

# Diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas de matemáticas

ANTONIO CODINA, MARIA CONSUELO CAÑADAS Y ENRIQUE CASTRO

Universidad de Almería, Universidad de Granada, Universidad de Granada

acodina@ual.es, mconsu@ugr.es, ecastro@ugr.es

Citar como:

Codina, A., Cañadas, M.C. y Castro, E. (2010). Diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas. En *I Encontro Internacional Tic e Educação. Inovação curricular com TIC*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pp-7.

**RESUMEN:** Proponemos una metodología para el diseño de e-actividades, la cual incluye un diseño inicial, puesta en práctica y revisión de la e-actividad hasta el logro de los objetivos propuestos. En este trabajo utilizamos un problema de optimización para diseñar una e-actividad que pretende trabajar diferentes fases en la resolución de problemas.

**Palabras clave:** Applet, diseño de tareas, e-actividad, metodología, resolución de problemas

**ABSTRACT:** We propose a methodology for designing e-activities, which includes a initial design, practice and review of the e-activity until the achievement of the proposed objectives. In this work, we use an optimization problem to design a e-activity which pretends to work through different phases in problem solving.

**Keywords:** Applet, e-activity, methodology, problem solving, task design

En la red se encuentran numerosos y variados recursos electrónicos para el estudio y aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, se observan propuestas didácticas orientadas al aprendizaje de las matemáticas que incluyen una o varias actividades en formato de páginas web interactivas que hacen uso de applets u otros módulos interactivos para que el estudiante interactúe con el ordenador, facilitándoles el desarrollo de la actividad y contribuyendo al consiguiente aprendizaje. Denominamos a las actividades propuestas por esta vía *e-actividades*. La variedad de e-actividades incluye desde las recreativas y/o

divulgativas como las de DivulgaMat (Real Sociedad Matemática Española, 2010), las específicas a programas como Cabri o Geogebra, las integradas dentro de propuestas curriculares como el Proyecto Descartes (Ministerio de Educación, 2010), *Illuminations* (NCTM, 2010) o la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (Utah State University, 2010), entre otras muchas.

Gran parte o la mayoría de estas e-actividades se han diseñado desde una perspectiva de innovación curricular, pero una mínima parte de ellas han surgido de un proceso de investigación que ponga de manifiesto sus bondades y debilidades, con vistas a su mejora. Es necesario que estas propuestas didácticas sean diseñadas y experimentadas en el aula con el fin de refinarlas mediante un rediseño que pule sus deficiencias. Consideramos que la elaboración de una e-actividad debe partir de un estudio previo que marque la dirección de los objetivos que pretendemos abarcar. Para todo ello es necesario un protocolo o proceso de actuación. En este trabajo mostramos una metodología para la elaboración y diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas matemáticos. Partimos de un marco teórico y describimos los diferentes diseños que realizamos y la puesta en práctica de cada uno de ellos, lo cual permitió ir refinando el diseño para producir una e-actividad acorde con el objetivo planteado.

## MARCO TEÓRICO

Consideramos que una e-actividad orientada a la resolución de problemas debe contemplar en su diseño los distintos aspectos que los investigadores han puesto de manifiesto en la resolución de problemas. Bajo esta premisa, uno de los aspectos que contemplamos son las fases de resolución.

Las fases de la resolución de problemas han sido tratadas por diferentes autores como Pólya (1945), Schoenfeld (1985) o Artz y Armour-Thomas (1992). Salvando las diferencias en la terminología, podemos concluir que no existe una única clasificación de fases para la resolución de problemas (Codina, 2000). Con base en los trabajos mencionados y teniendo en cuenta que cada fase es importante y que un buen resolutor no debería obviar ninguna, consideramos las siguientes fases<sup>1</sup>.

*Fase 1. Lectura.* El sujeto realiza la lectura del enunciado e interioriza las condiciones y objetivo del problema.

*Fase 2. Análisis.* El sujeto intenta “comprender el problema, seleccionar una perspectiva adecuada para abordar su resolución, simplificar o reformular el problema atendiendo a esta perspectiva e introducir las consideraciones o mecanismos que el sujeto crea pertinentes cuando no existe una aparente forma de proceder” (Schoenfeld, 1985, p. 298). El sujeto suele considerar “conocimiento específico que es relevante para el problema” (Artz y Armour-Thomas, 1992, p.172).

*Fase 3: Exploración.* El sujeto suele utilizar las estrategias e, idealmente, no tiene un procedimiento estructurado de acción, haciendo necesario que el resolutor ejerza mayor control mediante evaluaciones locales y globales sobre su progreso. En cierto sentido, es una revisión de la estructura del problema en busca de información relevante que se pueda incorporar a una secuencia análisis-plan-ejecución.

*Fase 4. Planificación.* El sujeto selecciona los pasos y las estrategias que potencialmente pueden conducir a la resolución del problema.

*Fase 5. Ejecución.* El sujeto ejecuta las acciones previamente estructuradas en la planificación.

*Fase 6. Verificación.* Esta fase recoge la evaluación o control local durante la resolución del problema y la evaluación global de la resolución y solución. Por tanto, esta fase puede ser transversal a las anteriores.

Este enfoque de la resolución de problemas se complementa con la consideración de los sistemas de representación que se emplean en el proceso de resolución (Goldin, 1998; Kaput, 1992), en la línea que hemos trabajado en algunas de nuestras investigaciones previas (Cañadas, 2007; Castro, 2008).

Un último criterio sustentador de nuestra propuesta ha sido la noción de medio interactivo. El medio interactivo es aquel que devuelve una respuesta instantánea y dinámica a una acción por parte del usuario y que no se limita simplemente a reproducir la acción llevada a cabo como cuando se teclea el botón del dos en una calculadora básica (Kaput, 1992). Lo fundamental de los medios interactivos es la capacidad que tienen para inducir la abstracción reflexiva sobre los objetos con los que, a través del medio, el sujeto interactúa. Los usuarios deben reflexionar sobre dichas acciones para crear representaciones que sustenten sus ideas (Martínez, 2005). Un sitio web es interactivo desde el punto de vista educativo si tiene elementos que permiten el desarrollo de habilidades cognitivas en el usuario debido a las respuestas producidas por el medio o a las acciones del mismo. Los applets son un ejemplo de medio interactivo (Codina y Castro, 2004).

## METODOLOGÍA

La metodología que hemos empleado en la construcción de la e-actividad ha sido la de diseño inicial, puesta en práctica, análisis y rediseño. Todo ello con base en una experiencia piloto. En todas las fases de este ciclo hemos tenido en cuenta como directrices orientadoras los criterios procedentes del marco teórico: (a) las interacciones de los sujetos con los applets, (b) las potencialidades de las representaciones derivadas de las acciones sobre los applets y (c) las fases de la resolución de problemas. Estos criterios permiten refinar la e-actividad a partir de la propuesta del diseño inicial.

Los participantes en el estudio son estudiantes de Magisterio y de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Almería (España), a los que se les plantearon problemas

---

<sup>1</sup> Siguiendo el trabajo de Pólya (1945), situamos las fases de trabajo de este autor al mismo nivel que los episodios de Schoenfeld (1985), y Artz y Armour-Thomas (1992).

de optimización que debían resolver por parejas ante un ordenador.

### Experiencia piloto

La investigación se inicia con una experiencia piloto en la que los estudiantes trabajaron tres problemas de optimización. Estos estudiantes tuvieron 15 horas previas de entrenamiento con el programa Cabri-Geométre II.

Los problemas se presentaron con un enunciado textual (sin imágenes), tenían un mismo formato de presentación, la misma representación gráfica y se podían resolver con el mismo método. Los estudiantes disponían de un applet interactivo.

El trabajo de estos estudiantes en la experiencia piloto nos permite concluir que:

- Es importante que haya una imagen que represente la situación.
- Tienen dificultades con la prueba del arrastre.
- El arrastre de elementos en las creaciones en Cabri-Geometre les lleva a crear estrategias cognitivas y metacognitivas.
- Hay una tendencia general a considerar sólo rutas con paso por los vértices, los extremos o puntos medios de la imagen del problema. Esto indica dificultades vinculadas a la idea de variabilidad.
- Los estudiantes suelen volver sobre sus pasos realizando evaluaciones locales.

Tuvimos en cuenta los puntos anteriores para diseñar una nueva e-actividad.

### Primer diseño de la e-actividad

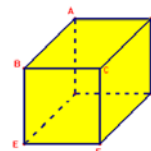
Elegimos un problema de optimización atendiendo a los siguientes criterios: (a) que se mantenga la estructura de los problemas de la experiencia piloto, (b) que sea un problema no rutinario<sup>2</sup> sin que el bajo conocimiento de técnicas de cálculo suponga una dificultad, (c) que permita la incorporación de applets interactivos, (d) que permita seguir las fases de resolución de problemas y (e) que los estudiantes no necesiten tener conocimientos de software de geometría dinámica.

<sup>2</sup> Lo es en tanto que los sujetos no conocen a priori una estrategia de resolución efectiva en el sentido descrito por Schoenfeld (1985)

Seleccionamos el “problema de la mosca” para el primer diseño. Lo presentamos en la Figura I.

Figura I. Enunciado del primer problema

Los puntos  $A$  y  $F$  son los vértices de una habitación con las siguientes dimensiones.  $AB=4m$ .  $BC=3m$  y  $BE=2m$ . Una mosca “sin alas” está sobre el punto  $A$  situado en el lado  $BA$ . ¿Qué camino debe seguir la mosca para recorrer la menor distancia si desea llegar al punto  $F$ ?



En su primera versión, la e-actividad estaba compuesta por las cuatro páginas que describimos a continuación<sup>3</sup>.

La página 1 fue diseñada para trabajar la fase de lectura. Muestra el enunciado y una representación gráfica del problema.

La página 2 se diseñó para trabajar las fases de análisis y exploración. Comienza con una pregunta de reflexión sobre la trayectoria más corta y su justificación. A continuación se pide arrastrar el punto  $X$  del applet “habitación” y que describan qué observan. Este applet permite visualizar distintas trayectorias con punto de paso por la arista  $BC$  el punto  $X$  que se puede arrastrar.

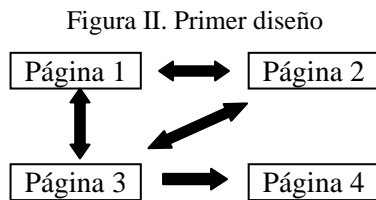
La página 3 fue diseñada para trabajar las fases de exploración y planificación. Se pide que se active el cuadro pista del applet “estrategia”, que expresen su opinión y que describan la información que da la pista. Este applet muestra una posible estrategia cuando se selecciona el cuadro “pista”, el lado superior se abate. Además, el punto de paso por la arista  $BC$  se puede arrastrar y los botones permiten girar la construcción en todas las direcciones.

La página 4 se diseñó para trabajar las fases de ejecución y de verificación. Se pide que resuelvan el problema a través de diversas cuestiones retrospectivas y de control (cognitivas y metacognitivas): ¿has resuelto ya el problema?, ¿puedes calcular y verificar tu suposición?, ¿cuál es la incógnita del problema?, ¿cuales son los datos del problema?,

<sup>3</sup> Por limitaciones de espacio, no podemos mostrar el contenido de las páginas en su totalidad, ni en este diseño ni en los siguientes.

¿cuál es la condición del problema?, ¿conoces algún problema relacionado o similar?

En la Figura II mostramos el esquema de éstas y del recorrido que se puede realizar entre ellas identificado con las flechas.



### Experimentación del primer diseño de la e-actividad.

La experimentación puso de manifiesto que:

- No poder volver hacia atrás desde la página 4 dificulta que los estudiantes llevaran a cabo estrategias metacognitivas, perdiendo la posibilidad de realizar evaluaciones locales o volver sobre sus pasos (fase verificación).
- La gesticulación con sus manos o señalar en la pantalla parece facilitarles la identificar posibles trayectorias (interactividad).
- El término “mosca” confunde porque, pese a especificar que no tenía alas, algunos consideran que podía volar (fase de lectura).
- El análisis es una fase obviada.
- La reflexión de la fase de planificación era de un nivel bajo.
- Aún obteniendo la ruta óptima por las caras centrales, no sienten la necesidad de probar otras rutas laterales.
- La visibilidad inmediata de las preguntas propicia que centren la atención en responder a las preguntas sin profundizar en la reflexión y perdiendo el hilo de las instrucciones dadas.
- La interactividad con los applets propicia la aparición de *insigh* (tras realizar arrastres erráticos) y la verificación de ideas o soluciones parciales (tras realizar arrastres guiados), favoreciendo el avance en la resolución del problema.

### Segundo diseño de la e-actividad

Con base en las observaciones del desarrollo del primer diseño de la e-actividad,

tomamos las siguientes decisiones para el segundo diseño:

- Que desde todas las páginas puedan ir al enunciado, volver hacia atrás o avanzar.
- Proporcionar un modelo físico de la habitación a menor escala que permita simular trayectorias (interactividad).
- Cambiar “mosca” por “hormiga” (lectura).
- Introducir una página específica para fomentar la reflexión (planificación) (página 2 del segundo diseño).
- Introducir una página específica para la fase de planificación (página 4 del segundo diseño).
- Introducir una página con un applet que permite la comparación dinámica de dos conjuntos de rutas, las que pasan por BC y las que lo hacen por DC con un gráfico de la distancia recorrida situando la nueva página antes de la página que muestra la estrategia del desarrollo plano (interactividad, exploración y planificación).
- Que las preguntas sólo se muestren si el cursor está sobre ellas e incidir en se puede avanzar en las preguntas y páginas (resolución general e interactividad).
- Modificar las preguntas de los applets anteriores para potenciar la interactividad.

Describimos las seis páginas que constituyen el segundo diseño.

La página 1 está diseñada para trabajar la lectura, presenta el enunciado y un modelo a escala de la situación.

La página 2 fue diseñada para trabajar la fase de análisis mediante unas preguntas que buscan fomentar la reflexión y el tránsito en esa fase: ¿qué se pretende obtener?, ¿cuáles son los datos del problema?, ¿qué condición/es presenta el problema?, ¿tenéis alguna idea que os pueda ser útil para resolver el problema?

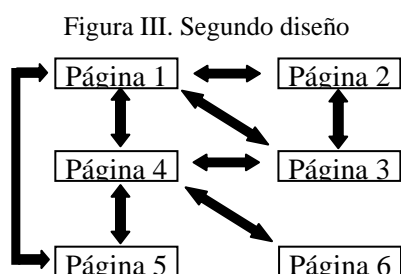
La página 3 fue diseñada para trabajar las fases de análisis y exploración. Contiene el applet “habitación”. Modificamos las preguntas para potenciar la reflexión y tránsito en las dos fases así como la interactividad con el applet. Se pide que arrastren el punto X para después contestar a: ¿qué observáis?, ¿cuál crees que es la trayectoria más corta?, ¿por qué?

La página 4 fue diseñada para trabajar las fases de planificación y verificación (evaluación local). Pretende que los estudiantes reflexionen sobre la información que hasta ese momento han recabado, requiere: “Haced un resumen de la información que tenéis hasta ahora”, ¿por dónde debéis empezar a resolver el problema?

La página 5 fue diseñada para trabajar las fases de planificación y verificación (evaluación local). Incorpora el applet “comparativa”, que permite la comparación dinámica de dos conjuntos de rutas, las que pasan por BC y las que lo hacen por DC con un gráfico de la distancia recorrida.

La página 6 fue diseñada para trabajar las fases de exploración y ejecución. Contiene el applet “estrategia”, que muestra una estrategia. Se pregunta: ¿qué observáis?, ¿podéis resolver el problema?

La Figura III recoge el segundo diseño de la e-actividad.



### Experimentación del segundo diseño de la e-actividad

Con la experimentación del segundo diseño de la e-actividad se ha detectado que la disposición de la página 5 del primer diseño (applet “comparativa”) no facilita el tránsito entre las fases de resolución de problemas. Los estudiantes se sentían perdidos al observar la comparativa de rutas y se bloqueaban al no disponer aún de un plan de resolución adecuado.

### Diseño final de la e-actividad

Teniendo en cuenta la observación del segundo diseño de la e-actividad, se decide: (a) incorporar el applet “comparativa” después de la página que contiene el applet “estrategia”, para que los estudiantes puedan llevar a cabo una evaluación local y global de la resolución del problema, y (b) modificar la redacción de algunas preguntas de acuerdo con las fases de resolución de problemas e incorporar otras nuevas que potencien la interactividad de los

estudiantes con los applets y la reflexión derivada de dicha interacción en función de las fases de resolución.

### Experimentación del diseño final

Las observaciones llevadas a cabo han mostrado que el diseño sobre la base teórica presentada es adecuado a nuestros propósitos. Finalmente, la e-actividad la constituyen las seis páginas que describimos.

En la página 1 se presenta el enunciado del problema.

En la página 2 (fase de análisis) se pregunta: ¿qué se pretende obtener?, ¿cuáles son los datos del problema?, ¿qué condición presenta el problema?, ¿tenéis ya alguna idea de cuál es el camino más corto?

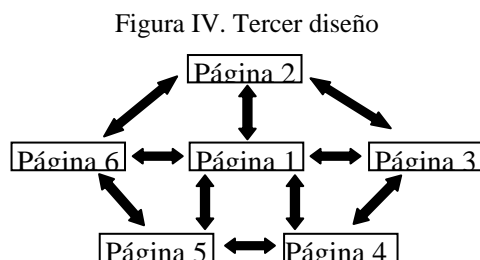
La página 3 (fase de exploración) contiene el applet “habitación” y contiene las preguntas: ¿qué observáis?, ¿cuál crees que es la trayectoria más corta?, ¿por qué?

En la página 4 (fase de planificación) se recoge: Entonces, ¿cómo creéis que se resuelve el problema?

La página 5 (fase de ejecución) contiene el applet “estrategia” y las siguientes preguntas: ¿ha cambiado vuestra idea de cuál es el camino más corto?, ¿tenéis alguna idea nueva para resolver el problema? Resolved ahora el problema con lápiz y papel.

En la página 6 (fase de verificación) está el applet “comparativa” y se pregunta: ¿coincide con lo obtenido antes?, ¿ha cambiado vuestra idea sobre la solución que habéis dado antes?

Mostramos las posibles transiciones entre las páginas en el esquema de la Figura IV.



### CONCLUSIONES

Nuestra experiencia pone de manifiesto que el diseño de páginas web interactivas para el aprendizaje de las matemáticas no es una actividad simple ni sencilla de la que se puedan esperar buenos resultados en primera instancia. Son muchas las actividades que, con un afán de

innovación, realizan los profesores de motu proprio y se las proponen a los estudiantes sin haber sido sometidas a un proceso de control de calidad. Este trabajo pone de manifiesto que se requiere de una experimentación y un control previo que permita conocer las limitaciones de las actividades que se proponen y, a partir de la información recogida y su análisis, realizar propuestas de su mejora. Esto se puede realizar mediante una metodología similar a la que hemos presentado para el diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas matemáticos. Esta metodología se basa en mejoras progresivas que se realizan tras el diseño, puesta en práctica y revisión de la e-actividad.

En la puesta en práctica de la e-actividad, los estudiantes participantes en las diferentes fases de la experimentación han hecho que salgan a la luz una serie de disfunciones y limitaciones del diseño inicial, que se han utilizado para refinar el diseño.

Todo diseño web tiene un sustento filosófico-teórico en función de los objetivos que se pretenden alcanzar y el ámbito de la Educación Matemática no debe ser ajeno a ello. En este sentido, hemos mostrado cómo, sobre la base de las fases de resolución de problemas, es posible construir una e-actividad que permite a los estudiantes avanzar sobre dichas fases al mismo tiempo que resuelven un problema de optimización no rutinario.

La metodología para el diseño de la e-actividad puede adaptarse a otros problemas matemáticos.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del proyecto I+D+i “Modelización y Representaciones en Educación Matemática”, con referencia EDU2009-11337.

#### REFERENCIAS

CAÑADAS, María C. (2007). *Descripción y Caracterización del Razonamiento Inductivo Utilizado por Estudiantes de Educación Secundaria al Resolver Tareas Relacionadas con Sucesiones Lineales y Cuadráticas*. Tesis doctoral. Universidad de Granada: Granada.

CASTRO, Enrique (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo (Coor)

*Investigación en Educación Matemática XII*. Badajoz: Universidad de Extremadura

CODINA, Antonio (2000). *Elementos para una reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas*. Granada: Universidad de Granada.

CODINA, Antonio y CASTRO, Enrique (2004). En M. Peñas, A. Moreno, J. L. Lupiañez (Eds), *Investigación en el Aula de Matemáticas, Tecnologías de la Información y la Comunicación*. Granada: Universidad de Granada; [CD-Rom]; ISBN: 84-689-0076-1

GOLDIN, Gerald (1998). “Representational systems, learning, and problem solving in mathematics”, En *Journal of Mathematical Behavior*, number 2, volume 17, pp. 137-165.

KAPUT, James (1992). Technology and Mathematics Education, En D. Gouws (Ed), *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 515-556.

MARTÍNEZ, Ángel (2005). Réplica a la ponencia “atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación. En *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Córdoba: Universidad de Córdoba; pp. 17-26.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2010). *Descartes. Matemáticas Interactivas*. [Online]; disponible en <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/> y accesado el 6 de junio de 2010.

NCTM (2010). *Illuminations, resources for teaching math*. [Online]; disponible en <http://illuminations.nctm.org/> y accesado el 6 de junio de 2010.

PÓLYA, George (1945). *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press (Traducción de ZUGAZOGOITA, Julián (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México DF: Trillas).

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA (2010). *Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas*. [Online]; disponible en <http://www.divulgamat.net/> y accesado el 6 de junio de 2010.

SCHOENFELD, Alan (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

UTAH STATE UNIVERSITY (2010). *Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales*. [Online]; disponible en <http://nlvm.usu.edu/es/nav/credits.html> y accesado el 6 de junio de 2010.

KOBAYASHI Ichiro, SATO Katsuhiko, TSUYUKI Shigeru y FUKUSHIMA Kazuhiro (2003). *Math Education and Technology. International Education Software*. [Online]; disponible en [http://www.ies.co.jp/math/java/geo/min\\_rittai/min\\_rittai.html](http://www.ies.co.jp/math/java/geo/min_rittai/min_rittai.html) y accesado el 10 de junio de 2010