EL CASO DE LOS PROCESOS INFINITOS PRESENTES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES EN ALGUNOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE 8° VISTOS DESDE LA TEORÍA APOE

MAGDA PILAR ÁNGEL RUÍZ

2013185001

ALEJANDRO HUMBERTO ROJAS TOVAR

2013185019

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2014

EL CASO DE LOS PROCESOS INFINITOS PRESENTES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES EN ALGUNOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE 8° VISTOS DESDE LA TEORÍA APOE

MAGDA PILAR ÁNGEL RUÍZ

2013185001

ALEJANDRO HUMBERTO ROJAS TOVAR

2013185019

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Asesor

Edwin Carranza

Docente Universidad Pedagógica Nacional

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2014

Dedicatoria

A mi mamá y hermanas...
por su apoyo incondicional, paciencia en todo este proceso y por ser los pilares fundamentales en mi vida.

A mi papá
que desde el cielo me acompaña y se convirtió en mi angelito guardián…

A mi bebé y esposo...
por brindarme su amor, tiempo, compañía y motivación para culminar con éxito este proyecto de grado.

Magda

Dedicatoria

Dedico esta nueva meta alcanzada

a todas las personas que me acompañan y me apoyan a diario

porque sin su apoyo e impulso

lo que hoy he alcanzado no tendría el valor que gracias a ellos tiene.

A mi familia y a mi novia, a mis amigos y compañeros

a mis colegas y estudiantes…..

Gracias

Alejandro

Agradecimientos

Agradecemos a los profesores Edwin Carranza y Jeannette Vargas por su acompañamiento y asesoría a lo largo del desarrollo de este trabajo, y a todos los docentes de la Maestría quienes contribuyeron con su conocimiento a nuestra formación.

Para todos los efectos legales, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

Tabla de Contenido

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1.Información General	
Tipo de documento	Tesis de Grado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El Caso de los Procesos Infinitos presentes en la Construcción de los Números Reales en algunos Libros de Texto de Matemáticas de 8° vistos desde teoría APOE
Autor(es)	ÁNGEL RUÍZ, Magda Pilar ROJAS TOVAR, Alejandro Humberto
Director	CARRANZA, Edwin
Publicación	Bogotá D.C. 157 páginas
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Procesos Infinitos, Acción, Proceso Objeto declarado, Objeto Promovido, Conmensurabilidad, Inconmensurabilidad, Racionalidad, Irracionalidad, Completitud y Continuidad.

2.Descripción
El presente trabajo de grado pretende establecer la manera en que las formas de conocer determinadas por la teoría APOE se relacionan la estructura de dos libros de texto de grado octavo en cuanto a los procesos infinitos que se involucran en la construcción de los Números Reales. Para alcanzar este fin, se analizaron las unidades de dos textos de octavo grado que estuvieran dirigidas a la construcción de los números reales y en éstas se determinó la manera como los procesos infinitos se involucran con la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad, la Racionalidad e Irracionalidad, la Completitud y Continuidad que son aspectos que junto a las formas de conocer establecidas por la teoría APOE determinaron las categorías de análisis.

3.Fuentes
Entre las fuentes de información sobre las que soportamos los aspectos teóricos y metodológicos de nuestro estudio se encuentra el artículo *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education* de Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) el cual nos sirvió en la fundamentación sobre la teoría APOE. Por otra parte, acudimos a artículos relacionados con el análisis de contenido y otros que fundamentan la presencia de los procesos infinitos en la Construcción de los Números Reales. Los documentos consultados están relacionados en la bibliografía.

4.Contenidos

El trabajo se ha dividido en los siguientes capítulos:

1. Contexto general del estudio.
   En este capítulo se presentan las generalidades del estudio a realizar en donde se hace referencia a las motivaciones que lo originaron, a los objetivos que se pretenden alcanzar con su desarrollo y al problema que se afronta a partir de la investigación.

2. Consideraciones Teóricas
   Los aspectos teóricos en los que sustentamos este trabajo están relacionados con dos ejes: la teoría APOE y los procesos infinitos que se involucran en la construcción del conjunto de los Números Reales. En cuanto a la teoría APOE se hace una reseña de los principales aspectos, en especial, los que van a ser de sensible importancia en el análisis de los textos y en cuanto a los procesos infinitos, se hace un breve recorrido histórico de la construcción de los Números Reales resaltando en cada etapa histórica el impacto y la importancia que tuvo este tipo de procesos.

3. Aspectos metodológicos
   El tercer capítulo ha sido dedicado a la descripción de la metodología del estudio en donde se detalla el tipo de comunicación que será estudiada, las categorías y unidades de análisis que se han determinado y el sistema de recuento.

4. Análisis de Resultados
   En el capítulo correspondiente a los resultados del estudio, se exponen los diferentes segmentos de cada uno de los libros con su correspondiente clasificación en las categorías determinadas y con un breve análisis, en donde se justifica la forma de conocer y el aspecto del número real con el que cada segmento se encuentra relacionado. Luego de esto se presentan las tablas de

resultados en las cuales se basa el análisis definitivo de cada texto, análisis que está determinado por las formas de conocer de la teoría APOE, por los aspectos de los números reales que se relacionan con los procesos infinitos y con la linealidad y coherencia del libro de texto.

5. Conclusiones
   Por último, en las conclusiones del estudio se realiza un paralelo entre los resultados de análisis de los dos libros de texto, con el propósito de determinar semejanzas y diferencias marcadas por las formas de conocer de la teoría APOE, los aspectos estudiados en relación a los números reales y la forma como los procesos infinitos aparecen relacionados a estos aspectos.

5.Metodología

En este capítulo se han descrito los elementos metodológicos que tomamos en cuenta para desarrollar nuestro estudio. El procedimiento que realizamos se dividió en cuatro fases: 1. Selección de la comunicación que será estudiada. 2. Selección de las categorías que se utilizarán. 3. Selección de las unidades de análisis y 4. Selección del sistema de recuento o de medida.

Estas fases fueron determinadas teniendo en cuenta los pasos que señala Raigada (2002) para elaborar un análisis de contenido.

6.Conclusiones

Este capítulo resalta los principales aportes de nuestro estudio en relación con los objetivos que nos hemos planteado, así como sugerencias al trabajo en grado octavo en la construcción de los números reales y la potencialidad que tiene nuestro trabajo como diseño de análisis de textos de matemáticas.

Elaborado por:	ÁNGEL RUÍZ, Magda Pilar ROJAS TOVAR, Alejandro Humberto
Revisado por:	CARRANZA, Edwin

Fecha de elaboración del Resumen:	16	10	2014

INTRODUCCIÓN

En el currículo colombiano, la Construcción de los Números Reales esta propuesta para ser realizada en grado octavo de educación básica, lo cual indica que los libros de texto de este grado deberán incluir esfuerzos en este sentido; por otra parte, la complejidad de los números reales exige que su construcción contemple diversos aspectos que son esenciales para su comprensión tal como lo es la Completitud y la determinación de la racionalidad o irracionalidad de un número en relación con el tipo de magnitudes que representan. Teniendo en cuenta lo anterior y el hecho de que en la Construcción de los números reales subyacen los procesos infinitos, hemos optado por realizar un análisis de dos libros de textos de matemáticas de grado octavo con el propósito de establecer la manera como se involucran los procesos infinitos en la construcción de los números reales ya que el libro de texto, aparte de reflejar la manera como el conocimiento es puesto en juego en el aula de clase, "es un valioso instrumento educativo dado que materializa los programas curriculares, ayuda a la organización y administración del tiempo, presenta información verbal y gráfica estructurada pedagógicamente y propone actividades y ejercicios en sus páginas y fuera de ellas, que sirven para estimular y ayudar los procesos de pensamiento" (Perilla Rubiano y Vargas Hernández, 2003)

Para el análisis de los libros de texto nos sustentamos en la perspectiva de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) la cual es una teoría cognitiva del pensamiento matemático avanzado, que parte de una interpretación y reformulación de ideas de la teoría piagetiana constructivista que se basa, principalmente, en la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra determinadas construcciones mentales sobre un concepto particular cuando se enfrenta a la actividad matemática (Oktac, Roa-Fuentes, 2010, citado por López, 2011) A partir de las formas de conocer determinadas por la teoría APOE y los aspectos de la construcción de los números reales que señalamos anteriormente, determinamos las categorías emergentes en las cuales clasificamos los segmentos de los libros de texto; estas categorías emergentes no contemplan, en cuanto a la teoría APOE, la forma de conocer Esquema dado que no es posible que esta forma de conocer los números reales se dé en grado octavo y en lo concerniente a los aspectos involucrados en la construcción de los números reales, se consideró la Completitud y la Continuidad como dos aspectos separados esto generado por las consideraciones que hacen los textos en cuanto a las actividades de aproximación numérica y en lo relacionado con la ubicación de puntos en la recta.

El trabajo se ha dividido en cinco capítulos los cuales describimos a continuación con el fin de dar una idea general del trabajo:

1. *Contexto general del estudio*: En este capítulo se presentan las generalidades del estudio a realizar en donde se hace referencia a las motivaciones que lo originaron, a los objetivos que se pretenden alcanzar con su desarrollo y al problema que se afronta a partir de la investigación.

2. *Consideraciones Teóricas*: Los aspectos teóricos en los que sustentamos este trabajo están relacionados con dos ejes: la teoría APOE y los procesos infinitos que se involucran en la construcción del conjunto de los Números Reales. En cuanto a la teoría APOE se hace una reseña de los principales aspectos, en especial, los que van a ser de sensible importancia en el análisis de los textos y en cuanto a los procesos infinitos, se hace un breve recorrido histórico de la construcción de los Números Reales resaltando en cada etapa histórica el impacto y la importancia que tuvo este tipo de procesos.

3. *Aspectos metodológicos*: El tercer capítulo ha sido dedicado a la descripción de la metodología del estudio en donde se detalla el tipo de comunicación que será

estudiada, las categorías y unidades de análisis que se han determinado y el sistema de recuento.

4. *Análisis de Resultados*: En el capítulo correspondiente a los resultados del estudio, se exponen los diferentes segmentos de cada uno de los libros con su correspondiente clasificación en las categorías determinadas y con un breve análisis, en donde se justifica la forma de conocer y el aspecto del número real con el que cada segmento se encuentra relacionado. Luego de esto se presentan las tablas de resultados en las cuales se basa el análisis definitivo de cada texto, análisis que está determinado por las formas de conocer de la teoría APOE, por los aspectos de los números reales que se relacionan con los procesos infinitos y con la linealidad y coherencia del libro de texto.

5. Conclusiones: Por último, en las conclusiones del estudio se realiza un paralelo entre los resultados de análisis de los dos libros de texto, con el propósito de determinar semejanzas y diferencias marcadas por las formas de conocer de la teoría APOE, los aspectos estudiados en relación a los números reales y la forma como los procesos infinitos aparecen relacionados a estos aspectos.

Hemos elaborado este estudio con el propósito de aportar al análisis de los diferentes aspectos que están involucrados en la educación matemática y sin más lo presentamos a la comunidad académica quien le dará valor y lo podrá utilizar en estudios posteriores.

1. Capitulo I. Contexto general del estudio

1.1. Motivaciones que conllevan al estudio

Se puede considerar que la enseñanza del Cálculo "(…) se ha convertido en uno de los problemas neurálgicos para la educación matemática" (García, Serrano y Díaz, 1999, p. 51). lo cual se evidencia en los resultados de las investigaciones realizadas en torno a la Didáctica del Cálculo, al señalar que la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es un proceso complejo que genera múltiples dificultades tanto a los estudiantes como a los profesores (González, 2007), además se identifica que estas se encuentran relacionadas con los siguientes aspectos:

- Convertir conceptos básicos como límite y derivada en un conocimiento puramente algorítmico.
- Aspectos ligados con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Conceptos en torno a cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas (Azcarate, Bosch, Casadevall y Casellas, 1996)

Las anteriores dificultades sugieren tener en cuenta en la conceptualización y discurso del cálculo escolar aspectos relacionados con el infinito y procesos infinitos; sin embargo esto aún no se evidencia en las aulas de matemáticas como lo señala Montero y Scheuer (2006), al considerar que es normal tratar en los cursos de matemática básica el concepto de infinito sin mayor profundidad y explicación como si fuese un concepto de fácil asimilación para los estudiantes.

De acuerdo a lo expuesto consideramos que la inclusión, acercamiento y trabajo en el aula de matemáticas con procesos infinitos, bien sea a través del discurso y actividades propuestas por el docente o por el uso del libro de texto, puede facilitar en los estudiantes de Educación Media el trabajo y comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo; ya que sirven como bases conceptuales para la construcción de nociones tales como la de límite, derivada e integral, lo cual está en concordancia con planteamientos realizados por González (2007) al señalar que la enseñanza de conceptos del cálculo debería ser un proceso que cuente con mayor tiempo y que se inicie desde la enseñanza primaria hasta la superior, de tal manera que pueda tener en cuenta las fases: *intuitiva* (en la enseñanza realizada en educación primaria a través nociones que involucren el cambio y la variación en la vida cotidiana), *pragmática* (fase de tipo exploratorio que sirve como fundamento para las nociones porsteriores del cálculo) y *formal* (en esta ya se enfatiza en el lenguaje formal y la parte demostrativa).

Añadímos que de acuerdo con González (2007) las investigaciones relacionadas con la enseñanza universitaria corresponden en su mayoria a cuestiones enmarcadas en la enseñanza del cálculo "(…) como consecuencia de las dificultades y concepciones que los alumnos arrastran de su paso por las enseñanzas medias" (p. 408). Ahora bien, se evidencia la importancia de centrar la atención en un trabajo previo a los conceptos básicos y fundamentales del cálculo escolar (fase pragmática) y específicamente, en nuestro caso, cobra relevancia realizar acercamientos al estudio de los procesos infinitos que están involucrados en conceptos que se pueden trabajar a través de contenidos propios del currículo de matemáticas en el grado octavo de la Educación Básica Secundaria, en consideración a que en este nivel es donde se formaliza la construcción de los números reales.

Para realizar dicho estudio se podría analizar diferentes actores o recursos que hacen parte en los procesos de enseñanza y aprendizaje en nuestro caso particular de la construcción de los números reales, como por ejemplo la gestión del profesor en el aula, el libro texto de matemáticas, las tareas planteadas a los estudiantes, la actividad matemática del estudiante, entre otros. En este estudio nos centrarnos en el análisis de dos textos de 8 grado porque es en este grado donde se puede vislumbrar con mayor claridad los rastros de los procesos infinitos inmersos en la construcción de los números reales. Así mismo, en este análisis adoptamos la teoría APOE ajustando las formas de conocer que contempla para explicar como un individuo construye el conocimiento a las intencionalidades de enseñanza del libro de texto, con la intensión de identificar las formas de conocer que se promueven en estos de textos en la construcción de los números reales. Lo que consideramos puede llegar a aportar en el diseño de textos haciendo el uso de la teoría APOE desde una descomposición genética que genere en el estudiante un transito entre las diferentes formas de conocer, para que este pueda construir su propio conocimiento ayudado por la gestión del profesor.

Por lo anterior, pretendemos indagar si en las explicaciones, ejemplos o actividades que proponen estos textos escolares a los estudiantes se puede vislumbrar el trabajo con procesos infinitos a través de las formas de conocer acción, proceso y objeto de la teoría APOE, con el fin de aportar en la construcción y comprensión de conceptos asociados al cálculo infinitesimal abordados en la Educación Media y Superior, ya que la forma en la que los libros presentan los conceptos puede influir en gran medida en el aprendizaje de los estudiantes, pues estos son fuente de consulta del conocimiento abordado en la clase (Díaz y Morales citados por Castañeda, Rosas y Molina, 2010).

1.2. Marco legal y exigencias curriculares

En el sistema escolar colombiano el currículo de matemáticas está regido principalmente por los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas; los primeros son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el Ministerio de Educación para apoyar el proceso de fundamentación y planeación, en nuestro caso particular, en el área de matemáticas (MEN, s.f.) En cuanto los Estándares son los criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los escolares de todas las regiones del país, en todas las áreas que integran el conocimiento escolar (MEN, s.f.) para nuestro caso específico en el área de matemáticas.

Tomando como referentes estos documentos y principalmente los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, encontramos que en algunos apartados de éstos se menciona de manera explícita el trabajo en la Educación Básica y Media con los procesos infinitos y su relación con la construcción de los números reales, los cuales citaremos a continuación.

En el pensamiento numérico y los sistemas numéricos establece:

> Las conceptualizaciones relativas a los números reales implican la aritmetización de procesos infinitos, y por ende, la construcción de las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad, completitud y continuidad. Igualmente, este paso de los números racionales a los números reales requiere del uso y comprensión de diferentes tipos de representaciones numéricas, sobre todo, las relativas a los números irracionales, tanto por medio de decimales infinitos como de símbolos algebraicos. (MEN, 2006, p. 60)

En el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, contempla que:

> Es necesario señalar que el desarrollo de este pensamiento debe también atender al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, pues son éstos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral que se suele introducir en el grado 11. Por tal razón es necesario incorporar tempranamente a los estudiantes en el estudio de los conceptos fundamentales de ese campo y de las técnicas y métodos de estimación y de aproximación. (MEN, 2006, pp. 68-69)

En cuanto a los estándares propios de octavo a noveno grado consideran para el pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, respectivamente:

> Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos (MEN, 2006, p. 86).

> Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales (MEN, 2006, p. 87).

Finalmente en relación a los estándares de grado décimo a undécimo se establece en dos de los aspectos contemplados para el pensamiento numérico y sistemas numéricos:

> Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales (MEN, 2006, p. 88).
>
> Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos (MEN, 2006, p. 88).

En este mismo sentido para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se especifica: “Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos” (MEN, 2006, p. 89).

Con lo anterior, se puede afirmar que los procesos infinitos y la construcción de los números reales debería estar presente en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica y Media lo cual implica, entre otras cosas, que los libros de texto de matemática por ser una herramienta de apoyo para el docente contemplen en su desarrollo temático tales requerimientos; en consecuencia se hace de suma importancia el análisis de textos de matemáticas, por ello en nuestro estudio, el análisis de dos libros de texto se utilizará con el propósito de caracterizar la presencia de los procesos infinitos en grado octavo, además de la pertinencia de dichas actividades en la fundamentación del infinito como base conceptual de la noción de límite sustentado esto en las palabras de Choppin (1980 citado por Gonzalez y Sierra, 2004) en cuanto a su consideración del libro de texto como un

> (…) apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contri-

> buye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes. (p. 389)

1.3. Problema de investigación

Como se evidencia en el apartado anterior, la noción de infinito es fundamental para la conceptualización de varios tópicos desarrollados en la educación matemática escolar, como por ejemplo en la construcción de los conjuntos numéricos, el trabajo con sucesiones, progresiones, series y en la fundamentación de los conceptos propios del cálculo. En particular en el cálculo, el infinito se presenta como una de las herramientas más poderosas para abordar el concepto de límite, derivada e integral razón por la que, como lo señala Hitt (2003, citado por González, Morales y Sigarreta, 2013), también puede constituirse en un obstáculo ya que existe una confusión de los alumnos entre los procesos infinitos (infinito potencial) y la situación límite (infinito actual), lo cual se evidencia desde nuestra experiencia como docentes al observar que los estudiantes se quedan en el proceso, es decir, no crean un puente entre el infinito potencial y el actual.

Lo anterior muestra la necesidad de analizar la manera de cómo se están abordando las actividades o tareas relacionadas con los procesos infinitos en la matemática escolar, para que posteriormente pueda ser de utilidad en la construcción de los conceptos propios del cálculo en los grados siguientes de formación y por ello se considera pertinente realizar un análisis de estas. Es así que el interés se debe centrar en evidenciar si al abordar la construcción de los números reales se pueden vislumbrar y trabajar con procesos infinitos, para ello no cabe duda que se puede examinar de diferentes formas como por ejemplo a través del análisis de: los libros de texto, de la planeación y gestión del docente o del currículo de matemáticas, entre otros. En nuestro caso hemos elegido el análisis de contenido de algunos libros escolares de grado octavo empleados en el aula, con el fin de evidenciar la presencia de los procesos infinitos en las explicaciones, ejemplos o actividades que plantea el texto.

1.4. Objetivos

1.4.1 General

Caracterizar la manera como se involucran los procesos infinitos presentes en la construcción de los números reales en dos libros de texto de octavo grado, vistos desde la teoría APOE.

1.4.2 Específicos

- Localizar los contenidos de los dos libros que están relacionados con procesos infinitos, en la construcción de los números reales.
- Identificar desde la teoría APOE las formas de conocer acción, proceso u objeto que se promueven en los dos libros de texto analizados.
- Categorizar los procesos infinitos en la construcción de los números reales, a través de los contenidos específicos y la teoría APOE en los dos libros de texto analizados.
- Realizar un análisis de contenido de los procesos infinitos vistos en la construcción de los números reales.

1.5. Pregunta de investigación

¿Cómo se promueven los procesos infinitos en la construcción de los números reales en algunos libros de texto de 8° desde la teoría APOE?

2. Capítulo II. Consideraciones Teóricas

2.1 Los Procesos Infinitos a través de la construcción de los Números Reales

La motivación que da origen a este estudio es la caracterización de la manera como los libros de grado octavo relacionan los procesos infinitos en la construcción de los números reales, ya que dichos procesos aparte de estar inmersos de manera natural en el concepto de número real, son de sensible importancia a la hora de abordar conceptos básicos del cálculo como el límite, la derivada y la integral en los grados siguientes. En este mismo sentido, y dado que los libros de texto deben cumplir con los Estándares y los lineamientos curriculares para matemáticas, tenemos en consideración el hecho de que el desarrollo del pensamiento Variacional debe atender

> (…) al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, pues son éstos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral que se suele introducir en el grado 11. MEN (2004, p 68)

Para comenzar, al revisar el desarrollo histórico del concepto de número real se evidencia que los vínculos de los procesos infinitos con la construcción de este concepto se relacionan en mayor medida, con la definición de los números irracionales, con la inconmensurabilidad de magnitudes y, con la continuidad y completitud de los números reales; es por ello que estos aspectos han sido considerados como categorías de análisis en este estudio, al igual que las magnitudes conmensurables y los números racionales en los cuales se evidencia la presencia de procesos infinitos a partir de lo expuesto en los libros de texto analizados.

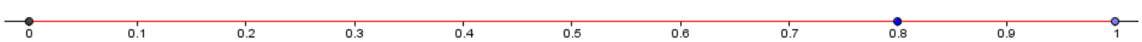
Para comenzar, presentamos la idea de proceso infinito sobre la cual vamos a sustentar el análisis y para ello iniciamos la presentación con el siguiente ejemplo:

$$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots \quad (1)$$

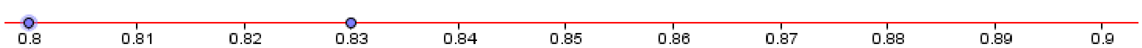
En la igualdad (1) la parte derecha puede ser expresada de varias formas como sumas de fracciones decimales como por ejemplo:

$$0{,}8333\ldots = \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots \quad (2)$$

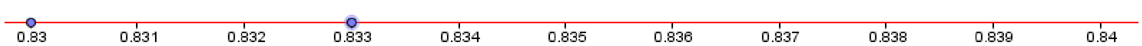
Lo que indica que el racional $\frac{5}{6}$ se puede enunciar como el resultado de un proceso que involucraría realizar infinitas sumas lo cual no es posible y para sustentar la igualdad dada en (1) se hace necesario realizar el paso al límite el cual es el salto entre el infinito potencial y el actual. Lo que se quiere estudiar tanto en (1) como en (2) es la presencia del proceso infinito en la representación del racional $\frac{5}{6}$, que quedó expresado como un proceso infinito el cual consiste en la expresión de cada cifra decimal como una fracción que queda determinada por las potencias de 10. Por otra parte, al querer ubicar este racional en la recta numérica aludimos a su expresión decimal $0{,}8\overline{3}$ de donde tenemos como primer punto que está ubicado entre 0 y 1, intervalo que está dividido en 10 partes de las cuales tomamos 8 según la primera cifra decimal del racional:



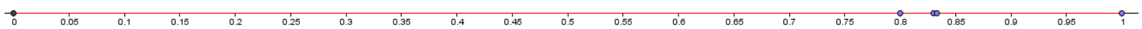
A partir de esto se tiene que el racional se ubica entre 0,8 y 0,9 intervalo que de igual manera está dividido en 10 partes de las cuales tomamos 3 según la segunda cifra decimal



Repitiendo el proceso, dividimos en intervalo [0.83, 0.84] en 10 partes y tomamos la tercera según la tercera cifra decimal del racional



En resumen, la sucesión de puntos con los cuales nos hemos aproximado al racional $\frac{5}{6}$ se puede ver como



Lo cual sugiere que la ubicación de este punto en la recta requeriría de una aproximación dada por un proceso infinito de subdivisión de intervalos en 10 partes iguales de las cuales se toma la que indica la cifra decimal correspondiente del racional $\frac{5}{6}$. En este ejemplo hemos abarcado tres de los cinco aspectos que hemos contemplado relacionados con la construcción de los números reales la racionalidad, la continuidad de la recta y la Completitud y a partir de este ejemplo y de otros como la aproximación al número de oro a partir de los cocientes de términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci o en la geometría con el triángulo Sierpinski podemos concluir que los procesos infinitos están directamente relacionados con la definición de una función en forma recursiva.

Con base en lo anterior, podemos decir que un ***Proceso Infinito*** es un proceso en el cual siempre se puede realizar una acción más la cual está determinada por un procedimiento que se realiza de forma iterativa sobre los resultados que van surgiendo; a partir de la aproximación del número de oro haciendo uso de los términos de la sucesión de Fibonacci ilustraremos la definición de *Proceso Infinito* que hemos presentado:

Una de las tantas propiedades que tiene la Sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8,…) es que al realizar los cocientes de la forma $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ para\ todo\ n \in \mathbb{N}$ en donde a_n es un término de la sucesión, los resultados que van surgiendo determinan una sucesión alternante de términos que encajonan al número de oro (ϕ). En el sentido de nuestra definición de proceso infinito, el procedimiento que se presenta es la determinación de los cocientes de la forma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ya que estos determinan los encajonamientos para ϕ; al aplicar este procedimiento en forma iterada sobre los términos de la sucesión de Fibonacci, los valores que van surgiendo se aproximan a ϕ en la medida en que n crece, disminuyendo el error en cada uno de los pasos del proceso. A continuación se presenta la tabla de resultados de este proceso hasta $n = 19$ lo cual nos da una aproximación a ϕ con 14 decimales:

n	Sucesión de Fibonacci	cocientes	ϕ *Aproximado*
1	1	1	1,61803398874989
2	1	2	1,61803398874989
3	2	1,5	1,61803398874989
4	3	1,66666666666667	1,61803398874989
5	5	1,6	1,61803398874989
6	8	1,625	1,61803398874989
7	13	1,61538461538462	1,61803398874989
8	21	1,61904761904762	1,61803398874989
9	34	1,61764705882353	1,61803398874989
10	55	1,61818181818182	1,61803398874989
11	89	1,61797752808989	1,61803398874989
12	144	1,61805555555556	1,61803398874989
13	233	1,61802575107296	1,61803398874989
14	377	1,61803713527851	1,61803398874989
15	610	1,61803278688525	1,61803398874989
16	987	1,61803444782168	1,61803398874989
17	1597	1,61803381340013	1,61803398874989
18	2584	1,61803405572755	1,61803398874989
19	4181	1,61803396316671	1,61803398874989

En los demás ejemplos que presentamos los procedimientos que se aplicaron en forma reiterada son:

1. En la escritura del racional $\frac{5}{6}$ como una suma de fracciones decimales el procedimiento corresponde en la asignación a cada cifra decimal de la potencia de diez que corresponde según la posición.
2. Al ubicar a $\frac{5}{6}$ en la recta numérica, el procedimiento está definido como la división en diez partes iguales de cada intervalo que encajona a $\frac{5}{6}$ y el tomar tantas partes como indique la cifra decimal correspondiente de la cual se obtendrá un nuevo intervalo.
3. Y por último en el triángulo de Sierpinski el procedimiento implicado es la obtención de triángulos a partir de los puntos medios de los lados del triángulo anterior y la eliminación del triángulo que queda ubicado en el centro.

Luego de definir la idea de proceso infinito que cobija nuestro análisis, presentamos el marco matemático de los conceptos que analizamos en los libros de texto, el cual se ha diseñado a partir de la división en épocas propuesta por González Castiblanco (2011) quien considera tres periodos en la evolución del número real: 1) Descubrimiento de la Irracionalidad, 2) Fracciones Decimales, Continuas y los Números Irracionales y 3) Formalización del Número Real, estableciendo en cada una de estas épocas los desarrollos que involucran los procesos infinitos.

2.1.1 Descubrimiento de la Irracionalidad

El primer apartado en el camino de construcción de los números reales está dedicado al descubrimiento de la Irracionalidad el cual estuvo directamente relacionado con la aparición de las magnitudes inconmensurables, magnitudes que se definen como aquellas que no eran conmensurables. Partiendo de la definición 1 del libro X de *Los Elementos* (Euclides, 1994) las magnitudes conmensurables se definen como aquellas que se miden con la misma medida y, a partir de esto, las magnitudes inconmensurables son aquellas de las que no es posible hallar una medida común. En este mismo sentido y partiendo de la idea de racionalidad como medida común a dos magnitudes, la irracionalidad expresaría la imposibilidad de encontrar una medida común a dos magnitudes en donde una de ellas es la unidad.

Para comenzar, el análisis se sitúa en los trabajos realizados por culturas como la mesopotámica, la griega y la china quienes fomentaron la noción de magnitud inconmensurable a partir de la aplicación de procesos de aproximación infinita ya sea de tipo aritmético o geométrico. Un ejemplo de esto es el problema 50 de la criba de Ahmes en donde se considera el área de un círculo de diámetro 9 igual a la de un cuadrado de lado 8; en este problema Ahmes considera el área del círculo como $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ lo cual da un valor para π como $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1605$. Es posible que este resultado haya sido originado en el problema 48 el cuál pretendía comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito. En la cultura china el astrónomo Tsu Ch'ung-Chih (430 - 501) asigno a π el valor de

$$\pi = \frac{355}{113}$$

El cuál era el valor más aproximado hasta ese momento y luego de este debieron pasar varios siglos para encontrar resultados más exactos.

Por otra parte en Mesopotamia, se realizaron aproximaciones para la diagonal de un cuadrado de lado 30 resultando los números 42, 25 y 35 valores que en fracciones sexagesimales representan la diagonal d del cuadrado en cuestión

$$d = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42{,}4263\bar{8}$$

Al aplicar el teorema de Pitágoras (que ya era conocido por los babilonios) se tiene que

$$d = \sqrt{2(30)^2} = 30\sqrt{2} = 42{,}42640687$$

De igual forma se presenta una aproximación para $\sqrt{2}$ en fracciones sexagesimales $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{35}{60^2} + \frac{10}{60^3}$. El proceso infinito se manifiesta en el método para calcular raíces cuadradas que utilizaban los babilonios (Solorza & Rubí, 2007) el cuál se fundamentaba en la aproximación por encajonamiento proceso que se expone a continuación:

La idea trata de encontrar la solución para la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2 = 0 \quad (1)$$

Y el proceso que los babilonios realizaban para tal fin era la asignación de valores a x como por ejemplo $x = \frac{3}{2}$. Al reemplazar este valor en la ecuación (1) se tiene que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = 0$$

Y se llega a que

$$\frac{9}{4} - 2 = 0$$

Lo cual no es cierto pero si lleva a que $x = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Ahora si se toma otro valor por ejemplo $x = \frac{6}{5}$ se tiene que

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 2 = 0$$

$$\frac{36}{25} - 2 = 0$$

Que aunque no es cierto permite concluir que $x = \sqrt{2} > \frac{6}{5}$ y así se encuentra un intervalo razonable para $\sqrt{2}$ como

$$\frac{6}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

El siguiente paso es determinar la media aritmética de las cotas del intervalo que en este caso es

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{6}{5}}{2} = \frac{27}{20}$$

El cual es un nuevo valor aproximado para $\sqrt{2}$. Reemplazando este valor en la ecuación (1) se tiene que

$$\left(\frac{27}{20}\right)^2 - 2 = 0$$

y aunque $\frac{27}{20}$ no es $\sqrt{2}$, al buscar un número que multiplicado con $\frac{27}{20}$ de cómo resultado 2 se encuentra que

$$\left(\frac{27}{20}\right)\left(\frac{40}{27}\right) = 2$$

Determinando esto un nuevo intervalo para $\sqrt{2}$ en

$$\frac{27}{20} < \sqrt{2} < \frac{40}{27}$$

Y ubica a $\sqrt{2}$ entre 1,35 y 1,4814. Al continuar este proceso se puede aproximar por encajonamiento de mejor manera a $\sqrt{2}$.

Por su parte los griegos, a partir de los procesos infinitos, hicieron grandes aportes a la teoría de las magnitudes inconmensurables a pesar de las dificultades filosóficas que implicó el descubrimiento de este tipo de magnitudes por parte de los pitagóricos. Con base en las magnitudes inconmensurables los griegos realizaron varios avances entorno a la formalización de los números irracionales y como ejemplo de esto hacemos mención del método de Eudoxo de Cnido (355 a.C) y de Arquímedes de Siracusa (287 a.C) los cuales son métodos que se basan en los procesos infinitos.

En la cultura griega se tenía la idea de que las áreas de las figuras curvilíneas como los círculos y los segmentos de parábolas eran del mismo tipo que las de las figuras poligonales y así, para determinar el área este tipo de figuras, se hacía necesario determinar una sucesión de polígonos $\left(P_1, P_2, P_{3,\ldots.}P_n, P_{n+1}, \ldots.\right)$ que aproximen de forma progresiva el área requerida. El método de Exhausión de Eudoxo sustituye de manera formal la idea vaga de que el área de la figura curvilínea fuese el límite de las áreas de los polígonos de la sucesión considerada y utiliza los procesos infinitos para afirmar el siguiente principio:

> "Dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un polígono P_n de tal forma que si $A(C)$ es el área de la figura curvilínea entonces $A(C) - A(P_n) < \varepsilon$ para algún n"

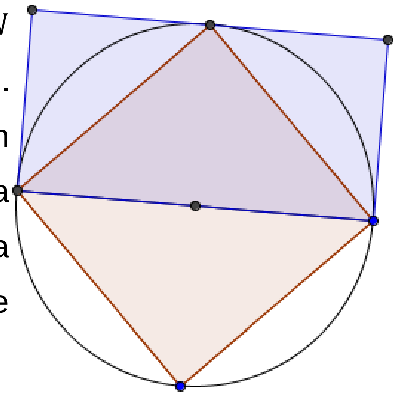
En este sentido, la proposición 1 del libro X de *Los Elementos* de Euclides (Euclides, 1994) cumple un papel fundamental, ya que permite afirmar que si R_0 y ε son dos magnitudes dadas a priori y si $\left(R_1, R_2, R_{3,\ldots\ldots}\right)$ es una sucesión de magnitudes tales que

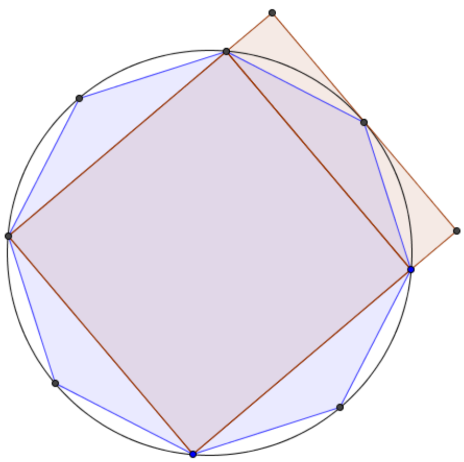
$$R_1 < \frac{R_0}{2}, R_2 < \frac{R_1}{2}, R_3 < \frac{R_2}{2}, \ldots. R_{n+1} < \frac{R_n}{2}, \ldots..$$

entonces existe un natural n tal que $R_n < \varepsilon$. Al utilizar el *axioma de Eudoxo – Arquímedes* (cuarta definición del V libro de Los Elementos de Euclides) se puede encontrar un entero positivo N tal que $(N+1)\varepsilon > R_0$ y así se tiene que $R_1 < \frac{R_0}{2} < \frac{(N+1)\varepsilon}{2} < N\varepsilon$ o de forma análoga

$$R_2 < \frac{R_1}{2} < \frac{N\varepsilon}{2} < \frac{(N-1)\varepsilon}{2}$$

Al continuar el proceso en forma sucesiva se llega a N pasos en la desigualdad deseada llegando a que $R_n < \varepsilon$. Lo anterior se puede notar al inscribir un cuadrado en un círculo ya que la diferencia entre los dos es menor que la mitad del área del círculo pues el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito cuya área es mayor que el área del círculo.





Ahora al tomar cada lado del cuadrado inscrito y bisecarlo, se pueden construir triángulos isósceles que determinarán los vértices de un octágono regular inscrito sobre la circunferencia, y se evidencia que la diferencia entre cada segmento circular (limitado por un lado del cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles es menor que la mitad del segmento circular.

Al continuar el proceso de bisección y construcción de triángulos isósceles, se podrá comprobar que cada segmento circular resultante será menor que la mitad del segmento circular anterior y de esta manera se llegará a que para algún paso del proceso existirá un polígono P_n de tal forma que $A(C) - A(P_n) < \varepsilon$ para algún ε seleccionado (González Urbaneja, 2008).

Este proceso fue utilizado por Arquímedes quién alcanzó una aproximación para π desarrollando razones entre los perímetros de polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia y el diámetro de la misma. Arquímedes consideró como punto de partida hexágonos regulares inscritos y circunscritos y fue duplicando la cantidad de lados hasta llegar a un polígono regular de 96 lados; el perímetro de estos polígonos lo encontró realizando aplicaciones sucesivas de teorema de Pitágoras y finalmente realizaba las razones de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos para llegar a que la razón entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que $3+\frac{10}{70}$ pero mayor que $3+\frac{10}{71}$, lo cual ubica a π entre 3,14084507 y 3,142857143 aproximación que cumplió con las necesidades del cálculo durante muchos siglos (Montesinos Sirera, 2000).

El trabajo de los griegos con las magnitudes inconmensurables delató la necesidad de establecer una manera de realizar cálculos con las mismas pero el hecho de evitar a los irracionales tratándolos solo como magnitudes dificultó este proceso. Es por ello que hemos considerado importante mencionar los trabajos de los árabes e hindúes quienes afrontaron el asunto de los irracionales ideando algoritmos para calcular con ellos.

Método Hindu y Árabe

Dado que los algoritmos de los hindúes y árabes fueron pensados a partir de necesidades prácticas, se pudo pasar por encima de las consideraciones ontológicas que para los griegos eran fundamentales y esto permitió la relación de la inconmensurabilidad geométrica con la irracionalidad numérica aparte de borrar, gracias al enfoque de aplicación de los cálculos, la distinción entre los racionales y los irracionales. Por otra parte, el hecho de usar de forma libre a los números irracionales, permitió que los desarrollos en el álgebra generaran que las letras pudiesen determinar un dominio de números mayor al considerado anteriormente.

En *Historia y Enseñanza de las Matemáticas. Aproximaciones de las Raíces Cuadradas* (Miralles de l. Llobet y Deulofeu Piquet, 2005) los autores exponen varios métodos utilizados, a través de la historia, para aproximar las raíces cuadradas, indicando que en la gran mayoría de los casos dichos métodos están sustentados en procesos de aproximación sucesiva en donde la idea de proceso infinito se encuentra presente, más en la mayoría de los casos citados, los métodos eran empleados solo para aproximar la raíz deseada hasta un punto necesario y satisfactorio para la aplicación práctica. A continuación presentamos uno de los métodos expuestos en este documento, el cual consideramos está estrechamente ligado a la consideración de los procesos infinitos en el trabajo con números irracionales en este caso surgidos de las raíces cuadradas.

El método que vamos a presentar es el método de Chuquet (1445 - 1500) quién en su trabajo Triparty en la Science des nombres publicado en 1484 presentó un sencillo método para aproximar raíces cuadradas. La idea básica del método de aproximación de Chuquet es que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ y así si se quiere aproximar cualquier raíz cuadrada como por ejemplo $\sqrt{19}$ se sigue el siguiente procedimiento:

Como primera medida se tiene que $4 < \sqrt{19} < 5$ es decir que la parte entera de $\sqrt{19}$ es 4 y al tomar como primer racional a $\frac{1}{3}$; entonces $4 + \frac{1}{3}$ es una aproximación por defecto ya que $\left(4 + \frac{1}{3}\right)^2 = 18 + \frac{7}{9} < 19$. Al tomar a $\frac{1}{1}$ como segundo racional se obtiene una aproximación por exceso $4 + \frac{1}{1} = 5$. Al sumar entre si los numeradores y denominadores de los racionales considerados $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{1}$ se tiene que $\frac{1}{3} < \frac{1+1}{3+1} < 1$ de donde se obtiene que $\frac{1+1}{3+1} = \frac{1}{2}$ es un racional que me origina una aproximación por exceso ya que $\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 = 20 + \frac{1}{4} > 19$.

De esta manera se encuentra el primer encajonamiento para $\sqrt{19}$ en $4 + \frac{1}{3} < \sqrt{19} < 4 + \frac{1}{2}$ o lo que es lo mismo $\frac{13}{3} < \sqrt{19} < \frac{9}{2}$. Ahora al tomar los racionales $\frac{13}{3}$ y $\frac{9}{2}$ se tiene que $\frac{13}{3} < \frac{13+9}{3+2} = \frac{22}{5} < \frac{9}{2}$ y de aquí se encuentra a $\frac{22}{5}$ como una segunda aproximación por exceso por lo que $\frac{13}{3} < \sqrt{19} < \frac{22}{5}$.

Al continuar el proceso se encontraran aproximaciones más finas de $\sqrt{19}$ aunque dichas aproximaciones no son alternantes. El método de Chuquet aunque tiene una convergencia más lenta hace uso de racionales con numeradores y denominadores menores a los usados en el método babilónico. A partir de este tipo de aproximaciones de las raíces cuadradas se generó un mayor convencimiento sobre el tratamiento de los irracionales como números más la formalización de esta concepción solo se daría en una etapa posterior.

2.1.2 Sobre las fracciones decimales, las Fracciones Continuas y los Números Irracionales

Fracciones decimales como representación de números reales

En este apartado se expone un ejemplo de representación del número 1 a partir de una suma infinita de fracciones decimales; con ello se puede evidenciar la manera como se pueden tratar los procesos infinitos en la construcción de los números reales en grado octavo y además mostrar de una manera natural la idea de Completitud de este conjunto. Al considerar la igualdad

$$0{,}99999\ldots\ldots = 1 \qquad (1)$$

Tenemos, como primera cuestión a mencionar, la equivalencia entre un proceso infinito 0,9999999… y un número entero (1) lo cual de nuevo expone el salto entre el infinito potencial y el actual (entendiéndose el primero como la posibilidad de realizar una operación o de aplicar una función recursiva y el segundo como la consideración del infinito como el resultado de un proceso infinito) y esto puede sustentar el trabajo posterior con límites de funciones reales.

Ahora, al detenerse en el significado de la expresión 0,999999999…… a partir de fracciones decimales, una de las múltiples representaciones que surge es

$$0{,}99999\ldots\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^7} + \cdots \qquad (2)$$

la cual muestra un proceso infinito que sustenta la igualdad (1) a partir de las series geométricas. Además de lo anterior, en (2) se percibe la Completitud del conjunto de los números reales, lo cual nos permite afirmar que los procesos infinitos, aparte de servir como sustento del concepto de número real, entrelazan sus diferentes características entendiéndose estas como los aspectos de Racionalidad, Irracionalidad, Completitud, etc…

A partir del concepto de serie geométrica, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \; si \; a \neq 0 \; y \; |r| < 1$$

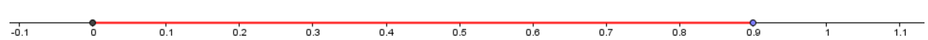
En donde es necesario mencionar la presencia de paso al límite dada la imposibilidad de realizar infinitas sumas. En la serie dada en (2) se puede ver que $a = \frac{9}{10}$ y que $r = \frac{1}{10} < 1$ y por ello

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

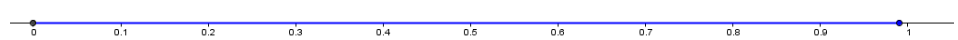
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Por otra parte, al considerar la suma $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^7} + \cdots$ sobre la recta numérica se tiene que cada uno de los términos de la suma representa una división de un segmento de la recta y cada una de estas subdivisiones determina un número racional que se encuentra cada vez más aproximado a 1.

$$\frac{9}{10}$$



$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}$$



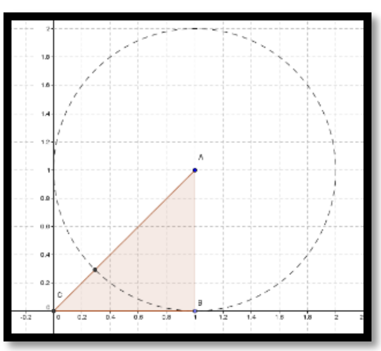
$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3}$$

Cada etapa del proceso determinará números racionales más cercanos a 1 pero cada uno de estos pasos, la determinación del número racional y su ubicación sobre la recta numérica, son posibles gracias a la Completitud del conjunto y a la continuidad de la recta sirviendo además como sustento de verificación de estas dos características de los números reales.

De las fracciones continuas y su relación con la racionalidad o irracionalidad de un número real

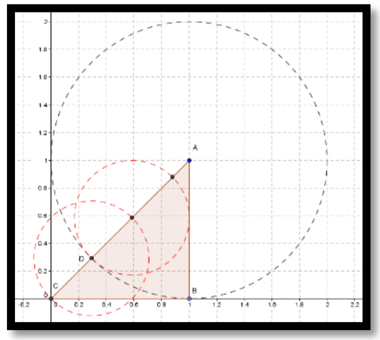
En el apartado anterior se mostró la relación entre los procesos infinitos y las fracciones decimales en la representación de números enteros y por supuesto racionales. Otra manera en que las fracciones han sido usadas en la representación y la formalización del número real son las fracciones continuas, las cuales afloraron de manera temprana en la historia ya que eran utilizadas para resolver ecuaciones diofánticas por Aryabhata (476 - 550) y posteriormente, en el siglo XVI, fueron utilizadas por Bombelli y Cataldi para aproximar raíces cuadradas. En un inicio, las propiedades de las fracciones continuas no fueron objeto de estudio hasta que entre los siglos XVII y XIX Wallis (1616 - 1703), Euler (1707 - 1783) y Lambert (1728 - 1777) y Lagrange (1736 - 1813) establecieron de manera definitiva sus fundamentos (Haro Delicado & Redondo Buitrago, 2005). En particular, fue Euler quién logró demostrar la relación entre la naturaleza de las fracciones continuas simples y la racionalidad o irracionalidad de un número real, estableciendo que si la representación en fracción continua simple de un número real era finita, el número real dado es racional mientras que si es infinita es irracional.

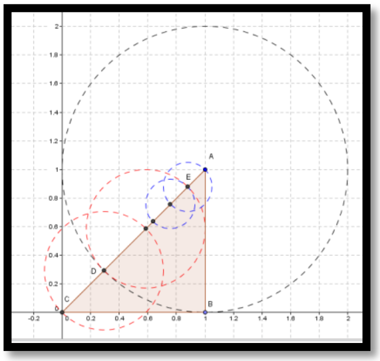
A manera de ejemplo, se presenta un proceso de aproximación de $\sqrt{2}$ a partir de fracciones continuas, que surge a partir de la inconmensurabilidad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1 de donde surge dicha fracción.



Para comenzar, se considera el ΔABC el cual cumple las características anteriormente expuestas. Es de notar que el cateto de dicho triángulo está contenido solo una vez en su hipotenusa y por ello el primer valor a considerar para la construcción de la fracción continua es 1.

A continuación, se nota que el segmento CD el cual es el igual a CA - 1, está contenido dos veces en la unidad y por ello el segundo valor a considerar es 2.





De manera análoga, se considera el segmento AE y se determina la cantidad de veces que cabe en el CD. Como se puede verificar, está contenido dos veces y por ello el tercer término a considerar 2. Al continuar con el proceso, se puede notar que siempre hay un sobrante al intentar determinar cuántas veces cabe el segmento sobrante en el considerado en el paso anterior y además que este sobrante está contenido dos veces en dicho segmento.

Por ello, de este proceso que intenta medir la hipotenusa del triángulo dado con uno de sus lados (el cual representa la unidad), surge la fracción continua

$$\mathbf{1}+\cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{\mathbf{2}+\cdots}}}}=[1,2,2,2,2,\ldots]$$

La cual es una fracción continua infinita. Ahora al determinar el resultado de las primeras reductas de esta fracción continua se obtienen los siguientes valores

$$1,\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{38}{27},\frac{92}{65},\frac{222}{157},\frac{536}{379}$$

quienes aproximan en forma alternante a $\sqrt{2}$ o de manera similar representan encajonamientos para aproximarlo.

Aproximación Por defecto		Aproximación Por exceso	Aproximación Por defecto	Aproximación decimal de $\sqrt{2}$	Aproximación Por exceso
1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1,41421356237309…	1,5
$\frac{7}{5}$	$\sqrt{2}$	$\frac{17}{12}$	1,4	1,41421356237309…	1,416666...
$\frac{38}{27}$	$\sqrt{2}$	$\frac{92}{65}$	$1,\overline{407}$	1,41421356237309…	1,41538461…
$\frac{222}{157}$	$\sqrt{2}$	$\frac{536}{379}$	1,41401273…	1,41421356237309…	1,41424802..

Para comprobar que la fracción continúa representa a $\sqrt{2}$ se desarrolla el método de Cataldi – Bombelli (Boyer, 1986)

$$\sqrt{2} = 1 + x$$

De donde se desprende que

$$2 = (1 + x)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$1 = x(2 + x)$$

$$x = \frac{1}{2 + x}$$

Y así se tiene que

$$x = \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cdots}}}}$$

Y por se concluye que

$$\sqrt{2} = 1 + x = 1 + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cdots}}}}$$

2.1.3 Formalización del Número Real

Como un gran número de aspectos que han dado origen a la evolución de los conceptos matemáticos, la formalización del Conjunto de los Números Reales obedeció a la necesidad de dar rigor a los trabajos de un gran número de matemáticos que sobre el siglo XIX fueron encontrando dificultades a la hora de demostrar las teorías que formulaban. Varios de estos trabajos estuvieron relacionados con la necesidad de definir el concepto de número irracional, ya que, en trabajos en límites como el de Bolzano los resultados indicaban que algunas sucesiones de números racionales podrían tener un límite irracional y la demostración de estos resultados se debía basar en aspectos relacionados con la intuición y el sustento geométrico. Resultados como el de Bolzano generaban la pregunta sobre el sistema numérico en el que se estaba trabajando y este aspecto generó la necesidad de la formalización de los números reales.

A partir de la necesidad surgida, fueron numerosos los trabajos que se emprendieron en pro de la caracterización de los números reales, entre los cuales se pueden mencionar los trabajos de Hamilton con dos artículos publicados en 1833 y 1835, el trabajo de Weirstrass en 1859, Maray en 1869, Cantor en 1872 y durante el mismo año se publicó también el trabajo de Heine y de Dedekind (González Castiblanco, 2011) pero para nuestro propósito de estudiar la influencia de los procesos infinitos en la construcción del Conjunto de los Números Reales analizaremos la construcción realizada por Cantor entre 1871 y 1883.

La idea planteada por Cantor consistía, en esencia, en la construcción de un sistema numérico A en el que, básicamente, toda sucesión fundamental tuviera límite, lo cual equivale a unir el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con el conjunto formado por los límites de sucesiones fundamentales que no son racionales; luego de la determinación de este conjunto A, Cantor extendió a este las cuatro operaciones aritméticas y la relación de orden definida en $\mathbb{Q}$. Por otra parte, Cantor determina la relación entre los elementos del conjunto A y los puntos de la recta a partir del siguiente razonamiento:

> Al determinar sobre la recta un punto de origen y un segmento unidad U, se hace corresponder a cada segmento conmensurable con U un número

> racional. Cantor afirma que para cualquier segmento *S*, inconmensurable con *U*, existe una sucesión fundamental de segmentos conmensurables con *U* que lo aproximarán. Lo anterior lo fundamentó en el teorema 2 del libro *X* de *Los Elementos.*

Con lo anterior, Cantor sustentó la relación entre los puntos de la recta y los elementos del conjunto *A*, más para la relación recíproca, la asignación de un elemento de *A* a cada punto de la recta necesitó del siguiente axioma:

> "…*a cada cantidad numérica corresponde un determinado punto en la recta cuya coordenada es igual a esa cantidad numérica"*

A partir de este axioma, Cantor enunció su principio de continuidad el cual se sustenta en la existencia de un punto en la recta para cada sucesión fundamental salvo las equivalencias. En la construcción del conjunto de los Números Reales realizada por Cantor, aparece un concepto que resulta básico en el sentido que sustenta su trabajo, el cual es el de *Sucesión Fundamental,* que es un concepto desarrollado por Cauchy y que está apoyado en los procesos infinitos, razón por la cual escogimos la construcción realizada por Cantor en nuestra reseña de los nexos de los procesos infinitos en los números reales.

Sucesiones Fundamentales o Sucesiones de Cauchy

Las Sucesiones Fundamentales o de Cauchy son sucesiones que cumplen que para cualquier distancia dada, por pequeña que sea, existen términos de la sucesión cuya distancia entre si es menor que la dada, lo que expresado en otras palabras se resume en:

> *"Una sucesión de números reales (x_n) con valores en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ es una Sucesión de Cauchy o Sucesión Fundamental si satisface la siguiente condición (llamada naturalmente condición de Cauchy): Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m > N$"*

El hecho de que en el conjunto de los números reales todas las sucesiones de Cauchy son convergentes y algunas de estas no convergen a números racionales, verifica la existencia de números irracionales y a partir de estos la completitud de los números reales entendiéndose esta como el cumplimiento de la siguiente propiedad:

"*Para cada subconjunto A no vacío de Números Reales acotado superiormente, existe un número real S tal que:*

1. *S es cota superior de A.*
2. *S es menor o igual que cualquier otra cota superior de A.*

Al número S se le denomina mínima cota superior o supremum de A y se denota

S = supA.

Análogamente, para cada subconjunto A no vacío de números reales acotado inferiormente, existe un número real I tal que:

1. *I es cota inferior de A.*
2. *I es mayor o igual que cualquier otra cota inferior de A.*

Al número real I se le denomina la máxima cota inferior o infimum de A y se denota

I = inf A"

Un ejemplo de una sucesión de Cauchy que no converge a un número racional es

$$(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La cual es una sucesión de números racionales que converge a e demostrando la no completitud de los números racionales pero si de los números reales.

Según Claros, Sánchez y Coriat (2009), los procesos infinitos que se evidencian en la definición de sucesión de Cauchy son los siguientes:

> El primero de ellos se relaciona con la condición $n, m > N$ la cual es análoga a $m, n \to \infty$ lo cual se sustenta en la noción de sucesor que por si mismo encarna la noción de proceso infinito que hemos definido y
>
> El segundo proceso infinito está relacionado con las diferencias $x_n - x_m$ las cuales se hacen cada vez más pequeñas en relación al ε que se considere.

Con lo anterior concluimos este breve recuento de la influencia de los procesos infinitos en la construcción del conjunto de los números reales y, a continuación, se presentan algunas definiciones para los aspectos de los números reales que vamos a analizar a excepción de la definición de Completitud que se presentó anteriormente:

Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad:

Cuando para dos magnitudes α y β del mismo tipo se encuentra otra magnitud γ con la cual se puedan expresar las dos primeras, se dice que las magnitudes α y β son conmensurables. Por otra parte, si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior entonces las magnitudes son inconmensurables.

Racionalidad:

Considerando a $\mathbb{Q}^* = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Z} \ y \ b \neq 0\}$, y la relación de equivalencia $\sim$ tal que para (a,b) y (c,d) en $\mathbb{Q}^*$ se tiene que

$$(a,b) \sim (c,d) \quad sii \quad ad = bc$$

El conjunto

$$\mathbb{Q}^*/\sim = \{[(a,b)] : a, b \in \mathbb{Z} \ y \ b \neq 0\}$$

Es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Por otra parte, la noción difundida en los textos escolares de matemáticas es la de enunciada por Pakhrou (2013) como:

> La colección de todas las fracciones que son equivalentes entre se llama Número Racional, y el conjunto de todos ellos se designa por $\mathbb{Q}$ es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \; y \; b \neq 0\right\}$$

En donde $\frac{a}{b}$ representa a $[(a, b)]$.

Irracionalidad:

Al tener a $p \in \mathbb{R}$, p es un número irracional si se presenta como la cortadura (A_1, A_2) de tal forma que

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q}: r < p\} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \{r \in \mathbb{Q}: r > p\}$$

Continuidad:

La continuidad de la recta consiste en el cumplimiento de las siguientes condiciones:

a. Entre dos puntos cualesquiera de la recta existe otro punto de la recta.
b. Si todos los puntos de la recta pueden separarse en dos clases tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase entonces existe un punto y solo uno que efectúa este corte en la recta

La continuidad de la recta se postula a través del axioma de Cantor – Dedekind el cual establece la equivalencia entre el continuo aritmético y el continuo lineal geométrico. En este axioma se asume que a cada número real le corresponde un punto en la recta y solo uno y que no hay otros puntos de la recta.

Luego de la consideración que hemos realizado sobre los Procesos Infinitos que se están involucrados en la Construcción del Número Real, realizamos a continuación la presentación de los aspectos de la teoría APOE en los que soportaremos los análisis posteriores de los textos y que, al igual que lo estudiado en cuanto a los Números Reales, nos servirá para determinar nuestras categorías de análisis.

2.2. Teoría APOE

Dado que en esta investigación tomamos como referencia la teoría APOE, en este apartado haremos una aproximación a sus fundamentos, centrándonos en describir a manera general las construcciones mentales: acción, proceso y objeto; a las cuales haremos alusión también en el desarrollo de nuestro estudio cuando nos refiramos a formas de conocer. Así mismo describiremos los mecanismos de construcción de interiorización y encapsulación que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático determinado. Es de mencionar que a pesar de hacer parte de la teoría APOE, no haremos referencia en nuestro marco teórico a la construcción mental esquema y a los mecanismo de construcción coordinación, generalización e inversión, dado que consideramos no son posibles de ver en un análisis de contenido, pues estos son propios de análisis en el estudiante a través de sus actuaciones.

La teoría de Dubinsky y su grupo de colaboradores, denominada APOE (acción, proceso, objeto y esquema), es una teoría que parte de una interpretación y reformulación de ideas de la teoría piagetiana constructivista, principalmente se basa en la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra determinadas construcciones mentales sobre un concepto particular, cuando se enfrenta a la actividad matemática (Dubinsky, 1996). Por tanto desde esta perspectiva el conocimiento se concibe de la siguiente manera:

> el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder, ante la percepción de situaciones problemáticas de la matemática,

> mediante la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y por medio de la construcción y reconstrucción de acciones matemáticas, procesos y objetos; y su organización en esquemas, para usarlos al tratar con esas situaciones. (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996, p. 5)

En la definición anterior, cuando un individuo se enfrenta a una situación matemática debe recurrir a la construcción y reconstrucción de acciones, procesos, objetos y esquemas; para poder dar solución a la situación; es así que tales elementos se constituyen en uno de los principales referentes de la teoría APOE, ya que estos son las construcciones mentales sobre las cuales el individuo cimienta su conocimiento, más adelante por su relevancia, nos centraremos en cada una de ellas. En consecuencia se puede afirmar que el conocimiento de un individuo se evidencia en la teoría APOE, cuando él involucra las construcciones mentales para el tratamiento de una situación (Asiala et al., 1996).

En este sentido las acciones, procesos, objetos y esquemas son las construcciones mentales que en el marco de la teoría APOE, un individuo realiza para construir significados a través de las situaciones problema; así mismo los mecanismos mentales que permiten hacer estas construcciones son las abstracciones reflexivas: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

La propuesta de la teoría APOE permite delimitar y describir un camino hacia la construcción de un concepto matemático en la mente de un individuo, a través de una herramienta denominada descomposición genética, con la que se intenta realizar la descripción teórica de los pasos que ha de seguir esta construcción, es decir, permite establecer una trayectoria posible para la formación de un concepto en un individuo (Badillo, Azcárate y Font, 2011), y es entendida como:

> la descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo. (Asiala, et al., 1996, p.5)

A continuación, definiremos en el marco de la teoría APOE, los mecanismos de construcción interiorización y encapsulación, para posteriormente continuar con las construcciones mentales: acción, proceso y objeto; que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático determinado; es de anotar, como ya se había mencionado, que no hablaremos sobre el esquema y los mecanismos de construcción coordinación, generalización e inversión, dado que en nuestro estudio no consideramos que se pueda vislumbrar en el desarrollo del libro, ya que estos son propios de análisis en las actuaciones del estudiante al enfrentarse a una situación; en consecuencia solo emplearemos estas construcciones mentales y mecanismos de construcción de la teoría APOE como parte de las categorías en el análisis de los dos libros de texto de octavo grado, para establecer las formas de conocer acción, proceso y objeto que se desprenden de los procesos infinitos inmersos en el desarrollo de los dos libros de texto analizados.

2.2.1 Mecanismos de Construcción

En la teoría de Dubinsky y colaboradores, se consideran cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos de construcción que dan lugar a las acciones, procesos, objetos y esquemas; tales mecanismos son: la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión; dado que según afirman Roa y Oktaç (2010) las construcciones más elementales son las acciones y los procesos, las cuales se relacionan directamente con los mecanismo de interiorización y encapsulación, en nuestro estudio solo nos basamos en estos dos, por ello a continuación los describimos a manera general.

Interiorización:

Dubinsky y colaboradores definen el mecanismo de interiorización de una acción como:

> "la construcción mental de un proceso, mediante una serie de acciones sobre objetos cognitivos, que pueden ser realizados o imaginados para ser ejecutados en

la mente del individuo sin necesariamente llevar a cabo todos los pasos específicos.” (Ramírez, 2000, p. 37)

En este mismo sentido se afirma que Interiorizar una acción según Dubinsky (1992) “consiste en que una cierta construcción interna es hecha con relación a la acción. (…) la interiorización permite ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones” (p.107).

En este sentido la interiorización de una acción, se basa en construir una estructura mental que realiza el mismo trabajo que el de la acción externa, la cual se produce cuando el individuo repite y reflexiona sobre la acción (Roa y Oktaç, 2010)

Encapsulación:

Según Roa y Oktaç (2010) la encapsulación “consiste básicamente en la conversión de una estructura dinámica (proceso) en una construcción estática (el objeto), que se genera cuando el individuo debe transformar al objeto para resolver una situación” (p.95). Por otro lado Ramírez (2000) señala que “el mecanismo de construcción encapsulación es la transformación mental de un proceso, el cual se ha interiorizado en una acción, en un objeto cognitivo. Este objeto puede considerarse como una entidad total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de acciones y procesos”. (p.38)

De esta manera, la encapsulación es la que permite convertir un proceso dinámico en uno estático, dado que ha logrado interiorizar acciones y procesos para dar lugar al objeto.

2.2.2 Construcciones Mentales o Formas de Conocer

2.2.2.1 Acción

Asiala et al. (1996) señala que en la Teoría APOE, la construcción mental acción es una concepción muy limitada del concepto, sin embargo constituye el principio fundamental de la construcción de dicho concepto. A continuación presentamos dos nociones de acción de acuerdo a la teoría APOE.

> “(…) es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo” (Asiala et al., 1996, p. 7; Dubinsky, 1996).

> “cualquier manipulación repetible, física o mental, que transforma objetos (por ejemplo, números, figuras geométricas, conjuntos, etcétera) para obtener objetos” (Breindenbach et al., 1992, citado por Barbosa, 2003, p. 4).

Desde este punto de vista se podría decir, en la teoría APOE, que un individuo se encuentra en la forma de conocer acción, si a partir de una reacción a algo externo realiza o muestra indicios de cualquier operación física o mental repetible que transforma de alguna manera un objeto. Un ejemplo de lo anterior, se podría ver cuando sigue una serie de indicaciones detalladas de los pasos a dar para realizar cierta transformación, sin tener un proceso de reflexión previo.

En este sentido, en la siguiente tabla se ilustra la forma de conocer acción de los procesos infinitos que adoptaremos en nuestro estudio; para cada uno de los aspectos contemplados en la construcción de los números reales.

Aspecto de la construcción número real	**Acción**
Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad	**Medir, saber cuántas veces cabe una magnitud en otra** - Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante determinar cuántas veces “cabe” una magnitud en otra.
Racionalidad	**Convertir de expresión fraccionaria a decimal y viceversa.** - Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante determinar las expresiones decimales finitas o infinitas periódicas de un número según corresponda.
Irracionalidad	

Completitud	**Aproximaciones por exceso y por defecto de un número real.** - Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Aproximación de racionales e irracionales por exceso y por defecto. • Aproximaciones de raíces cuadradas por defecto y por exceso.
Continuidad	**Ubicar en la recta un número real (medir el segmento con la regla y ubicarlo con ayuda del compás).** **Asignación de un punto de la recta con un número real.** - Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Ubicación de puntos en la recta numérica. • Construcción de segmentos cuya longitud sea un número determinado.

2.2.2.2 Proceso

Dado que la interiorización, como ya se había mencionado, se basa en construir una estructura mental que desarrolla el mismo trabajo que el de la acción externa, esta se genera cuando el individuo repite y reflexiona sobre la acción (Roa y Oktaç, 2010); cuando se llega a tal interiorización, de acuerdo a la teoría APOE, el individuo logra la construcción mental de proceso la cual se basa en una construcción interna, es decir, que individuo ya puede describir los pasos que intervienen en la transformación e incluso invertirlos (Badillo et. al, 2011). En las siguientes definiciones de proceso podremos evidenciar lo mencionado.

> "cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un proceso" (Asiala et al., 1996, p.7; Dubinsky, 1996).

> “los procesos suceden cuando se repite una acción y el estudiante adquiere la capacidad de reflexionar, describir, coordinar con otros procesos o incluso revertir los pasos de la transformación sobre ello y lograr tomar el control, sin necesidad de actuar como respuesta a estimulaciones externas.” (Camacho, Díaz, Mosquera y Salamanca, 2013; p. 351)

Por lo tanto se puede decir que un estudiante se encuentra en la forma de conocer proceso, cuando es capaz de ver una transformación de manera dinámica, además la puede distinguir como una transformación interna que él puede controlar de alguna manera, sin tener que recurrir a estímulos externos, porque ya ha pasado por un proceso de reflexión e interiorización de las acciones que dan lugar a dicha transformación.

Desde esta perspectiva, a continuación presentamos la forma de conocer proceso de los procesos infinitos que proponemos como punto de partida para nuestros análisis de contenido.

Aspecto de la construcción número real	**Proceso**
Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad	**Interiorizar la acción de medir, para determinar si es finito o infinito dicho procedimiento.** - Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante dar cuenta que el proceso de medición es infinito o finito.
Racionalidad	**Interiorizar la forma decimal del número racional, es decir, si es finita o infinita periódica.** - Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante dar cuenta que el decimal es periódico o finito.
Irracionalidad	**Interiorizar la no periodicidad de la expresión decimal.** - Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante dar cuenta que el decimal es infinito no periódico.

Completitud	**Reflexionar sobre las distancias entre los encajonamientos e inferir su cercanía al cero.** - Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Construcción de encajonamientos para decimales periódicos y su relación con fracciones decimales. • Determinar las distancias entre los encajonamientos e identificar su cercanía al cero.
Continuidad	**Reflexión sobre el proceso de encajonamiento, haciendo uso de la recta numérica.** - Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante ubicar números en la recta numérica mostrando encajonamiento o aproximación.

2.2.2.3 Objeto

Contrario a las acciones y procesos, que son transformaciones dinámicas, los objetos son estáticos, dado que son el resultado de la encapsulación de un proceso. Este mecanismo de encapsulación consiste en la conversión de una estructura dinámica en una estática, la cual se genera cuando el individuo debe transformar el objeto con el fin de dar solución a una situación. Teniendo esto, los objetos desde la teoría APOE son vistos de la siguiente manera:

> cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso se ha encapsulado en un objeto. (Asiala et al., 1996, p. 8)

> “los objetos son reconstrucciones de los procesos ya que implican reflexionar sobre las transformaciones (acciones y procesos) como un todo que estructurado conforma objetos cognitivos, se tiene una buena comprensión

del objeto matemático y se puede construir, reconstruir, transformar y especificar dicho objeto de manera interna y en algunos casos sin llegar a hacer uso de ejemplos específicos, sino únicamente tratando el concepto en general." (Alvarenga, 2006, citado por Camacho et al., 2013, p. 351)

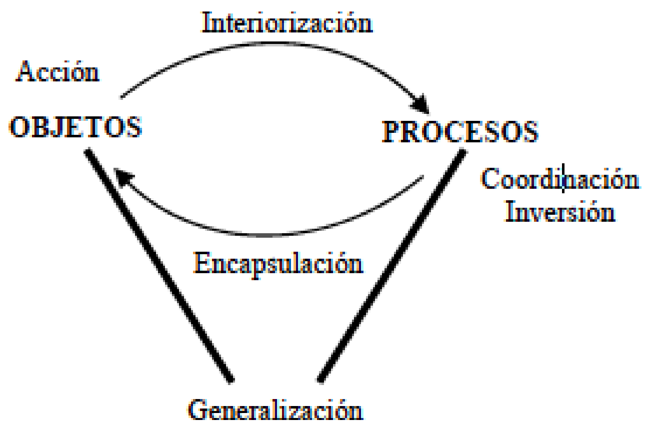
De lo anterior, se infiere que cuando el individuo piensa en el proceso como un todo y realiza transformaciones sobre su totalidad se encuentra en una concepción objeto (Roa y Oktaç, 2010), dado que su comprensión de la idea es tan profunda que la trata como un objeto.

Siguiendo estas ideas y ajustándolas a nuestro estudio, en la siguiente tabla resumimos la forma de conocer objeto de los procesos infinitos que adoptaremos para el análisis de contenido propuesto por este trabajo.

Aspecto de la construcción número real	**Objeto**
Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad	**Certeza de poder ò no poder medir con una unidad.** - Se entenderá por objeto aquellas explicaciones, ejemplos actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Determinar si existe una unidad patrón para medir una determinada magnitud. • Caracterización de la inconmensurabilidad y conmensurabilidad.
Racionalidad	**Encapsulación de acciones y procesos para definir número racional como una razón entre dos números enteros o como un número con expresión decimal finita o infinita periódica.** - Se entenderá por objeto aquellas explicaciones, ejemplos actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Caracterización de la racionalidad de un número, vista como la razón entre dos números enteros o como una expresión decimal finita o infinita periódica. • Determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número racional.

	• Caracterizar números racionales a partir de su expresión decimal. • Relación entre los números decimales periódicos con una fracción y viceversa.
Irracionalidad	**Encapsulación Coordinación de acciones y procesos para definir número irracional como un número cuya expresión decimal es infinita no periódica.** - Se entenderá por objeto aquellas explicaciones, ejemplos actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número irracional. • Caracterizar números irracionales a partir de su expresión decimal. • Relacionar los números irracionales con las magnitudes inconmensurables
Completitud	**Paso al límite (encontrar el número)** - Se entenderá por objeto aquellas explicaciones, ejemplos actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Acercamiento al concepto de densidad, es decir, dados dos número encontrar la cantidad que hay entre ellos. • Afirmaciones o justificaciones acerca del procedimiento de encajonar.
Continuidad	**Encapsulación de acciones y procesos para tener la certeza que a ese número le corresponde un único punto en la recta numérica.** - Se entenderá por objeto aquellas explicaciones, ejemplos actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • encapsular acciones y procesos para tener la certeza que a ese número le corresponde un único punto en la recta numérica. • Afirmaciones o justificaciones acerca cómo se ubican los números en la recta numérica.

Finalmente, en la siguiente figura Dubinsky (1992) presenta un esquema de las relaciones entre las construcciones y mecanismos a los que alude la teoría APOE.



Esquemas y su construcción (p. 107)

3. Capítulo III. Aspectos Metodológicos

Este capítulo está dedicado a describir los elementos metodológicos que tomamos en cuenta para desarrollar nuestro estudio; el procedimiento realizado se dividió en cuatro fases, teniendo en cuenta los pasos que señala Raigada (2002) para elaborar un análisis de contenido, las cuales se relacionan con: selección de la comunicación que será estudiada, selección de las categorías que se utilizarán, selección de las unidades de análisis y selección del sistema de recuento o de medida.

En consecuencia, pretendemos abordar una investigación centrada en el estudio de los procesos infinitos presentes en la construcción de los números reales en dos libros de texto de matemáticas de octavo grado; por ello nuestro estudio adopta una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva e interpretativa, que hace uso del análisis de contenido cualitativo, ya que éste incluye técnicas que permite realizar en el proceso de análisis una interpretación del sentido oculto del texto (Abela, 2002). En tanto en el desarrollo de la investigación adoptamos las ideas de Laurence Bardin (citado por Abela, 2002) en relación a que "…el análisis de contenido es el conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores, cuantitativos o no, por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes permite realizar interpretaciones e inferencias" (Bardin citado por Abela, 2002, p. 3).

A continuación describimos las cuatro fases que implementamos en la investigación.

3.1. Selección de la comunicación

Según planteamientos de Raigada (2002) el análisis de contenido se puede diferenciar de acuerdo a los objetivos del estudio a realizar en: exploratorio, descriptivo, y de verificativo o explicativo; el presente estudio se enmarca en el último, es decir es verificativo o explicativo dado que su finalidad es identificar los procesos infinitos involucrados en la construcción de los números reales en libros de texto de octavo grado; por ello, requerimos realizar una exploración y análisis del contenido manifiesto y latente de los textos buscando identificar, inferir, deducir o explicar la presencia o no de los procesos infinitos en las unidades de análisis seleccionadas.

Por lo anterior, la selección de los dos libros de texto de octavo grado de los cuales se tomó la información para analizar en esta investigación, se realizó a través de tres criterios principalmente; así el primero atiende a que tales textos fueran formulados de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, dado que estos son los documentos que actualmente rigen para regular la educación matemática escolar en nuestro país; como segundo criterio que los textos manifestaran procesos de aproximación y en los cuales se lograra evidenciar mayor presencia, implícita o explícita, de procesos infinitos en sus explicaciones, ejemplos o actividades planteadas en el desarrollo de la construcción de los números reales. Por último se tuvo en cuenta que los textos tuvieran un capitulo, sección o unidad dedicada los números reales.

En consecuencia, en nuestra investigación los dos textos escolares de matemáticas de grado octavo que se seleccionaron son: Matemáticas 8 serie código, ediciones SM S.A., 2008. El libro Alfa 8 de Editorial Norma, edición 2002; dado que se ajustan a los objetivos, a la información que pretendemos recoger y a los criterios de selección descritos en el párrafo anterior.

3.2. Unidades de análisis

En nuestro trabajo optamos por tomar como unidades de muestreo, entendidas estas como aquellas porciones del universo observado que serán analizadas (Abela, 2002, p. 13); el capítulo o secciones de los dos libros escogidos donde se aborde la construcción de los números reales; así mismo las unidades de registro, las cuales se refieren a los segmentos que hacen parte de las unidades de muestreo que se analizarán (Abela, 2002) y que se convierten en definitiva los datos del presente estudio; son los segmentos (explicaciones, ejemplos o actividades) que dan cuenta de la presencia implícita o explícita de los procesos infinitos.

Realizamos el análisis de los datos a través de la triangulación de los mismos, entendida ésta como "…la recogida y comparación de distintas perspectivas sobre una misma situación de comunicación" (Raigada, 2002, p 14); ya que los dos investigadores fragmentamos por separado la información, considerando para ello los segmentos que dan cuenta o permiten evidenciar rastro de los procesos infinitos en la construcción de los números reales; posteriormente revisamos y consolidamos un conjunto amplio de datos, que constituye nuestras unidades de registro y sobre las cuales luego realizamos una clasificación, descripción y contraste para poderlas incluir en una de las categorías preestablecidas (las que se abordaran en el siguiente apartado); para finalmente a la luz de tales categorías poder realizar las explicaciones e inferencias sobre los procesos infinitos que se pueden evidenciar en los dos libros de texto analizados. Por ello nuestro análisis de contenido no sólo debe hacer énfasis en el contenido manifiesto sino que debe profundizar en gran medida en el contenido latente presente en las unidades de registro.

3.3. Categorías de análisis

Las categorías que se emplean en nuestro estudio para interpretar, explicar y relacionar las unidades de registro, fueron diseñadas a priori al análisis de los datos, sin embargo posteriormente se ajustaron de acuerdo a reflexiones posteriores a tales análisis. En consecuencia se partió de lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en relación a que "Las conceptualizaciones relativas a los números reales implican la aritmetización de procesos infinitos, y por ende, la construcción de las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad, completitud y continuidad" (MEN,2004, p. 60); dado que como ya se mencionó en el apartado anterior nuestras unidades de muestra son las secciones o capítulos de los libros donde se aborda la construcción de los números reales; por tanto las categorías se enmarcan bajo tres elementos principales, por un lado en la conmensurabilidad e inconmensurabilidad, racionalidad, irracionalidad, completitud y continuidad; nociones fundamentales para conceptualizar los números reales como se evidencia en el marco teórico y de acuerdo a lo señalado por el MEN (2004); por otra parte, ya que el análisis de los datos se va a realizar bajo la perspectiva de la teoría APOE, las categorías adoptan las formas de conocer acción, proceso y reformulamos la forma de conocer objeto en declarado por un lado y por otro objeto promovido. Finalmente dado que se está realizando nuestro estudio bajo el análisis de contenido, como tercer elemento a tener en cuenta dentro de las categorías, incluimos la intencionalidad de nuestras unidades de análisis, es decir, las explicaciones, ejemplos y actividades planteadas por el libro de texto en el desarrollo de la construcción de los números reales.

Clasificación según las componentes consideradas del concepto de número real		Clasificación según las formas de conocer de la Teoría APOE		Clasificación según la intencionalidad del segmento	
Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad	C.I	Acción	A	Explicación	Ex
Racionalidad	R	Proceso	P	Ejemplo	Ej
Irracionalidad	Ir	Objeto Promovido	Op	Actividad	Ac
Completitud	Cm	Objeto declarado	Od		
Continuidad	Cn				

Tabla 1

Con base en lo anterior, de acuerdo a la naturaleza de nuestros datos y mediante la selección de las unidades de registro establecimos las categorías y el sistema de codificación para cada una de ellas, como se muestra en la tabla 2. Posteriormente en la Tabla 3 se describe de manera general cada categoría a la luz de los componentes considerados en la conceptualización de los números reales y según las formas de conocer adoptadas por la teoría APOE; finalmente la Tabla 4 particulariza algunos aspectos que se esperan evidenciar en las unidades de análisis (explicaciones, ejemplos y actividades) en relación a los dos aspectos mencionados anteriormente.

	Acción	***Proceso***	***Objeto Declarado***	***Objeto Promovido***
Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad	Explicación-acción-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Explicación-proceso-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Explicación-objeto declarado-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Explicación-objeto promovido-conmensurabilidad e inconmensurabilidad
Código	Ex-A-C.I	Ex-P-C.I	Ex-Od-C.I	Ex-Op-C.I
	Ejemplo-acción-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Ejemplo-proceso-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Ejemplo-objeto declarado-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Ejemplo-objeto promovido-conmensurabilidad e inconmensurabilidad
Código	Ej-A-C.I	Ej-P-C.I	Ej-Od-C.I	Ej- Op –C.I
	Actividad-acción-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Actividad-proceso-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Actividad-objeto declarado-conmensurabilidad e inconmensurabilidad	Actividad-objeto promovido-conmensurabilidad e inconmensurabilidad
Código	Ac-A-C.I	Ac-P-C.I	Ac-Od-C.I	Ac-Op-C.I
Racionalidad	Explicación-acción- Racionalidad	Explicación-proceso- Racionalidad	Explicación-objeto declarado-Racionalidad	Explicación-objeto promovido-Racionalidad
Código	Ex-A-R	Ex-P-R	Ex-Od-R	Ex-Op-R
	Ejemplo-acción- Racionalidad	Ejemplo-proceso- Racionalidad	Ejemplo-objeto declarado-Racionalidad	Ejemplo-objeto promovido-Racionalidad
Código	Ej-A-R	Ej-P-R	Ej-Od-R	Ej- Op –R
	Actividad-acción- Racionalidad	Actividad-proceso- Racionalidad	Actividad-objeto declarado-Racionalidad	Actividad-objeto promovido-Racionalidad
Código	Ac-A-R	Ac-P-R	Ac-Od-R	Ac-Op-R
Irracionalidad	Explicación-acción- Irracionalidad	Explicación-proceso- Irracionalidad	Explicación-objeto declarado-Irracionalidad	Explicación-objeto promovido-Irracionalidad
Código	Ex-A-Ir	Ex-P-Ir	Ex-Od-Ir	Ex-Op-Ir
	Ejemplo-acción- Irracionalidad	Ejemplo-proceso- Irracionalidad	Ejemplo-objeto declarado-Irracionalidad	Ejemplo-objeto promovido-Irracionalidad
Código	Ej-A-Ir	Ej-P-Ir	Ej-Od-Ir	Ej- Op–Ir
	Actividad-acción- Irracionalidad	Actividad-proceso- Irracionalidad	Actividad-objeto declarado-Irracionalidad	Actividad-objeto promovido-Irracionalidad
Código				
Completitud	Explicación-acción- Completitud	Explicación-proceso- Completitud	Explicación-objeto declarado-Completitud	Explicación-objeto promovido-Completitud
Código	Ex-A-Cm	Ex-P-Cm	Ex-Od-Cm	Ex-Op-Cm
	Ejemplo-acción- Completitud	Ejemplo-proceso- Completitud	Ejemplo-objeto declarado- Completitud	Ejemplo-objeto promovido- Completitud
Código	Ej-A-Cm	Ej-P-Cm	Ej-Od-Cm	Ej- Op –Cm
	Actividad-acción- Completitud	Actividad-proceso- Completitud	Actividad-objeto declarado-	Actividad-objeto promovido-

			Completitud	Completitud
Código	Ac-A-Cm	Ac-P-Cm	Ac-Od-Cm	Ac-Op-Cm
Continuidad	Explicación-acción- Continuidad	Explicación-proceso- Continuidad	Explicación-objeto declarado- Continuidad	Explicación-objeto promovido- Continuidad
Código	Ex-A-Cn	Ex-P-Cn	Ex-Od-Cn	Ex-Op-Cn
	Ejemplo-acción- Continuidad	Ejemplo-proceso- Continuidad	Ejemplo-objeto declarado- Continuidad	Ejemplo-objeto promovido- Continuidad
Código	Ej-A-Cn	Ej-P-Cn	Ej-Od-Cn	Ej- Op–Cn
	Actividad-acción- Continuidad	Actividad-proceso- Continuidad	Actividad-objeto declarado- Continuidad	Actividad-objeto promovido- Continuidad
Código	Ac-A-Cn	Ac-P-Cn	Ac-Od-Cn	Ac-Op-Cn

Tabla 2

	ACCIÓN	**PROCESO**	**OBJETO**
CONMENSURABILIDAD O INCONMENSURABILIDAD	Medir (saber cuántas veces cabe)	Interiorizar la acción de medir, para determinar si es finito o infinito dicho procedimiento.	Certeza de poder ò no poder medir con una unidad.
RACIONALIDAD	Convertir de expresión fraccionaria a decimal y viceversa.	Interiorizar la forma decimal del número racional (finita o infinita periódica).	Encapsulación de acciones y procesos para definir número racional como una razón entre dos números enteros o como un número con expresión decimal finita o infinita periódica.
IRRACIONALIDAD		Interiorizar la no periodicidad de la expresión decimal.	Encapsulación Coordinación de acciones y procesos para definir número irracional como un número cuya expresión decimal es infinita no periódica.
COMPLETITUD	Aproximaciones por exceso y por defecto de un número real.	Reflexionar sobre las distancias entre los encajonamientos e inferir su cercanía al cero.	Paso al límite (encontrar el número)
CONTINUIDAD	• Ubicar en la recta un número real (medirlo con la regla y ubicarlo con ayuda del compás). • Asignación de un punto de la recta con un número real.	Reflexión sobre el proceso de encajonamiento, haciendo uso de la recta numérica.	Encapsulación de acciones y procesos para tener la certeza que a ese número le corresponde un único punto en la recta numérica.

Tabla 3

Tabla de Categorías Emergentes

	ACCIÓN	PROCESO	OBJETO	
			PROMUEVE	DECLARADO
CONMENSURABILIDAD E INCONMENSURABILIDAD	Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante determinar cuántas veces "cabe" una magnitud en otra.	Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante dar cuenta que el proceso de medición es infinito o finito.	Se entenderá por objeto aquellas actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Determinar si existe una unidad patrón para medir una determinada magnitud. • Caracterización de la inconmensurabilidad y conmensurabilidad.	Se entenderá por objeto declarado a aquellas explicaciones o ejemplos que caractericen las magnitudes conmensurables e inconmensurables.
RACIONALIDAD	Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante determinar las expresiones decimales finitas o infinitas periódicas de un número según corresponda.	Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante dar cuenta que el decimal es periódico o finito.	Se entenderá por objeto aquellas actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante la caracterización de la racionalidad de un número, vista como la razón entre dos números enteros o como una expresión decimal finita o infinita periódica.	Se entenderá por objeto aquellas explicaciones o ejemplos que contienen e incluyen: • Determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número racional. • Caracterizar números racionales a partir de su expresión decimal. • Relación entre los números decimales periódicos con una fracción y viceversa.

IRRACIONALIDAD		Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante dar cuenta que el decimal es infinito no periódico.	Se entenderá por objeto aquellas actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante la caracterización de la irracionalidad de un número, vista como expresión decimal no periódica.	Se entenderá por objeto aquellas explicaciones o ejemplos que contienen e incluyen: • Determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número irracional. • Caracterizar números irracionales a partir de su expresión decimal. • Relacionar los números irracionales con las magnitudes inconmensurables
COMPLETITUD	Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Aproximación de racionales e irracionales por exceso y por defecto. • Aproximaciones de raíces cuadradas por defecto y por exceso.	Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Construcción de encajonamientos para decimales periódicos y su relación con fracciones decimales. • Determinar las distancias entre los encajonamientos e identificar su cercanía al cero.	Se entenderá por objeto aquellas actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante hacer el paso al límite (encontrar el número). Acercamiento al concepto de densidad, es decir, dados dos número encontrar la cantidad que hay entre ellos.	Se entenderá por objeto aquellas explicaciones o ejemplos que contienen o responden afirmaciones acerca del procedimiento de encajonar.

CONTINUIDAD	Se entenderá por acción aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante: • Ubicación de puntos en la recta. • Construcción de segmentos cuya longitud sea un número determinado.	Se entenderá por proceso aquellas explicaciones o actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante ubicar números en la recta numérica mostrando encajonamiento o aproximación.	Se entenderá por objeto aquellas actividades que contienen, incluyen o solicitan al estudiante coordinar acciones y procesos para tener la certeza que a ese número le corresponde un único punto en la recta numérica.	Se entenderá por objeto aquellas explicaciones o ejemplos que contienen o responden afirmaciones acerca cómo se ubican los números en la recta numérica.

Tabla 4

3.4. Selección del sistema de recuento o de medida

Nuestro análisis de contenido es de tipo cualitativo de acuerdo al planteamiento del problema de investigación y los objetivos; por ello emplearemos como parámetros de medición el análisis de contenido frecuencial de tipo relacional, ya que por una parte pretendemos contabilizar el número de ocurrencias, de presencia o ausencia de elementos de una categoría o de indicadores que aludan a esta; y por otra parte establecer relaciones de asociación, equivalencia, exclusión, proximidad, simultaneidad, secuencialidad u orden entre distintos elementos de las categorías Raigada (2002), para poder posteriormente establecer descripciones, inferencias y explicaciones sobre los procesos infinitos presentes en los dos libros de texto seleccionados.

En consecuencia, con el análisis de contenido relacional mediremos la concurrencia o no de una categoría a partir de tabulaciones previas frecuencias, para resumir, ordenar y establecer estructura relacional lógica entre categorías, tal información será presentada en tablas de contingencia, con el fin de poder constatar la discriminación o la consistencia de unas categorías sobre otras.

4. Capitulo IV. Análisis de Resultados

A continuación se presenta el análisis de los libros NUEVO ALFA 8 y CÓDIGO 8 el cual ha sido desarrollado a partir de la clasificación de segmentos de las unidades de los libros[1] que corresponden a la construcción de los Números Reales en donde tuvimos en cuenta los siguientes aspectos que son definitivos en la determinación de las categorías de análisis:

- El orden con el que los segmentos han sido expuestos.
- La intencionalidad con que son presentados.
- Las formas de conocer determinadas por la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y ajustadas en esta investigación para analizar no el estudiante sino el libro de texto.
- Los aspectos relacionados con los procesos infinitos presentes en la construcción de conjunto de los Números Reales (Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad, Racionalidad, Irracionalidad, Completitud y Continuidad).

Los segmentos de los libros los hemos catalogado según la intencionalidad con que han sido presentados en explicaciones, ejemplos o actividades y al considerar que en ocasiones los ejemplos pueden ser usados en el libro como explicaciones y viceversa, se tiene en cuenta la manera como dicho segmento es usado. Por otra parte y dadas las estrechas relaciones entre los aspectos de los números reales que se han considerado, un mismo segmento puede corresponder a dos aspectos diferentes del número real y a formas de conocer diferentes, por ejemplo, un segmento puede exponer una acción destinada al conocimiento de la Continuidad y a su vez ser un proceso que conduce al conocimiento de la Completitud del conjunto de los números reales. A partir de lo anterior se han determinado las convenciones para la clasificación de los segmentos de cada texto, clasificación que atiende por un lado a la intencionalidad con que el segmento del libro es utilizado, como segundo a la forma de

[1] Los segmentos de los libros hacen referencia a fragmentos del mismo que tienen una intencionalidad determinada, es decir, que son usados para explicar, para ejemplificar o para asignar una actividad al estudiante.

conocer que promueve y por último al aspecto del Número Real al que hace alusión (ver tabla 2).

Teniendo en cuenta la dualidad que se puede presentar en el uso de los segmentos como explicaciones – ejemplos o viceversa, cuando un segmento presente esta dualidad tendrá una doble clasificación es decir será clasificado como explicación y como ejemplo y de igual manera cuando un segmento responda a aspectos diferentes del número real se presentará en las categorías en donde se considere pertinente. Por último, el análisis de cada texto se realiza de forma lineal, es decir, que se toman los segmentos en el orden en que son presentados por el libro de texto, esto con el fin de poder analizar la linealidad y la coherencia del mismo.

4.1. Análisis libro de Texto NUEVO ALFA 8

El libro Nuevo Alfa 8 de Editorial Norma edición 2001, determina las dos primeras unidades temáticas a la presentación de los números Irracionales (Unidad 1) y de los números reales (Unidad 2), más nuestro análisis se centra en la unidad 1 dado que en ésta es donde el libro realiza la construcción del conjunto de los Números Reales y en la cual se evidencia la presencia de los procesos infinitos.

El texto se organiza en varias secciones que hemos denominado *Secciones Preliminares* y las correspondientes al *Desarrollo Temático* y a continuación describimos de manera general cada una de ellas:

SECCIONES PRELIMINARES

1. El primer aspecto que es presentado en la unidad 1, *Números Irracionales*, son las competencias que el texto pretende desarrollar en los estudiantes, las cuales están clasificadas en interpretativas, propositivas y argumentativas y que están enfocadas al desarrollo de los pensamientos numérico, variacional, geométrico y aleatorio.

2. *¿Cómo Surgió?* En donde se hace una introducción histórica a los números irracionales a partir de su relación con las magnitudes inconmensurables.

3. En la tercera sección, denominada *Me Preparo*, el libro propone una serie de actividades destinadas a la preparación de los estudiantes para afrontar los contenidos propios de la unidad.

4. En la cuarta y última sección preliminar, la cual es llamada *¿En qué se Aplica?* el libro resalta la importancia de los números irracionales a partir de un ejemplo particular, el de la razón aurea.

DESARROLLO TEMÁTICO

El desarrollo temático de la unidad 1 está dividido en 4 lecciones en las que se presentan los contenidos a partir de explicaciones y ejemplos y se plantean algunas actividades en la sección *Aplico* ubicada al terminar cada lección. Las lecciones en cuestión se denominan como sigue:

a. *Lección 1: Expresiones decimales Periódicas y no Periódicas.*
b. *Lección 2: Números Irracionales.*
c. *Lección 3: Construcción de Algunos Números Irracionales.*
d. *Lección 4: Los Irracionales y la Recta Numérica.*

Al terminar las secciones 2 y 4 se propone un taller de competencias el cual está planteado a partir de las competencias definidas para la unidad y que busca determinar el nivel alcanzado por el estudiante.

El libro de texto expone, al final de la presentación del contenido temático, cuatro secciones dirigidas al *Glosario* de términos utilizados en la unidad, a una serie de *Pasatiempos* (los cuales son actividades desvinculadas de los contenidos presentados), a la determinación de los avances de los estudiantes (sección *Mis Avances*) y por último una sección enfocada a la preparación hacia la prueba de Estado denominada *Avancemos hacia el ICFES*.

A continuación presentaremos los segmentos del libro correspondientes a la unidad 1 iniciando por los segmentos correspondientes a las secciones preliminares:

SECCIONES PRELIMINARES

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
1	8	Ex – Od – C.I

¿Cómo surgió?

Los números irracionales, desde su aparición en los pitagóricos tardíos (siglo V a. de C.), fueron motivo de perturbación para los matemáticos hasta finales del siglo XIX.

Para el estudio de las magnitudes continuas (por ejemplo de longitud) y sus mediciones, fue utilizada la razón que existe entre dicha longitud y otra longitud tomada como unidad de medida. El proceso de medida se basaba en encontrar una unidad de longitud común a las dos longitudes dadas. La medición de esos segmentos podía expresarse como la razón entre números naturales (lo que hoy se conoce como números racionales) y aritméticamente se calculaba con el algoritmo de Euclides, para la división.

El descubrimiento de la existencia de segmentos que no son medibles con la misma unidad de medida, es decir, no podía hallarse una unidad de medida contenida un número entero de veces en cada segmento —como fue el caso de la diagonal del cuadrado y su lado—, creó en los griegos un estado de crisis, puesto que la concepción de número como número natural y sus respectivas razones, resultaban inadecuados para dar cuenta de propiedades fundamentales de las magnitudes continuas como la medición.

La ruptura obedeció a que al calcular la unidad de medida común entre la diagonal del cuadrado y su lado, aplicando el algoritmo de Euclides, se generó un proceso infinito en términos numéricos. Esto equivale a decir que la razón entre ambas medidas no podía expresarse mediante un cociente de números naturales porque se obtenía un número decimal infinito no periódico.

Surgen entonces los conceptos de medidas *conmensurables* e *inconmensurables*. La primera hace referencia a la relación entre longitudes respecto a otra tomada como unidad y expresada a través de una razón entre números enteros. La inconmensurabilidad se refiere a la imposibilidad de establecer una razón entre dos longitudes con una misma unidad y, por consiguiente, su medida no es número racional.

El anterior segmento del texto que hace referencia a la sección *¿Cómo surgió?* al estar dedicado a la exposición de la manera como se generaron las nociones de magnitud conmensurable e inconmensurables es una explicación en donde se declaran estos objetos y, de manera implícita, establece la relación de las magnitudes inconmensurables con los números irracionales.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
2	9	Ac – A – R

Me preparo

1. Escribo cuatro ejemplos de decimales infinitos.
2. ¿Cuántos tipos de decimales infinitos conozco? Doy ejemplos.
3. Encuentro el valor de $\sqrt{2}$ y π dado por la calculadora.
4. Sin calculadora, hallo la expresión decimal correspondiente a $\frac{1}{6}$.

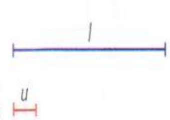
Las actividades están destinadas a la caracterización y diferenciación de los números reales a partir de la forma de su expresión decimal, lo cual supone acciones a realizar por los estudiantes y la clasificación está de acuerdo a la Tabla de Categorías Emergentes.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
3	9	Ac – A – Cn
5. Localizo en la recta numérica los números: **a.** 0.25 **b.** $\frac{-3}{2}$ **c.** -0.75 **d.** 2.164 **e.** 0.3 **f.** 0.333...		

La actividad propuesta está dedicada a la ubicación de los números racionales en la recta numérica lo cual es posible gracias a la Continuidad de la misma. En el ítem *f* de la actividad se presupone un proceso infinito dada la forma infinita de la expresión decimal.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
4	9	Ac – Op – Cm
7. ¿Cuántos números diferentes hay entre 0.31 y 0.32?		

Esta actividad se propone introducir al estudiante la idea de densidad en el intervalo $[0.31, 0.32]$, al plantearle la posibilidad de encontrar diferentes números en el intervalo y poder realizar esto de manera continua y esto está directamente relacionado con la Completitud de los números reales.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
5	9	Ac – A – C.I
8. ¿Cuántas veces contiene la longitud *l* a la unidad *u* de la figura 1.2?  Fig. 1.2		

La actividad anterior se propone, a partir de la comparación entre las magnitudes *l* y *u,* determinar su Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad y esto corresponde a la definición de la forma de conocer *acción* para las magnitudes conmensurables e inconmensurables.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
6	9	Ex– Od – Ir Ej – Od - Ir

¿En qué se aplica?

Por la complejidad lógica del número irracional su utilidad básicamente se encuentra en el campo de las matemáticas. Con los números irracionales se estructura el continuo numérico y, por ende, los números reales; a su vez estos son parte esencial para comprender el cálculo (*diferencial* e *integral*); sin embargo, hay números como "el número de oro" y la "proporción áurea", que se han utilizado en el arte y la arquitectura. Por ejemplo la proporción áurea fue usada muchas veces por los artistas y arquitectos griegos para construir los más famosos templos, como el Partenón, y en tiempos más recientes en pinturas como la *Gioconda*.

La "proporción áurea" se usa en la escultura y también en el estudio de situaciones biológicas como el crecimiento de caracoles y amebas, y en el diseño de diversas espirales que se dan tanto en la naturaleza como en los ambientes de publicidad.

La solución a la proporción áurea es el número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conocido como "número de oro".

Hay otros números irracionales importantes como π y e utilizados en ramas de la matemática como la geometría y el cálculo.

Este segmento hace una exposición de la aplicación del número de oro en el arte y además lo declara determinando su naturaleza irracional y su expresión numérica. Por otra parte, cataloga a los números π y e como irracionales.

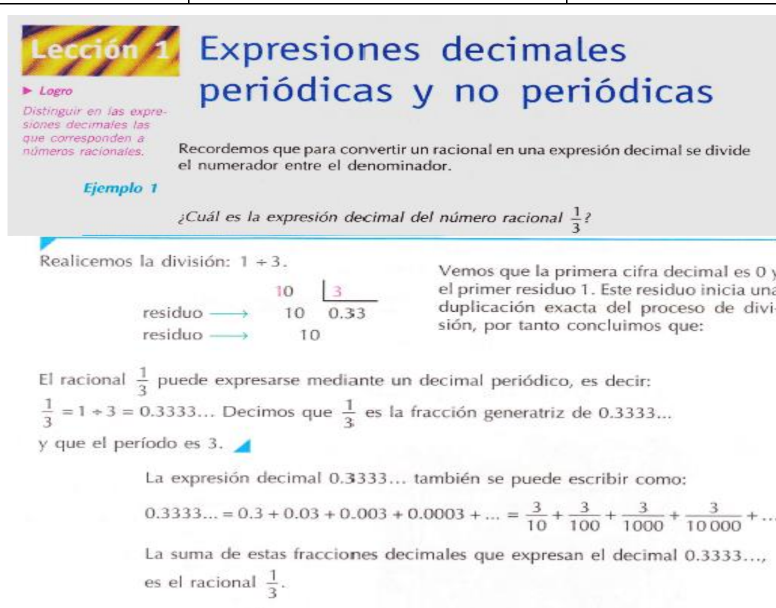
En las secciones preliminares el libro declara algunos aspectos relacionados con las magnitudes conmensurables e inconmensurables, además de hacer una breve introducción a la noción de número irracional. Por otra parte, plantea una serie de actividades que están destinadas al análisis de las expresiones decimales de los números y a la manera como se ubican en la recta; todas estas actividades están categorizadas como acción lo cual concuerda con el hecho de que estas secciones están destinadas a la preparación del estudiante para afrontar los contenidos de la unidad. La actividad número 7 de la sección *Me preparo* se presenta como una actividad de objeto promovido ya que propone que el estudiante considere el aspecto de la Completitud el cual es un aspecto que no se ha trabajado anteriormente y por ello la hemos considerado como una actividad diferente a las planteadas en estas secciones.

Es de notar que en la sección *Me Preparo* se tratan todos los aspectos de la construcción de números reales que han sido considerados en las categorías: Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad en la actividad 8, Racionalidad e Irracionalidad en las actividades 1 a 4, Completitud en la actividad 7 y Continuidad en la actividad 5 (la actividad 6 no se consideró en el análisis dado que está referida al orden de los números racionales a partir de su expresión decimal). También cabe resaltar que las magnitudes conmensurables e inconmensurables se han tratado en las secciones preliminares a partir de objetos declarados (segmentos 1) excepto por la actividad número 8 expuesta en el segmento 5 en la cual se plantea la acción como forma de conocer.

DESARROLLO TEMÁTICO DEL TEXTO

El texto inicia el desarrollo del contenido temático con las *"Expresiones Decimales periódicas y no periódicas"* lo cual corresponde a la *Lección 1* (página 10 del libro de texto). Este apartado del libro comienza con el ejemplo 1, mediante el cual se realiza una explicación sobre la expresión decimal del racional $\frac{1}{3}$ y a partir de ésta se tratan diversos componentes de los números reales, razón por la cual este apartado ha sido dividido en varios segmentos teniendo en cuenta el componente de número real que pone en juego.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
7	10	Ex – Od – R Ex – A – R Ej – A – R



Lección 1

Expresiones decimales periódicas y no periódicas

► Logro

Distinguir en las expresiones decimales las que corresponden a números racionales.

Recordemos que para convertir un racional en una expresión decimal se divide el numerador entre el denominador.

Ejemplo 1

¿Cuál es la expresión decimal del número racional $\frac{1}{3}$?

Realicemos la división: $1 \div 3$.

10 | 3
residuo ⟶ 10 0.33
residuo ⟶ 10

Vemos que la primera cifra decimal es 0 y el primer residuo 1. Este residuo inicia una duplicación exacta del proceso de división, por tanto concluimos que:

El racional $\frac{1}{3}$ puede expresarse mediante un decimal periódico, es decir: $\frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0.3333...$ Decimos que $\frac{1}{3}$ es la fracción generatriz de 0.3333... y que el período es 3.

La expresión decimal 0.3333... también se puede escribir como:

$$0.3333... = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + ... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + ...$$

La suma de estas fracciones decimales que expresan el decimal 0.3333..., es el racional $\frac{1}{3}$.

En la primera parte de este segmento el libro declara un procedimiento con el cual se determina la expresión decimal de un número racional. A continuación, a través del ejemplo 1, se hace mención de las acciones que han de realizarse para determinar la expresión decimal de un racional de la forma $\frac{a}{b}$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
8	10 – 11	Ex – P – Cm Ej– P – Cm Ex – P – Cn Ej – P – Cn

Al ubicar a $\frac{1}{3}$ en la recta numérica, comprobamos gráficamente lo anterior. $\frac{1}{3}$ es mayor que 0 y menor que 1, por tanto, tenemos:

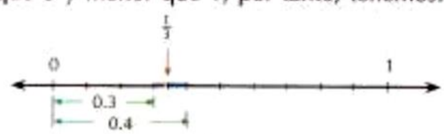


Fig. 1.4

En la figura 1.4 observamos que $\frac{1}{3}$ es mayor que 0.3 y menor que 0.4, lo que podemos escribir como:

$0.3 < \frac{1}{3} < 0.4$

Ahora, representemos en la recta numérica el segmento de extremos 0.3 y 0.4 y observemos la ubicación del racional $\frac{1}{3}$, como lo muestra la figura 1.5.

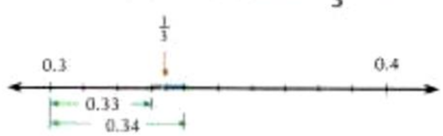


Fig. 1.5

Según la gráfica $\frac{1}{3}$ es mayor que 0.33, pero menor que 0.34, luego $0.33 < \frac{1}{3} < 0.34$.

Ahora representemos en la recta numérica el segmento de extremos 0.33 y 0.34 (véase figura 1.6).

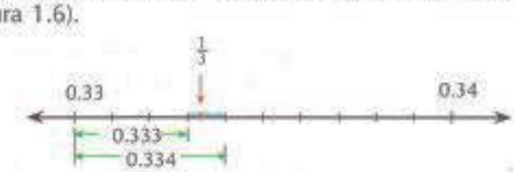


Fig. 1.6

$\frac{1}{3}$ es mayor que 0.333, pero menor que 0.334, luego $0.333 < \frac{1}{3} < 0.334$.

Si continuamos con este proceso podemos afirmar que:

$\frac{1}{3}$ es mayor que 0.3333, pero menor que 0.3334, es decir: $0.3333 < \frac{1}{3} < 0.3334$.

Observemos que en cada paso, hemos construido un segmento que está contenido en el segmento trazado en el paso anterior, es decir, hemos construido **encajonamientos**, cada uno contenido en el anterior:

$0.333 < 0.3333 < 0.3334 < 0.334$

$0.33 < 0.333 < 0.334 < 0.34$

$0.3 < 0.33 < 0.34 < 0.4$

Dado que este fragmento del ejemplo 1 está propuesto a la construcción de encajonamiento numéricos del racional $\frac{1}{3}$ y la representación de dichos encajonamientos en la recta numérica, este segmento responde a dos categorías diferentes según la Tabla de Categorías Emergentes.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
9	11	Ex – P – Cm Ej – P – Cm Ex – P – Cn Ej – P – Cn

Si repitiéramos este proceso infinitas veces, el único punto en común de los segmentos construidos sería $\frac{1}{3}$, como se muestra en la figura 1.7. En la práctica, el uso de la expresión decimal para $\frac{1}{3}$ se hace por medio de una aproximación, escribiendo tantas cifras decimales como exija la precisión deseada.

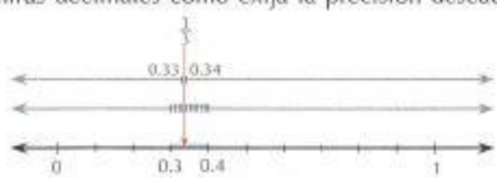


Fig. 1.7

Al igual que el segmento anterior, este segmento del ejemplo 1 responde a dos categorías diferentes las cuales están enfocadas al conocimiento del objeto en la Completitud y la Continuidad, dado el paso al límite que se evidencia y la determinación de un único punto en la recta numérica que corresponde al racional $\frac{1}{3}$.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
10	11	Ex – Od – R

A continuación damos algunos números racionales y sus expresiones decimales:

$\frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots$ $\qquad \frac{2}{11} = 0.1818\ldots$ $\qquad 7\frac{5}{6} = 7.8333\ldots$

Todo lo anterior podemos resumirlo así:

Una expresión decimal infinita periódica representa un número **racional**. El dígito o grupo de dígitos que se repite se llama **período**.

En este segmento se define el número racional a partir de la forma de su expresión decimal, lo cual es una declaración de una de las características del objeto.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
11	11 - 12	Ex – Od – Ir

Por otra parte, existen expresiones decimales infinitas no periódicas como:

0.10100100010000... $\qquad$ 0.141592653...

Estas expresiones decimales también pueden escribirse en forma de adición de fracciones decimales:

$$0.101001000100001\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \ldots$$

$$0.141592653\ldots = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \ldots$$

¿Cuáles son las reglas para obtener este tipo de expresiones?

La falta de regularidad en estas expresiones muestra la diferencia entre estos *números* y los racionales.

Estas expresiones decimales infinitas no periódicas son representadas por números, que no son números racionales. En conclusión:

Existen números que no son racionales, es decir, que no pueden escribirse de la forma $\frac{a}{b}$, con a, b enteros y $b \neq 0$.

En este segmento se evidencia la existencia de números diferentes a los racionales a partir de su expresión decimal y desde la misma se caracterizan este tipo de números. Es de notar que el infinito es utilizado como la forma de expresión de estos números ya sea por la forma de la expresión decimal o por su representación a partir de la suma de fracciones decimales.

A partir de lo expuesto, el texto propone una serie de actividades que se encuentran en la sección “*Aplico*” de la página 12 y con la cual concluye la Lección 1 de la unidad 1.

A continuación se presentan los segmentos correspondientes a esta sección del libro de texto:

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
12	12	Ac – A – R

1. Encuentro la expresión decimal de cada número racional, sin utilizar calculadora.

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{4}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{7}{500}$ **e.** $\frac{2}{3}$

f. $\frac{10}{3}$ **g.** $\frac{9}{20}$ **h.** $\frac{5}{9}$ **i.** $\frac{19}{7}$ **j.** $\frac{7}{11}$

Dado que en el segmento 5 el libro expuso el procedimiento para determinar la expresión decimal de un número racional de la forma $\frac{a}{b}$, este segmento se cataloga de igual forma como una acción que tiene como propósito el conocimiento de la Racionalidad.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
13	12	Ac – P – Cm

2. Expreso cada decimal periódico como la suma de fracciones decimales y construyo encajonamientos para cada uno.

a. 0.4444... **b.** 0.121212...

c. 1.5555... **d.** 3.421421421...

Este segmento se ha clasificado en esta categoría por la instrucción de construcción de encajonamientos para cada número lo cual refleja el proceso de aproximación, infinito en algunos casos, que es posible gracias a la Completitud de los reales.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
14	12	Ac – Op – R

3. Determino el valor de verdad de cada proposición.

a. Todo número racional puede expresarse mediante un decimal.

b. En una fracción decimal periódica el período tiene a lo sumo 10 cifras.

c. Los decimales se clasifican en: finitos, infinitos periódicos e infinitos no periódicos.

d. Toda expresión decimal representa un racional.

4. Los decimales que pueden escribirse en forma de fracción son:

a. Los finitos e infinitos periódicos.

b. Los infinitos periódicos únicamente.

c. Los infinitos no periódicos.

d. Todos los decimales.

5. Decido cuál de las posibles expresiones, de los números racionales, debo usar para efectuar la operación indicada y hallo el resultado.

a. $\frac{1}{3}+0.25$ b. $0.747474\ldots-\frac{3}{5}$

Las anteriores actividades exigen la comprensión de algunos apartados anteriores del libro en donde se tratan las diferentes representaciones de los números racionales, la caracterización de los mismos y la posibilidad de la existencia de otros números diferentes a los racionales a partir de las expresiones decimales. Es por ello que se considera un objeto promovido por el libro.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
15	12	Ac – Op – R

7. La expresión decimal del número racional $\frac{25}{7}$ es un:

a. Decimal infinito periódico.

b. Decimal finito.

c. Decimal infinito no periódico.

d. Decimal finito periódico.

La anterior actividad promueve la relación entre dos representaciones de un número racional, pretendiendo entablar la relación entre dos características del objeto que promueven su mayor comprensión.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
16	12	Ac – Op – Ir

Para los ejercicios 8 al 12 consulto y contesto.

8. ¿Es $0.123456789101112\ldots$ igual a $\frac{123456789101112}{10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}$?

La anterior pregunta exige la compresión de las representación decimal de un número real y la relación entre esta representación con la determinación de la Racionalidad o Irracionalidad del número. Dado esto, la actividad promueve la identificación de la Irracionalidad del número dado a partir de la falta de periodicidad de su expresión decimal y plantea la diferencia con una expresión racional y es por ello que la hemos catalogado como un objeto promovido relacionado con la Irracionalidad.

SEGMENTO	**PÁGINA**	**CLASIFICACIÓN**
17	12	Ac – Op – Cm Ac – Op – Cn
9. ¿Es 0.999… = 1? Justifico la respuesta en la recta numérica.		

Este segmento responde a dos categorías dado que aparte de dar el paso al límite en el proceso 0,99999… lo cual es un indicio de promoción del objeto Completitud, solicita la justificación a partir de la ubicación de puntos en la recta y la determinación de un único punto para el número o 0,99999… el cual es un parámetro para observarlo como objeto promovido en el componente Continuidad.

SEGMENTO	**PÁGINA**	**CLASIFICACIÓN**
18	12	Ac – Od – Ir
10. Con una calculadora, encuentro un valor aproximado a $\sqrt{3}$.		

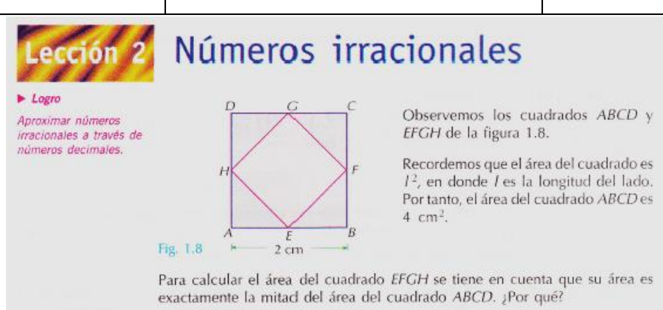
Teniendo en cuenta que la actividad propone la determinación de la expresión decimal del irracional dado, el segmento se ha clasificado siguiendo la definición dada en la Tabla de Categorías Emergentes.

SEGMENTO	**PÁGINA**	**CLASIFICACIÓN**
19	12	Ac – Op – Ir
11. ¿Es π un número racional? **12.** ¿Cuál es el origen de π?		

Las anteriores preguntas promueven la determinación de la naturaleza de π planteando la incógnita sobre su Racionalidad y complementando esto con la pregunta sobre su origen. El ítem 11 puede que se sustente en la expresión decimal de π dado el trabajo sobre las expresiones decimales que se ha hecho a lo largo de los segmentos anteriores, pero la cuestión sobre su Racionalidad o Irracionalidad fue resuelta por el libro de texto en el segmento 6 en donde lo declaró como un número irracional.

En la primera sección el libro caracteriza las expresiones decimales periódicas y no periódicas abriendo, a partir de las últimas, la posibilidad de existencia de números que no son racionales. En este trabajo con las expresiones decimales de un número racional, los procesos infinitos aparecen como soporte y como consecuencia de la Completitud y Continuidad del conjunto de los números reales al emerger en la determinación de las cifras decimales a partir de la división continua y en el proceso de ubicación del racional en cuestión haciendo uso de encajonamientos tanto numéricos como de puntos en la recta. Por otra parte, en forma coherente con la presentación de la lección, las actividades se enfocaron en el trabajo con expresiones decimales las cuales están dirigidas, en su mayoría, a la promoción de los objetos matemáticos determinados para el análisis del texto.

Con base en las expresiones decimales, el libro continúa con la formalización del número irracional a partir de su aproximación por medio de racionales el cual es el logro a alcanzar en la lección 2.

<table>
<tr><th>SEGMENTO</th><th>PÁGINA</th><th>CLASIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>20</td><td>13</td><td>Ex – Od – Ir
Ej – Od – Ir
Ex – Od – C.I
Ej – Od – C.I</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Lección 2 Números irracionales

► Logro

Aproximar números irracionales a través de números decimales.

Fig. 1.8

Observemos los cuadrados *ABCD* y *EFGH* de la figura 1.8.

Recordemos que el área del cuadrado es l^2, en donde l es la longitud del lado. Por tanto, el área del cuadrado *ABCD* es 4 cm^2.

Para calcular el área del cuadrado *EFGH* se tiene en cuenta que su área es exactamente la mitad del área del cuadrado *ABCD*. ¿Por qué?

Luego el área de *EFGH* es:

Área $= 4 \text{ cm}^2 \div 2 = 2 \text{ cm}^2$

Conociendo el área (*A*) del cuadrado podemos hallar la longitud del lado así: $l = \sqrt{A}$. En el cuadrado *EFGH*, la medida de un lado cualquiera está dada por:

$GH = \sqrt{2 \text{ cm}^2} = \sqrt{2}$ cm

La raíz cuadrada de un número *a*, es el número positivo que elevado al cuadrado da como resultado *a*. En este caso, la medida del lado no es un número entero, porque en ese conjunto no encontramos un número que elevado al cuadrado nos dé exactamente 2. Luego la medida del lado del cuadrado es un decimal que no corresponde a un número entero.

¿Cómo se puede calcular este decimal? ¿Qué clase de decimal es?

Este segmento introduce los números irracionales que son raíces cuadradas de números enteros positivos dada la relación que se presenta con el área de cuadrados. Este tipo de raíces pretenden ser determinadas por medio de su expresión decimal lo cual permite la caracterización del objeto número irracional. Por último, el segmento expone una relación directa entre la Racionalidad o Irracionalidad de un número con el tipo de magnitud que representa y de aquí la doble clasificación del segmento.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
21	13	Ex – P – Cm Ej – P – Cm

Para calcular ese decimal utilizaremos la relación entre la potenciación y la radicación, y el proceso de encajonamiento. Veamos:

$1^2 = 1$ y $2^2 = 4$. Luego: $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2. Es decir, $1 < \sqrt{2} < 2$.

1 y 2 son valores aproximados a $\sqrt{2}$ en unidades.

Si dividimos el segmento de extremos 1 y 2 en 10 partes iguales, podemos aproximar su valor a décimas (véase la tabla 1.9).

Números decimales	Cuadrados
1.1	$(1.1)^2 = 1.21$
1.2	$(1.2)^2 = 1.44$
1.3	$(1.3)^2 = 1.69$
1.4	$(1.4)^2 = \mathbf{1.96}$
1.5	$(1.5)^2 = \mathbf{2.25}$

Tabla 1.9

Si observamos la tabla, los valores (en décimas) más próximos a $\sqrt{2}$ son 1.4 y 1.5, porque sus correspondientes cuadrados están más próximos a 2, entonces: $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$. Es decir, 1.4 es una aproximación por **defecto** y 1.5 es una aproximación por **exceso** a $\sqrt{2}$.

13

Ahora continuamos el procedimiento aproximando a las centésimas a partir de 1.4.

Número decimal	Cuadrado
1.41	$(1.41)^2 = 1.9881$
1.42	$(1.42)^2 = 2.0164$

Tabla 1.10

Entonces se puede afirmar que: $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.

1.41 y 1.42 son valores aproximados a $\sqrt{2}$ en centésimas.

En este proceso a cualquier aproximación por defecto le corresponde una aproximación por exceso. La aproximación por exceso se obtiene sumando 1, 0.1, 0.01 o la unidad decimal correspondiente, según el caso, a la aproximación por defecto.

El proceso de aproximación es acercarse al valor de $\sqrt{2}$ así:

A menos de una décima:	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$
A menos de una centésima:	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$
A menos de una milésima:	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$
A menos de una diezmilésima:	$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$
A menos de una cienmilésima:	$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$

El proceso de aproximación a $\sqrt{2}$ es muestra de la consideración de la Completitud del conjunto de los números reales en el texto. El segmento explica a partir de un ejemplo este proceso de aproximación el cual se basa en el proceso de determinación de encajonamientos lo cual decreta la clasificación del segmento.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
22	14	Ex – Od – Ir

Si continuamos sucesivamente el proceso de aproximación, concluimos que:

- No podríamos determinar exactamente el valor de $\sqrt{2}$.
- No hay un número decimal finito cuyo cuadrado sea exactamente 2.
- El número decimal que expresa a $\sqrt{2}$ es infinito y no periódico.
- No se puede encontrar la fracción generatriz de $\sqrt{2}$.
- No existe un número racional que elevado al cuadrado dé $\sqrt{2}$.

Un número decimal no periódico e infinito es un **número irracional**.

Por tanto, este número decimal, $\sqrt{2}$, es un *número irracional.*

A continuación del proceso de aproximación explicado en el segmento anterior, el libro da algunas conclusiones sobre este proceso en las cuales se basa para realizar el salto a la definición del número irracional a partir de las características de su expresión decimal. Las conclusiones que da el libro de texto son declaraciones sobre la naturaleza del número irracional lo cual determina la clasificación del segmento según la definición dada en la Tabla de Categorías Emergentes.

A continuación en la sección *Aplico* de la *Lección 2* el libro plantea una serie de actividades destinadas al fortalecimiento del proceso de aproximación de raíces cuadradas a partir de números decimales.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
23	15	Ac – P – Cm

1. Sigo el proceso explicado en la lección y completo las tablas 1.12 para hallar el valor aproximado de las raíces.

a.

	Valor aproximado de $\sqrt{3}$	
	Por defecto	**Por exceso**
A menos de una unidad		
A menos de una décima		
A menos de una centésima		
A menos de una milésima		
El valor aproximado de $\sqrt{3}$ es:		

b.

	Valor aproximado de $\sqrt{15}$	
	Por defecto	**Por exceso**
A menos de una unidad		
A menos de una décima		
A menos de una centésima		
A menos de una milésima		
El valor aproximado de $\sqrt{15}$ es:		

Tabla 1.12

2. Para cada raíz, elaboro una tabla como la del ejercicio anterior y hallo un valor aproximado.

a. $\sqrt{6}$ **b.** $\sqrt{55}$ **c.** $\sqrt{12}$

d. $\sqrt{31}$ **e.** $\sqrt{8}$ **f.** $\sqrt{10}$

Este segmento se ha clasificado en esta categoría por la instrucción de construcción de encajonamientos para cada raíz lo cual refleja el proceso de aproximación que es posible gracias a la Completitud de los números reales.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
24	15	Ac – Op – C.I Ac – Od – R Ac – Od – Ir

4. En la figura 1.13 aparecen cuatro cuadrados con su respectiva área. Hallo la longitud del lado de cada cuadrado y determino si el número decimal que representa esa longitud es un racional o irracional.

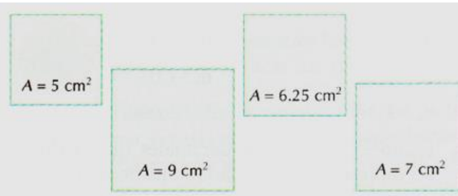


Fig. 1.13

La actividad propuesta en este segmento, estimula la determinación de una magnitud y la caracterización de la misma a partir del número decimal que la representa, y promueve la relación entre la magnitud y el número racional o irracional a partir de la expresión decimal. Lo anterior establece las diversas clasificaciones del segmento a partir de los objetos que propone y declara y de los aspectos del Número Real que involucra.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
25	15	Ac – Od – R Ac – Od – Ir

5. Completo la tabla 1.14 y determino si la raíz es un número racional o irracional.

n	$\sqrt{n}$	Racional o irracional
100		
11		
841		
1		
20		
12.06		

La actividad pretende establecer la relación entre el número entero dado y su raíz cuadrada para que, por medio de esta relación y de la expresión decimal de la raíz, se puedan determinar las condiciones que debe cumplir el entero dado para que su raíz corresponda a un número racional. Todo esto, está en relación con la definición de objeto declarado dada en la Tabla de Categorías Emergentes.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
26	15	Ac – Op – Ir

7. Respondo cada pregunta justificando mi respuesta.

a. ¿La raíz cuadrada de todo número genera números irracionales?

b. ¿Es un número irracional la raíz cuadrada de un número racional?

c. ¿Qué tipo de número es la raíz cuadrada de 58?

d. ¿El producto de dos números irracionales es un número irracional?

Por medio de la actividad el libro promueve la relación entre las raíces cuadradas y la Racionalidad o Irracionalidad de un número dado lo cual determina clasificación del segmento como objeto promovido relacionado con la Irracionalidad.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
27	15	Ac – Op – Ir
8. Construyo cinco números irracionales que sigan la regla del número de Lioville: 1.1010010001…		

A partir de la identificación de la regla de conformación del número de Lioville, se promueve la determinación de otros números irracionales diferentes a los surgidos por raíces lo cual abre la posibilidad de la existencia de números irracionales diferentes a los surgidos de operaciones con números racionales y diferentes al número de oro, a π y a e y establece que el segmento promueve el objeto Irracionalidad.

En la *Lección 2* y en el correspondiente *Aplico*, el texto se enfoca en la construcción del objeto número irracional lo que se evidencia en la clasificación de los segmentos los cuales están determinados, en su gran mayoría, a objetos promovidos y declarados de Irracionalidad. Los procesos infinitos solo se presentan en el segmento 23 el cual está destinado a la determinación del valor aproximado de raíces cuadradas por medio de la determinación de encajonamientos.

TALLER DE COMPETENCIAS 1

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
28	16	Ac – A – R

1. Escribe en forma de fracción los números decimales y la fracción generatriz.

a. 2.8 **b.** 6.98

c. 0.28 **d.** 1.07

e. 2.348 **f.** 2.008

Esta actividad está dirigida al fortalecimiento de la habilidad en el cambio de representación de números racionales, actividad que fue explicada en la *Lección* 1. Al estar dedicado plenamente a la ejercitación en un procedimiento se considera como una acción que claramente está dedicada al conocimiento de la Racionalidad.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
29	16	Ac – Op – R

2. Escribe tres números decimales que podrían ser representados por cada suma de fracciones.

a. $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\dots$ **c.** $3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{5}{10\,000}+\dots$

b. $\frac{2}{10}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{100\,000}+\dots$ **d.** $\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{8}{10\,000}+\frac{3}{100\,000}+\dots$

Aunque en la *Lección 1* fue explicado el proceso de determinación de un número decimal a partir de su fracción generatriz, el proceso contrario no ha sido trabajado y es por ello que esta actividad aparte de estar dedicada al conocimiento de la Racionalidad promueve la reversión del procedimiento explicado por lo cual lo hemos considerado como la promoción del objeto número racional.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
30	16	Ac – Op – R

3. Escribe como suma de fracciones decimales los números.

a. 0.9999… **b.** 0.8333…

c. 0.755… **d.** 1.3333…

Aunque es probable que los estudiantes expresen los decimales siguiendo el ejemplo dado en el segmento 11, la actividad deja abierta la posibilidad de expresar cada decimal con fracciones decimales que no necesariamente se deben corresponder con las del ejemplo. Esta posibilidad permite el conocimiento de la Racionalidad como un objeto que es promovido dado que las diferentes formas de expresión en fracciones decimales pueden ser determinadas por el estudiante sin orientación directa del libro.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
31	16	Ac – Op – Ir
4. Un granjero quiere cercar un potrero que tiene forma de triángulo rectángulo. Un cateto mide 50 m y el otro 64 m. Explica por qué él no puede determinar la cantidad exacta de cerca que necesita.		

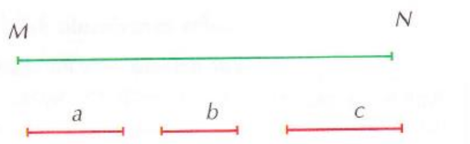
Este segmento se ha catalogado como objeto promovido ya que la actividad estimula el vínculo entre las magnitudes inconmensurables y los números irracionales aunque el libro a pesar de establecer este vínculo en las secciones preliminares no lo ha fortalecido en el transcurso de las lecciones 1 y 2.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
32	16	Ac – P – Cn Ac – P – Cm
5. Ubica en la recta numérica, mostrando encajonamientos, las expresiones decimales. **a.** 0.121212… **b.** 0.171717…		

La actividad propuesta en este segmento muestra la relación entre la Continuidad y la Completitud fortaleciendo el proceso de aproximación infinito que involucra la construcción de encajonamientos numéricos y a partir de puntos sobre la recta. Es por ello que este segmento expone el proceso como forma de conocer la Continuidad y la Completitud de los Números Reales y por ello su doble clasificación.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
33	16	Ac – Op – C.I

6. Los residentes de un edificio de apartamentos quieren cercar un espacio cuadrado del jardín, para sembrar unas hortensias. La administradora midió un lado del cuadrado con un palo que encontró en el jardín; el residente del apartamento 101 usó una regla para medir el lado, mientras que el jardinero utilizó una piola que tenía en el bolsillo. Si $\overline{MN}$ representa el lado del cuadrado, a la longitud del palo, b la longitud de la regla y c la de la piola, como se muestra en la figura 1.15, contesta las siguientes preguntas. Usa el compás para tomar las medidas indicadas.



a. Expresa la medida del $\overline{MN}$ en términos de la unidad a y en términos de la unidad b.
¿Qué clase de número permite expresar cada medida?

b. Utiliza la unidad c para medir el $\overline{MN}$. ¿Cabe exactamente la unidad c?

c. Llama r a la parte del $\overline{MN}$ que no pudo ser medida por c. Divide a c en medios y en tercios. Determina con qué parte de c puedes medir al segmento de longitud r. ¿Qué clase de número expresa la longitud del $\overline{MN}$ en términos de la unidad c?

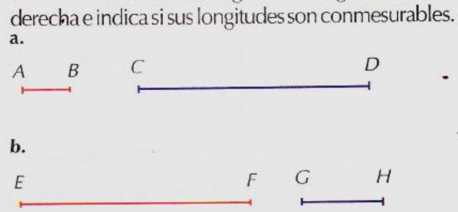
d. Investiga cómo medir el segmento usando como unidad de medida $5a$.

Este segmento se ha clasificado en esta categoría por la promoción que se hace de la comparación de las magnitudes, lo cual da a conocer de manera indirecta la Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad de magnitudes que es un aspecto que no han sido objeto de estudio a lo largo de las lecciones uno y dos pero que ha sido dado a conocer tanto en las secciones preliminares como en el segmento 24.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
34	16	Ex – Od – C.I Ac – Od – C.I

7. Las magnitudes que trabajamos en el ejercicio 6 son *conmensurables* porque se pueden medir exactamente usando como unidad de medida común, múltiplos o submúltiplos de la otra. Es decir, tienen una unidad de medida común.

Mide, con el compás, cada segmento de la izquierda en términos de la longitud del segmento de la derecha e indica si sus longitudes son conmesurables.



La doble clasificación de este segmento obedece a la explicación que se hace de manera previa a la actividad, explicación que define las magnitudes conmensurables y que por tanto las declara para luego realizar un ejercicio de medición que se pide sea desarrollado con base en la definición.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
35	17	Ac – Op – C.I

8. Dibujen 8 cuadrados de diferentes tamaños y tracen en cada uno las diagonales. Midan el lado y la diagonal de cada cuadrado y con los datos obtenidos, completen la tabla 1.17.

Cuadrado	Longitud de la diagonal(d)	Longitud del lado (h)	$\frac{d}{h}$
1			
2			
3			
4			

9. Según la tabla 1.17, respondan justificando la respuesta.

a. ¿Qué tipo de decimal es el cociente entre d y h en cada cuadrado?

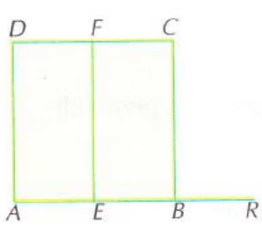
b. ¿La diagonal del cuadrado se puede expresar como a veces el lado, donde a es un número racional?

c. ¿Son medidas conmensurables la longitud de la diagonal de un cuadrado y la longitud de su lado?

La razón $\frac{d}{h}$ permite determinar la manera como se comparan las magnitudes requeridas y la Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad de las mismas y dado que este es un aspecto que no se ha trabajado en el texto, hemos considerado la actividad como un objeto promovido por el mismo dado que por medio de las preguntas que se realizan en el punto 9, las cuales están direccionadas a la utilización de la razón $\frac{d}{h}$, se da a conocer el objeto Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
36	17	Ac – Op – C.I

10. Analicen la siguiente situación:



Juan, José y Carolina están tratando de medir la longitud del lado $\overline{AR}$, utilizando la longitud del lado $\overline{AD}$ (véase figura 1.18).

Fig. 1.18

Juan afirma: la longitud del $\overline{AR}$ es $\frac{3}{2}$ de la del $\overline{AD}$. José escribe: $AR = \frac{3}{2}\ AD$.

Carolina afirma: las dos longitudes son conmensurables puesto que se pueden medir exactamente. Además, el número que las relaciona es un número racional.

El profesor interviene y escribe:

$2AR \leftrightarrow 3AD$ o $AR \leftrightarrow 1.5AD$

a. ¿Cuál estudiante tiene razón?

b. ¿Son verdaderas las afirmaciones?

c. ¿Es verdadera la conclusión del profesor?

d. ¿Son equivalentes las afirmaciones de los estudiantes?

La actividad propuesta estimula el conocimiento de la equivalencia entre las expresiones racionales que surgen en el proceso de medición y que relacionan a las medidas obtenidas con números racionales lo cual promueve su vínculo con las magnitudes conmensurables.

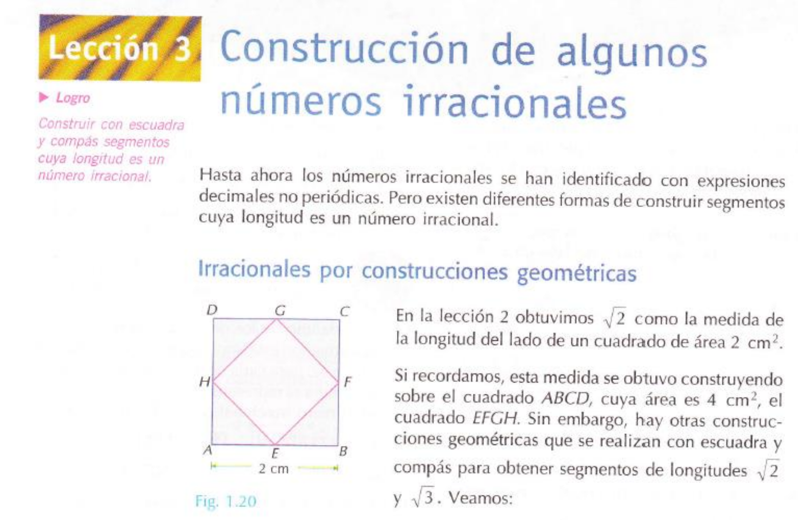
<table>
<tr><th>SEGMENTO</th><th>PÁGINA</th><th>CLASIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>37</td><td>17</td><td>Ac – Op – C.I</td></tr>
<tr><td colspan="3">**12.** Argumenta a favor o en contra de las afirmaciones.
a. Las mediciones son aproximaciones, por muy refinados que sean los métodos o los instrumentos empleados. Por tal razón, siempre pueden ser expresadas con números racionales o decimales periódicos.
b. Si se exigen condiciones de precisión, la medida de las longitudes no puede hacerse con un número entero de submúltiplos de la unidad inicial por pequeños que sean, lo que implica que las longitudes no son conmensurables, es decir, son inconmensurables.
c. Si dos longitudes son inconmensurables, el cociente de las dos longitudes es un decimal infinito no periódico (irracional).</td></tr>
</table>

Las afirmaciones que se realizan sobre el proceso de medición estimulan el contraste de las ideas de los estudiantes sobre la Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad de las magnitudes, lo cual promueve el conocimiento de estos objetos.

El taller de competencias correspondientes a las lecciones 1 y 2 está compuesto, en mayor proporción, por actividades de promoción de objetos que no han sido trabajados en las lecciones como los son las magnitudes conmensurables e inconmensurables. En cuanto a los procesos infinitos de nuevo se presentan en actividades de encajonamiento tanto numérico como de puntos en la recta numérica.

En la *Lección 3,* el texto presenta la idea de número construible a partir de la explicación de la construcción de números irracionales, en donde se busca relacionar estos números con las magnitudes inconmensurables.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
38	18	Ex – Od – C.I Ej – Od – C.I Ex – Od – Ir Ej – Od – Ir



Lección 3 Construcción de algunos números irracionales

▶ Logro

Construir con escuadra y compás segmentos cuya longitud es un número irracional.

Hasta ahora los números irracionales se han identificado con expresiones decimales no periódicas. Pero existen diferentes formas de construir segmentos cuya longitud es un número irracional.

Irracionales por construcciones geométricas

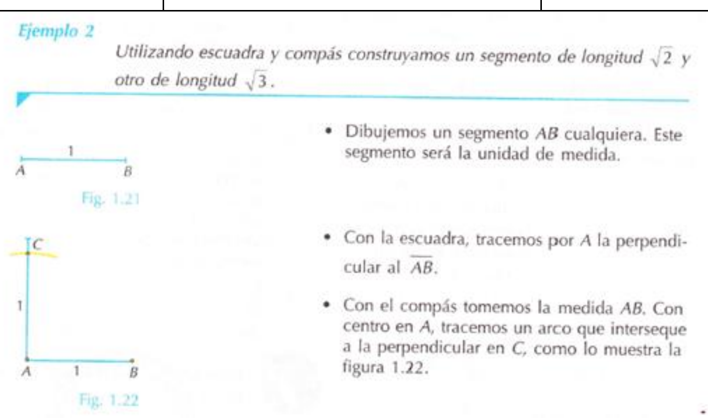
En la lección 2 obtuvimos $\sqrt{2}$ como la medida de la longitud del lado de un cuadrado de área 2 cm^2.

Si recordamos, esta medida se obtuvo construyendo sobre el cuadrado *ABCD*, cuya área es 4 cm^2, el cuadrado *EFGH*. Sin embargo, hay otras construcciones geométricas que se realizan con escuadra y compás para obtener segmentos de longitudes $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Veamos:

Fig. 1.20

Este segmento tiene una doble clasificación ya que a partir de la construcción de los números irracionales se promueve la relación entre el número irracional con las magnitudes inconmensurables lo cual fortalece la construcción de las nociones de estos objetos.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
39	18	Ex – Od – Ir Ej – Od – Ir



Ejemplo 2

Utilizando escuadra y compás construyamos un segmento de longitud $\sqrt{2}$ y otro de longitud $\sqrt{3}$.

- Dibujemos un segmento *AB* cualquiera. Este segmento será la unidad de medida.
- Con la escuadra, tracemos por *A* la perpendicular al $\overline{AB}$.
- Con el compás tomemos la medida *AB*. Con centro en *A*, tracemos un arco que interseque a la perpendicular en *C*, como lo muestra la figura 1.22.

Fig. 1.21

Fig. 1.22

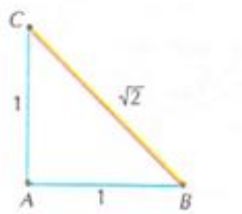


Fig. 1.23

- Unamos con la escuadra los puntos C y B. Por el teorema de Pitágoras, el segmento CB tiene longitud $\sqrt{2}$.

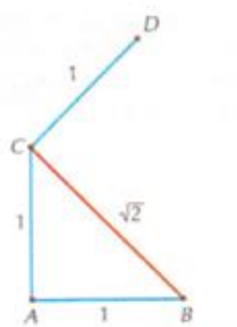
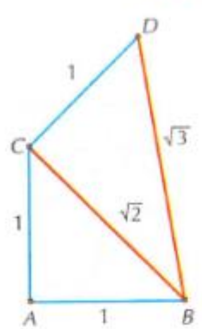


Fig. 1.24

- Tracemos por el punto C el $\overline{CD}$ perpendicular al $\overline{CB}$, de longitud 1, como lo muestra la figura 1.24.



- Al unir los puntos B y D obtenemos el triángulo rectángulo BCD, cuyos catetos son $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ de longitudes 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente. La longitud de la hipotenusa (el segmento BD) es $\sqrt{3}$; esta se determina por el teorema de Pitágoras.

La clasificación de este segmento obedece a que se realiza una explicación a partir de un ejemplo en la cual se determina un procedimiento para la construcción de un segmento cuya medida se define a priori como número irracional.

En la sección *Aplico* correspondiente a esta lección, el texto pretende el fortalecimiento del procedimiento de construcción de números irracionales teniendo como guía lo explicado en la lección:

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
40	19	Ex – Od – Ir

Irracionales construidos por razones: π y el "número de oro"

El número π surge en geometría quizá cuando se estableció la relación (a través de la proporción) entre el área de los círculos y el cuadrado de sus radios.

$$\frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2}$$

Las áreas de dos círculos están en razón igual al cuadrado de sus radios.

El cálculo numérico de la razón entre el área del círculo y el cuadrado de su radio es lo que genera el número π.

El cálculo del número $\pi = 3.14159...$ inició el método de aproximación por defecto y por exceso, hallando el área de polígonos regulares inscritos en un círculo. Actualmente el cálculo de la expresión decimal π se hace con las computadoras, lo que permite una mayor precisión en la expresión decimal de π.

Otro número que proviene de las proporciones es el "número de oro": $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Este número procede de la razón áurea representada por la letra griega phi (ϕ), y satisface la proporción $\frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{1+\phi}$, que proviene de la construcción y estudio del pentágono estrellado.

Al trazarle las cinco diagonales al pentágono se reproduce un pentágono semejante, en una proporción que se mantiene indefinidamente. Esta autorreproducción surge también en el rectángulo, cuando el lado a se lleva sobre el lado b y se considera el rectángulo complementario.

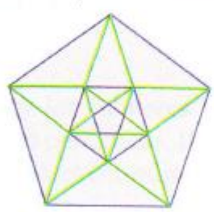


Fig. 1.26

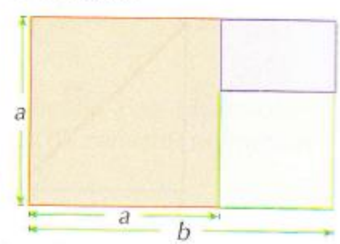


Fig. 1.27

Los números π y φ se presentan en el segmento como un nuevo tipo de irracionales diferentes a los que se han venido trabajando a lo largo del texto. Por otra parte el segmento provee diferentes maneras en las que los irracionales surgen, lo cual amplía la idea de número irracional pero no por promoción del objeto sino por declaración del mismo.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
41	20	Ac – A – Cn

1. Determino el número irracional que representa la longitud de la diagonal en cada rectángulo.

a. **b.** **c.**

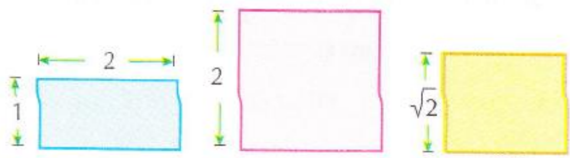


Fig. 1.28

d. Un cuadrado de área 25 cm^2.

e. Un cuadrado de área 52 m^2.

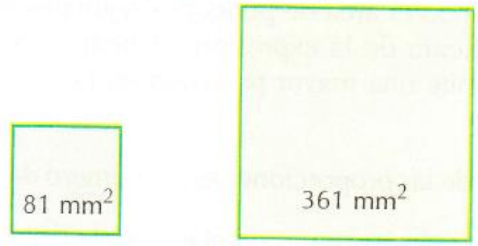
Dado que la actividad pretende la reproducción del procedimiento desarrollado a lo largo de la lección y por ende el fortalecimiento del proceso de construcción de números irracionales se ha catalogado este segmento en la forma de conocer acción que desde el enunciado de la actividad indica que da a conocer la Continuidad según la definición dada en la Tabla de Categorías Emergentes.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
42	20	Ac – Op – R Ac – Op – Ir

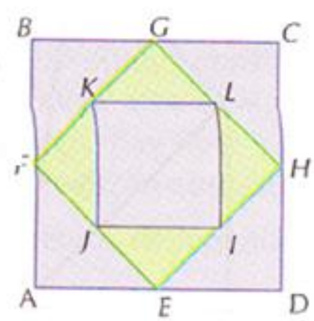
2. Dibujo un cuadrado de lado 2 cm y calculo la longitud del lado de otro cuadrado cuya área es el triple del área del primero. ¿El número que indica la longitud es racional o irracional?

3. Dibujo un cuadrado de lado 3 cm y calculo la longitud de la diagonal de otro cuadrado si su área es el cuadrado del área del primero. ¿El número que indica la longitud del lado es racional o irracional?

Mediante la actividad propuesta, el libro estimula la relación entre cuadrados, entre sus lados y diagonales lo cual promueve el fortalecimiento de la Racionalidad o Irracionalidad (lo cual depende de la solución de cada ejercicio) a través de un proceso de reversión de lo explicado en segmentos anteriores.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
43	20	Ac – A – C.I
 4. Dada el área del cuadrado, determino la longitud de cada lado y de cada diagonal. Fig. 1.29		

Al igual que en el segmento anterior, la actividad presentada está enfocada a la relación entre los cuadrados y sus diagonales en donde la Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad de las últimas depende del valor numérico que resulte de la aplicación de los procedimientos explicados.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
44	20	Ac – Op – R Ac – Op – Ir
 5. Determino el área de los cuadrados *IJKL* y *EFGH* de la figura 1.30, sabiendo que la longitud del lado del cuadrado *ABCD* es 4 cm.		

La actividad que se propone requiere en su desarrollo la vinculación entre los números racionales e irracionales a partir de la potenciación lo cual no ha sido trabajado previamente de manera directa por el texto pero que la actividad, por sí misma, promueve a través del ejercicio del cálculo de áreas de cuadrados.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
45	20	Ac – A – Cn

6. Con ayuda de la escuadra y el compás construyo un segmento de longitud:

a. $\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt{10}$ **c.** $\sqrt{15}$ **d.** $\sqrt{12}$

La actividad presentada está destinada a la reproducción del procedimiento realizado en el segmento 39 lo cual indica que es una acción relacionada con los números irracionales que busca el conocimiento de la Continuidad de los números Reales.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
46	20	Ac – Op – Ir

7. Con referencia al "número de oro" (ϕ):

a. Uso la calculadora para determinar un valor aproximado de ϕ.

b. Calculo el valor de ϕ^2.

c. Calculo $\frac{1}{\phi}$ y determino cuál es su relación con ϕ. Explico mi respuesta.

8. Uso la calculadora para encontrar las razones; utilizo por lo menos 2 decimales. ¿A qué número se aproximan las razones?

a. $\frac{34}{21} =$ **b.** $\frac{144}{89} =$

c. $\frac{377}{233} =$ **d.** $\frac{610}{377} =$

e. $\frac{987}{610} =$ **f.** $\frac{1597}{987} =$

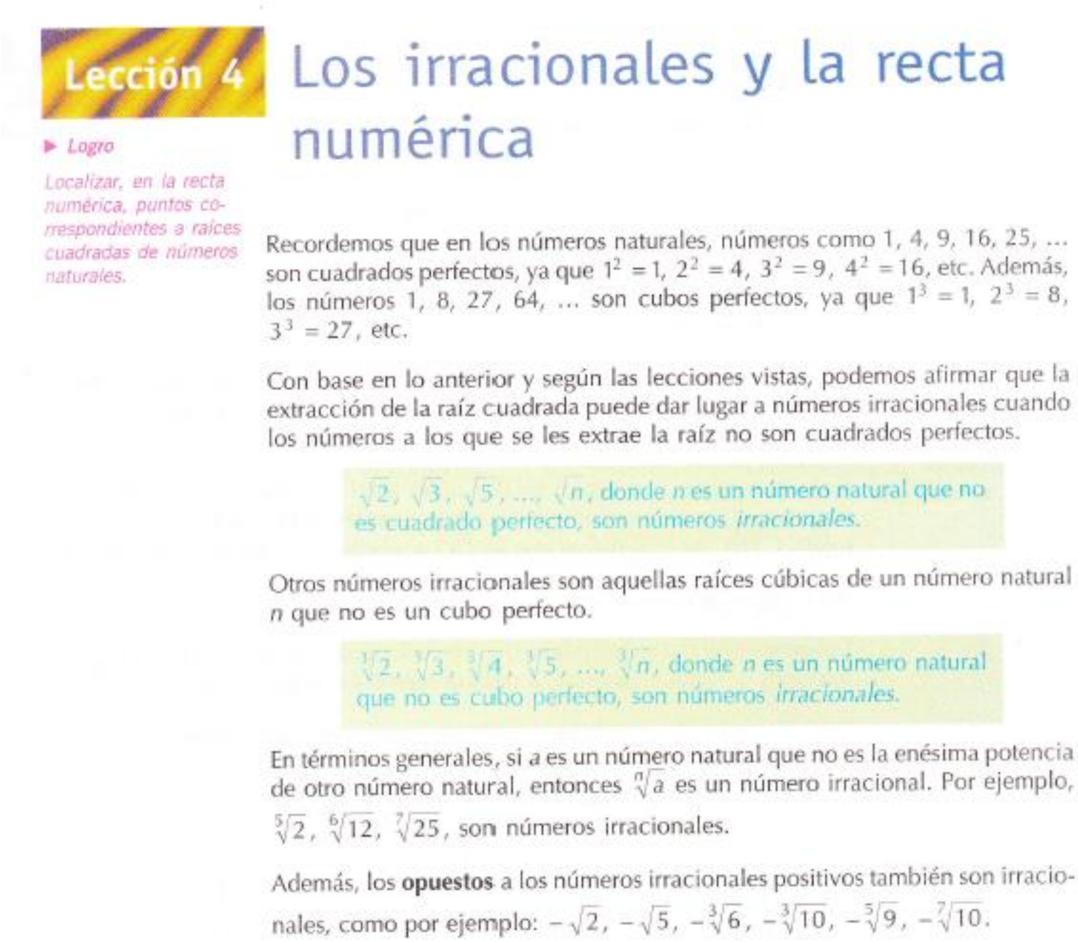
9. Escribo las expresiones decimales que corresponden a las fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}$ y $\frac{55}{89}$.

Las anteriores actividades están dirigidas al conocimiento del número de oro a partir de razones de algunos de los valores de la sucesión de Fibonacci, lo cual promueve el conocimiento de este número irracional de una manera diferente a la presentada en la sección.

Al igual que en la lección 2, el texto se fundamenta en la presentación de objetos, ya sean declarados o promovidos, más en el aplico se observa un cambio con respecto a la lección anterior ya que las actividades afines a los objetos promovidos están relacionadas con lo presentado a lo largo de la lección pero exige procesos de reversión de los procedimientos explicados y/o exigen el uso de estos procedimientos en el análisis de relaciones o en el estímulo de la observación de regularidades.

La última lección dedicada a los números irracionales, la lección 4, tienen como objeto el conocimiento de los irracionales a través de su ubicación en la recta numérica y a partir de esto determina la relación entre los puntos de la recta y los números reales.

SEGMENTO	**PÁGINA**	**CLASIFICACIÓN**
47	21	Ex – Od – Ir



Lección 4

Los irracionales y la recta numérica

▶ *Logro*

Localizar, en la recta numérica, puntos correspondientes a raíces cuadradas de números naturales.

Recordemos que en los números naturales, números como 1, 4, 9, 16, 25, … son cuadrados perfectos, ya que $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, etc. Además, los números 1, 8, 27, 64, … son cubos perfectos, ya que $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, etc.

Con base en lo anterior y según las lecciones vistas, podemos afirmar que la extracción de la raíz cuadrada puede dar lugar a números irracionales cuando los números a los que se les extrae la raíz no son cuadrados perfectos.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{n}$, donde n es un número natural que no es cuadrado perfecto, son números *irracionales*.

Otros números irracionales son aquellas raíces cúbicas de un número natural n que no es un cubo perfecto.

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, …, $\sqrt[3]{n}$, donde n es un número natural que no es cubo perfecto, son números *irracionales*.

En términos generales, si a es un número natural que no es la enésima potencia de otro número natural, entonces $\sqrt[n]{a}$ es un número irracional. Por ejemplo, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[7]{25}$, son números irracionales.

Además, los **opuestos** a los números irracionales positivos también son irracionales, como por ejemplo: $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt[3]{6}$, $-\sqrt[3]{10}$, $-\sqrt[5]{9}$, $-\sqrt[7]{10}$.

A partir de diferentes actividades realizadas a lo largo de esta unidad, se le ha requerido al estudiante la extracción de raíces cuadradas de números enteros y la determinación de su naturaleza (es decir si es racional o irracional) y teniendo en cuenta esto, el presente segmento fue dedicado a la formalización de los resultados obtenidos en estas actividades y a partir de esto a la declaración de la Irracionalidad que se genera a partir de las raíces de números enteros.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
48	21 – 22	Ex – A – Cn Ej – A – Cn

Al igual que con los números racionales, a los números irracionales les corresponde un punto en la recta numérica. La manera más usual de ubicarlos es mediante construcciones geométricas.

Veamos la siguiente construcción con regla y compás.

Dibujemos una recta, marquemos el punto 0 (llamado *O*) y un segmento de longitud 1, como muestra la figura 1.31*a*.

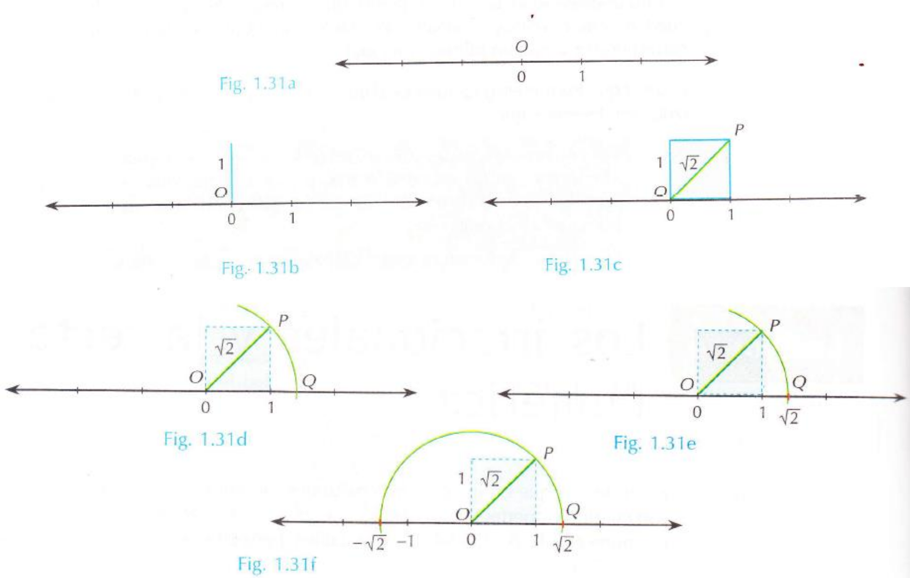


Fig. 1.31a

Fig. 1.31b

Fig. 1.31c

Fig. 1.31d

Fig. 1.31e

Fig. 1.31f

Dibujemos un segmento perpendicular a la recta en 0, de longitud 1 (figura 1.31b.), completemos el cuadrado y tracemos la diagonal. La longitud de la diagonal es $\sqrt{2}$ (figura 1.31c.).

Con un compás, con centro en 0 y radio igual a la diagonal del cuadrado, tracemos el arco de circunferencia. Por geometría sabemos que el $\overline{OP}$ en la figura 1.31d., es congruente con el $\overline{OQ}$ y, por tanto, tiene la misma medida.

Así hemos colocado el irracional $\sqrt{2}$ en la recta.

Volvamos a ubicar el compás en 0 y con radio igual a la diagonal del cuadrado, tracemos la semicircunferencia para ubicar $-\sqrt{2}$ (figura 1.31f.)

Para ubicar a $\sqrt{3}$ sobre la figura anterior, construimos un triángulo rectángulo con uno de los catetos perpendicular a $\overline{OP}$ y de longitud 1, como lo muestra la figura 1.32a. La longitud de la hipotenusa es $\sqrt{3}$.

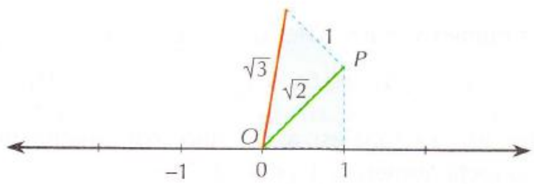


Fig. 1.32a

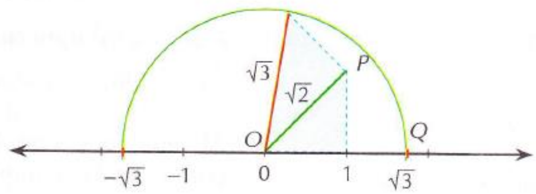


Fig. 1.32b

De nuevo con el compás en O y radio igual a la longitud de la hipotenusa, trazamos la semicircunferencia; así se encuentra el punto sobre la recta que corresponde a $\sqrt{3}$ y el que corresponde a $-\sqrt{3}$ (figura 1.32b.)

La posibilidad de ubicar los números irracionales en la recta numérica a partir de la aplicación de un procedimiento (acción) se da gracias a la Continuidad de la recta y he de aquí la clasificación del segmento. Por otra parte, al poder ubicar estos números irracionales en la recta numérica, se genera la idea de la falta de Completitud de los números racionales dado que aunque al ser ubicados estos en la recta y de manera visual observar que esta "llena", aún quedan espacios que corresponden a los números irracionales los cuales son muchos más que los racionales pero en ningún momento este aspecto es mencionado.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
49	22	Ex – Od – Cm Ej – Od – Cm Ex – Od – Cn Ej – Od – Cn

Hemos ubicado sobre la recta los puntos que corresponden a $\sqrt{2}$, y $\sqrt{3}$. Estos quedan entre números racionales. Por tanto, hay puntos en la recta que no corresponden a ningún número racional.

Es decir que los números racionales al ubicarlos en la recta dejan "vacíos". Sin embargo, tenemos que:

Los números racionales y los números irracionales conforman el conjunto de los *números reales*, y a cada punto sobre la recta le corresponde un número real y a cada número real, un punto sobre la recta.

El conjunto de los números irracionales se nota por la letra **I**.

A partir de diversas actividades de elaboración de encajonamientos para números racionales e irracionales y de ubicación de puntos en la recta numérica se ha llegado a este punto en donde se expone una idea que ha sido promovida a lo largo de las lecciones anteriores.

A continuación se presenta la sección *Aplico* en la cual se realizan actividades dirigidas al fortalecimiento de la noción de número irracional, actividades que están relacionadas con las ya realizadas en las secciones anteriores y otras que se plantean a partir del objeto declarado en el segmento anterior.

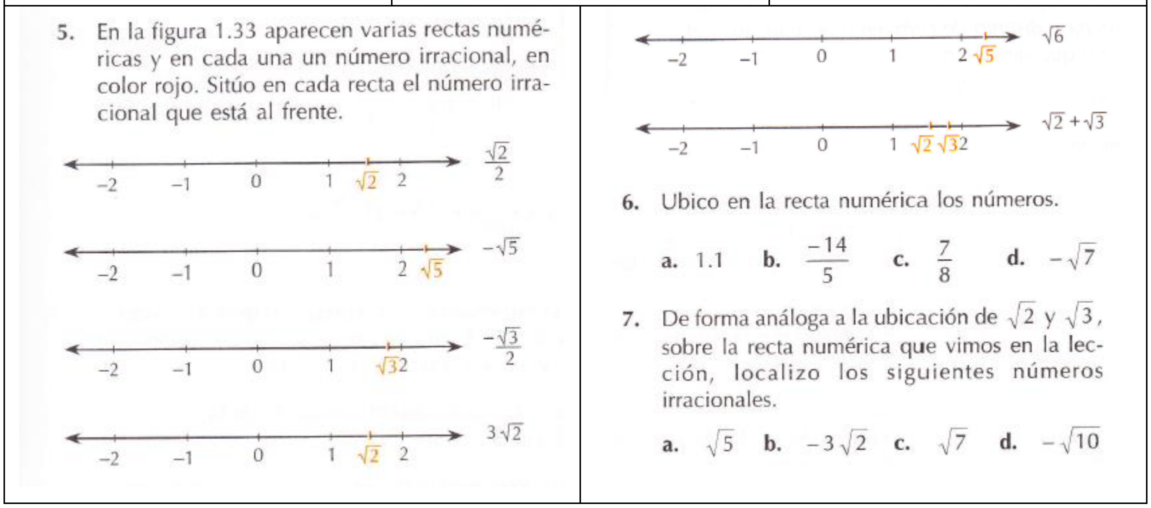
<table>
<tr><th>SEGMENTO</th><th>PÁGINA</th><th>CLASIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>50</td><td>23</td><td>Ac – Od – Ir</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Aproximo las raíces utilizando calculadora.
a. $\sqrt{6}$ b. $\sqrt{5}$ c. $\sqrt{7}$ d. $\sqrt{12}$</td></tr>
</table>

Teniendo en cuenta que los números utilizados para desarrollar la actividad corresponden en su totalidad al conjunto de los números irracionales, el segmento concuerda con la forma de conocer por medio del objeto promovido determinado en la Tabla de Categorías Emergentes dado que se enfoca en el conocimiento de la Irracionalidad a partir de las raíces cuadradas de números enteros.

<table>
<tr><th>SEGMENTO</th><th>PÁGINA</th><th>CLASIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>51</td><td>23</td><td>Ac – Op – Ra
Ac – Op – Ir</td></tr>
<tr><td>2. Determino cuáles números son racionales.
a. 5 b. $\sqrt{7}$ c. -23 d. $\sqrt{9}$
e. $-\sqrt{5}$ f. $\sqrt[3]{11}$ g. $-\frac{1}{2}$ h. $-\sqrt{2}$
i. -5.4 j. $\sqrt[5]{3}$ k. $-4.333\ldots$ l. $\sqrt[10]{1}$</td><td colspan="2">3. Determino cuáles números son irracionales.
a. $\sqrt[3]{12}$ b. $-\sqrt{10}$ c. $\sqrt[5]{7776}$ d. 0
e. $\sqrt{125}$ f. $4.9999\ldots$ g. $-\sqrt[9]{1}$ h. $\sqrt[8]{2}$
i. -2 j. $\sqrt[3]{729}$ k. $\sqrt{15}$ l. $\sqrt[6]{64}$
4. ¿A qué clase de número corresponden las siguientes expresiones?
a. $3\sqrt{2}$ b. $\frac{\sqrt{2}}{2.09}$ c. $\frac{5}{17}$ d. $\sqrt[3]{64}$</td></tr>
</table>

A partir de la definición dada en la Tabla de categorías Emergentes, el segmento al solicitar la determinación de los números como racionales o irracionales es un objeto promovido que da a conocer la Racionalidad y la Irracionalidad.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
52	23	Ac – A – Cn



5. En la figura 1.33 aparecen varias rectas numéricas y en cada una un número irracional, en color rojo. Sitúo en cada recta el número irracional que está al frente.

6. Ubico en la recta numérica los números.

a. 1.1 b. $\frac{-14}{5}$ c. $\frac{7}{8}$ d. $-\sqrt{7}$

7. De forma análoga a la ubicación de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, sobre la recta numérica que vimos en la lección, localizo los siguientes números irracionales.

a. $\sqrt{5}$ b. $-3\sqrt{2}$ c. $\sqrt{7}$ d. $-\sqrt{10}$

Con base en lo determinado en el segmento 49, se proponen actividades de fortalecimiento de la relación entre los números reales y los puntos en la recta lo cual está sustentado en la posibilidad ubicar los puntos dados y de asignarles un valor numérico en este caso irracional.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
53	23	Ac – Op – Cn

8. Investigo el procedimiento para localizar en la recta numérica el número irracional π.

Dado que el texto no ha presentado un procedimiento de la determinación de las cifras decimales de π, la actividad de investigación puede dar diversas posibilidades para la determinación de las cifras y en la misma vía la ubicación de π en la recta numérica.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
54	23	Ac – A – Ra

9. Completo la tabla 1.34.

Número	Descomposición en factores primos	¿Es cuadrado perfecto?
121	$11 \cdot 11 = 11^2$	Sí
841		
150	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	No
729		
144		
225		

Tabla 1.34

Esta actividad se refiere a la caracterización de algunos números racionales (enteros) a partir de procedimientos de descomposición en factores primos y del conocimiento de la noción de cuadrado perfecto. Lo anterior indica que el segmento está dirigido a la repetición de acciones sobre números racionales pero que posiblemente tiene como propósito la relación de estos números con la Racionalidad de sus raíces cuadradas dado que a lo largo de los segmentos anteriores se ha trabajado este aspecto aunque relacionando las raíces cuadradas de números enteros con la irracionalidad.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
55	23	Ac – Op – Ir

10. Sean a y b dos números racionales positivos tales que $a < b$. Sabiendo que entre los números 0 y 1 se encuentra el número irracional $\frac{\sqrt{2}}{2}$, en forma análoga encuentro un número irracional entre a y b.

El objeto sobre la Irracionalidad que se promueve en esta actividad es la idea de que entre cualquier par de números racionales existe un número irracional, más teniendo en cuenta que este aspecto no ha sido abordado en el desarrollo temático del texto la actividad de análisis va más allá de la aplicación de conocimientos adquiridos a los largo de la unidad exigiendo la comprensión de estos conocimientos y la profundización en los mismos.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
56	23	Ac – Od – R Ac – Od – Ir

11. Completo la tabla 1.35.

Número	Descomposición en factores primos	Raíz cuadrada	¿Qué clase de número es?
2025	$5^2 \cdot 9^2$	$5 \cdot 9 = 45$	racional
8	2^3	$\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$	irracional
180			
1280			
3939			
441			
6727			

Tabla 1.35

Este segmento está dirigido a la réplica de procedimientos de descomposición factorial mediante la cual se determina la Racionalidad o Irracionalidad de la raíz de un número dado lo cual determina la clasificación del segmento según la Tabla de Categorías Emergentes.

En las lecciones 3 y 4 el texto se enfoca en el objeto número irracional ya sea por declaración de sus características o por la promoción de las mismas. Los procesos infinitos se dejan de lado en estas dos secciones lo cual se evidencia en el hecho de que ninguno de los segmentos está destinado al conocimiento desde los procesos de alguna de las características a analizar sobre la construcción del conjunto de los números reales.

Entre las páginas 24 y 26 se desarrolla la lección 5 la cual tiene como objeto la expresión de números decimales en notación científica lo cual no está relacionado con el objeto de este estudio y por tanto esta sección como el correspondiente aplico no será objeto de análisis. Por lo anterior, el análisis de la unidad continúa en la página 27 del texto en donde se presenta el taller de competencias 2 que tiene como propósito la evaluación de cuestiones relacionadas a los números racionales e irracionales.

TALLER DE COMPETENCIAS 2

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
57	27	Ac – Op – Ra Ac – Op – Ir
1. Determina cuáles proposiciones son falsas y cuáles verdaderas. (Justifica tu respuesta.) **a.** Algunos números racionales son enteros. **b.** Todos los números racionales tienen expresión decimal periódica. **c.** Todos los números irracionales tienen expresión decimal periódica. **d.** Todos los números irracionales son reales.	**2.** Escribe un número que cumpla las condiciones de cada afirmación. **a.** Es irracional construible geométricamente. **b.** Es real pero no es irracional. **c.** Es irracional y procede de la extracción de una raíz. **d.** Es real pero no es racional.	

A partir de la comprensión de los aspectos de los números reales trabajados en las cuatro lecciones, las actividades promueven la determinación de otros aspectos que no se han considerado en el desarrollo de la unidad acerca de la Racionalidad o Irracionalidad de un número real.

SEGMENTO	PÁGINA	CLASIFICACIÓN
58	27	Ac – A – Cn
3. Susana quiere construir triángulos para los cuales las medidas de los tres lados sean números irracionales. Ella construye segmentos de las longitudes dadas y descubre que no siempre puede construir el triángulo. Haz el ejercicio para determinar los casos en que sí obtuvo un triángulo. **a.** $\sqrt{8}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ **c.** $\sqrt{10}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ **d.** $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{5}$		

Esta actividad busca el conocimiento de la desigualdad triangular y los números irracionales son usados en el desarrollo de procedimientos que buscan este fin. Lo anterior se vincula con la definición de acción en Continuidad determinada en la Tabla de Categorías Emergentes.

<table>
<tr><th>SEGMENTO</th><th>PÁGINA</th><th>CLASIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>59</td><td>27</td><td>Ac – A - Cn</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Ubica en la recta numérica los irracionales y determina cuál es el mayor.
a. $\sqrt{5}$ b. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
c. π d. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$</td></tr>
</table>

La posibilidad de ubicar puntos en la recta numérica que representen los números dados son acciones que replican los procedimientos explicados en la unidad y es una posibilidad que se da gracias a la Continuidad de la recta que además vincula la idea del conjunto de los números reales como un conjunto ordenado lo cual no ha sido trabajado a lo largo de la unidad.

ANALISIS DEL TALLER DE COMPETENCIAS 2.

El taller de competencias 2 correspondiente a las lecciones 3 y 4 plantea una serie de actividades dirigidas al fortalecimiento del conocimiento de los números irracionales a partir de acciones sustentadas en los procesos explicados en las secciones, más en estas actividades es notable la ausencia de los procesos infinitos lo cual va en la misma dirección del planteamiento de las lecciones correspondientes a este taller.

4.1.1 Tablas de Clasificación de Segmentos y de Resultados

A continuación se muestran las tablas de clasificación de los segmentos del libro de texto que se han analizado, los cuales se han caracterizado por la forma de conocer de la teoría APOE que estimulan, por el aspecto del Número Real que dan a conocer y por la sección del libro en donde se encuentran ubicados:

Número de segmento	CLASIFICACIÓN	SECCIÓN DEL LIBRO DE TEXTO
1	Ex – Od – C.I	SECCIONES PRELIMINARES
2	Ac – A – R	
3	Ac – A – Cn	
4	Ac – Op – Cm	
5	Ac – A – C.I	
6	Ex– Od – Ir	
	Ej – Od - Ir	
7	Ex – Od – R	DESARROLLO TEMÁTICO - EXPRESIONES DECIMALES PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS
	Ex – A – R	
	Ej – A – R	
8	Ex – P – Cm	
	Ej– P – Cm	
	Ex – P – Cn	
	Ej – P – Cn	
9	Ex – P – Cm	
	Ej – P – Cm	
	Ex – P – Cn	
	Ej – P – Cn	
10	Ex – Od – R	
11	Ex – Od – Ir	
12	Ac – A – R	APLICO
13	Ac – P – Cm	
14	Ac – Op – R	
15	Ac – Op – R	
16	Ac – Op – Ir	
17	Ac – Op – Cm	
	Ac – Op – Cn	
18	Ac – Od – Ir	
19	Ac – Op – Ir	

Número de segmento	CLASIFICACIÓN	SECCIÓN DEL LIBRO DE TEXTO
20	Ex – Od – Ir	LECCIÓN 2 NÚMEROS IRRACIONALES
	Ej – Od – Ir	
	Ex – Od – C.I	
	Ej – Od – C.I	
21	Ex – P – Cm	
	Ej – P – Cm	
22	Ex – Od – Ir	
23	Ac – P – Cm	APLICO
24	Ac – Op – C.I	
	Ac - Od – R	
	Ac – Od - Ir	
25	Ac – Od – R	
	Ac – Od - Ir	
26	Ac – Op – Ir	
27	Ac – Op – Ir	
28	Ac – A – R	TALLER DE COMPETENCIAS 1
29	Ac – Op – R	
30	Ac – Op – R	
31	Ac – Op – Ir	
32	Ac – P – Cn	
	Ac – P - Cm	
33	Ac – Op – C.I	
34	Ex – Od – C.I	
	Ac – Od – C.I	
35	Ac – Op – C.I	
36	Ac – Op – C.I	
37	Ac – Op – C.I	

38	Ex – Od – C.I	**LECCIÓN 3 - CONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES**	47	Ex – Od – Ir	**LECCIÓN 4 - LOS IRRACIONALES Y LA RECTA NUMÉRICA**
	Ej – Od – C.I		48	Ex – A – Cn	
	Ex – Od – Ir			Ej – A – Cn	
	Ej – Od – Ir		49	Ex – Od – Cm	
39	Ex – Od – Ir			Ej – Od – Cm	
	Ej – Od – Ir			Ex – Od – Cn	
40	Ex – Od – Ir			Ej – Od – Cn	
41	Ac – A – Cn	**APLICO**	50	Ac – A – Ir	**APLICO**
42	Ac – Op – R		51	Ac – A – R	
	Ac – Op – Ir			Ac – A – Ir	
43	Ac – A – C.I		52	Ac – A – Cn	
44	Ac – Op – R		53	Ac – Op – Cn	
	Ac – Op – Ir		54	Ac – A - R	
45	Ac – A – Cn		55	Ac – Op – Ir	
46	Ac – Op – Ir		56	Ac – A – R	
				Ac – A – Ir	
			57	Ac – Op – R	**TALLER DE COMPETENCIAS 2**
				Ac – Op – Ir	
			58	Ac – A – Ir	
			59	Ac – A - Cn	

Tabla de Resultados

Teoría APOE / Números Reales		Acción	Proceso	Objeto Declarado	Objeto Promovido	Frecuencia	Total elementos de asociados a los Reales	%
Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad	**Ex**			4		4	**14**	**15,38%**
	Ej			2		2		
	Ac	2		1	5	8		
Racionalidad	**Ex**	2		2		4	**19**	**20,87%**
	Ej	1				1		
	Ac	3		3	8	14		
Irracionalidad	**Ex**			8		8	**28**	**30,76%**
	Ej			4		4		
	Ac			4	12	16		
Completitud	**Ex**		3	1		4	**13**	**14,28%**
	Ej		3	1		4		
	Ac		3		2	5		
Continuidad	**Ex**	1	2	1		4	**17**	**18,68%**
	Ej	1	2	1		4		
	Ac	6	1		2	9		
Frecuencia	**Ex**	3	5	16			**91**	**100%**
	Ej	2	5	8				
	Ac	11	4	8	29			
Total elementos asociados a la teoría APOE		**16**	**14**	**32**	**29**	91		
%		**17,58%**	**15,38%**	**35,16%**	**31,86,4%**	**100%**		

4.1.2. Análisis sobre los aspectos relacionados con la construcción de los Números reales

Sobre los 91 segmentos analizados en el libro Alfa 8, 28 fueron dedicados al conocimiento de la Irracionalidad lo cual corresponde a un 30,76% de los segmentos estudiados, determinando a esta característica del Número Real como la de mayor énfasis en la unidad del texto que ha sido analizada la cual tiene como objeto el conocimiento de este aspecto del Número Real. Es de notar que la forma de conocer mediante el proceso (en donde se encuentran incluidos los procesos infinitos), no fue promovida en la Irracionalidad lo cual consideramos que está en contraposición con la esencia de este aspecto de los Números Reales dado que, como se pudo evidenciar a lo largo del marco teórico, los procesos infinitos subyacen y soportan la idea de la Irracionalidad. Los 28 segmentos mencionados que fueron dedicados al conocimiento de la Irracionalidad estuvieron relacionados con la forma de conocer objeto, tanto declarado (16 segmentos) como promovido (12 segmentos) en donde el desarrollo de actividades tuvo un lugar preferencial lo cual indica que el libro encausó el conocimiento de la Irracionalidad a partir del objeto y que la manera en que se presentó fue a partir del trabajo propuesto a los estudiantes.

El siguiente aspecto a mencionar es la Racionalidad, al que el libro de texto le dedicó 19 segmentos (20,87%) entre los que se destacan las actividades, las cuales acumularon 14 segmentos que están enfocados al conocimiento mediante el objeto y las acciones mientras que las explicaciones y ejemplos solo abarcaron 5 segmentos. En la Racionalidad, el conocimiento a partir del proceso tampoco tuvo un papel importante, ninguno de los segmentos fue dedicado a esta forma de conocer mientras que las acciones y los objetos declarados estuvieron presentes en forma equitativa en el desarrollo de los segmentos de esta categoría.

Por otra parte, en lo concerniente a la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad, la forma de conocer predominante fue el objeto, tanto declarado como promovido, ya que 12 de los 14 segmentos dedicados en el texto a este aspecto de los Números Reales estaban enfocados a estas formas de conocer y es de notar los objetos declarados fueron determinados, en mayor medida, a partir de explicaciones y ejemplos mientras que los objetos promovidos estuvieron expuestos por medio de actividades como es natural en este tipo de objetos.

En los anteriores aspectos relacionados con la construcción de los Números Reales la forma de conocer mediante los procesos no se evidenció, aspecto que cambia de manera radical a la hora del análisis de la Completitud y la Continuidad ya que los 14 segmentos (15,38%) que el libro dedica al conocimiento mediante los procesos están relacionados con estos dos aspectos. Teniendo en cuenta los estrechos nexos que existen entre la Continuidad y la Completitud, varios de los segmentos dirigidos al conocimiento de uno de estos aspectos también están relacionados con el segundo, es decir que varios de los segmentos que tienen una doble clasificación y están relacionados con la Completitud, también están relacionados con la Continuidad; estos segmentos se hacen presentes a lo largo de la unidad analizada lo cual refleja tanto la influencia como la importancia de estos aspectos en la formalización de los números racionales e irracionales.

En cuanto al conocimiento de la Completitud la organización del texto mediante los procesos fue equitativa ya que a las explicaciones, a los ejemplos y a las actividades se le dedicaron la misma cantidad de segmentos. Por otra parte, en la forma de conocer mediante los objetos, tanto los objetos declarados como los promovidos se expusieron en 2 segmentos cada uno los declarados mediante explicación - ejemplo y los promovidos mediante actividades.

La Continuidad fue expuesta por el libro de texto en 17 de los 91 segmentos analizados lo cual corresponde al 18,68%, en donde cabe resaltar que fue dada a conocer en mayor medida mediante las acciones y los procesos, formas de conocer que abarcan 13 de los segmentos. Los segmentos dedicados a los objetos se distribuyeron equitativamente entre los objetos declarados y los promovidos, y en cuanto a la intencionalidad de los segmentos, las actividades tuvieron un papel importante a la hora de dar a conocer la Continuidad dado que más de la mitad de los segmentos relacionados con este aspecto del Número Real fueron dedicados al desarrollo de actividades. Un punto que cabe resaltar entre la Completitud y la

Continuidad es el hecho de que los objetos declarados relacionados con estos dos aspectos del Número Real se presentaron en el segmento 49 el cuál determina la relación entre los Números Reales y la recta Real.

Para finalizar, los Procesos Infinitos estuvieron relacionados por completo con la Completitud y la Continuidad de los Números Reales, lo cual no indica que no estuvieran presentes en el desarrollo que el libro de texto hizo de los números Racionales e Irracionales ya que, como se expuso anteriormente, tanto la Completitud como la Continuidad estuvieron directamente relacionados con la formalización de la Racionalidad y la Irracionalidad; no se evidenció ningún nexo de los Procesos Infinitos con la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad, lo cual desconoce la forma como aparecieron las magnitudes Inconmensurables como un proceso Infinito a partir de lo expuesto en el marco teórico y teniendo en cuenta que la manera como se presentaron estos procesos en el libro de texto fue a partir de encajonamientos tanto numéricos como de puntos en la recta, se puede decir que se desconocen los demás tipos de Procesos Infinitos que se pudieron evidenciar en la Construcción de los Números Reales.

4.1.3 Análisis sobre las formas de conocer de la teoría APOE presentes en el libro de texto

A continuación se expone el análisis en cuanto a las formas de conocer determinadas por la teoría APOE, las cuales hemos adoptado como parámetros de análisis de los libros de texto. El primer aspecto que resaltamos es que la forma de conocer más estimulada por el texto Alfa 8 es el objeto, tanto declarado como promovidos, ya que aproximadamente el 60% de los segmentos estudiados estuvieron dirigidos a estas formas de conocer siendo las únicas que permanecieron relacionadas con cada aspecto del Número Real que hemos estudiado. Con base en lo anterior, el mayor impacto de la forma de conocer a partir de los objetos se dio en el conocimiento de la Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad y de la Racionalidad e Irracionalidad, acumulando 53 segmentos en el conocimiento de estos aspectos, mientras que la

Completitud y la Continuidad solo se presentaron en 8 segmentos, de los cuales la mitad estuvo dirigida a la declaración de la relación entre Números reales y puntos de la recta.

Ahora, al diferenciar los objetos en declarados y promovidos, se tiene que el libro dedica mayores esfuerzos a la declaración de los objetos la cual se hace principalmente a partir de explicaciones con 16 segmentos; la mayor cantidad de estas explicaciones que declaran objetos estuvo relacionada con la Irracionalidad lo cual reafirma la importancia que el libro de texto le da a este aspecto del Número Real. El objeto promovido, el cual se da solamente a partir de actividades, tuvo casi la misma presencia que los objetos declarados y, al igual que los objetos declarados, tuvo su mayor impacto en los números irracionales en donde se presentaron más objetos promovidos que en los demás aspectos del Número Real que hemos estudiado.

Al hablar de la forma de conocer acción, cabe decir que estuvo relacionada principalmente con el conocimiento de la Racionalidad y de la Continuidad, mientras que no tuvo ningún impacto en el conocimiento de la Irracionalidad y de la Completitud. Es así que gran parte de los 16 segmentos dedicados a esta forma de conocer estuvo relacionada con actividades propuestas al estudiante, en especial enfocadas al conocimiento de la Continuidad.

Para terminar, al analizar la forma de conocer mediante los procesos, es preciso mencionar que esta forma de conocer fue la menos promocionada con tan solo 14 segmentos, los cuales estuvieron relacionados en su totalidad con el conocimiento de la Completitud y la Continuidad que son aspectos del número real que, aunque no fueron adoptados como objeto de estudio por el libro (por lo menos de manera formal), estuvieron presentes en el trabajo relacionado con la Racionalidad y la Irracionalidad lo cual indica que los procesos infinitos permearon estos aspectos del número real aunque no de manera directa. Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos que el trabajo con los procesos realizado por el libro de texto, aunque permeó los diferentes aspectos del número real que hemos estudiado (a excepción la Conmensurabilidad y la Inconmensurabilidad), fue muy poco en comparación con el énfasis realizado en las demás formas de conocer en especial en la de Objeto.

4.1.4 Sobre la Linealidad y Coherencia del Libro de Texto

El siguiente análisis se sustenta en la Tabla de Clasificación de Segmentos en la cual se listaron los segmentos analizados con su correspondiente clasificación. Iniciamos con las *Secciones Preliminares*, en las que se puede evidenciar que fueron considerados todos los aspectos del Número Real que analizamos en nuestro estudio lo cual consideramos coherente con el objeto de la unidad que está destinada a la introducción del Número Real y de cada uno de los aspectos que están relacionados. En cuanto a las formas de conocer determinadas por la teoría APOE es de notar que los objetos tuvieron un lugar importante en esta sección del libro mientras que los procesos no fueron tenidos en cuenta. A continuación, en el desarrollo temático la primera sección que se presenta, *Expresiones Decimales periódicas y no periódicas*, se evidencia una gran presencia de los procesos como forma de conocer que están vinculados a la Completitud y a la Continuidad, más en el correspondiente *Aplico* las actividades estimularon más el conocimiento a partir de los objetos promovidos lo cual entra en contradicción con lo presentado a lo largo de la sección.

En la lección 2, correspondiente a los *Números Irracionales,* se encuentra coherencia entre los aspectos del Número Real que se presentaron a lo largo de la unidad y los de la correspondiente sección *Aplico* pero en cuanto las formas de conocer adoptadas para nuestro estudio, se tiene que el desarrollo de la unidad se basó en los objetos promovidos mientras que en la sección *Aplico* fueron los objetos declarados los que tuvieron mayor presencia. A continuación de la sección 2, el texto presentó el *Taller de Competencias I* en donde lo más relevante es el hecho de que la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad tiene gran influencia en el desarrollo del taller pero este aspecto de los números reales fue poco trabajado a lo largo de la unidad.

En la lección 3 *Construcción de Algunos Números Irracionales*, la única forma de conocer que se desarrolla es el objeto declarado el cual está enfocado, en mayor medida, al conocimiento de la Irracionalidad más en la correspondiente sección de actividades la forma de conocer que resulta más estimulada es el objeto promovido lo cual muestra, como en las anteriores lecciones, una ruptura entre la forma de conocer incitada en la lección y la promovida en las actividades de profundización. Por último en la lección 4, *Los Irracionales en la Recta Numérica,* se observa la misma ruptura en las formas de conocer estimuladas a lo largo de la lección y lo solicitado en las actividades de la sección *Aplico* ya que en la lección se estimula el conocimiento a partir de los objetos declarados mientras que en la sección *Aplico* la forma de conocer de mayor influencia es la Acción.

4.2. Análisis libro de Texto CÓDIGO 8°

A continuación se presenta el análisis de contenido realizado al Libro Matemáticas 8 serie Código, ediciones SM S.A., 2008; el cual dedica su primer capítulo al objeto de nuestro estudio, es decir, los números reales, más específicamente presenta la construcción del conjunto de los números reales, para ello el texto organiza dicho capítulo en las secciones: i. Números racionales, ii. Representación de los números racionales, iii. Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional, iv. Números irracionales, v. Números irracionales en la recta numérica, vi. Aproximación de números irracionales, vii. Valor absoluto, viii. Aproximaciones y errores, ix. El conjunto de los números reales, x. El orden en el conjunto de los números reales, xi. Intervalos y semirrectas; para finalizar el capítulo el libro propone una serie de actividades (ejercicios para entrenar).

De acuerdo a lo anterior y a análisis previos, decidimos que para mayor comprensión vamos a agrupar las secciones mencionadas en cuatro más generales, así en la primera hablaremos de las secciones i, ii y iii dado que estas se relacionan con los Números racionales; en la segunda reunimos a las secciones de la iv a la viii, ya que estas se centran en los Números Irracionales; la tercera corresponde al conjunto de los Números Reales, es decir acoge las secciones ix, x y xi y finalmente la cuarta se relaciona con las actividades que plantean los ejercicios de aplicación de todo lo visto durante el capítulo. Lo cual respeta la linealidad y orden que presenta el libro de texto en el capítulo objeto de nuestro estudio.

Es de mencionar que a pesar de estar secuenciadas las actividades propuestas por el libro faltarán algunas, dado que tales ejercicios no son insumo para el objeto de nuestro estudio.

- Números Racionales:

Segmento	Página	Clasificación
1	13	Ej – Od – R

Ejemplo. *De acuerdo con la información, cada persona consumió una fracción de $\frac{1}{1100}$ de la pizza. Esta porción es equivalente a $\frac{196\,000}{1100}$ cm^2.*

La expresión $\frac{196\,000}{1100}$ es un **número racional**, tal que:

Expresión decimal — Periodo

$$\frac{196\,000}{1100} = \underbrace{178{,}18181818...}_{\text{Expresión decimal}} = 178{,}\overset{\frown}{18}$$

TEN EN CUENTA

En el año 2004 se elaboró, en la ciudad de Nápoles, Italia, la pizza más grande de que se tiene noticia.

Esta pizza, repartida entre 1100 personas, alcanzó un diámetro de 5 m y su área fue, aproximadamente, de 196 000 cm^2.

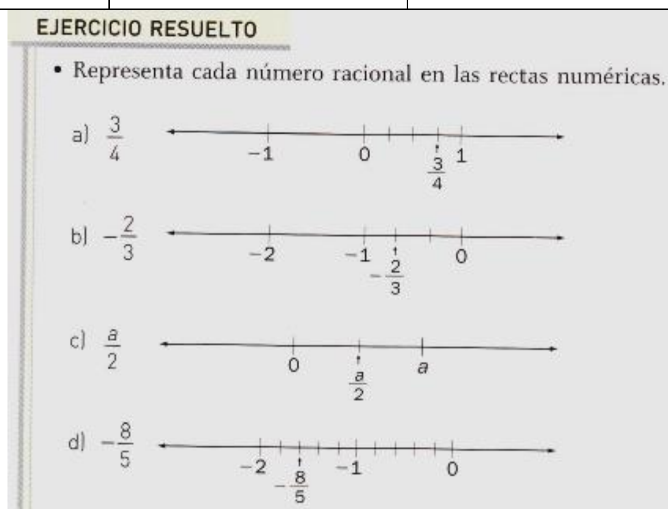
De acuerdo a la información que dan en el recuadro “TEN EN CUENTA” el libro inicia la sesión de números racionales ejemplificando desde los datos sustraídos de éste, la representación fraccionaria de un número racional, además presenta desde este caso particular que tal expresión es equivalente a un número decimal infinito periódico; es decir, con este ejemplo pareciera que quieren introducir que los números racionales se pueden escribir como una razón entre dos enteros y a su vez se pueden expresar como un decimal periódico.

Segmento	Página	Clasificación
2	13	Ex – Od – R

Conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)	
Conjunto de números que pueden expresarse de la forma $\frac{a}{b}$, donde *a* y *b* son números enteros y *b* es diferente de cero. Su expresión decimal puede ser finita o infinita periódica. Por ejemplo:	
$\frac{23}{8} = 2{,}875$ ←	Expresión decimal finita
$\frac{18}{11} = 1{,}\overset{\frown}{63}$ ←	Expresión decimal infinita periódica

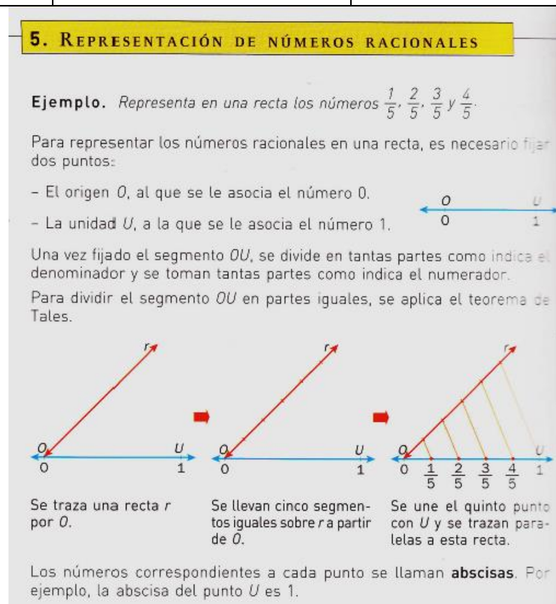
Posteriormente al ejemplo del segmento 1, se procede a definir los números racionales como una razón entre dos números enteros, y declaran que la expresión decimal de estos números es finita o infinita periódica; por lo cual este fragmento de explicación realizada por el libro permite evidenciar el tratamiento de la Racionalidad desde la forma de conocer objeto declarado, dado que caracteriza la Racionalidad de un número a partir de su expresión decimal finita o infinita periódica.

Segmento	Página	Clasificación
3	13	Ej – A – Cn



Este ejercicio resuelto se ha ubicado en la categoría Ej – A – Cn, ya que como se puede observar, se espera que el estudiante infiera de la imagen que para ubicar números racionales sobre la recta numérica debe dividir la unidad (positiva o negativa según sea el signo del número racional) en tantas partes (iguales) como indica el denominador y la cantidad que representada por el numerador indica donde se debe ubicar tal racional; ejemplo que muestran para una fracción que esta entre 0 y 1, otro para una que esta entre -1 y 0, y para otra que es mayor que la unidad; es decir que este ejemplo le revela al estudiante lo que debe realizar para poder representar un número racional en la recta numérica.

➢ Representación de números racionales en la recta numérica

Segmento	Página	Clasificación
4	14	Ex – A – Cn Ej – A – Cn
		

5. Representación de números racionales

Ejemplo. *Representa en una recta los números* $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ *y* $\frac{4}{5}$.

Para representar los números racionales en una recta, es necesario fijar dos puntos:

– El origen *O*, al que se le asocia el número 0.

– La unidad *U*, a la que se le asocia el número 1.

Una vez fijado el segmento *OU*, se divide en tantas partes como indica el denominador y se toman tantas partes como indica el numerador.

Para dividir el segmento *OU* en partes iguales, se aplica el teorema de Tales.

Se traza una recta *r* por *O*.

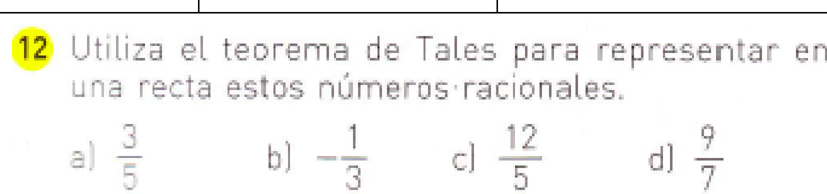
Se llevan cinco segmentos iguales sobre *r* a partir de *O*.

Se une el quinto punto con *U* y se trazan paralelas a esta recta.

Los números correspondientes a cada punto se llaman **abscisas**. Por ejemplo, la abscisa del punto *U* es 1.

Dando Continuidad al ejercicio resuelto expuesto en el segmento 3 el libro formaliza, por decirlo de alguna manera, el paso a paso para representar un número racional, es decir, ya no se espera que el estudiante infiera sino se los presentan como se ve en la imagen; por tal razón consideramos que este fragmento es un ejemplo que permite explicar el método de cómo ubicar en la recta un racional, por ello se está haciendo alusión a la Continuidad desde la forma de conocer acción.

Posteriormente a este ejemplo explicación el libro propone unos ejercicios, donde encontramos:

Segmento	Página	Clasificación
5	14	Ac – A – Cn
		

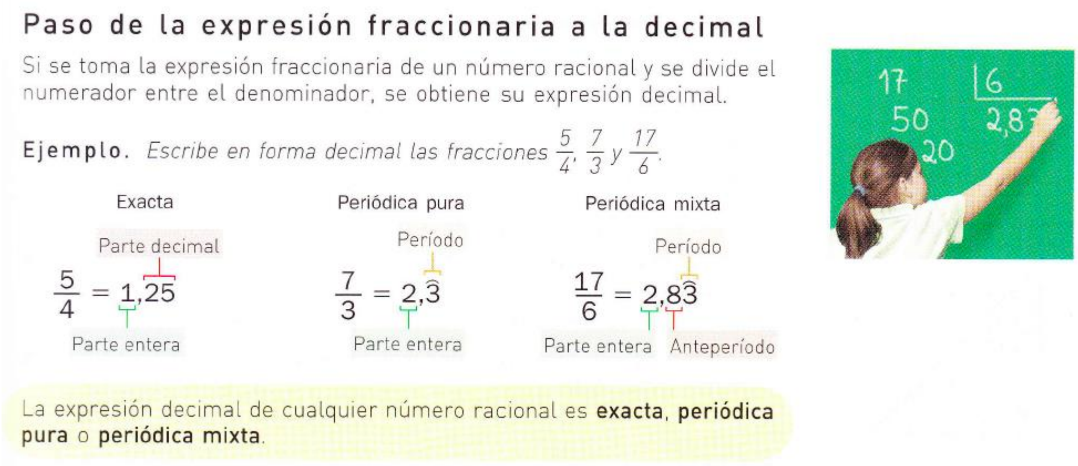
12 Utiliza el teorema de Tales para representar en una recta estos números racionales.

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{9}{7}$

el cual asociamos a la categoría actividad de la forma de conocer acción en Continuidad, dado que solicita al estudiante ubicar cuatro números racionales a partir del paso a paso expuesto a través del ejemplo presentado en el segmento 4.

- Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional

Segmento	Página	Clasificación
6	15	Ex – Od – R Ej – Od – R Ex – A – R Ej – A – R



Paso de la expresión fraccionaria a la decimal

Si se toma la expresión fraccionaria de un número racional y se divide el numerador entre el denominador, se obtiene su expresión decimal.

Ejemplo. *Escribe en forma decimal las fracciones* $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{17}{6}$.

Exacta: $\frac{5}{4} = 1,25$ (Parte decimal: 25; Parte entera: 1)

Periódica pura: $\frac{7}{3} = 2,\widehat{3}$ (Período: 3; Parte entera: 2)

Periódica mixta: $\frac{17}{6} = 2,8\widehat{3}$ (Período: 3; Parte entera: 2; Anteperíodo: 8)

La expresión decimal de cualquier número racional es **exacta**, **periódica pura** o **periódica mixta**.

En este fragmento, el libro establece por un lado el procedimiento para hallar la expresión decimal de cualquier número racional a través del recuadro verde (la acción que el estudiante debe ejecutar), es decir realizando la división del numerador entre denominador; y por otro lado explica con un ejemplo que las expresiones decimales de cualquier número pueden ser exacta, periódica pura o periódica mixta; se puede observar que con este segmento se están ampliando las características de las expresiones decimales obtenidas de un número racional, es decir, ya no sólo son infinitas periódicas, como se mostró con el ejemplo del segmento 1, sino que también son finitas.

Segmento	Página	Clasificación
7	15	Ej – A – R Ex – A – R

Paso de la expresión decimal a la fraccionaria

Ejemplo. *Expresa como números fraccionarios 3,25; $1,\widehat{23}$ y $1,4\widehat{6}$.*

Decimal exacto: $x = 3,25$

Se multiplica por 100: $100x = 325 \longrightarrow$ Fracción: $x = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$

Decimal periódico puro: $x = 1,232323...$

Se multiplica por 100: $100x = 123,2323...$

Se le resta el número x: $x = 1,2323...$

Diferencia: $99x = 122 \longrightarrow$ Fracción: $x = \frac{122}{99}$

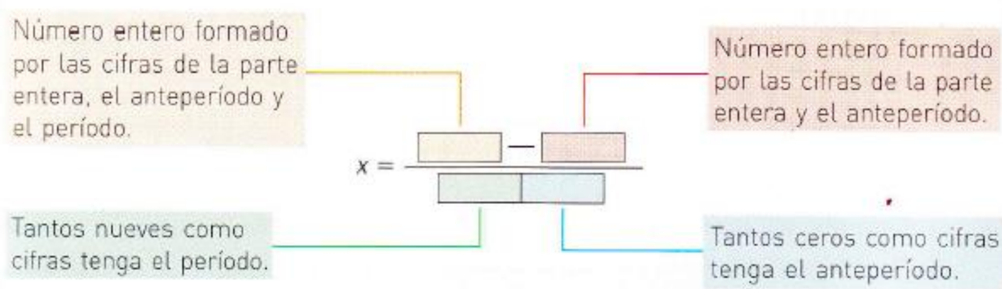
Decimal periódico mixto: $x = 1,4666$

Se multiplica por 100: $100x = 146,666...$

Se multiplica por 10: $10x = 14,666...$

Diferencia: $90x = 132 \longrightarrow$ Fracción: $x = \frac{132}{90} = \frac{61}{45}$

Los tres casos anteriores se pueden resumir en una fórmula.



Todo decimal exacto o periódico puede escribirse en forma de fracción.

En este segmento se presenta una ejemplo que explica el método para pasar de una expresión decimal a una fraccionaria y en consecuencia se considera una como una acción para la Racionalidad que se le está dando al estudiante para su aplicación posterior; sin embargo también consideramos que los dos últimos casos pueden de alguna manera eliminar el proceso infinito que está inmerso en los números racionales.

Dando Continuidad al orden del libro, al finalizar esta sección se establecen una serie de ejercicios de donde tomamos el siguiente:

Segmento	Página	Clasificación
8	15	Ac – A – R

14 Escribe cada número fraccionario en forma decimal. Indica qué tipo de decimal es cada uno y, si existen, la parte entera, el anteperíodo y el período.

a) $\frac{12}{9}$ c) $\frac{17}{6}$

b) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{5}{7}$

ya que este solicita al estudiante ejecutar un paso a paso ya establecido y presentado por el texto para pasar de expresión fraccionaria a la decimal, como se evidenció en el segmento 6; por tal razón lo ubicamos en la categoría de actividad propuesta para la forma de conocer acción desde la Racionalidad.

1. Números Irracionales:

Segmento	Página	Clasificación
9	16	Ex – Od - Ir

¿Existen números decimales *cuya expresión no sea periódica*?

Observa la formación de los siguientes números.

8,1010010001000010000...

Se obtiene colocando sucesivamente, detrás de cada cifra 1, bloques de 1, 2, 3, 4... ceros.

7,73773777377773...

Se obtiene colocando, delante de cada cifra 3, bloques sucesivos de *1, 2, 3, 4... sietes.*

Los números con expresión decimal ni exacta ni periódica se llaman números **irracionales**.

Estableciendo una conexión con las expresiones decimales que resultan de los números racionales, el libro se vale de estas para presentar dos ejemplos de números cuya expresión decimal no es periódica ni finita, como las hasta el momento abordadas; ejemplos con los cuales llega a la declaración de la definición de número irracional como un número cuya expresión decimal no es ni exacta ni periódica sin haberla promovido primero, por ello este da evidencia de la forma de conocer objeto declarado por el texto en relación a la Irracionalidad.

Posteriormente a la definición el libro presenta el siguiente ejemplo:

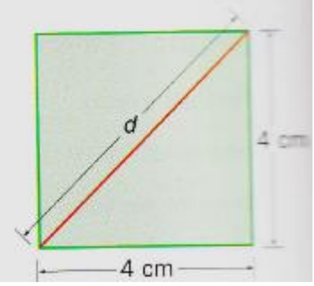
<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>10</td><td>16</td><td>Ej – Od – R
Ej – Od – Ir</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Ejemplo. *¿La medida de la diagonal de un cuadrado de lado 4 cm es un número racional o irracional?*

La medida de la diagonal se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32}$$

Al calcular el valor de $\sqrt{32}$ se obtiene la expresión decimal 5,656854..., que no es periódica.



</td></tr>
</table>

el cual se relaciona con identificar si la diagonal del cuadrado de lado 4 cm es ò no un número racional, a partir de la expresión decimal que este tiene, ello con el fin de declarar posteriormente que

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>11</td><td>16</td><td>Ex – Od – Ir</td></tr>
<tr><td colspan="3">Las raíces cuadradas, cúbicas..., no exactas, dan lugar a expresiones decimales no periódicas.</td></tr>
</table>

en este sentido se hace explicito cómo determinar si una raíz cuadrada, cúbica o $n-$ésima corresponde a un número irracional o no, por lo cual este segmento se ubica en la categoría de explicación bajo la forma de conocer Objeto declarado en términos de la Racionalidad e Irracionalidad de un número.

Luego se muestra el ejercicio resuelto (que para este análisis los tomamos como un ejemplo dado que consideramos que cumplen la misma función que estos):

Segmento	Página	Clasificación
12	16	Ej – Od – R Ej – Od – Ir

EJERCICIO RESUELTO

- Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales. Razona tu respuesta.

a) 7,313131...
b) 0,50500500...
c) −3,54787878...
d) 5,070077000777...

a) Número racional; las cifras se repiten en bloques, período 31.
b) Número irracional; el número no es periódico: detrás de cada 5 aparecen, sucesivamente, 1, 2, 3, 4... cifras 0.
c) Número racional; las cifras se repiten en bloques, período 78.
d) Número irracional; no hay ningún grupo de cifras que se repita periódicamente.

En este ejemplo se enfatiza hacia la clasificación de los números en racionales e irracionales, a partir de las justificaciones en torno a su expresión decimal, por ello se ubica en esta categoría dado que solicita al estudiante determinar la Racionalidad o no de un número en relación a su representación decimal, lo cual el texto ha presentado y declarado durante el desarrollo de estas dos secciones como se ha venido mostrando en este análisis.

Para finalizar esta sección de los números irracionales el libro propone una serie de ejercicios de los cuales consideramos pertinentes para nuestro estudio los tres siguientes:

Segmento	Página	Clasificación
13	16	Ac – Od – R Ac – Od – Ir

17 Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales.

a) $\frac{3}{5}$
b) 0,75
c) $\sqrt{7}$
d) −4
e) 632
f) 0,141141114...

18 Escribe tres números irracionales que estén dados por raíces y tres que no lo estén.

19 Clasifica estos números en racionales o irracionales, y razona la respuesta.

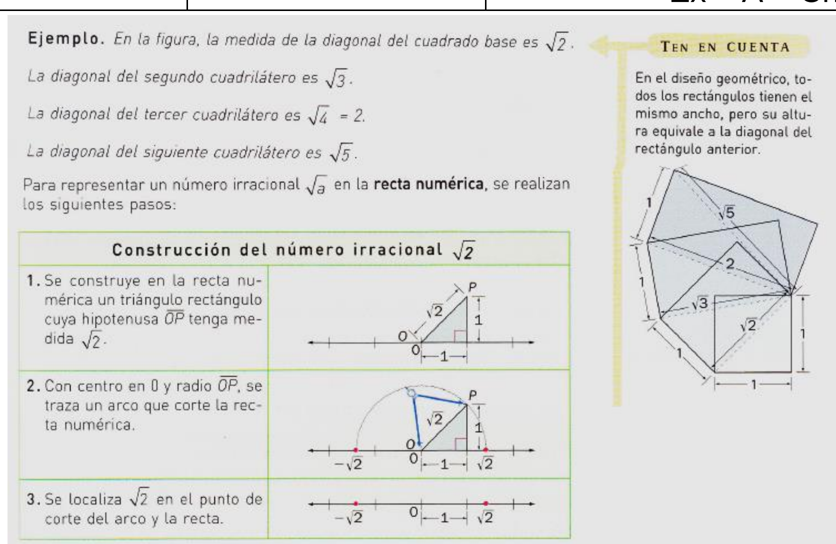
a) 123,252525...
b) 91,123777...
c) 335,1212212221...
d) 0,311331133311...

dado que los tres están situados en reconocer la Racionalidad o Irracionalidad de un número a partir de las características expuestas por el texto en relación a estos dos conjuntos numéricos; en consecuencia las tres actividades propuestas por los ejercicios solicitan al estudiante clasificar los números dados en racionales e irracionales a través de identificar: el tipo de expresión decimal que éstos tienen, si es una raíz cuadrada exacta o no, y la expresión decimal que subyace de las fracciones y números enteros

- Números irracionales en la recta numérica

En esta sección el libro inicia con un ejemplo basado en el recuadro "TEN EN CUENTA" el cual hace alusión a la medida de las diagonales de los cuatro primeros rectángulos de la Espiral de Teodoro, ello con el fin de dar el paso a paso para representar una raíz cuadrada no exacta, es decir, cómo representar un número irracional en la recta numérica; para ello toma un caso particular, en consecuencia da la explicación del paso a paso para construir un segmento que tenga por longitud $\sqrt{2}$, como se ilustra en el siguiente segmento:

Segmento	Página	Clasificación
14	17	Ej – A – Cn Ex – A – Cn



Ejemplo. *En la figura, la medida de la diagonal del cuadrado base es $\sqrt{2}$.*

La diagonal del segundo cuadrilátero es $\sqrt{3}$.

La diagonal del tercer cuadrilátero es $\sqrt{4} = 2$.

La diagonal del siguiente cuadrilátero es $\sqrt{5}$.

Para representar un número irracional $\sqrt{a}$ en la **recta numérica**, se realizan los siguientes pasos:

Construcción del número irracional $\sqrt{2}$

1. Se construye en la recta numérica un triángulo rectángulo cuya hipotenusa $\overline{OP}$ tenga medida $\sqrt{2}$.
2. Con centro en 0 y radio $\overline{OP}$, se traza un arco que corte la recta numérica.
3. Se localiza $\sqrt{2}$ en el punto de corte del arco y la recta.

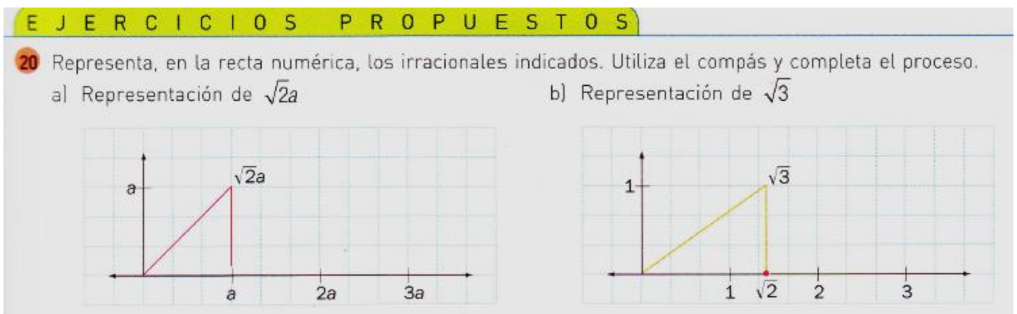
TEN EN CUENTA

En el diseño geométrico, todos los rectángulos tienen el mismo ancho, pero su altura equivale a la diagonal del rectángulo anterior.

es así que este ejemplo explicación lo ubicamos en la forma de conocer acción Continuidad, dado que se centra en explicar la manera de construir un segmento cuya longitud es el número irracional $\sqrt{2}$, a través de tres pasos que puede generalizar para cualquier otra raíz no exacta, ello con el fin de lograr ubicar este tipo de números en la recta numérica.

A continuación el texto presenta un ejercicio resuelto (ejemplo), el cual hace uso de la construcción expuesta en el segmento 14, para representar en la recta los números irracionales $\sqrt{2}\mathrm{a}$ y $\sqrt{3}$:

Segmento	Página	Clasificación
15	17	Ej – A – Cn


EJERCICIOS PROPUESTOS

20 Representa, en la recta numérica, los irracionales indicados. Utiliza el compás y completa el proceso.

a) Representación de $\sqrt{2a}$

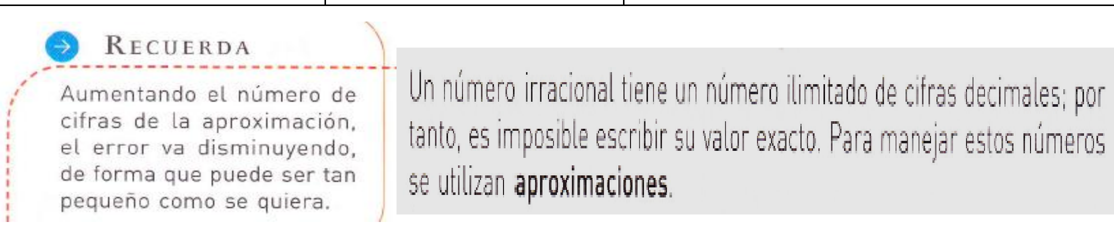
b) Representación de $\sqrt{3}$

como se puede evidenciar este ejemplo pone en práctica el paso a paso para ubicar números irracionales que resultan de raíces cuadradas no exactas en la recta numérica, por ello este ejemplo lo situamos en la forma de conocer acción en relación a la Continuidad.

- Aproximación de números irracionales

Esta sección inicia recordando y declarando que:

Segmento	Página	Clasificación
16	18	Ex – Od – Ir


RECUERDA

Aumentando el número de cifras de la aproximación, el error va disminuyendo, de forma que puede ser tan pequeño como se quiera.

Un número irracional tiene un número ilimitado de cifras decimales; por tanto, es imposible escribir su valor exacto. Para manejar estos números se utilizan **aproximaciones**.

con lo cual el texto expresa que para trabajar con un número irracional desde su representación decimal no es posible hacerlo de manera exacta sino a partir de una aproximación, la cual no es única. Por ello ubicamos este segmento en objeto declarado en relación a la Irracionalidad.

Posteriormente el texto presenta el ejemplo de algunas aproximaciones de $\sqrt{3}$, en relación a lo declarado en el segmento 16.

Segmento	Página	Clasificación
17	18	Ej – A – Cm Ex – A – Cm

Ejemplo. *El número $\sqrt{3}$ = 1,73205... es un número irracional. ¿Qué aproximaciones se pueden elegir?*

Hay tres posibles aproximaciones.

– Elegir los valores inferiores al valor de $\sqrt{3}$

1 1,7 1,73 1,732 1,7320 ...

Se tienen así las **aproximaciones por defecto**.

– Elegir los valores superiores al valor de $\sqrt{3}$

2 1,8 1,74 1,733 1,7321 ...

Se tienen así las **aproximaciones por exceso**.

– Elegir la aproximación por defecto, si la primera cifra suprimida es menor que 5, y la aproximación por exceso, si es mayor o igual que 5.

2 1,7 1,73 | 1,732 1,7321 ...

Se tienen así las **aproximaciones por redondeo**.

En este ejemplo se puede observar que el libro está presentando la manera de realizar aproximaciones por defecto, exceso y por redondeo de un número irracional, dado que exponen y explican el paso a paso, particularmente en este caso de $\sqrt{3}$, consideramos que por ello este segmento se sitúa en la forma de conocer acción Completitud.

Finalmente en esta sección se proponen algunos ejercicios de aplicación, para nuestro análisis son pertinentes los siguientes:

<table>
<tr><td>Segmento</td><td>Página</td><td>Clasificación</td></tr>
<tr><td>18</td><td>18</td><td>Ac – A – Cm</td></tr>
<tr><td colspan="3">

21 Una de las mejores aproximaciones fraccionarias del número π es $\frac{355}{113}$.

Si el valor del número π es 3,141592135..., halla el número de cifras que coincide con la aproximación dada.

22 Sabiendo que $\sqrt{10} = 3{,}162277...$ escribe las cinco primeras aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo.

</td></tr>
</table>

como se evidencia en los ejercicios 21 y 22 se pretende que el estudiante aplique lo expuesto en las explicaciones y ejemplos de esta sección, dado que la primera actividad espera que el estudiante exprese en forma decimal la fracción y compare tal expresión con el valor del número π, ello con el fin de hallar el número de cifras decimales que corresponden con la aproximación de dicho número; así mismo en el ejercicio 22 solicita al estudiante realizar las aproximaciones por exceso y defecto del número $\sqrt{10}$, es decir que aplique el paso a paso dado en el segmento 16, en consecuencia ubicamos este segmento en la forma de conocer acción Completitud.

- Aproximaciones y errores

En esta sección se explica cómo hallar el error cometido al elegir una aproximación de un número irracional, lo que no hace parte de lo que queremos analizar, sin embargo en los ejercicios que plantean para esta sección se encuentra el 28 y 29 que consideramos insumo para nuestro estudio, ya que:

<table>
<tr><td>Segmento</td><td>Página</td><td>Clasificación</td></tr>
<tr><td>19</td><td>20</td><td>Ac – A – Cm</td></tr>
<tr><td colspan="3">

28 Una excelente aproximación del número irracional $\sqrt{2}$ es la fracción $\frac{17}{12}$.

Comprueba este resultado y señala el error absoluto y relativo.

</td></tr>
</table>

29 El número π es un número irracional. Arquímedes solía utilizar como aproximación el número racional $\frac{22}{7}$. Si el radio de una plaza mide 30 m.

a) ¿Cuánto mide su circunferencia tomando para π el valor $\frac{22}{7}$?, ¿y si se toma 3,1416?

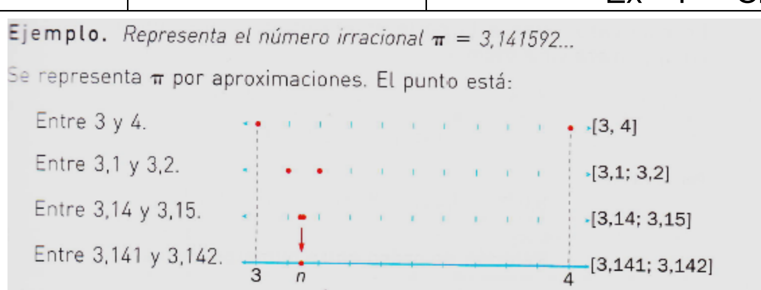
b) ¿Es aceptable el error cometido en ambos casos?

Por un lado, en la actividad propuesta en el ejercicio 28 se espera que el estudiante verifique que $\frac{17}{12}$ es una buena aproximación de $\sqrt{2}$, aplicando para ello lo expuesto en el segmento 17, es decir este fue planteado para que el estudiantes siga una serie de pasos para encontrar algunas de las aproximaciones del número irracional $\sqrt{2}$. Por otro parte, el ejercicio 29 requiere coteje la medida de una circunferencia de radio $30\ \text{mts}$ haciendo uso de dos aproximaciones del número π, para que posteriormente el estudiante observe si es aceptable el error de tales aproximaciones a través de lo mencionado en el recuadro "RECUERDA" del segmento 16. En consecuencia consideramos que este segmento da cuenta de la forma de conocer acción Conmensurabilidad.

- El conjunto de los Números Reales:

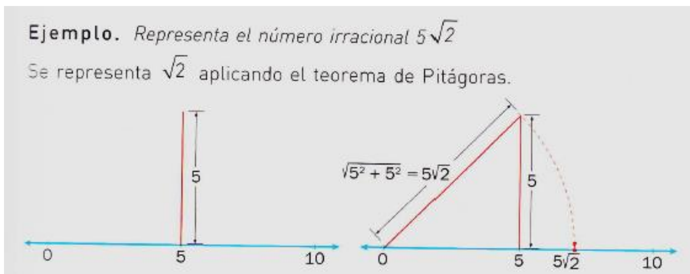
El texto inicia con dos ejemplos, en el primero se explica cómo representar el número π por aproximación en la recta numérica, y en el segundo ejemplo se presenta cómo representar el número $5\sqrt{2}$ en la recta numérica, como se muestra en los segmentos 20 y 21.

Segmento	Página	Clasificación
20	21	Ej – P – Cn Ex – P – Cm



El ejemplo-explicación que se presenta en el segmento anterior expone gráficamente el proceso de encajonamiento que se debe llevar a cabo para poder ubicar el número π en la recta numérica haciendo uso de aproximaciones, lo cual esta en concordancia con la categoría que alude a las formas de conocer proceso Continuidad y Completitud en nuestro estudio.

Ejemplo 2: representación de un número irracional:

Segmento	Página	Clasificación
21	21	Ej – A – Cn
		

como se mencionó este ejemplo explicita la manera de construir un segmento que tenga por medida el número irracional $5\sqrt{2}$ a partir de ideas ya abordadas en el libro y particularmente haciendo uso de la explicación dada en el segmento 14, de tal manera que se pueda copiar la medida de tal segmento y de esta manera poder ubicar $5\sqrt{2}$en la recta numérica. De acuerdo a lo que estos dos ejemplos exponen consideramos que se relacionan con la forma de conocer acción Continuidad; dado que da el método para que el estudiante lo emplee a la hora de ubicar en la recta numérica números irracionales.

Posteriormente a los dos ejemplos el texto afirma que:

Segmento	Página	Clasificación
22	21	Ex – Od – Cn
A cada número real se le asocia un punto de la recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta se le asocia un número real.		

lo cual es acorde con la forma de conocer objeto Continuidad, dado que declara la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales.

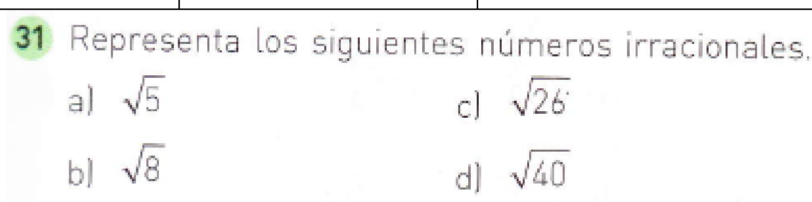
Para cerrar esta sección, el texto propone una serie de ejercicios de aplicación en relación a lo visto en la misma, de los cuales consideramos para nuestro análisis los siguientes:

Segmento	Página	Clasificación
23	21	Ac – P – Cn


30 Representa estos números irracionales.
a) 3,43574... c) −1,25239...
b) 1,110100... d) 3,112123...

32 Escribe los números representados en cada figura.
a) b)

Segmento	Página	Clasificación
24	21	Ac – A – Cn


31 Representa los siguientes números irracionales.
a) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{26}$
b) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{40}$

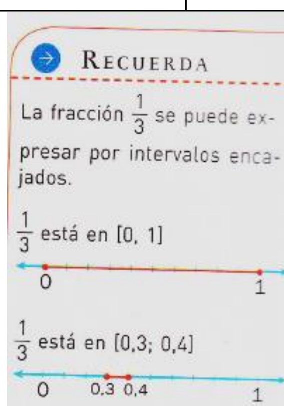
los ejercicios 30 y 32 (segmento 23) se ubican en la forma de conocer proceso desde la Continuidad dado que las actividades que proponen en estos se relacionan en primer lugar con realizar un proceso de encajonamiento a partir de aproximaciones para lograr ubicar en la recta numérica los números irracionales dados en el ítem 30, y por otra parte en el ejercicio 32 el estudiante debe realizar el proceso inverso a construir y representar números irracionales dados por raíces no exactas, lo cual requiere el dominio y la interiorización de las acciones enseñadas por el texto en los segmentos 14 y 21, para poder asociar a cada punto representado en este ejercicio el número irracional que le corresponde.

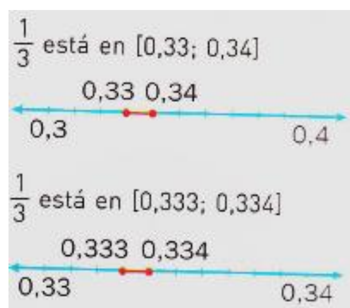
En este mismo sentido la actividad planteada en el ejercicio 31 la situamos en la forma de conocer acción Continuidad ya que solo requiere que el estudiante aplique los pasos propuestos en el segmento 21, para los cuatro números irracionales dados, de tal manera que a partir de ello el estudiante pueda ubicar tales números irracionales en la recta numérica.

- Intervalos y semirrectas

En esta sección se hace a grandes rasgos una descripción y explicación breve de la representación en la recta numérica de los distintos tipos de intervalos; lo cual no consideramos que permita vislumbrar algún elemento relevante para nuestro estudio; sin embargo consideramos pertinente mostrar y analizar el recuadro “RECUERDA” con el que inician esta sección:

Segmento	Página	Clasificación
25	23	Ex – P – Cn





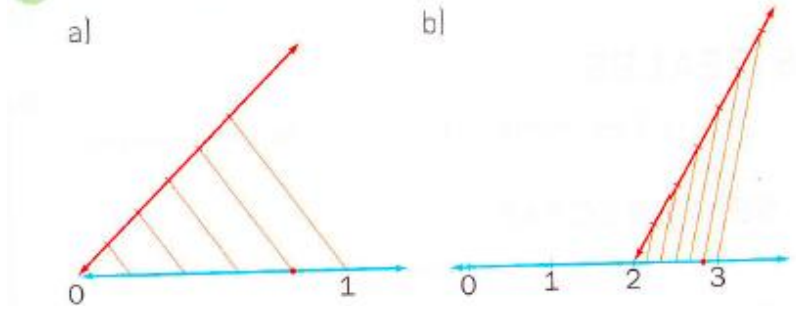
ya que este hace mención de los intervalos encajonados que se pueden construir para expresar una fracción, en este caso $\frac{1}{3}$, lo cual involucra los procesos infinitos desde la forma de conocer proceso.

➢ Actividades-Ejercicios para entrenar

Esta sección del libro se dedica al planteamiento de ejercicios que involucran las temáticas abordadas durante el desarrollo de todo el capítulo. Es de mencionar que en el presente análisis sólo seleccionamos y presentamos las actividades que consideramos implican implícita o explícitamente los procesos infinitos en lo que se relaciona con la construcción de los números reales.

Segmento	Página	Clasificación
26	29	Ac – P - Cn

48 Indica la abscisa de los puntos indicados.



dado que el ejercicio 48 solicita al estudiante hacer el proceso inverso al explicado y ejemplificado en el segmento 4 cuando el texto estaba abordando el cómo representar números racionales en la recta numérica, consideramos que requiere del estudiante una interiorización y compresión del paso a paso para realizar tal representación para posteriormente ser capaz de invertir tal acción, es decir, para poder hacer el proceso contrario que requiere que el estudiante a partir de la ubicación del punto en la recta numérica identifique a qué número racional está representando.

Segmento	Página	Clasificación
27	29	Ac – A – R

56 Escribe en forma fraccionaria los siguientes números decimales.

a) 45,777...

b) 1,2323...

c) 3,4222...

d) 0,53636...

la actividad del segmento 27 la ubicamos en la forma de conocer acción número Racionalidad, debido a que pide al estudiante ejecutar unos pasos ya establecidos y ejemplificados por el libro de texto para poder pasar una expresión decimal a una fraccionaria.

<table>
<tr><td>Segmento</td><td>Página</td><td>Clasificación</td></tr>
<tr><td>28</td><td>29</td><td>Ac – A – Cn</td></tr>
<tr><td colspan="3">**58** Representa estas fracciones utilizando el teorema de Tales.
a) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{6}{5}$
b) $-\frac{3}{10}$ d) $\frac{16}{3}$</td></tr>
</table>

el ejercicio 58 solicita aplicar la acción presentada en el segmento 4 en relación con la manera como se representan los números racionales en la recta numérica, en consecuencia lo ubicamos en la forma de conocer acción Continuidad.

<table>
<tr><td>Segmento</td><td>Página</td><td>Clasificación</td></tr>
<tr><td>29</td><td>29</td><td>Ac – Od – R
Ac – Od – Ir</td></tr>
<tr><td colspan="3">**59** Clasifica estos números en racionales o irracionales. Justifica la respuesta.
a) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{121}$
b) 4,252552555... d) 4,5252...</td></tr>
</table>

el ejercicio 59 propone una actividad que recoge lo declarado en algunas secciones del libro en torno a características fundamentales de los números racionales e irracionales, con las cuales se pueden identificar y diferenciar los mismos, como lo podemos evidenciar en los segmentos 2, 9, 11 y 12; por ello este se relaciona con la forma de conocer objeto declarado por el texto en lo que tiene que ver con la Racionalidad e Irracionalidad de un número real.

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>30</td><td>29</td><td>Ac – A – Cm</td></tr>
<tr><td colspan="3">60 Realiza estas aproximaciones del número 463,2673.
a) Aproxima por defecto a la centésima.
b) Aproxima por exceso a la milésima.
c) Redondea a la parte entera.
d) Redondea a la décima.</td></tr>
</table>

En cuanto al ejercicio 60 propone una actividad que en su solución requiere que el estudiante aplique lo expuesto en los segmentos 16 y 17, en consecuencia esta actividad va dirigida a que el estudiante realice unas acciones ya preestablecidas en el desarrollo de las temáticas abordadas en el capítulo de números reales.

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>31</td><td>29</td><td>Ac – P – Cn
Ac – A – Cn</td></tr>
<tr><td colspan="3">63 Representa cada uno de estos números irracionales en una recta.
a) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{21}$
b) 5,42422... d) 3,01001...</td></tr>
</table>

La actividad 63 la enmarcamos en dos categorías diferentes, por un lado los ejercicios a y c los ubicamos en la forma de conocer acción Continuidad dado que solicitan al estudiante implícitamente hacer uso de las reglas expuestas en el texto para representar un número irracional expresado como una raíz cuadrada no exacta en la recta numérica (segmento 21); y por otra parte los ítems b y d los situamos en la forma de conocer proceso Continuidad debido a que para representar tales números irracionales en la recta se requiere que el estudiante construya procesos de aproximación y encajonamiento.

Segmento	Página	Clasificación
32	29	Ac – P – Cm Ac – Op – Cm
64 Halla el valor de x e y para que se cumpla la relación. $\sqrt{13} < \frac{x}{y} < \sqrt{14}$		

Este ejercicio propuesto por el texto es uno de los que consideramos de gran relevancia, dado que por un lado el estudiante no tiene un modelo en todo el desarrollo de este capítulo similar a esta actividad, por lo cual requiere por una parte haber interiorizado acciones en relación a la Irracionalidad, Racionalidad, Completitud y Continuidad, y por otro lado poder encapsularlas para dar el paso a reflexión y trabajo en torno al concepto de densidad, ya que requiere para dar solución a esta actividad dados los dos número irracionales encontrar por lo menos un irracional que este entre ellos.

Segmento	Página	Clasificación
33	29	Ac – Op - R Ac – Op - Ir
74 ¿Se pueden encontrar dos números enteros cuyo cociente sea 7,41411411...? Justifica la respuesta.		

Al igual que el ejercicio anterior, éste privilegia la forma de conocer objeto desde la Racionalidad e Irracionalidad, dado que requiere se haya encapsulado las acciones y los procesos en relación a los números racionales e irracionales, con el fin de lograr caracterizar la Irracionalidad y Racionalidad de un número como expresión decimal no periódica; expresión decimal finita o infinita periódica o, como la razón entre dos números entero, respectivamente; actividades que hasta el momento no se habían planteado en el desarrollo de este texto.

Segmento	Página	Clasificación
34	30	Ac – A – Cm Ac – P – Cm

81 El resultado del cálculo del área de un círculo de 3 cm de radio es 28,274337 cm².

a) ¿Qué aproximación de π se tomó?

b) ¿Es por exceso o por defecto?

c) ¿Cuál es el error absoluto y relativo cometido?

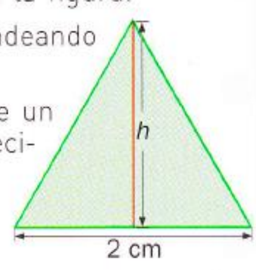
La actividad propuesta por el ejercicio 81, consideramos que hace hincapié en dos formas de conocer, por un lado acción y por otro proceso asociados a Completitud, dado que el ítem a solicita al estudiante realizar de alguna manera el proceso inverso a las acciones preestablecidas para realizar la aproximación de un número irracional; así mismo en relación a acción Completitud los ítems b y c requieren que el estudiante aplique lo establecido en el segmento 16 en relación a las aproximaciones por exceso y defecto de un número irracional y el valor absoluto y relativo cometido en tal aproximación.

Segmento	Página	Clasificación
35	30	Ac – A – Cm Ac – A – Cn

82 En el triángulo equilátero de la figura.

a) Determina la altura redondeando a la milésima.

b) Expresa la altura mediante un número racional de dos decimales.



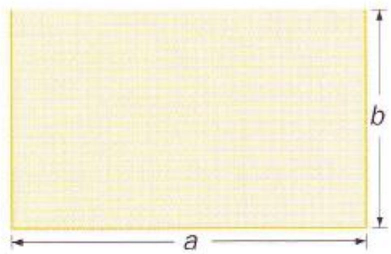
En el ejercicio 82 se espera que el estudiante aplique los métodos expuestos en los segmentos 10 y 17, el primero de ellos para encontrar el número irracional que representa la medida de la altura del triángulo, y el segundo para poder establecer la aproximación por redondeo a las milésimas y a las centésimas de dicha medida.

Segmento	Página	Clasificación
36	30	Ac – A – Cm Ac – A – Cn

83 Los griegos consideraban que las dimensiones perfectas de un rectángulo cumplen la igualdad:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

y a este número le denominaban *número áureo* o *número de oro.*



Utiliza una aproximación a la centésima del número de oro, para calcular las dimensiones del rectángulo áureo de 24 cm^2 de área.

Dado que el ejercicio 83 implica únicamente que el estudiante haga uso de una serie de pasos propuestos por el texto en el segmento 17, lo ubicamos en la forma de conocer acción desde Completitud y Continuidad.

Segmento	Página	Clasificación
37	30	Ac – A – R

85 Halla los valores que faltan en la tabla.

Expresión decimal	0,52		5,2312	
Expresión fraccionaria		$\frac{3}{7}$		$\frac{11}{45}$

La actividad propuesta en el ejercicio 85 requiere que el estudiante realice la acción expuesta en el segmento 6 y 7, en términos de la manera de convertir un número racional expresado como fracción a expresión decimal y viceversa, para poder completar la tabla.

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>38</td><td>30</td><td>Ac – P – Cm</td></tr>
<tr><td colspan="3">86 Aproxima con dos cifras decimales el valor de $\sqrt{17}$ por exceso y por defecto.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>39</td><td>30</td><td>Ac – Od – R
Ac – Od – Ir</td></tr>
<tr><td colspan="3">87 Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.
a) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ c) 3,454554555...
b) 2π d) $-3\sqrt{49}$</td></tr>
</table>

Esta actividad demanda que el estudiante identifique las características de los números racionales e irracionales a partir de su expresión decimal y pueda determinar si una raíz cuadrada representa o no un número irracional, lo cual fue expuesto de forma explícita en los segmentos 2, 9 y 11; es por ello que consideramos que ésta se ubica en la forma de conocer objeto declarado por el texto en términos de la Racionalidad e Irracionalidad de un número real.

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>40</td><td>30</td><td>Ac – A – Cn</td></tr>
<tr><td colspan="3">90 Representa en la recta real el número $\sqrt{7}$</td></tr>
</table>

El ejercicio 90 lo ubicamos en la forma de conocer acción Continuidad, ya que implica que el estudiante aplique el método establecido en los segmentos 14 y 21, para construir y representar en la recta numérica un número irracional expresado como una raíz cuadrada no exacta.

Segmento	Página	Clasificación
41	31	Ac – A – R Ac – Od – R Ac – Od – Ir Ac – Op – Cm

92 A una fiesta de números racionales, asistieron los siguientes.

$$\frac{49}{90} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{11}{20} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{541}{990}$$

Se quisieron colocar por orden de mayor a menor. A uno se le ocurrió que para ello podrían vestirse de números decimales, pero alguno de ellos no había traído el traje.

a) ¿Cuál fue el orden de colocación?

b) Entraron a la fiesta cuatro "colegas" y cada uno de ellos se situó entre dos de los otros. Se vistieron para ello de decimales, uno de exacto, otro de periódico puro, otro de periódico mixto y el último, que se coló, de irracional. ¿Qué posibles "colegas" encajarían con esas condiciones?

La actividad que se plantea en el ejercicio 92 consideramos implica poner en juego varias de las formas de conocer, así para el ítem a requiere que él realice las divisiones para expresar cada racional en su representación decimal, lo cual está en concordancia con lo expuesto y desarrollado por el texto; por otra parte el ítem b demanda que el estudiante caracterice los números racionales e irracionales a través de su expresión decimal, lo que fue declarado en varias de las explicaciones abordadas por el texto; y finalmente este ítem también tiene que ver con la forma de conocer proceso Completitud dado que con la pregunta "¿Qué posibles colegas encajarían con esas condiciones?" promueve que el estudiante tenga un acercamiento a la densidad de los números reales, puesto que requiere ir "probando" y a partir de ello conjeturando dados dos números que otros números irracionales o racionales están entre estos.

Segmento	Página	Clasificación
42	31	Ac – P – Cm

94 Se realizaron tres cálculos distintos del volumen de un cilindro de 2 cm de radio y 3 cm de altura. En cada uno de ellos se utilizó una aproximación distinta de π.

$$V_1 = 37{,}6992 \text{ cm}^3$$
$$V_2 = 37{,}69908 \text{ cm}^3$$
$$V_3 = 37{,}698 \text{ cm}^3$$

¿En cuál de ellos se utilizó la mejor aproximación de π?

La actividad propuesta por el ejercicio 94 implica que el estudiante ya haya interiorizado las acciones que giran en torno a la aproximación de números irracionales y pasar con ello a un proceso de reflexión en relación a que la mejor aproximación será la que al determinar la distancia entre cada encajonamiento tienda a cero.

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Página</th><th>Clasificación</th></tr>
<tr><td>43</td><td>31</td><td>Ac – Op – R
Ac – Op – Ir</td></tr>
<tr><td colspan="3">95 La longitud de una circunferencia se expresa mediante un número irracional. Indica el valor que debe tener el radio de una circunferencia para que la longitud de esta circunferencia sea un número racional. Justifica tu respuesta.</td></tr>
</table>

Finalmente el ejercicio 95 se ubica en la forma de conocer objeto desde la Racionalidad e Irracionalidad dado que la manera en la que está planteado permite que el estudiante infiera o mejor deduzca que no todo número que se puede escribir como una razón es un número racional, sino que también debe cumplir que tales números deben pertenecer al conjunto de los enteros; en consecuencia podría dar solución a tal actividad.

4.2.1 Tablas de Clasificación de Segmentos y de Resultados

A continuación se muestra la tabla de clasificación de los segmentos del libro de texto que se han analizado, los cuales se han caracterizado por la forma de conocer de la teoría APOE que estimulan, por el aspecto del Número Real que dan a conocer y por la sección del libro en donde se encuentran ubicados:

Segmento	Clasificación	Sección del libro	
1	Ej – Od – R	Números racionales	Números racionales
2	Ex – Od – R		
3	Ej – A – Cn		
4	Ex – A – Cn	Representación de números racionales en la recta numérica	
	Ej – A – Cn		
5	Ac – A – Cn		
6	Ex – Od – R	Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional	
	Ej – Od – R		
	Ex – A – R		
	Ej – A – R		
7	Ej – A – R		
	Ex – A – R		
8	Ac – A – R		
9	Ex – Od - Ir	Números irracionales	Números irracionales
10	Ej – Od – R		
	Ej – Od – Ir		
11	Ex – Od – Ir		
12	Ej – Od – R		
	Ej – Od – Ir		
13	Ac – Od – R		
	Ac – Od – Ir		
14	Ej – A – Cn	Números irracionales en la recta numérica	
	Ex – A – Cn		
15	Ej - A – Cn		
16	Ex – Od - Ir	Aproximación de números irracionales	

17	Ej – A - Cm		
	Ex – A - Cm		
18	Ac – A - Cm		
19	Ac – A – Cm	Aproximaciones y errores	
20	Ej – P – Cn Ex – P – Cm	El conjunto de los números reales	Números reales
21	Ej – A – Cn		
22	Ex – Od – Cn		
23	Ac – P – Cn		
24	Ac – A – Cn		
25	Ex – P – Cn	Intervalos y semirrectas	
26	Ac – P – Cn	Actividades-ejercicios para entrenar	Actividades-ejercicios para entrenar
27	Ac – A – R		
28	Ac – A – Cn		
29	Ac – Od – R		
	Ac –Od – Ir		
30	Ac – A – Cm		
31	Ac – P – Cn		
	Ac – A – Cn		
32	Ac – P – Cm		
	Ac – Op – Cm		
33	Ac – Op – R		
	Ac – Op – Ir		
34	Ac – A – Cm		
	Ac – P – Cm		
35	Ac – A – Cm		
	Ac – A – Cn		
36	Ac – A – Cm		
	Ac – A – Cn		
37	Ac – A – R		
38	Ac – P – Cm		
39	Ac – Od – R		
	Ac – Od – Ir		
40	Ac – A – Cn		

41	Ac – A – R		
	Ac – Od – R		
	Ac – Od – Ir		
	Ac – Op – Cm		
42	Ac – P – Cm		
43	Ac – Op – R		
	Ac – Op – Ir		

Tabla de Resultados

Teoría APOE / Números reales		Acción	Proceso	Objeto Declarado	Objeto Promovido	Frecuencia	Total elementos de asociados a los reales	%
Conmensurabilidad o Inconmensurabilidad	**Ex**						**0**	**0%**
	Ej							
	Ac							
Racionalidad	**Ex**	2		2		**4**	**20**	**30,3%**
	Ej	2		4		**6**		
	Ac	4		4	2	**10**		
Irracionalidad	**Ex**			3		**3**	**11**	**16,67%**
	Ej			2		**2**		
	Ac			4	2	**6**		
Completitud	**Ex**	1	1			**2**	**15**	**22,73%**
	Ej	1				**1**		
	Ac	6	4		2	**12**		
Continuidad	**Ex**	2	1	1		**4**	**20**	**30,3%**
	Ej	5	1			**6**		
	Ac	7	3			**10**		
Frecuencia	**Ex**	5	2	6		**13**	**66**	**100%**
	Ej	8	1	6		**15**		
	Ac	17	7	8	6	**38**		
Total elementos asociados a la teoría APOE		**30**	**10**	**20**	**6**	**66**		
%		**45,45%**	**15,15%**	**30,3%**	**9,1%**	**100%**		

4.2.2. Análisis sobre los aspectos relacionados con la construcción de los Números reales

En relación a la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad como se evidencia en la tabla, en el desarrollo del capítulo analizado en ninguno de las explicaciones, ejemplos o actividades se ve reflejado que aborden, trabajen o promuevan procesos de medición, es decir, el determinar cuántas veces está una magnitud en otra, el identificar una unidad patrón para medir una determinada magnitud y otras características propias de la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad que se pueden identificar a través de la construcción de los números reales.

Por otra parte, las categorías que se asocian con la Racionalidad obtienen un 30,3% de atención por parte del texto analizado, en el desarrollo del capítulo que tiene que ver con la construcción de los números reales, donde se considera que existe coherencia frente al número de explicaciones, de ejemplos y actividades que plantea el texto para abordar este concepto, ya que entre ejemplos y explicaciones se enmarcan 10 segmento, de los 20 que se asocian a esta categoría. Así que tales explicaciones, ejemplos y actividades que el libro plantea tiene en cuenta elementos tales como: caracterización de los números racionales a partir de su expresión decimal y fraccionaria; relación entre los números decimales periódicos con una fracción y viceversa; caracterización de la Racionalidad de un número, vista como la razón entre dos números enteros o como una expresión decimal finita ó infinita periódica.

En cuanto a la Irracionalidad obtiene un 16,67 % de especificidad en el desarrollo del capítulo analizado, con 11 segmentos que dan cuenta de esto, en los cuales 3 se dedican a las explicaciones, 2 a ejemplos y 6 se relacionan con actividades propuestas para el estudiante. Como se puede evidenciar el libro sigue manteniendo un orden y linealidad en su desarrollo de las temáticas, es decir, inicia con un ejemplo o explicación donde posteriormente declara de manera explícita las características de los números irracionales, de tal manera que el estudiante posteriormente pueda con tal información: determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número irracional; caracterizar números irracionales a partir de su expresión decimal.

De acuerdo a la tabla las categorías que se enmarcan en la Completitud alcanzan el segundo porcentaje más alto con un 22,73 %, del cual dan cuenta los 15 segmentos que se asocian a elementos relacionados con la Completitud tales como: manera de realizar aproximaciones y encajonamientos de números irracionales por exceso, defecto y por redondeo, acercamiento al concepto de densidad de los números reales; a través de 2 explicaciones, 1 ejemplo y 12 actividades.

Finalmente en cuanto a la Continuidad, con 20 segmentos que la involucran, entre los cuales 4 se relacionan con explicaciones, 6 con ejemplos y 10 con actividades; alcanza un 30,3% sobre los cinco elementos que consideramos relevantes en la construcción de los números reales en nuestro análisis. Segmentos que dan cuenta de la ubicación de puntos en la recta numérica y la construcción de segmentos que tengan por longitud en su mayoría un número irracional.

Dado que el porcentaje de Racionalidad y Continuidad son iguales; y los demás son bajos se considera que sobre lo que mayor énfasis hace el libro en relación a la construcción de los números reales es lo que tiene que ver con la caracterización del conjunto de los números racionales y la ubicación en la recta numérica de puntos asociados al conjunto de los números reales.

4.2.3 Análisis sobre las formas de conocer de la teoría APOE presentes en el libro de texto

En cuanto a las formas de conocer analizadas en nuestro trabajo desde la teoría APOE (acción, proceso, objeto declarado y objeto promovido), en las categorías que se relacionan con Acción se puede evidenciar que obtienen un 45,45 % de presencia en el desarrollo del capítulo analizado, es decir, en 30 de los 66 segmentos analizados se logra percibir de manera explícita o implícita elementos que se relacionan con esta forma de conocer, ya que aborda entre otras cosas: la forma de pasar de una expresión fraccionaria a decimal y viceversa, la manera en la que se deben realizar aproximaciones de números irracionales por exceso, defecto y por redondeo; el modo de ubicación de puntos en la recta numérica y la construcción de segmentos que tengan por longitud determinado número irracional. En consecuencia se puede afirmar que a través de las explicaciones, ejemplos y actividades planteadas por el libro de texto, éste hace hincapié en el método o paso a paso que espera que el estudiante realice para dar solución a los ejercicios de aplicación que al final de cada sección propone.

En este sentido esta forma de conocer es la que mayor porcentaje tiene dado que de acuerdo al orden y la linealidad establecida por el libro de texto se realizan primero explicaciones, ejemplos y posteriormente las actividades, en donde casi en su totalidad las explicaciones y los ejemplos limitan el concepto tratado, dado que estas enseñan al estudiante una serie de indicaciones detalladas de los pasos a dar o de los algoritmos que deben seguir o repetir para transformar un objeto; lo cual puede deberse a que se considere que las acciones son el principio fundamental del concepto.

En cuanto a la forma de conocer Proceso alcanza un 15,15 %, el cual es un porcentaje bajo en relación al anterior pero no despreciable, dado que se puede evidenciar que en el desarrollo del capítulo analizado en 10 de los segmentos se aborda (con 2 explicaciones y 1 ejemplo) y se promueve e incita (con 7 actividades) que el estudiante reflexione sobre las acciones que realiza y de esta maneras pueda interiorizarlas; por ejemplo se espera que el estudiante logre a través de la interiorización de los procesos de aproximación y encajonamiento (acciones) determinar o reflexionar acerca de las distancias entre los encajonamientos e identificar su cercanía al cero; es decir, ya no solo se propende por un conocimiento simplemente algorítmico.

Por otro lado, en relación a la forma de conocer Objeto declarado es la segunda categoría sobre la que mayor énfasis hace el libro en todo el desarrollo del capítulo, de acuerdo al porcentaje que recibe del 30,3 %, dado que el libro de acuerdo a su orden inicia con un ejemplo o explicación donde posteriormente declara de manera explícita las características de los números racionales e irracionales, de tal manera que el estudiante posteriormente pueda con tal información: determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número racional o irracional; identificar números racionales e irracionales a partir de su expresión decimal; relación que existe entre los números decimales periódicos con una fracción y viceversa; explicaciones o ejemplos que aluden a procedimientos de encajonamiento o el cómo se ubican los números en la recta numérica.

En esta categoría se sigue manteniendo el orden del libro, es así que de los 20 segmentos asociados a ésta, 6 son explicaciones, otros 6 se relacionan con ejemplo que declaran de manera explícita el objeto abordado, y 8 son actividades que requieren para su solución la aplicación de tales declaraciones que muestran y abordan los conceptos involucrados en la construcción de los números reales de manera general.

En cuanto a la categoría Objeto Promovido es la que menor porcentaje obtiene en relación a las otras formas de conocer analizadas, dado que logra un 9,1 % de presencia en el capítulo analizado, lo cual responde a las 6 actividades planteadas que promueven en alguna medida que el estudiante reflexione sobre las acciones y procesos para posteriormente poderlos reconstruir y tratar el concepto en general; lo cual se vislumbra con actividades que solicitan al estudiante poner en juego: la caracterización de la Racionalidad e Irracionalidad de un número, vista como la razón entre dos números enteros o como una expresión decimal finita o infinita periódica, y como expresión decimal no periódica, respectivamente, para lograr responder a un problema; acercamiento al concepto de densidad desde el conjunto de los números reales (lo cual implica que el estudiante haya encapsulado las acciones y procesos relacionados con Completitud).

4.2.4 Sobre la Linealidad y Coherencia del Libro de Texto

El siguiente análisis se sustenta en la Tabla de Clasificación de Segmentos, la cual recoge a manera general la síntesis de los segmentos analizados, la sección del libro a la que pertenecen y su correspondiente clasificación.

En las secciones que hacen referencia al Número Racional (i. números racionales, ii. representación de números racionales en la recta numérica y iii. expresiones fraccionaria y decimal de un número racional), se puede evidenciar que fueron considerados los aspectos del número real en relación a la racionalidad, como era lo de esperarse, y a la continuidad lo cual consideramos coherente con el objeto de las secciones de acuerdo a su título. En cuanto a las formas de conocer determinadas por la teoría APOE es de notar que en el desarrollo de estas tres secciones solo se pueden observar las acciones y los objetos declarados, es de mencionar que las acciones son en las que mayor énfasis se hace. Finalmente en estas secciones se puede evidenciar una linealidad y coherencia en relación a dos aspecto; el primero tiene que ver con la manera de iniciar y desarrollar cada una de las secciones, dado que siempre dan inicio con una serie de explicaciones o ejemplos en este caso relacionados con la racionalidad y la continuidad, para posteriormente plantear la actividad enmarcada en estos mismos aspectos. La segunda mantiene una estrecha relación con la anterior, ya que a través de algunos de esos ejemplos y explicaciones declaran desde el inicio el objeto (racionalidad y continuidad), luego con otros de éstos plantean el método que esperan el estudiante siga para obtener un resultado inmediato y finalmente plantean actividades donde ellos puedan aplicar tal método; aunque es de mencionar que en estas secciones no tienen en cuenta actividades específicas que hagan alusión al objeto declarado racionalidad, es decir, priorizan en los ejercicios que ponen en juego las acciones para racionalidad y continuidad.

En cuanto a las secciones del libro de texto que corresponden a los números irracionales (iv. números irracionales, v. números irracionales en la recta numérica, vi. aproximación de números irracionales, vii. Valor absoluto y viii. aproximaciones y errores), nuevamente se privilegian los objetos declarados y las acciones desde las explicaciones, ejemplos y actividades que se presentan; sin embargo aquí se amplían los componentes de los números reales, es decir, hacen alusión no solo a la continuidad y racionalidad, sino que también se centran en la irracionalidad (como era de esperarse) y la Completitud desde las formas de conocer señaladas. Es de mencionar que contrario a las secciones anteriores en estas se hace mayor énfasis en el objeto declarado que en las acciones, claro sin descuidar estas últimas. Así mismo estas secciones siguen preservando la linealidad y coherencia mencionadas en el párrafo anterior, ya que continuando declarando el objeto a través de explicaciones o ejemplos, posteriormente indicando métodos para realizar una tarea específica sobre estos para finalmente plantear una serie de ejercicios que aplican lo visto. Es de aclarar que de la sección *valor absoluto* no se tomó ningún segmento dado que al analizarla no evidenciamos insumos para el objeto de nuestro análisis.

Por otro lado, en las secciones que se centran específicamente en los números reales (ix. Conjunto de los números reales, x. el orden en el conjunto de los números reales, xi. intervalos y semirrectas), se logra vislumbrar una gran presencia de los procesos, forma de conocer que hasta el momento no había sido promovida por el texto, los cuales vinculan con la continuidad y Completitud únicos componentes del número real que ponen de manifiesto en estas secciones. Contrario a los ya descrito en anteriores secciones del libro, en estas no se inicia declarando el objeto sino promoviendo el proceso desde los ejemplos y explicaciones que brinda el libro tanto en la Completitud como en la continuidad lo cual es coherente con lo que solicita en las actividades propuestas, sin embargo consideramos que la linealidad de alguna manera en estas secciones si se rompe.

Finalmente en la sección de actividades (ejercicios para entrenar), se enfoca, en mayor medida, al conocimiento de la Continuidad y Completitud, sin descuidar la racionalidad e irracionalidad, lo cual mantiene una coherencia con el desarrollo de las demás secciones analizadas. En relación a la forma de conocer que más se privilegia como era de esperarse es la acción, sin embargo el objeto declarado y promovido tiene casi igual relevancia en las actividades propuestas, lo cual no es incoherente dado solo en las actividades es donde esta última forma de conocer se puede evidenciar. Se logra evidenciar también una importante presencia de la forma de conocer proceso asociada a la Continuidad y Completitud lo cual sugiere una coherencia con lo analizado en el párrafo anterior.

4.3. Análisis comparativo de los textos

Aspectos del Número Real / Libro de texto	ALFA 8	CÓDIGO 8
CONMENSURABILIDAD E INCONMENSURABILIDAD	En la unidad analizada, los aspectos relacionados con la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de magnitudes estuvieron, en principio, ligados a los objetos declarados ya que en los segmentos iniciales se definieron las magnitudes conmensurables e inconmensurables. En segmentos posteriores, los segmentos relacionados con este aspecto del número real aparte de estar relacionado con los objetos, también estuvo en relación con la racionalidad e irracionalidad de los números reales en cuanto a la relación entre la conmensurabilidad y la racionalidad de un número real.	Durante el desarrollo del capítulo de los números reales en ninguna de las secciones el libro de texto hizo alusión o abordó cuestiones relacionadas con: Determinar cuántas veces está una magnitud en otra, procesos de medición, determinar si existe una unidad patrón para medir una determinada magnitud; es decir, sobre características propias de la inconmensurabilidad y conmensurabilidad.
RACIONALIDAD	Este aspecto del número real fue el segundo en relevancia en los segmentos analizados ya que el 20,87% de los segmentos analizados estuvo dedicado a su conocimiento. De estos segmentos, la gran mayoría estuvo dedicada al desarrollo de actividades las cuales estimulaban el conocimiento de la racionalidad mediante los objetos y las acciones mientras que los procesos no se hicieron presentes en ningún momento. Los segmentos que estuvieron dedicados a este aspectos del número real, estuvieron enfocados a la relación de la racionalidad con la expresión decimal de un número los cuales fueron aspectos que el libro declaró luego de ejemplos y explicaciones previas, más no se notó relación entre la racionalidad de un número con el tipo de magnitud que podía representar.	El análisis en relación a este aspecto de la construcción de los números reales, arroja que el libro de texto en su desarrollo temático le da gran relevancia, dado que en el 30% del total de los segmentos analizados la racionalidad esta presente; así mismo en cuanto a las formas de conocer en las que hace mayor hincapié desde la racionalidad están las acciones y el objeto declarado; esto quiere decir en primer lugar que el libro plantea de manera explícita el método que espera el estudiante realice para dar solución a los ejercicios de aplicación que al final de cada sección propone; y en segundo lugar que el estudiante se apropie del concepto de racionalidad sin que en varios casos pueda dar cuenta de las características de la racionalidad, desde su propia reflexión e interiorización de las acciones, lo cual se debe a que el libro lo declara, dado que el libro de acuerdo a su orden inicia con un ejemplo o explicación

		donde posteriormente declara de manera explícita las características de los números racionales.
IRRACIONALIDAD	La irracionalidad fue introducida en el texto a través de su relación con las magnitudes inconmensurables ya que en un inicio se estableció que las magnitudes no conmensurables estaban en relación con este tipo de números. En una etapa posterior, la irracionalidad fue determinada como lo no racional y relacionada con la imposibilidad de extraer raíces cuadradas exactas y gran trabajo tanto de determinación de decimales de raíces cuadradas como de construcción de irracionales relacionados con este tipo de raíces fue expuesto en los segmentos que en cuestión de irracionalidad fueron los de mayor extensión con un 30,76%, aunque algunos de los segmentos abrieron la posibilidad de la existencia de números irracionales que no estuvieran ligados a la extracción de raíces como el caso de π y φ los cuales fueron presentados como objetos declarados.	A través de los análisis se puede observar que el libro de texto en el aspecto que tiene que ver con la irracionalidad se centra en su mayoría en la forma de conocer objeto declarado, dado que éste de acuerdo a su orden inicia con un ejemplo o explicación donde posteriormente declara de manera explícita las características de los números irracionales, de tal manera que el estudiante posteriormente pueda con tal información determinar si la raíz cuadrada de un número corresponde a un número irracional, o caracterizar números irracionales a partir de su expresión decimal. Es de mencionar que este aspecto con un 16,67% es el segundo que tiene menor incidencia en el desarrollo del capítulo analizado.
COMPLETITUD	La Completitud es expuesta en el libro a partir de la posibilidad de aproximación a un número real, ya sea racional o irracional, y es en este aspecto en donde el libro enfoca la forma de conocer a partir de los procesos ya que los segmentos dedicados a este aspecto del número real están enfocados a la explicación, a ejemplificar y al desarrollo de actividades relacionadas con la construcción de encajonamientos a números reales. Es de notar que aparte del conocimiento a partir de los procesos, la otra forma de conocer que es estimulada es la de objeto y, en especial, se tiene que los dos objetos declarados en relación a la Completitud están dirigidos a la determinación de la relación entre los números reales y la recta real.	Con un 22,73 % de presencia sobre los elementos analizados este aspecto de los números reales ocupa el segundo lugar con mayor aparición en el desarrollo temático que privilegia el libro; así mismo el texto privilegia en lo que tiene que ver con la Completitud las formas de conocer acciones y proceso, es decir, se centra por una parte en presentarle al estudiante el método a seguir para realizar aproximaciones de racionales e irracionales por encajonamiento, aproximaciones de raíces cuadradas por defecto y por exceso; así mismo en reflexionar y determinar las distancias entre los encajonamientos e identificar su cercanía al cero. De acuerdo a lo anterior se puede decir que en este aspecto a diferencia de los ya mencionados, el libro de texto por primera vez promueve los procesos y los objetos, es decir, ya no declara el objeto como en las demás categorías.

CONTINUIDAD	Al observar la tabla de resultados se evidencia que la continuidad es el único aspecto del número real que se dio a conocer mediante todas las formas de conocer analizadas en nuestro estudio teniendo un énfasis especial en las acciones y los procesos. Los segmentos que estuvieron relacionados con la Continuidad estuvieron dirigidos a la ubicación de puntos en la recta y de encajonamientos de puntos y, al igual que en la Completitud, los segmentos que estuvieron dirigidos al conocimiento mediante el objeto declarado estuvieron dirigidos a la determinación de la relación entre los puntos de la recta y los números reales.	La continuidad al igual que la racionalidad, son los aspectos que más privilegia el libro de texto en su desarrollo temático, lo cual se evidencia con un 30.3% sobre el total de los segmentos analizados. Así mismo en este aspecto de la construcción de los números reales, el texto se centra en las formas de conocer acciones y procesos, es decir propone en su desarrollo temático y planteamiento de actividades la ubicación de puntos en la recta, construcción de segmentos cuya longitud sea un número determinado, ubicar números en la recta numérica a partir de la construcción de encajonamiento o aproximación.

5. Capitulo IV. Conclusiones

Las conclusiones que se presentan a continuación son el resultado de los análisis de los libros de texto y exponen los aspectos que consideramos más relevantes en cuanto a los aspectos que hemos estudiado:

1. Entre los aspectos de la construcción de los números reales que hemos estudiado, encontramos que el menos estimulado es la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad ya que en el texto Código 8° no es trabajado y, aunque en el texto Nuevo Alfa 8° si se encuentran segmentos relacionados con este aspecto, no se evidencia una relación fuerte con la racionalidad e irracionalidad lo cual deja de lado el contexto en que los números irracionales surgieron y no considera el impacto que los procesos infinitos pueden tener en este sentido.

2. La mayor parte de las veces, los dos libros de texto analizados inician las secciones de presentación de contenidos con objetos declarados, ya sea por medio de explicaciones o ejemplos y en ocasiones les siguen acciones o procesos relacionados con el objeto que ha sido declarado.

3. El énfasis en las formas de conocer de los dos libros de texto coincide en el hecho de centrarse en los objetos declarados, ya que en el caso del texto Nuevo Alfa 8° esta forma de conocer es la de mayor presencia y en el Código 8° es la segunda luego de las acciones. La diferencia en los textos se encuentra en que el texto Nuevo Alfa 8° enfatiza en la promoción de los objetos mientras que el texto Código 8° hace grande esfuerzos en el conocimiento por medio de acciones.

4. En este mismo sentido, en el texto Nuevo Alfa 8° el único aspecto del número real en el que intervinieron todas las formas de conocer fue la continuidad lo cual no ocurrió en el texto Código 8° en donde ningún aspecto involucró todas las formas de conocer.

5. En los dos libros de texto los aspectos en donde se evidenció el proceso como forma de conocer fueron la Completitud y la Continuidad, más los dos textos difieren en la manera en que fueron presentados estos aspectos en explicaciones, ejemplos y actividades. En cuanto a la Completitud, el Nuevo Alfa 8° distribuyó los segmentos de manera equitativa en explicaciones, ejemplos y actividades mientras que en el código 8° el énfasis se hizo en las actividades. En la Continuidad, el texto Nuevo Alfa 8° determina mayor cantidad de segmentos a las explicaciones y los ejemplos mientras que el Código 8° de nuevo enfatiza en las actividades.

6. En cuanto a los procesos infinitos, los dos textos concuerdan en ponerlos en juego en procesos de aproximación relacionados con la Completitud y la Continuidad y teniendo en cuenta que estos dos aspectos de los números reales están presentes a lo largo de las secciones analizadas de los libros de texto, se puede decir que los procesos infinitos están vinculados en la construcción de los números reales que hacen los libros de texto.

7. Dado lo anterior, consideramos que los procesos infinitos se presentan como alternativa para la construcción de los números reales en los libros de texto lo cual se puede hacer si se parte de ellos para:

    - Conceptualización de las magnitudes inconmensurables y, a partir de estas, generar una idea más amplia de número irracional.
    - Aproximar números irracionales utilizando otro tipo de métodos como los expuestos en el marco teórico.

- Generar mayor conciencia sobre la Completitud y la Continuidad de los números reales, ya que en los libros de textos estos dos aspectos aparecen subordinados a la conceptualización de la racionalidad e irracionalidad.

8. En cuanto a la metodología que hemos utilizado para el análisis de los libros de texto, podemos decir que se puede adoptar a textos de matemáticas de otro nivel y para analizar otros concepto matemáticos, ya que las formas de conocer de la teoría APOE pueden servir para categorizar cualquier concepto que sea presentado por un libro de texto y además, en la gran mayoría de textos de matemáticas (por no decir que en su totalidad), los conceptos son presentados por medio de explicaciones, ejemplos y actividades. Lo anterior muestra la potencialidad del estudio que hemos realizado y esperamos que esta metodología sea adoptada para análisis posteriores.

9. Consideramos que a través de nuestro análisis de contenido en los dos libros logramos evidenciar las formas de conocer acción, proceso y objeto de la teoría APOE, es decir, que estas son promovidas en mayor o menor medida en el desarrollo de los textos bien sea en sus explicaciones, ejemplos o actividades planteadas. Un elemento importante es que en casi todas las investigaciones que se han realizado haciendo uso de esta teoría se encuentra mayores evidencias de las formas de conocer acción y proceso, lo cual pareciera contradictorio con los resultados que en algunos de nuestros análisis damos, dado que en nuestro trabajo encontramos que los libros analizados se centran o promueven en mayor medida las acciones y objetos; consideramos que los resultados que hemos obtenido son importantes y que se deben al objeto de estudio tomado, pues en las primeras investigaciones mencionadas siempre se analizan las actuaciones del individuo, en las cuales se puede vislumbrar con mayor claridad el tránsito entre acciones y procesos dado que se analiza lo que realiza el estudiante a través de una situación dada, en cambio cuando el análisis recae en el libro de texto, se hace mucho más difícil poder evidenciar este tránsito entre las formas

de conocer porque es propio o se percibe con mayor claridad en las actuaciones de los individuo. Es así que los objetos se vuelven más visibles al analizar los libros de texto ya que estos al declarar, concluir o explicitar las características propias de los conceptos que se abordan, reducen estos objetos conceptuales de declaraciones o definiciones de los mismos.

10. Una reflexión que nos genera los resultados de nuestro trabajo y que consideramos contribuye en la formulación de futuros trabajos de este corte, es poder hacer visible la importancia de la descomposición genética en el diseño de textos escolares lo que, vinculado a nuestro propósito de estudio que eran los procesos infinitos en la construcción de los números reales, implicaría hacer más consiente al docente que tal construcción no debe iniciarse en 8 grado, sino que debe partir en grados menores y que se debe ir construyendo en los siguientes niveles de la educación básica secundaria y media, es decir que la construcción de los números reales requiere de tiempos y no se genera en un grado, ni con una unidad del libro de texto que es lo que quizás está sucediendo en este momento al pedírsele a un estudiante que construya su conocimiento en un sólo periodo del año escolar o con el desarrollo de una única unidad de su texto guía; es por ello que, para reducir tiempos, el libro recae en la presentación y declaración del objeto matemático y no en su construcción.

Bibliografía

Abela, J. (2002). Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education II (pp. 1–32). Providence: American Mathematical Society

Alvarenga, K. B. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa, 6(3), 199-219.

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). Cálculo Diferencial e integral. España: Editorial Síntesis.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 29(2), 191.

Boyer, C. B. (1986). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Camacho, C., Díaz, J., Mosquera, A., y Salamanca, Y. (2013). El Concepto de Límite Como Una Aproximación Óptima Mediante la Teoría APOE. Revista Científica, (EXTRA), 349-353.

Castañeda, A., Rosas A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto. Premisa, 12(44), pp. 3-18.

Dubinsky, E. (1992). La Abstracción Reflexiva en el Pensamiento Matemático Avanzado. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (C. Delgado, Trad., págs. 95 - 123). Londres: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática. 8(3), pp. 24-41.

Euclides. (1994). Elementos. Madrid: Gredos.

García, G., Serrano, C. y Díaz, H. (1999). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del Cálculo. Colombia, Tecne Episteme y Didaxis. (5), 51-58.

González, M. (2007). Réplica de la ponencia "El Papel de la Didáctica en la Enseñanza del Cálculo: Evolución, Estado Actual y retos futuros" de la profesora Mar Moreno. Investigación en Educación Matemática, 405 - 414.

González Castiblanco, F. P. (2011). Una Propuesta de Aula para la Enseñanza del Número Real por medio de una secuencia de actividades en la que se construye el Número de Oro a partir del uso de algunas representaciones del Número Real. Bogotá D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Cáldas.

González Urbaneja, P. M. (Diciembre de 2008). La Solución de Eudoxo a la Crisis de los Inconmensurables. Sigma, 101 - 129.

González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Revista enseñanza de las ciencias, 22(3), 389-408.

González, J., Morales, A., y Sigarreta, J. (2013). Concepciones sobre el infinito. Revista digital Matemática, Educación e Internet.

Haro Delicado, M. J., y Redondo Buitrago, A. (2005). Fracciones continuas, números metálicos y Sucesiones Generalizadas de Fibonacci. SUMA, 53 - 63.

López, A. (2011). Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socio epistemológico. Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas. Tesis.

Meel, D. (2003). Modelos y teorias de la comprensiòn matemática: Comparaciòn de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evoluciòn de la comprension matemática y la teoria APOE. Revista Latinoamerica de Investigaciòn en Matemática Educativa. 6 (3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (s.f.). Recuperado el 5 de octubre de 2014, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-80860.html

Ministerio de Educación Nacional (s.f.). Recuperado el 5 de octubre de 2014, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87440.html

(MEN, 2014a, 6 de octubre) http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-80860.html

(MEN, 2014b, 6 de octubre) http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87440.html

Miralles de l. Llobet, J., y Deulofeu Piquet, J. (Abril de 2005). Historia y Enseñanza de las Matemáticas. Aproximaciones de las Raíces Cuadradas. Educación Matemática, 87 - 106.

Montesinos Sirera, J. L. (2000). Arquímedes y la Medida del Círculo. Ciencia y Culturaen la Grecia Antigua, Clásica y Helenística (págs. 339 - 352). Canarias.

Pakhrou, T. (2013). Análisis de una Variable Real I. Alicánte: Univrsidad de Alicánte.

Raigada, J. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. Sociolinguistic Studies, 3(1), 1-42.

Ramírez, J. (2000). Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemáticas y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden. Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto de transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(1), 89– 112.

Solorza, S., y Rubí, G. (Abril - Junio de 2007). Revista de Ciencias de la Unam. Obtenido de Las Raíces Cuadradas en la ANtigua Babilonia y Hoy: http://www.revistaciencias.unam.mx/index.php?option=com_contentyview=article yid=295%3Alas-raices-cuadradas-en-la-antigua-babilonia-y-hoyycatid=49yItemid=48