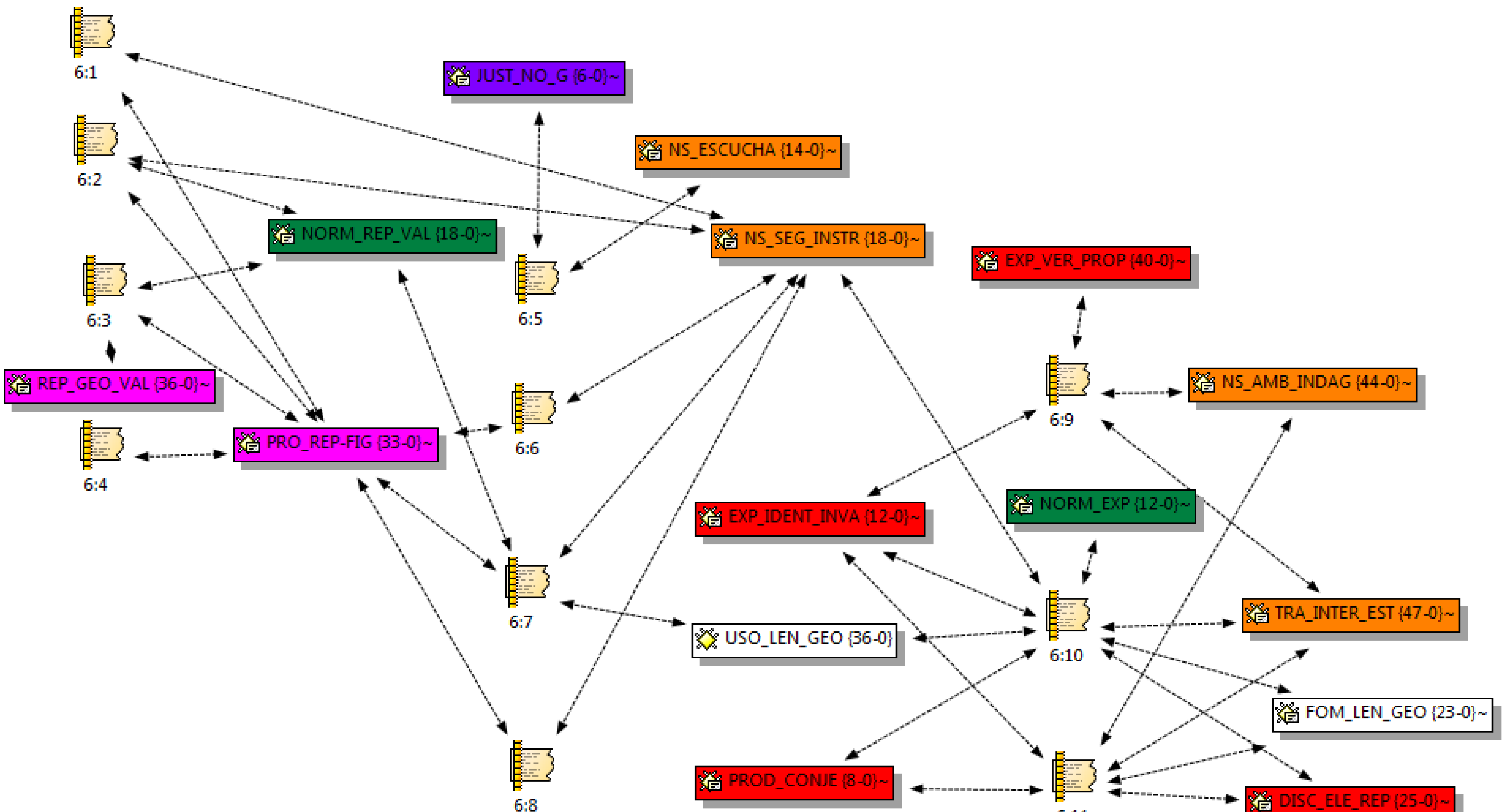
ANEXO B Descripción de códigos por familias

Familia	Descripción	Código asignado
Normas	El código se usa cuando profesora, estudiantes o investigadores hacen mención explícita de las normas acordadas para representar una figura geométrica, a mano alzada (se usa la convención), con instrumentos de trazo (se usa el compás y la regla no graduada) o en GeogebraPrim (soporte el arrastre).	NORM_REPR_VAL
	El código se usa cuando profesora, investigadores o estudiantes hacen mención explícita a la norma que se debe poner en práctica al hacer una exploración en GeogebraPrim: identificar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente al mover los elementos constitutivos de la representación.	NORM _EXP
	El código se usa cuando profesora, estudiantes o investigadores hacen mención explícita a la norma de justificar propiedades con base en los hechos geométricos aceptados previamente.	NORM _JUST
Lenguaje geométrico	El código se usa cuando los estudiantes hacen uso (o intentan hacer uso) de lenguaje geométrico especializado al comunicar la solución a un problema, al explicar una idea, al justificar sus afirmaciones, etc.	USO_LEN_GEO
	El código se usa cuando profesora, investigadores o estudiantes fomentan el uso de lenguaje geométrico para favorecer el intercambio comunicativo al referirse a las representaciones geométricas.	FOM_LEN_GEO
Exploración	El código se usa cuando los estudiantes reconocen en una representación los elementos constitutivos o unidades configurales de una figura.	DISC_ELE_REP
	El código se usa cuando la profesora, los investigadores o los estudiantes mencionan que un elemento de una figura geométrica puede desempeñar un rol diferente en las representaciones existentes.	DIF_ROL_ELEM_FIG
	El código se usa cuando los estudiantes intervienen sobre una representación hecha en GeogebraPrim, en busca de invariantes.	EXP_IDENT_INVA
	El código se usa cuando los estudiantes intervienen sobre una representación para verificar que cumple una propiedad.	EXP_VER_PROP
	El código se usa cuando los estudiantes hacen una formulación explícita de una conjetura relacionada con una propiedad de la figura geométrica.	PROD_CONJE
Representaciones	El código se usa cuando los estudiantes realizan una representación de una figura geométrica (a mano alzada, con instrumentos de trazo o en GeogebraPrim).	PRO_REP_FIG
	El código se usa cuando profesora, investigadores o estudiantes juzgan si una o representación (a mano alzada, con instrumentos de trazo o en GeogebraPrim) es o no válida, según las normas de representación.	REP_GEO_VAL
	El código se usa cuando los estudiantes, la profesora o los investigadores usan, por insinuación o de manera espontánea, la convención para indicar la congruencia de segmentos.	USO_CONV
	El código se usa cuando profesora o investigadores hacen preguntas sobre la convención acordada para representar la congruencia o impulsan a los estudiantes a referirse a tal convención.	INDAG_CONV
	El código se usa cuando los estudiantes evocan el invariante detectado en GeogebraPrim para responder preguntas en lápiz y en papel y en las socializaciones.	JUST_EVOC_INV_
	El código se usa cuando los estudiantes explican la congruencia de segmentos a partir de la convención.	JUST_CONV

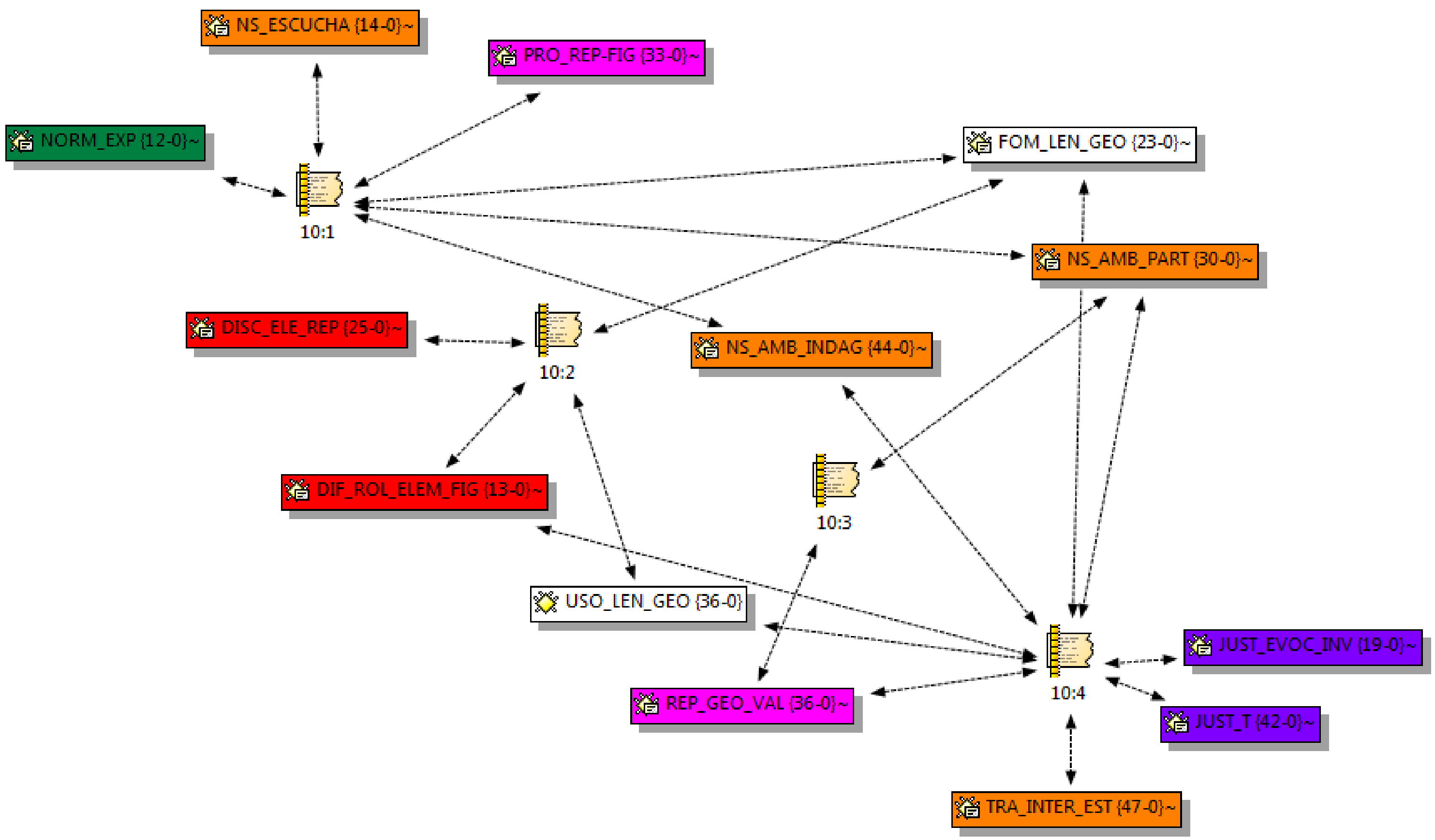
	El código se usa cuando los estudiantes justifican una propiedad geométrica utilizando uno de los hechos geométricos aceptados en el aula.	JUST_T
	El código se usa cuando los estudiantes justifican una propiedad geométrica sin apoyarse en los hechos geométricos establecidos.	JUST_NO_G
Hechos geométricos	El código se usa cuando profesora, investigadores y estudiantes institucionalizan los hechos geométricos o hacen mención a que se institucionalizaron.	INSTI_H_GEOM
Convención	El código se usa cuando los estudiantes hacen uso del significado de la convención para obtener información de una representación.	APLI_CONV
Ambiente de aula	El código se usa cuando la profesora o los investigadores promueven la participación oral de los estudiantes para socializar procedimientos o ideas, opinar sobre las ideas o los procedimientos de otros, complementar o aclarar información dicha por un compañero, establecer acuerdos, etc.	NS_AMB_PART
	El código se usa cuando la profesora saca provecho de la intervención de un estudiante para favorecer la constitución colectiva del criterio.	TRA_INTER_EST
	El código se usa cuando la profesora o los investigadores promueven que los grupos de estudiantes lleven a cabo la misma actividad y en tiempos acordados para que tengan experiencias similares que puedan compartir y de las que se puedan llegar a acuerdos.	NS_SEG_INSTR
	El código se usa cuando la profesora o los investigadores promueven intervenciones que motivan a los estudiantes a justificar afirmaciones o a hacer(o hacerse) preguntas sobre el porqué de ciertos hechos geométricos, el porqué de algunos comportamientos al arrastre, el porqué de las construcciones que realizan, el porqué de sus respuestas, etc.	NS_AMB_INDAG
	El código se usa cuando la profesora o los investigadores promueven un ambiente de escucha y respeto a las intervenciones de los compañeros.	NS_ESCUCHA

ANEXO C. Redes de relaciones

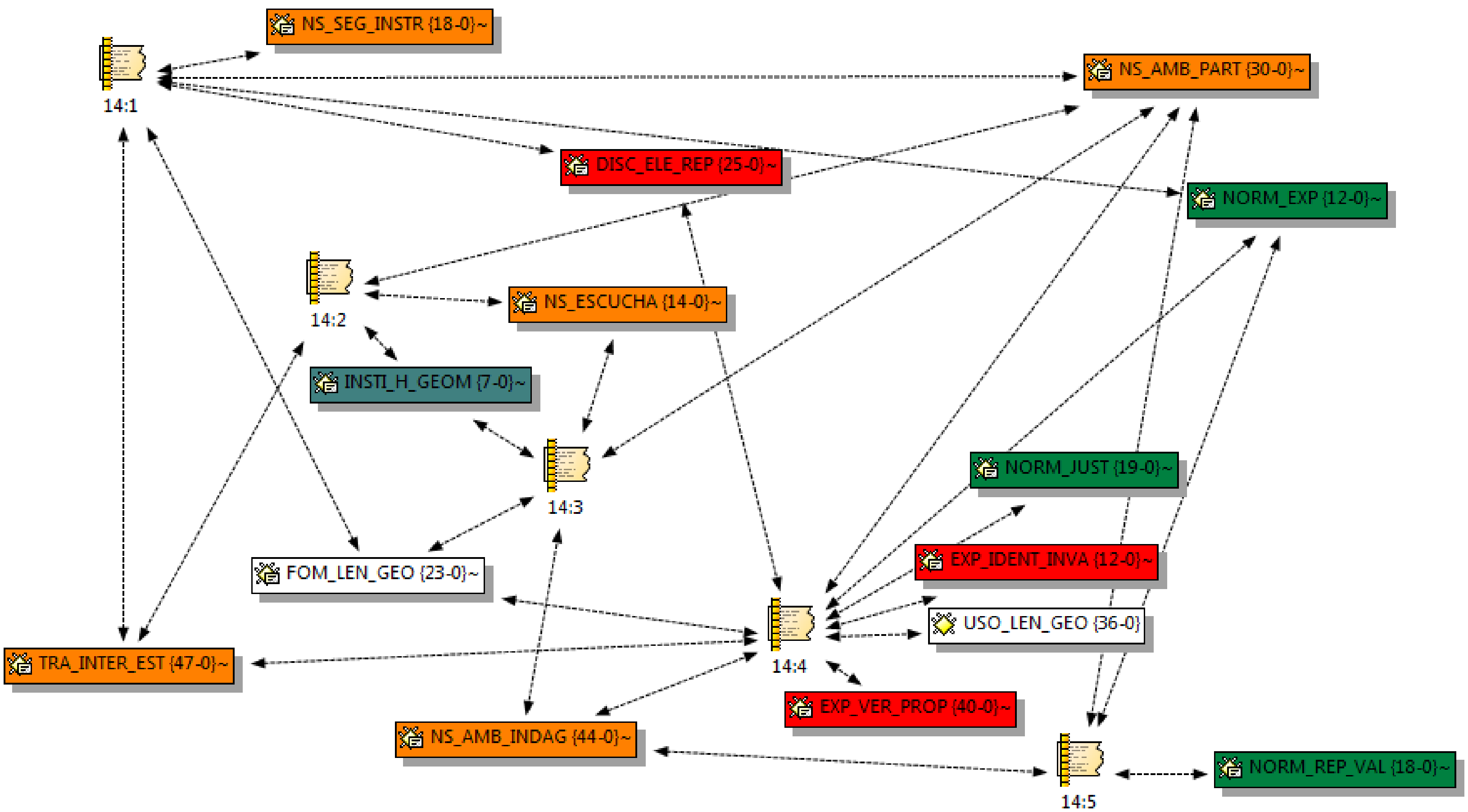
Anexo C.1 Red de relaciones socialización Sesión 1



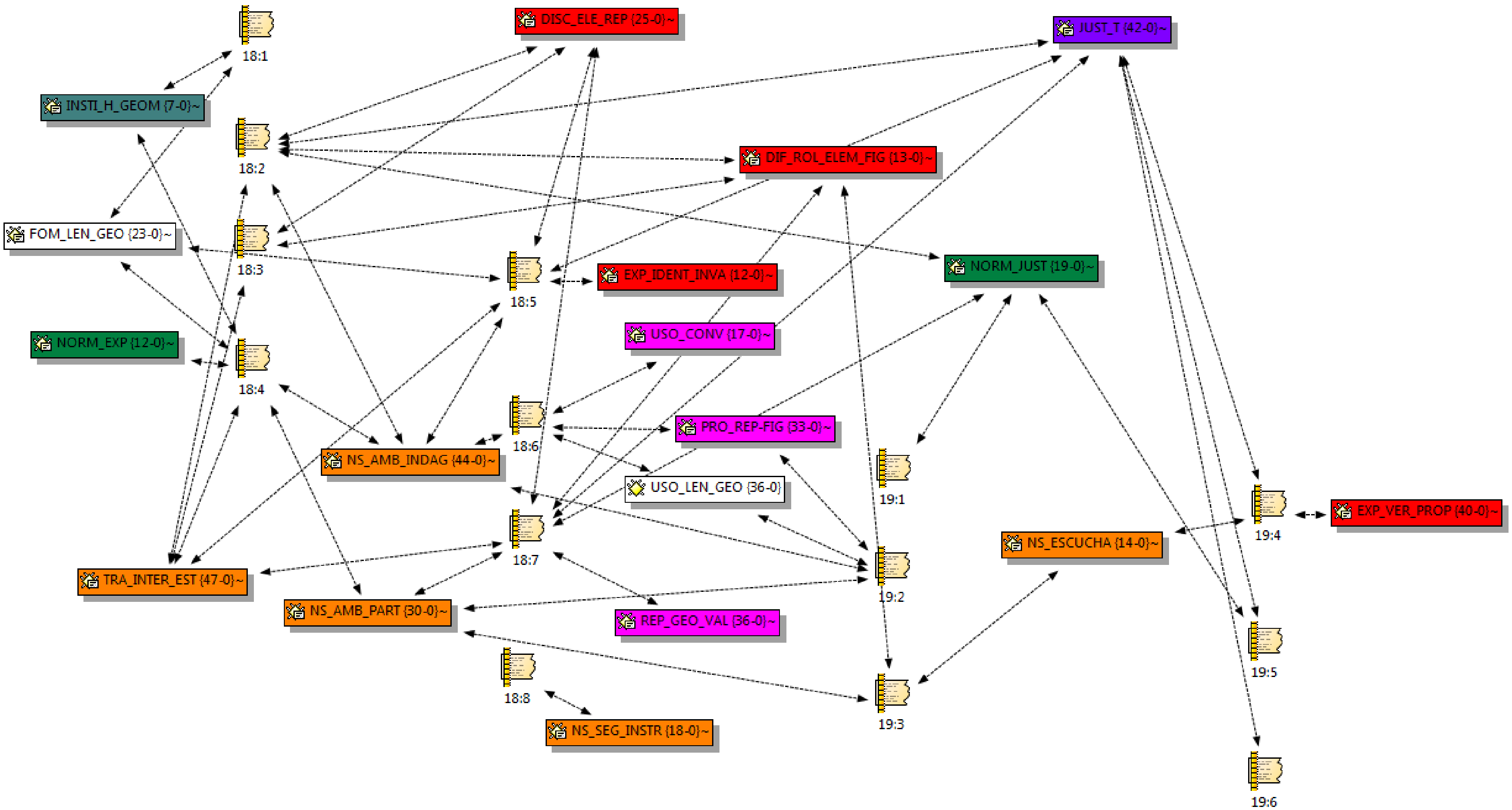
Anexo C.2 Red de relaciones socialización Sesión 2



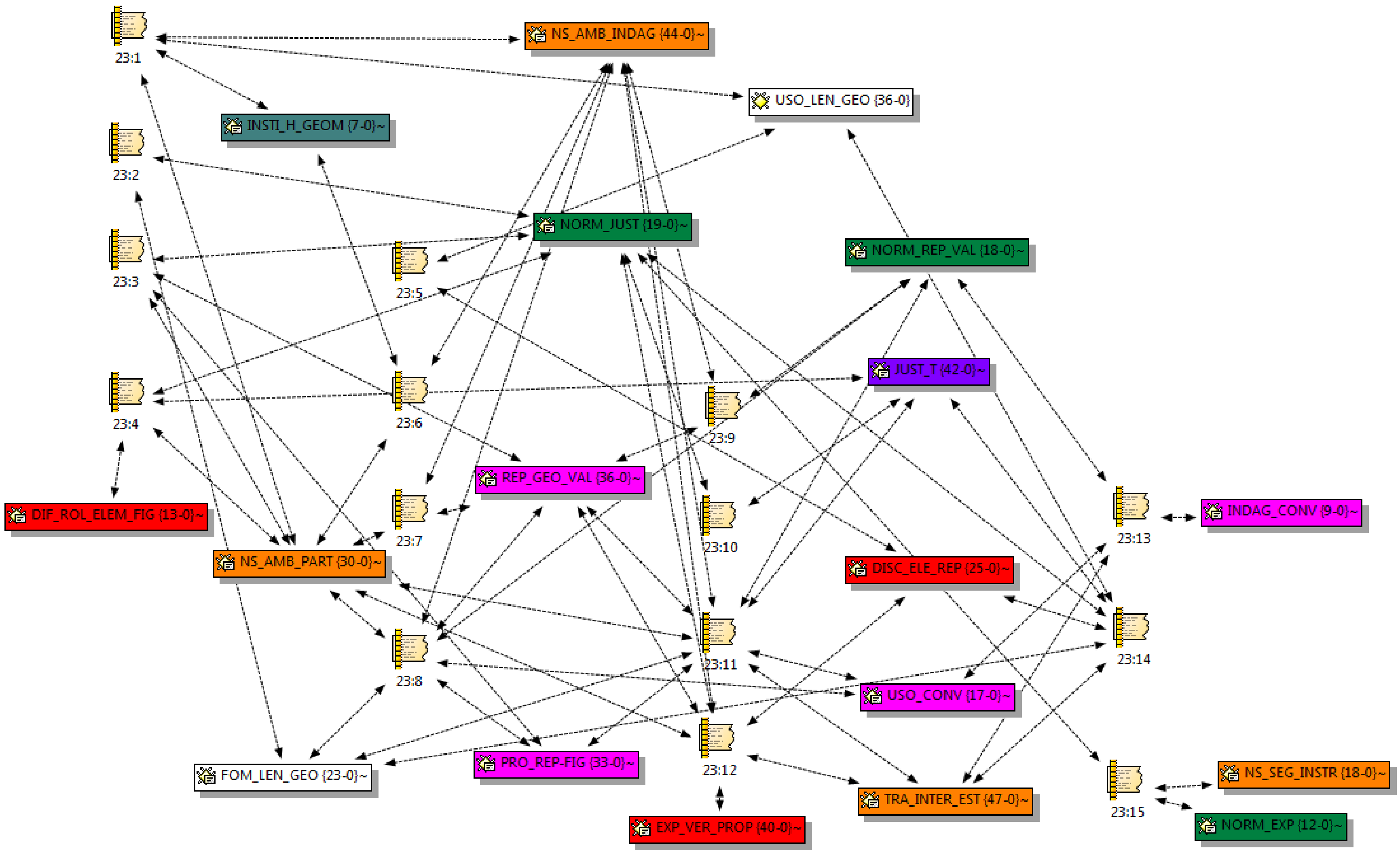
Anexo C.3 Red de relaciones socialización Sesión 3



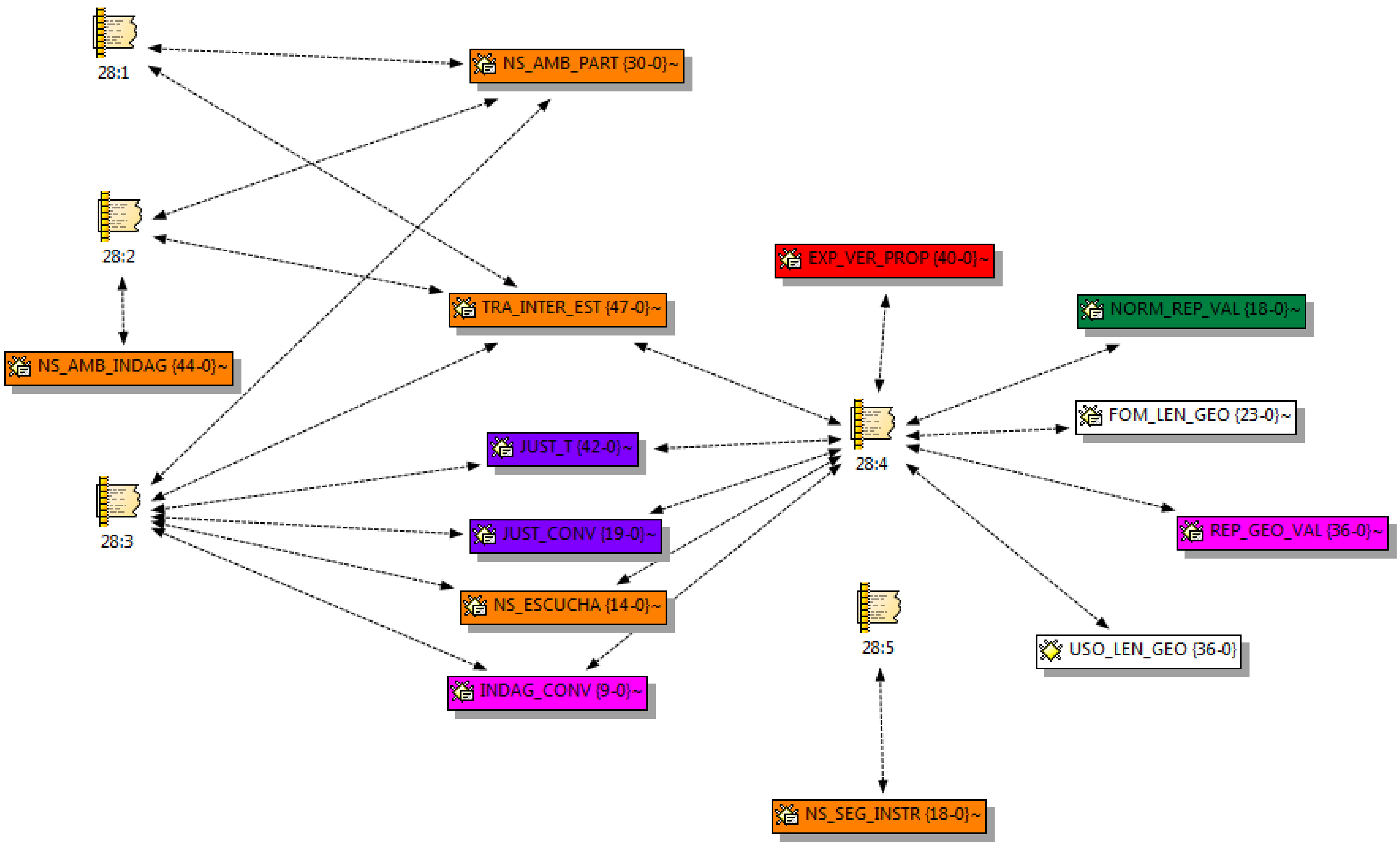
Anexo C.4 Red de relaciones socialización Sesión 4



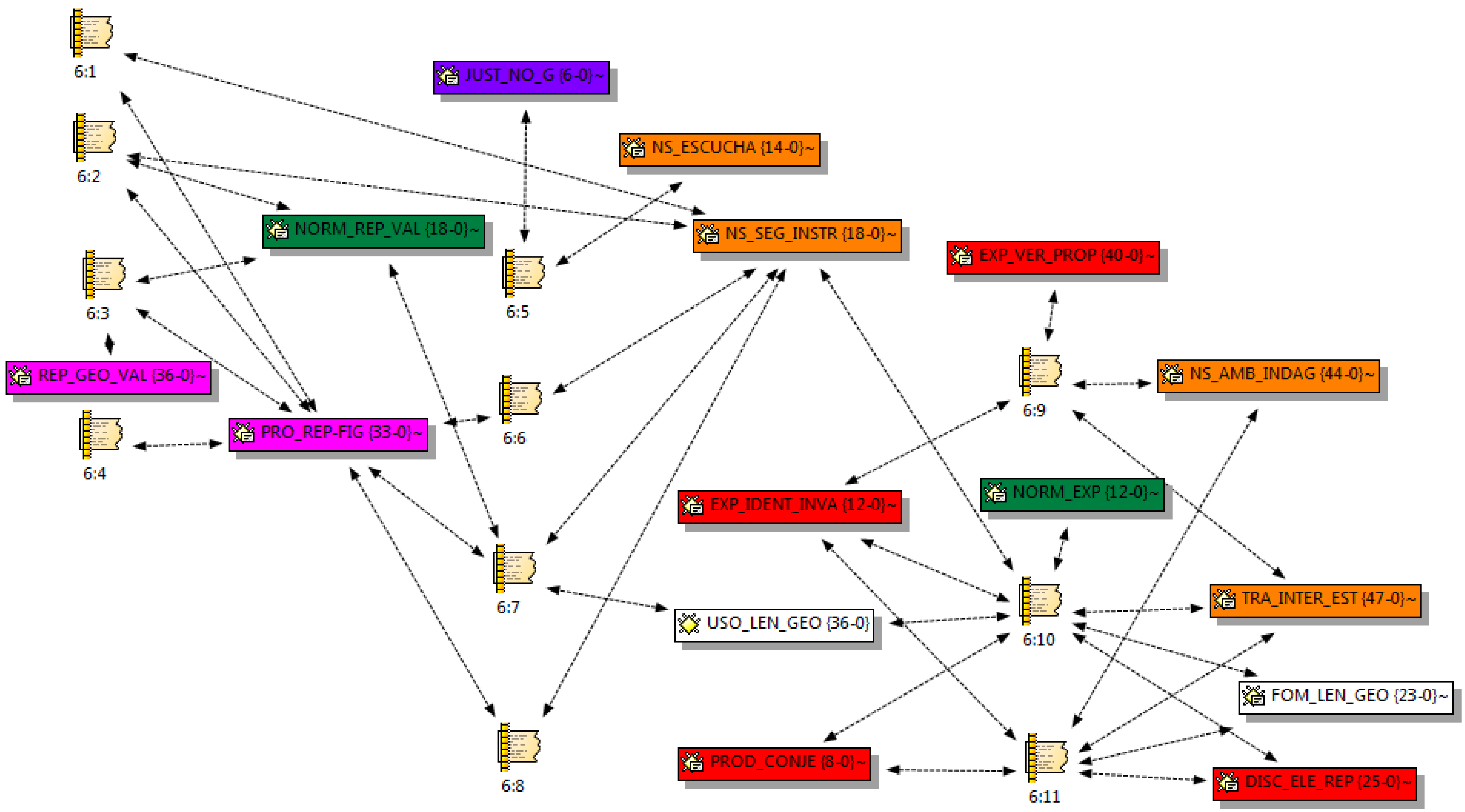
Anexo C.5 Red de relaciones socialización Sesión 5



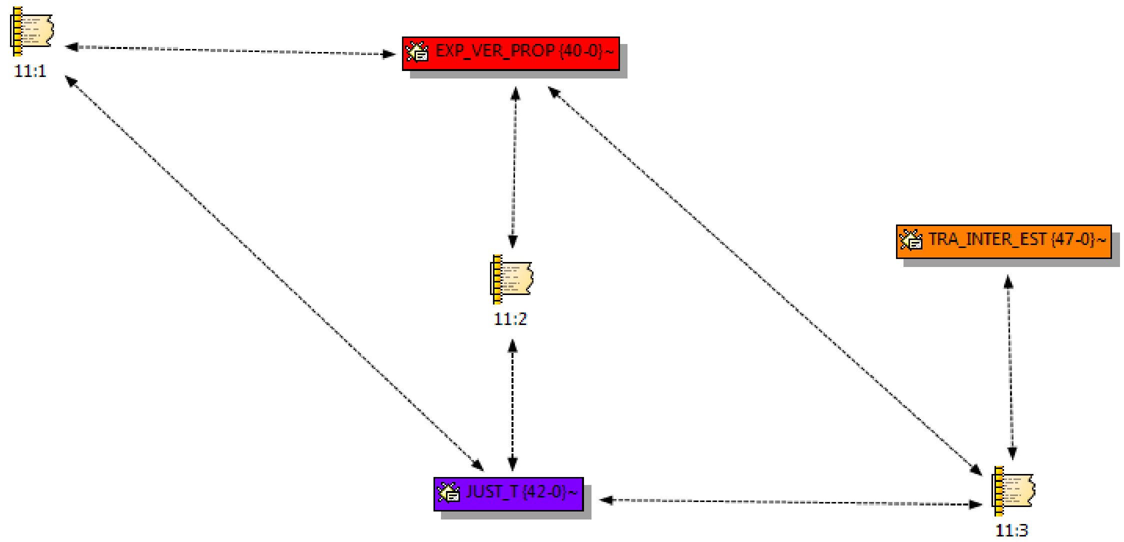
Anexo C.6 Red de relaciones socialización Sesión 6



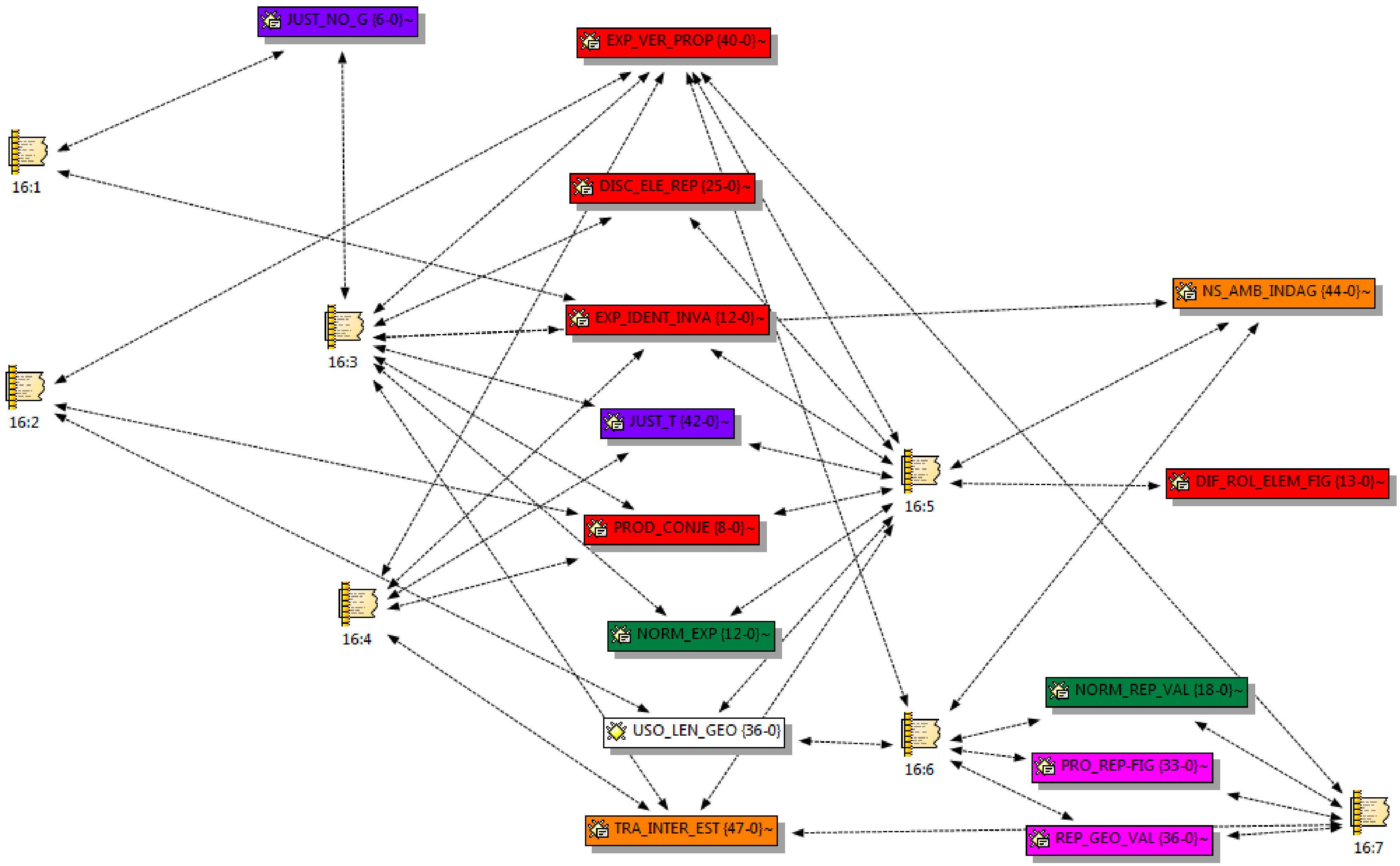
Anexo C.7 Red de relaciones trabajo en GeogebraPrim Sesión 1



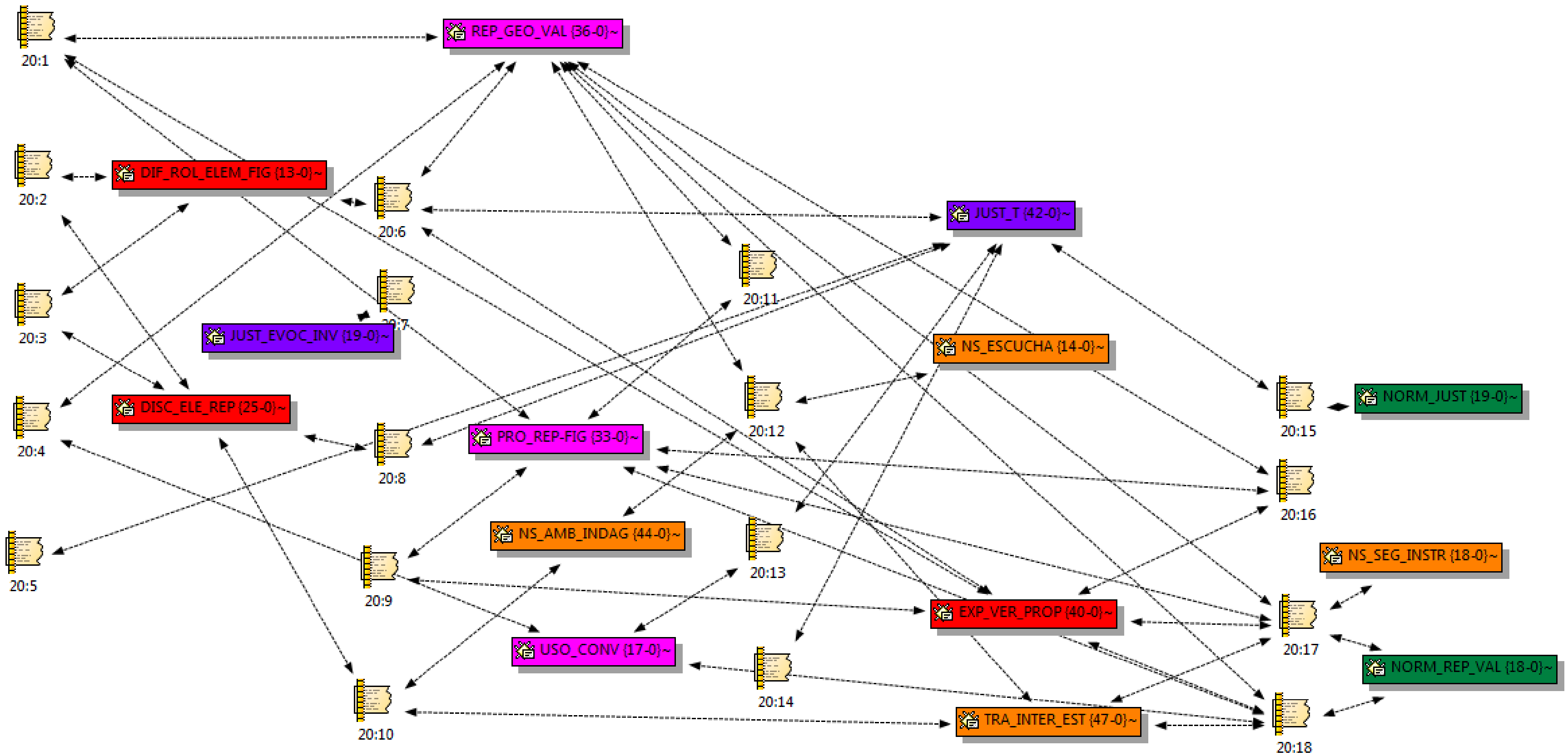
Anexo C.8 Red de relaciones trabajo en GeogebraPrim Sesión 2



Anexo C.9 Red de relaciones trabajo en GeogebraPrim Sesión 3



Anexo C.10 Red de relaciones trabajo en GeogebraPrim Sesión 4



Anexo C.11 Red de relaciones trabajo en GeogebraPrim Sesión 6