UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Proceso de conjeturación en una clase de geometría: El papel del profesor y de Geogebra a la luz de la teoría de la Mediación Semiótica"*** Presentado por la estudiante:

Cristina Fernanda Mejía Fonseca – 2012185017

Como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **43** Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 04 días del mes de septiembre de 2014.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME

Jurados:

Profesor(a) *CAROLINA CARRILLO GARCÍA*

Profesor (a) Carmen Samper de Caicedo
CARMEN SAMPER DE CAICEDO

PROCESO DE CONJETURACIÓN EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA: EL PAPEL DEL PROFESOR QUE USA GEOGEBRA A LA LUZ DE LA TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

CRISTINA FERNANDA MEJÍA FONSECA

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2014

PROCESO DE CONJETURACIÓN EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA: EL PAPEL DEL PROFESOR QUE USA GEOGEBRA A LA LUZ DE LA TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

CRISTINA FERNANDA MEJÍA FONSECA

ASESOR

ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER

EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2014

Para todos los efectos,declaramosque el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 3

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Maestría.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Proceso de conjeturación en una clase de Geometría: El papel del profesor que usa GeoGebra a la luz de la Teoría de la Mediación Semiótica.
Autor(es)	Mejía Fonseca, Cristina Fernanda
Director	Molina Jaime, Óscar Javier.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 121 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Acciones del profesor, Mediación semiótica, Signo, Actividad Demostrativa, Geometría Dinámica.

2. Descripción

El presente trabajo, corresponde a un estudio realizado en un curso de geometría con estudiantes de grado octavo, en un colegio de estrato socio económico alto. El objetivo de este trabajo es determinar, bajo la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS) y la propuesta del grupo de investigación Æ•G (aprendizaje y enseñanza de la geometría) de la Universidad Pedagógica Nacional, el papel del profesor que pretende usar el *software* de geometría dinámica GeoGebra en un proceso en el que se busca que los estudiantes se involucren en la actividad demostrativa, para este caso, en el proceso de conjeturación específicamente. Para tal propósito, se hace una descripción tanto de la TMS como de la propuesta de dicho grupo y de la secuencia de actividades que se desarrolló con los estudiantes. Enseguida, se realiza el análisis del papel del profesor y del *software* empleando los referentes teóricos previamente mencionados, para luego realizar unos comentarios generales respecto de los resultados de tal análisis.

3. Fuentes

Para el desarrollo del presente estudio se referenciaron en total 19 fuentes distribuidas entre tesis, artículos de revistas y libros de educación matemática. A continuación se indican las principales para el desarrollo del estudio:

Bartolini-Bussi, M., &Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education* .

Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C., & Molina, O. (2013). Enseñanza de la Geometría Mediada por Artefactos: Teoría de la Mediación Semiótica. (P. Perry, Ed.) *Memorias 21º Encuentro de la Geometría y sus Aplicaciones*. UPN

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (2010). Chapter 1. Introduction. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. En The 17th ICMI Study* (Vol. 13, pp. 1-11). New York: Springer.

Mariotti, M. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, pp. 25-55. Taipei.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2013). *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje. Capítulo 1. Innovación en un aula de geometría de nivel universitario.* Bogotá, Colombia: Fondo Editorial UPN.

4.Contenidos

El presente estudio contiene cinco capítulos. El primero presenta el planteamiento del problema, la justificación del estudio, y sus objetivos general y específicos, así como los antecedentes investigativos del mismo. El segundo capítulo presenta los referentes teóricos que soportan este estudio, centrando su atención en los asuntos de la demostración y la Teoría de la Mediación Semiótica; se describen sus elementos principales en cuanto a constructos como signos y significados, artefactos, mediación y ciclo didáctico (la aproximación metodológica para la enseñanza, para este caso). El tercer capítulo contiene la metodología del estudio; se explicita la caracterización de la población y la descripción de las tres fases que se llevaron a cabo para la realización deltrabajo (preparación, experimentación y análisis). En el cuarto capítulo, se realiza el análisis y se hace la presentación de los resultados del mismo. Finalmente, en el quinto, se incluyen las conclusiones a la luz de los objetivos planteados y algunas reflexiones a tener en cuenta para futuros estudios.

5.Metodología

Se puede señalar que este es un estudio cualitativo - descriptivo en el que el profesor es también investigador. Específicamente, es un experimento de enseñanza que tal como lo describen, Steffe & Thompson (2000, en Molina et al, 2011), es un tipo particular de investigación de diseño en la que los participantes son por lo general un investigador docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores observadores. En este estudio, el profesor docente es también profesor investigador, así se logra que la información sea de primera mano. Particularmente, el presente estudio propone un ejemplo de mediación del profesor al cual se le pretende hacer un seguimiento para ser descrito y analizado a la luz de la TMS. Para el caso de del presente estudio, el tipo de situaciones planteadas, son tareas tendientes a favorecer la actividad demostrativa de los estudiantes.

6. Conclusiones
El trinomio *TMS*, *categorías de acciones del profesor* y *aproximación metodológica* –estos dos últimoscomponentes propuestos por el grupo Æ•G-,permite describir el papel del profesor en una mediación en la que se pretende que los estudiantes experimenten el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa, asunto quefavorece el hecho de que los estudiantes se acerquen al contenido matemático de una manera genuina. Las acciones del profesor que favorecieron el proceso de conjeturación en mayor medida fueron: sintetizar ideas para establecer el foco de atención con el propósito de establecer elementos útiles en una conjetura; indagar sobre los signos producidos por los estudiantes para producir una conjetura o para entender ideas de otros o revisar las propias; pedir revisión del enunciado del problema para establecer el orden de construcción de los objetos; indagar acerca de la concepción que los estudiantes tienen de un objeto para que sean construidos de manera correcta. Se ratifica el potencial de GeoGebra en términos de decantar dependencias y hacer ostensivo lo que los estudiantes tienen en la mente respecto de algunos objetos El *software* obligó a que los estudiantes explicitaran una concepción para realizar construcciones en dicho entorno y los hizo dudar de ellas cuando debían hacer su representación, Teniendo en mente futuros estudios, se puede pensar en ampliar el trabajo, haciendo énfasis en las acciones del profesor que favorecen el proceso de justificación empleando una determinada aproximación metodológica. También se podría establecer cuáles son los esquemas de utilización de los estudiantes al emplear el software GeoGebra en procesos de conjeturación y justificación.

Elaborado por:	Cristina Fernanda Mejía Fonseca
Revisado por:	Oscar Javier Molina Jaime

Fecha de elaboración del Resumen:	23	07	2014

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Desde hace años, la inclusión de artefactos tecnológicos como recurso que se puede emplear en las aulas ha sido tema de discusión e interés para la comunidad de educadores e investigadores, así como lo ha sido el papel que el profesor debe asumir frente a la inclusión de la tecnología en su práctica pedagógica. Es así que algunos estudios se han interesado en establecer cuál podría ser ese papel del profesor y en plantear teorías en torno a este tema(Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008), y otros se han interesado en establecer de manera específica las acciones que categorizan dicho papel para darle protagonismo a la demostración en el aula (Grupo Æ•G, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, el presente estudio pretende establecer cuál es el papel de un profesor que se interesa en emplear artefactos para favorecer espacios de aprendizaje en la clase de geometría de octavo grado y es presentado en cinco capítulos que son descritos a continuación:

En el primer capítulo se estructura el planteamiento del problema. Se presenta una contextualización general sobre la inclusión de artefactos en el aula de clase de matemáticas describiendo por qué este asunto ha sido de interés en la última década para la comunidad de investigadores y educadores matemáticos, y con base en ello, especificar el interés particular para el desarrollo de este estudio. Enseguida, se expone la pregunta general que orientará el estudio y los objetivos, tanto el general como los específicos, que permitirán dar una respuesta parcial a dicha pregunta. Este capítulo termina con algunos de los antecedentes bibliográficos que abordan la temática de interés y que se pueden constituir en referentes del estudio mismo.

En el segundo capítulo se presentan los referentes teóricos que soportan este estudio. Dichos referentes abordan dos asuntos: el primero de ellos es la demostración y el segundo, a la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS). En relación con la demostración, se precisa tanto su concepto como una postura sobre su papel en el aula de clase. También se hace alusión al constructo de actividad demostrativa del grupo Æ•G(Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013). Con respecto al segundo referente, la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS) proporciona unos lentes mediante los cuales es posible analizar y comprender el papel del profesor que emplea artefactos en el aula con el propósito de promover la actividad demostrativa.

En el tercer capítulo se hace referencia al proceso que orientó la realización de este estudio, estructurado de tal manera que presenta una caracterización de la población, una descripción del tipo de estudio que se realiza y una descripción de las fasesdel mismo, con las acciones y etapas que se establecieron para desarrollar cada fase. Específicamente tales fases son: planeación, experimentación y análisis.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis realizado de dos sesiones de clase. Para cada sesión de clase, inicialmente, se realiza una descripción general de la misma que ilustra, grosso modo, lo que allí aconteció, la manera como está divida en bloques o episodios que facilitan el análisis y el objetivo del análisis. Luego se hace una presentación de las transcripciones de los bloques o episodios, seguidas por su respectivo análisis a la luz de laTMSy de las categorías del grupoÆ•G. Finalmente, se realiza una síntesis en la que se recogen generalidades de los análisis presentados.

Para terminar, se presentan las conclusiones del estudio a la luz de los objetivos planteados, resultados encontrados y algunas reflexiones a tener en cuenta presentadas por la autora.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se estructura el planteamiento del problema que se abordará a lo largo del presente estudio. Para tal efecto, se presenta una contextualización general sobre la inclusión de artefactos en el aula de clase de matemáticas describiendo por qué la comunidad de investigadores y educadores matemáticos han mostrado interés en esta inclusión, y con base en ello, especificar el interés particular para el desarrollo de este estudio. Luego, se expone la pregunta general que orientará este estudio y los objetivos general y específicos, que permitirán dar una respuesta parcial a dicha pregunta. Al finalizar se presentan algunos de los antecedentes bibliográficos que abordan la temática de interés y que se pueden constituir en referentes del estudio mismo.

1.1 JUSTIFICACIÓN

En la institución educativa donde se llevó a cabo el presente experimento[1], la integración de herramientas tecnológicas en el aula de clase debe ser parte fundamental en la práctica en aula, tanto de los profesores como de los estudiantes que pertenecen a ella; en ese sentido, se convierte en un reto para el profesor de matemáticas la inclusión deliberada del uso de software especializado, tableros inteligentes, recursos en línea (TIC) y estrategias de enseñanza específicas que atiendan dicho uso en la actividad de los estudiantes.

Atendiendo a lo anterior, fue pertinente buscar experiencias y documentación relativas a la inclusión en el aula de artefactos tecnológicos por parte del profesor y de

[1] The English School es un colegio privado de Bachillerato Internacional y estrato socioeconómico alto, ubicado al norte de la ciudad de Bogotá. Se manejan de manera casi exclusiva los productos de la línea Apple, desde las salas móviles de preescolar hasta los salones de computadores de escuela alta. Todos los profesores cuentan con un computador portátil de uso exclusivo.

cómo estos pueden tener un impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, se encuentran referencias de por lo menos dos tipos de estudio: unos que reportan experiencias de enseñanza haciendo uso de tales artefactos - e.g. Jones (2000), Bartolini-Bussi & Mariotti (2008), Mariotti (2009, 2012), Olive & Makar (2010),Villarreal & Borba (2010), -, y otros que reportan una discusión crítica en relación con la pertinencia y el impacto de usarlos en la educación. En relación con el segundo tipo de estudios, el primer estudio ICMI de 1985 en Francia, abordó asuntos relativos al impacto de los computadores en las matemáticas y en la enseñanza de la misma(Hoyles & Lagrange, 2010)., asunto que es retomado en el estudio ICMI 17, esta vez enfocándose en la influencia a través de los años de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y en la evolución de la teoría existente en Educación Matemática con respecto a ello. En este estudio ICMI 17, Hoyles & Lagrange (2010) reconocen los avances en la tecnología y su evidente influencia en la sociedad, particularmente en el ámbito educativo. Como consecuencia del desarrollo tecnológico y de su inclusión en la educación, los mencionados autores reconocen un aumento de los estudios en torno a cómo implementar software específico en el aula, o a la interacción tanto de profesores como de estudiantes con este tipo de tecnología. En el ICMI 17, Olive & Makar (2010) proponen considerar no una triada didáctica (estudiante, profesor, conocimiento matemático), sino un tetraedro didáctico donde el cuarto elemento, además de los anteriores, sea la tecnología. De manera particular, en el contexto de la enseñanza de la demostración y procesos de argumentación en geometría, estos autores reconocen que los ambientes de geometría dinámica agregan una consideración al trabajo en el aula que cambia la perspectiva de la demostración tradicional de una presentación de enunciados y ejemplificaciones de demostración, a la consideración de ambientesen donde se formulen y verifiquen conjeturas empleando un sinnúmero de ejemplosa partir del uso dedispositivos con software especializado.

Dado este panorama, el Estudio ICMI 17 buscó, por un lado, reflexionar sobre los usos reales de la tecnología en la educación matemática y por otro, abordar la variedad de hardware y software con el potencial de impactar o contribuir a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para lograr estos objetivos, pretendió identificar y analizar la utilización de tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, particularmente porque no es claro cómo funcionan algunas de ellas, o cómo pueden ser utilizadas en la educación matemática. Dado lo anterior, aquelestudio abordó entre otros, dos asuntos importantes: i) establecer los marcos teóricos emergentes hasta el momento para estudiarel uso que se le está dando a la tecnología y su integración en el aula, y ii) identificarasuntos como el papel del profesor y de los estudiantes que hacen uso de ellos en los procesos educativos relativos a las matemáticas.

En tal estudio al respecto del primer asunto, Drijvers, Kieran, & Mariotti (2010) presentan ejemplos en los que adoptar enfoques semióticos aporta de manera explícita al estudio de la tecnología y su integración en el aula, por ejemplo reconocen que en estudios como el de Sáenz-Ludlow & Presmeg del 2006 se usan los enfoques semióticos para analizar asuntos relativos a los signos y símbolos. En torno al segundo asunto, los mencionados autores también afirman que la relación de cualquier individuo con el aprendizaje de las matemáticas necesita de un proceso de mediación, en el que la tecnología parece ser una vía de acceso positiva para esta. Indican que si el profesorreconoce el potencial semiótico del artefacto[2]puede emplearlo como una herramienta de mediación semiótica para favorecer el aprendizaje. En el capítulo 14 del mismo ICMI 17, se reconoce que el rol del profesor es un factor importante que contribuye a que el estudiante emplee, de manera sistemática, los Software de Geometría Dinámica (SGD[3]), con un propósito matemático.

Frente a las anteriores consideraciones, y teniendo en cuenta los planteamientos de Drijvers, Kieran, & Mariotti (2010), el presente estudio se realiza bajo el marco de referencia de una perspectiva semiótica, que proporcione elementos teóricos que

[2]En la sección 2.2.2 se ampliará lo que se entiende por potencial semiótico del artefacto en el presente estudio

[3]Abreviatura que será empleada en el presente documento

soporten la inclusión y el uso de tecnología en el aula, prestando especial atención alpapel del profesor como mediador, que usa recursos computacionales (en este caso, el software de geometría dinámica GeoGebra) para fomentar la actividad demostrativa[4] en geometría en el aula.

Las consideraciones planteadas hasta el momento, muestran que hacer un estudio como este es pertinente porque, además de proveer ideas de cómo implementar el uso de un software especializado como GeoGebra en la institución donde se realizó el estudio, puede ser un aporte a la literatura en educación matemática con un ejemplo de las acciones de un profesor cuyo objetivo es mediar en la evolución de signos producidos por los estudiantes cuando usan el artefacto en los procesos de actividad demostrativa.

1.2 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Tal como lo sostienen Perry, Samper, Camargo & Molina (2013), la geometría dinámica es un recurso tecnológico que favorece la exploración de situaciones geométricas con el objetivo de establecer conjeturas, al ser empleada como un recurso para la implementación de tareas bien diseñadas; además es una herramienta de mediación que favorece la actividad demostrativa. En este sentido, una pregunta natural que surge de esta postura es: ¿cuál es el papel real y específico del profesor que pretende emplear un SGD, para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas?

Para contestar este interrogante, es pertinente realizar y documentar un experimento de enseñanza que haga énfasis en el papel que puede tener un profesor que usa artefactos en el proceso de enseñanza y la manera en que este uso puede propiciar el aprendizaje en la comunidad de clase. Para ello, el presente estudio se enmarca bajo la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS) propuesta por Bartolini-Bussi & Mariotti (2008). Esta Teoría plantea elementos conceptuales no sólo para

[4] Las características de este constructo serán planteadas en la sección 2.1 del presente estudio

diseñar una secuencia didáctica (ciclo didáctico), sino también para estudiar y comprender el papel de un profesor que pretende aprovechar artefactos (para este caso, el SGD GeoGebra), que potencialmente se conviertan en mediadores para favorecer procesos de aprendizaje. En términos generales, la TMS proporciona unos lentes mediante los cuales es posible estudiar y comprender el rol del profesor que emplea artefactos en el aula. En este estudio en particular, el ciclo propuesto está fundamentado en la aproximación metodológica para la enseñanza (que pretende favorecer la actividad demostrativa de los estudiantes) del grupo Æ•Gde la Universidad Pedagógica Nacionalcon sede en Bogotá Colombia (*UPN*), quienes se han interesado en innovar la enseñanza en los cursos de geometría, centrándose en el uso de problemas abiertos[5], la interacción en el aula de clase y el uso de artefactos como un SGD.Cabe resaltar que actualmente es interés de dicho grupo precisar la mediación semiótica del profesor, al utilizar los SGD, cuando pretende favorecer el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa en cursos de geometría euclidiana en un programa universitario de formación de profesores de matemáticas.

Con el panorama anterior y teniendo en cuenta el contexto profesional específico de la autora del presente documento, la pregunta orientadora para este estudio es: ¿Cuálesson las acciones de un profesor que usa GeoGebra como mediador en una clase de geometría de octavo grado, para que los estudiantes se involucren en el proceso de conjeturación?

Para dar respuesta a esta pregunta, se ha planteado el siguiente objetivo general y con él, los objetivos específicos:

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Determinar, bajo la Teoría de la Mediación Semiótica propuesta por Bartolini-Bussi & Mariotti (2008) y la propuesta del grupoÆ•G, las accionesdel profesor al emplear

[5] Se entenderá por problema abierto aquel que no sugiere su solución o respuesta.

elSGD GeoGebra para favorecer que los estudiantes se involucren enprocesos de la actividad demostrativa.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Decantar los referentes teóricos que soportan la inclusión de artefactos en el aula, y los que se enfocan en el papel del profesor como mediador.
- Diseñar la secuencia didácticaque se gestionará con los estudiantes de grado octavo haciendo uso del SGD GeoGebra.
- Establecer categorías de análisis que permitan identificar cuáles son las accionesde la profesora al emplear GeoGebra a partir de los referentes teóricos decantados.
- Hacer un análisis de los datos recogidos a la luz de los referentes teóricos teniendo en cuenta las categorías de análisis descritas.
- Hacer un documento escrito, que reporte el análisis realizado.

1.4 ANTECEDENTES

Para terminar este capítulo se mencionan algunos de los antecedentes bibliográficos que dan ideas respecto a cómo orientar este estudio. Por un lado, están dos trabajos de grado de maestría enmarcados en la línea del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría,Æ•G de la Universidad Pedagógica Nacional, y por otro, el trabajo investigativo de Bartolini-Bussi & Mariotti (2008). Dichos trabajos guardan relación con la acción del profesor en un entorno escolar y con el uso de artefactos en procesos educativos.

Los trabajos enmarcados bajo la línea del grupo Æ•G, ofrecen ejemplos de cómo favorecer de manera particular la actividad demostrativa, y han tenido la intención de precisar las acciones del profesor, y de cómo este usa los artefactos (SGD) en los procesos de enseñanza. Para el interés particular del presente estudio, se tomaron dos trabajos de grado de maestría: el primero es el trabajo de Pinzón & Rodríguez (2011), quienes ponen su acento en las acciones del profesor que promueven la actividad demostrativa con estudiantes de noveno grado, haciendo uso de Cabri. En esta tesis se reconoce la doble responsabilidad del profesor como generador de experiencias de aprendizaje y como apoyo en el uso de herramientas de mediación para el desarrollo de la actividad demostrativa. Pinzón y Rodríguez (2011), realizaron una adaptación de los cuatro grupos de acciones del profesor propuestas por el grupo Æ•Gen el 2006, en la que se mantuvieron algunas de las acciones, se suprimieron otras, y se agregaron aquellas que surgieron durante el análisis y no estaban entre las del grupo. Los cuatro grupos de acciones son: acciones tendientes a la formación de una comunidad de práctica;acciones que contribuyen a iniciar y consolidar una práctica discursiva; acciones tendientes a la formación de miembros activos de una comunidad de práctica de indagación matemática; y acciones tendientes a aportar, de manera directa, elementos de la matemática misma a la construcción del saber en comunidad. Este trabajo de grado, se convierte en un antecedente que guía la realización del análisis del presente estudio por cuanto proporciona un ejemplo de cómo emplear categorías de análisis existentes para analizar las acciones del profesor.

El segundo trabajo de grado es el de los autores Ospina & Plazas (2011) que sitúa su interés en las acciones del profesor que promueven actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado empleando artefactos distintos a SGD. En este estudio se emplearon las acciones del grupo Æ•G para el análisis de las acciones del profesor, manteniendo algunas de ellas, y modificando otras, especialmente en los casos en que las acciones hacían referencia al uso del software dado que no fue el artefacto usado para la enseñanza. En este trabajo se hace una comparación entre lo que ellos llaman una clase de geometría tradicional y una clase centrada en favorecer la actividad demostrativa (con acciones del profesor que favorecen la visualización, exploración, generalización y justificación). Afirman que las tareas diseñadas para propiciar el aprendizaje no lo hacen por sí solas, sino que es necesarioque el profesor favorezca intencionalmente este proceso(Ospina & Plazas, 2011). Este trabajo de grado, se convierte para el presente estudio en un referente de cómo hacer el análisis de las acciones del profesor, teniendo en cuenta las acciones del grupo Æ•G.

Otros referentes para el estudio se fundamentan en la propuesta de Bartolini-Bussi & Mariotti (2008) quienes muestran especial interés en el papel del profesor y hablan de manera particular de la mediación semiótica que él puede realizar con el uso de artefactos -no siempre en entornos de geometría dinámica-. De manera general, estas autoras,ofrecen un marco para realizar un análisis del rol del profesor al que llaman Teoría de la Mediación Semiótica (TMS). Mariotti (2012) afirma que la TMS es:

> *Un marco teórico específico cuyo propósito es describir y modelar el proceso de enseñanza aprendizaje basado en el uso de artefactos específicos. (p. 27)*

Mariotti (2012) presenta un ejemplo tomado de un experimento de enseñanza en el que se explica cómo el uso del SGD, hacen emerger signos de los estudiantes(e.g., los gestos, la producción oral o escrita, los esquemas, dibujos, o una construcción realizada empleando un SGD) que pueden ser reconocidos por un experto como asociados a signos matemáticos (e.g una definición o el enunciado de un teorema) relacionados con la noción de función. En este experimento se pretendía introducir la noción de función y gráfica. Además se ilustra cómo las herramientas de construcción y arrastre del software juegan un papel fundamental en la evolución de los significados de los estudiantes y se convierten en un apoyo a la acción del profesor.

En síntesis, los antecedentes mencionados presentanuna teoría que proporciona, por un lado, una alternativa de las categorías que se podrían considerar al realizar dicho análisis y por otro lado, una propuesta para diseñar la secuencia didáctica que se podría desarrollar en el aula.

2 REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que soportan el presente estudio. Atendiendo al objetivo general del mismo,dichos referentes seconcentranendos asuntos: el primero de ellos es relativo ala demostración y el segundo, a la TMS.

En relación con la demostración,en primera instancia se precisa lo que se entiende por este concepto en este estudioy se plantea la que se considera debería ser una postura sobre su papelen el aula de clase.A propósito de este asunto, se hace también referencia al constructo de actividad demostrativa del grupo Æ•Ghaciendo alusión a los intentos de dicho grupo por aterrizar dicho constructo en las aulas de clase(Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013). Particularmente se enfatizaen lo que se espera sea la actividad demostrativa en el contexto en el que se desarrolló el presente estudio.

Con respecto al segundo referenteque se presenta, la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS), proporciona unos lentes mediante los cuales es posible analizar y comprender el papel del profesor que emplea artefactos en el aula con el propósito de promover la actividad demostrativa. Así, en la sección 2.2, se presenta una descripción de los elementos esenciales que involucra esta teoría, como lo son los signos, los artefactos (para este caso,el software GeoGebra), y la mediación semiótica, haciendo ladescripción delos tipos de signos, el potencial semiótico de los artefactos y asuntos relativos a la mediación del profesor referidos tanto al ciclo didáctico propuesto por la TMS y ala aproximación metodológica para la enseñanza del grupo Æ•G (donde además se expone por qué fue empleada en el presente estudio de manera análoga a dicho ciclo), como a las acciones del profesor enunciadas por la TMS y por el grupo Æ•G.

2.1 ACERCA DE LA DEMOSTRACIÓN

En este apartado se hace alusión a la demostración, que ha ocupado la literatura especializada desde hace más de dos décadas, empleando de manera particular los planteamientos que hacen Hanna (2000)y de Villiers (1993).

La demostración debe proveer algo más que una justificación de un enunciado;debe proveer también la explicación de aquello mismo que se pretende demostrar. En otras palabras,es importanteno sólo la presentación de la validez del enunciado, sino precisar por qué tal enunciado es válido en el marco de una teoría específica. Con esto, la demostración es por un lado, más convincente, y por otro, proporciona caminos para hacer nuevos descubrimientos con respecto al mismo enunciado que se haya presentado(de Villiers, 1993).Adicionalmente, se ha reconocido que aprender a demostrar no es sencillo, y que se ha presentado como un ritual y no como un proceso conectado con las creencias o hallazgos genuinos de los estudiantes (Loewenberg Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002). Este tipo de planteamientos fuelo que hizo surgir uno de los intereses de este estudio: favorecer procesos de demostración en el aula.

Varios autores han abordado el asunto de la demostración en sus trabajos, y algunos de ellos coinciden enque la demostración está en el corazón de las matemáticas. Sin embargo, con el paso de los años, la demostración ha perdido y recuperado este estatus(Hanna, 2000). Hanna, citando a varios autores,presenta una lista donde recopila las funciones de la demostración. Estas funciones son:

1. Verificación,donde la demostración proporciona el convencimiento sobre la veracidad de un enunciado.
2. Explicación,que proporciona una visión de por qué es verdadera una afirmación.
3. Sistematización u organización de los distintos enunciadosde un sistema deductivo deaxiomas,definicionesy teoremas, como un solo engranaje coherente y lógico.

4. Descubrimiento o invención de nuevos resultados.
5. Comunicación o la transmisión de conocimiento matemático.
6. Construcción de una teoría que presente un modelo y unas características o reglas propias.
7. Exploración del significado de una definición o la consecuencia de un supuesto.
8. Incorporación de un hecho bien conocido en un nuevo marco de referencia y su mirada desde esa nueva perspectiva.

Dicho esto, y bajo el convencimiento de que estas ideas proporcionan una vía para acercar a los estudiantes a la demostración, es que el grupo*Æ•G* propone el constructo *actividad demostrativa*. Este grupo,con planteamientos muy similares a la caracterización de Hanna (2000), ha propuesto este constructo como una forma de concebir la demostración en un sentido amplio, más como proceso que como producto. En lo que sigue, se describe tal constructo.

La enseñanza de la demostración en contextos educativos escolares es algo que se ha ignorado en ocasiones o que simplemente se ha empleado para proporcionar certeza absoluta sobre la validez de una afirmación. Sin embargo, la convicción no se consigue con la demostración, ni es esta la única función de la demostración(de Villiers, 1993). La anterior posturaes compartida por elgrupo *Æ•G*yuno de los soportes de su concepción de actividad demostrativa.

La propuesta de dicho grupo está relacionada con la reestructuración curricular de las clases de geometría dela Universidad Pedagógica Nacional para futuros profesores de matemáticas, en las que la demostración tiene un rol vital (Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013). Esta postura también ha permeado trabajosde grado tanto de pregrado como de posgrado bajo la asesoría de este grupo, cuya población ha sido estudiantes de secundaria(como los que en el presente estudio fueron mencionados en la sección 1.4).Las ideas del grupo reconocen que efectivamentela práctica de demostrar está en el corazón del quehacer matemático, razón por la cual la formación matemática de cualquier estudiante tiene que estar relacionada de alguna forma con esta práctica. Según ellos, esta práctica debe ser un proceso sociocultural que ocurre en comunidad, en donde elpapel del profesor experto es vital para que los procesos educativos que se dan en el aula evolucionen. Para los estudiantes,el hecho de que una afirmación hecha sea evidente, tiene en ocasiones más validez que el hecho de que exista una demostración rigurosa del mismo; más aún, si los ejemplos con los que se cuenta son fácilmente verificables,las demostraciones carecen de total sentido[6]. Partiendo de las afirmaciones anteriormente realizadas, es claro que hacer a la demostración una actividad significativa para los estudiantes debe ser fundamental, como también deben serlo el descubrimiento, la comunicación y la negociación. Dada esta situación, es que el trabajodel grupo de investigación,quienes plantean el constructo de *actividad demostrativa*, se convierte en un referente teórico muy fuerte para el presente trabajo.

Dicho constructo consta de los procesos, de conjeturación y de justificación,de tal manera que toda conjetura(producto del proceso de conjeturación) debe ser justificada. Es necesario precisar que se entiende porconjetura un enunciado cuyo valor de verdad no está definido para quien hace la conjetura, pero que, producto de la observación o estudio de situaciones particulares, esa persona puede tener un alto grado de certeza de que será verdadero, y gracias a esto,podría ser justificado en el marco de un sistema teórico.

Al analizar los procesos anteriormente mencionados, se realizan varias acciones heurística, dos de éstas sonla visualización yla exploración (Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013).

1. Mediante la visualización, se consigue información geométrica de una figura y de loselementos que la componen. En estos casos, por ejemplo, se requiere establecer nexos entre la figura y la información previa que se tiene de ella (en

[6]Desde hace más de veinte años, el darle sentido a la demostración ha sido un asunto que ha llamado la atención de investigadores, y aún el hecho de que no interese si los enunciados son razonables o no, sigue siendo el tratamiento de la demostración en algunos contextos escolares.

el caso de las figuras geométricas: número de lados, tipo de polígono, relaciones entre lados o ángulos, etc.)

2. Mediante la exploración se buscan propiedades o relaciones geométricas. Por ejemplo,la exploración de representaciones en un entorno de geometría dinámica, llamada *exploración dinámica*, puede darse mediante la función del arrastre de objetos (particularmente puntos). En un entorno como este, se pueden determinar relacionesque permanecen invariantes, y el comportamiento de objetos a partir de la manipulación de otros, i.e. determinar relaciones de dependencia. Cuando la exploración de las representaciones se hace por ensayo y error, con uso de medidas, con construcciones, y no necesariamente en un entorno de geometría dinámica, recibe el nombre de *exploración empírica.*La exploración también puede ser realizada en la teoría, en cuyo caso es llamada *exploración teórica*; consisteen realizar la exploración del conocimiento personal, y busca reconocer enunciados que puedan justificar una afirmación, o dar ideas para orientar la exploración.

Retomando los dos procesos de los cuales consta el constructo de *actividad demostrativa,*a continuación se realiza una descripciónsomerade las acciones que los componen.

Algunas de las acciones reconocibles en el proceso de conjeturación que tiene como objetivo principal formular conjeturas, son las siguientes:

1. Detectar propiedades:se establecen propiedades invariantes del objeto geométrico que es objeto de estudio.
2. Verificar propiedades detectadas:se contrastan las propiedades establecidas anteriormente, puede ser en otros casos particulares,para determinar si permanecen invariantes.

3. Formular conjeturas:se formulan enunciados (preferiblemente en formato condicional) que ponen de manifiesto un hecho geométrico que se ha encontrado a partir de los casos estudiados.
4. Corroborar las conjeturas formuladas:se examina si el antecedente tiene todas las propiedades para que efectivamente su consecuente se dé, y de igual manera se examina si el consecuente incluye todas las propiedades que son producto de las propiedades incluidas en el antecedente.

Un ejemplo que se detallará con más profundidad en la sección 4.1 y en el que se reconocen estas acciones, es presentado a continuación:

- Detectar propiedades: Encontrar puntos que equidistan de los extremos de un segmento en el mismo plano.
- Verificar propiedades detectadas: Empleando las herramientas de GeoGebra verificar,luego de haber establecido cuáles son dichos puntos, quelas distancias a los extremos del segmento se mantienen.
- Formular conjeturas: Para este caso, dicha conjetura se espera que sea"Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces, pertenece a la mediatrizde dicho segmento" (ver sección 3.3.1.2 problemas 3 y 4).

En cuanto a las acciones del proceso de justificación que tiene como objetivo principal validar la conjetura formulada, son:

1. Seleccionar elementosteóricos o empíricos que servirían para sustentar la conjetura.
2. Organizar los elementosseleccionados construyendo una justificación.
3. Formular una justificación haciendo uso de los elementos previamente organizados.

En el contexto educativo objeto de este estudio, se pretende que el proceso de conjeturación esté presente en gran parte del trabajo realizado por los estudiantes y mediado por la profesora. Adicionalmente, se busca que a partir de la exploración surjan los elementos para establecer las conjeturas, y que estas conjeturas formen parte de un sistema teórico local de referenciaconstruido por la comunidad de clase con la mediación dela profesora y el uso del software GeoGebra.

En las secciones 4.1 y 4.2, se presentan ejemplos de acciones del proceso de conjeturación llevado a cabo por los estudiantes, y que fueron registrados a propósito de este estudio.

Para el grupo Æ•G, la *actividad demostrativa* no puede existir sin el razonamiento y la argumentación. El razonamiento consiste en la reflexión sobre las reglas de la geometría, las experiencias personales y saberes conocidos para poder indagar, obtener información, interpretarla, explicarla, contradecirla o proponer nuevas ideas, entre otras. La argumentación, por su parte, hace referencia a la formulación de un argumento que apoye una idea, y que relacione una garantía con los datos y la conclusión a la que se ha llegado.

El siguiente diagrama presenta un esquema de la actividad demostrativa (Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013) 17

Figura 2-1: Esquema de actividad demostrativa según el grupo Æ•G. Fuente: Perry, Samper, Camargo & Molina.(2013). *En: Geometría Plana: un espacio de aprendizaje.*(pág17)

2.2 TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Dado que en este estudio sepretende abordar el papel del profesoren la clase,se ha adoptado la teoría de la Mediación Semiótica -TMS-propuesta por Bartolini-Bussi & Mariotti (2008)para desarrollar el presente estudio.La TMSproporciona una alternativa para estudiar el papel que juega un experto, quien decide aprovechar programas de geometría dinámica en un entorno educativo y así favorecer el aprendizaje(Camargo, Pérez, Plazas, Perry, Samper & Molina, 2013).

Dicha teoría tiene dos pilares fundamentales que serán presentados en este apartado: (i)los signos y (ii) el potencial semiótico del artefacto. Para hacer una descripción de tales pilares, en primer lugar se hace referencia a los signos y su relación conlossignificados y con ello a la manera en que un profesor puede interpretar los signos producidos por los estudiantes; enseguida se presentaun panorama general de lo que se concibe comopotencial semiótico del artefacto para luego especificar dicho potencial referido al software GeoGebra.Luego de las descripciones anteriores, se hace referencia a la mediación semiótica del profesory el ciclo didáctico que este puede realizar para su mediación;finalmentese presentanlasacciones del profesor, que se constituyenenelemento fundamentalde su mediación para propiciar la actividad demostrativa.

2.2.1 SIGNOS Y SIGNIFICADOS EN LA TMS

La TMS, en el contexto educativo, conjuga las relaciones entre las herramientas que se utilizan, la tarea que se le propone al estudiante y el conocimiento matemático.Mariotti (2009) pone de manifiesto que la relación entre los dos primeros se expresa mediante los signos que producen los estudiantes.

Los signos producidos por los estudiantes (e.g., gestos, la producción oral o escrita, los esquemas, dibujos, construcciones)están relacionados con la realización de la tarea propuesta y surgen a partir de la comunicación con quienes participan en la misma. En el contexto del aula de clase los signos pueden ser compartidos. Para la

TMS, las herramientas que se emplean al desarrollar tareas matemáticas son en sí mismas elementos que propician que los significados de los estudiantes, relativos a dicha tarea, emerjan. Pero esos significados, que la TMS llama personales, pueden evolucionar a lo que reconocemos como significados matemáticos gracias a la mediación de un experto, que en los contextos educativos es el profesor. De manera específica, los signos producidos ponen de manifiesto los significados de los estudiantes, y son elementos con los que el profesor puede mediar para que esos significados de los estudiantes evolucionen a los significados matemáticos que se aceptan por la comunidad de clase.

Según la TMS,es el profesor quien decide cómo tipificar los signos producidos por los estudiantes de las siguientes dos maneras: i) relacionados específicamente con el artefacto que se utilizó, o ii) relacionados con el contenido matemático.En el primer caso los signos son identificados por el profesor como signos del artefacto, es decir, pueden serreconocidos por el profesor, comoproducto del uso del artefacto para el abordaje de una tarea específica, o como producto de la reconstrucción por parte del estudiante de la actividad desarrollada con el artefacto; estos signos, al ser identificados de esta manera son llamados *signos del artefacto*. El profesortambién podría considerar los signos de los estudiantes como *signos matemáticos*, segundo caso, si considera que la relación entre los signos producidos y el conocimiento matemático es más fuerte que la relación con el artefacto.

De acuerdo con la manera en que el profesor haga uso de los signos producidos por los estudiantes, estos pueden también ser considerados como *signos pivote*; esto sucede cuando el profesor evidencia en ellos conexión entre el contexto del artefacto y el contexto matemático, es decir, si son identificados por él como facilitadores para la transición de un contexto al otro.Los signos pivote, pueden usarse como andamio entre los dos contextos, o como referente para los significados personales involucrados en los signos matemáticos que necesitan trascender aún mas en la teoría matemática que se aborda. En ambos casos se puede favorecer la mediación para la evolución de los significados (Camargo, Pérez, Plazas, Perry, Samper & Molina, 2013). Para el caso del presente estudio, algunos signos que en principio podrían ser identificados como matemáticos, son empleados como pivote, para hacerlos evolucionar de tal manera que se pueda llegar a una construcción colectiva de significados matemáticos orientados al establecimiento de una conjetura.

En resumen, los signos producidos por losestudiantes pueden ilustrar sus significados personales, y en la mediación del profesor, pueden evolucionar a signos matemáticos asociados a significados matemáticos (una definición o teorema por ejemplo). Esta es la manera en que la TMS reconoce que el aprendizaje puede ser visto como la evolución de signos y tiene en cuenta que el artefacto está diseñado o es usado para desarrollar un contenido matemático en particular, el profesor debe propiciar esa evolución de signos yconocer de antemano el potencial semiótico del artefacto empleado. Mariotti (2009) sostiene que el profesor, puede emplear los artefactos como herramientas de mediación semiótica, y posibilitar la evolución de los signos producidos por los estudiantes.

2.2.2 POTENCIAL SEMIÓTICO DEL ARTEFACTO

Como se mencionó en el anterior apartado, las herramientas que se usan con propósitos educativos son fundamentales. De manera particular, para Mariotti(2012) el uso de los artefactos como mediadores en las aulas, genera nuevo conocimiento matemático en el contexto escolar. La palabra artefacto se empleará de manera general para hablar de objetos producidos por los humanos para fines específicos, e incluye formas de lenguaje, materiales concretos, herramientas físicas como el ábaco, las calculadoras, el compás, o un software especializado.Desde esta postura,los artefactos propician el surgimiento de significados relativos a los objetos matemáticos involucrados en la actividad, y tanto los signos, como ya se había mencionado en el apartado anterior, como los artefactos, son mediadores en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Cuando el profesor estudia de manera cuidadosa los artefactos y aprovecha su potencial, estos se pueden convertir en instrumentos para el aprendizaje.Uninstrumento posee dos componentes: uno artefactual, relacionado con las características de la herramienta misma, y uno cognitivo que está relacionado con la manera en que esa herramienta es utilizada por un sujeto cuando debe desarrollar una tarea (Camargo, Pérez, Plazas, Perry, Samper & Molina, 2013). En este punto, se reconocen dos relaciones: primero, entre el artefacto y los significados personales de los estudiantes que surgen al usarlo; y segundo, entre el artefacto y los significados matemáticos que el profesor reconoce en ese uso del artefacto.

Mariotti (2009) plantea que reconocer el potencial semiótico de los artefactos en términos de los significados personales y de significados matemáticos es lo que permite al experto emplearlos como herramientas de mediación semiótica,y posibilita que los estudiantes conecten sus significados personales, generados por el uso del artefacto, con significados matemáticos reconocidos por el experto y que pudieron ser también generados por el artefacto.

Esta relaciónentre los significados y el artefacto que puede ser definida de dos maneras, es lo que se reconoce en la TMS como el *potencial semiótico del artefacto*(Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008). Este potencial semiótico ayuda a establecer la estrecha relación entre los signos, el artefacto y el experto.

2.2.2.1 Potencial semiótico de los Software de Geometría Dinámica (SGD)

Teniendo en cuenta que el artefacto empleado en este estudio es el Software de geometría dinámica GeoGebra, en este apartado se presentalo que se considerapor algunos autores el potencial de estos software. En ese marco, se haceuna mención particular a la función arrastre con que estos cuentan.

En la geometría euclidianacada construcción corresponde a un teorema específico y cada teorema valida la pertinencia de la construcción realizada, así la importancia del uso de la regla y el compás está dada por la importancia de las construcciones en el trabajo de Euclides.De manera particular los SGD, por un lado corporeizan la geometría euclidiana, es decir, tienen incorporado en ellas ese conocimiento, razón por la cual las dependencias que se establecen tienen una explicación desde lo geométrico, y por otro lado, requieren ciertas maneras de hacer uso de ellos para lograr un objetivo específico. Así, para que una construcción se considere robusta, debe preservar:el orden y las ideas con los que fue hecha, los elementos ylas relaciones entre ellos; en caso contrario se considera blanda.Lo anterior es consecuencia de que los ambientes dinámicos ofrecen la novedosa posibilidad de la función *arrastre*. Dicha función ofrece la posibilidad de manipulación (con el mouse, o directamente con el dedo u otro instrumento en el caso de las pantallas táctiles), conservando la jerarquía entre los elementos empleados para su construcción, y en un lenguaje conocido por la comunidad de clase(Mariotti, 2000). La función arrastre puede ser empleada en cualquier construcción, y se mantienen las propiedades con las que se realizó dicha construcción. Dada esta particularidad del softwarese permite realizar un *test* que mantenga la correspondencia entre las propiedades construidas y las relaciones de dependencia que se generan.

Según Mariotti (2000), el software favorece también la transición de las ideas intuitivas de los estudiantes al campo teórico de la geometría, ya que favorece la visualización y la exploración; permite ademásrevisar objetos construidos, favorece establecer conjeturas yla discusión como una vía para llegar a lo que se pueda considerar como una justificación válida(Hanna, 2000). En este sentido, y de gran importancia en el presente estudio, los SGD tienen el potencial de i) favorecer el establecimiento de relaciones de dependencia entre conjuntos de propiedades y con ello el favorecimiento de la producción de conjeturas y ii) ofrecen la posibilidad de hacer ostensivoel conceptode un objeto que tiene un sujeto, por ejemplo si se emplea el software para hacer una construcción de un cuadrilátero que se pretende sea un cuadrado un observador puede interpretar la concepción de cuadrado que tiene ese sujeto. Una de las potencialidades de los entornos dinámicos está relacionada con la construcción de significados matemáticos que pueden ser expresados por los estudiantes mediante la interacción con el software.

2.2.3 MEDIACIÓN SEMIÓTICA DEL PROFESOR

Ya se ha descrito el potencial semiótico del artefacto de manera general y el delSGD en particular (e.g. GeoGebra).Ahora se describecómo el profesor puede emplearlos signos en un entorno educativo mediado por artefactos. Para esto,en primer lugar se presentala caracterización propuesta por la TMS deuna secuencia didáctica (a la que sus autoras denominan*ciclo didáctico*)y a propósito de esto, se describe la aproximación metodológica del grupo *Æ•G*. Finalmente se presentan las categorías que emplea la TMS para describir las acciones del profesor, así como las acciones del profesor que son descritas por el grupo *Æ•G*.

2.2.3.1 El ciclo didáctico

El proceso de mediación semiótica definido por la TMS es una secuencia de enseñanza que inicia con la producción de signos personales al realizar una tarea propuesta en la que se debe hacer uso del artefacto denominada *despliegue del potencial semiótico del* artefacto. El proceso de mediación semiótica se desarrolla en la construcción colectiva de signos con los cuales está de acuerdo la comunidad de clase. Estos signos a su vez están relacionados con la tarea realizada y con los objetivos de enseñanza que persigue el experto, es decir con la matemática que se espera sea aprendida por los estudiantes (Mariotti, 2012).

El uso que el profesor haga de los signos producidos por los estudiantes muestra que esa producción de signos y la mediación semióticallevada a cabo por el experto junto con el artefacto, están fuertemente ligadas a la tarea que fue propuesta para ser desarrollada con el artefacto. Particularmente,las autoras de la TMS muestran un significativo interés en el diseño de actividades que posibiliten tal proceso de mediación semiótica y proponen un marco teórico que emplea un modelo de enseñanza y aprendizaje específico, en el que se rompe el modelo de que sólo después de conocer el contenido matemático a estudiar es posible acceder a la práctica matemática(Mariotti, 2012).

En consecuencia, la mediación del profesor se favorece en un ambiente en el que se ha dispuesto una secuencia adecuada de tareas que requiere de intervenciones intencionadas para lograr objetivos educativos previamente establecidos. Para este efecto, la TMS propone el diseño e implementación de una secuencia de enseñanza iterada a la que ha dado el nombre de *ciclo didáctico*que sirve tanto para diseñar como para analizar la secuencia en sí misma (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008). Tal ciclo es una intervención didáctica específica que se repite y en la que se desarrollan diferentes componentesdel proceso de mediación semiótica (Mariotti, 2009).Dicho ciclo didáctico involucra tres tipos de actividades: i) actividadespropuestas con el artefacto para promover el surgimiento de significados relacionados con su uso. La actividad propuesta debe favorecer el intercambio entre los miembros de los pequeños grupos que están trabajando juntos para resolverla, ii) actividades que promueven la producción individual de signos (dibujos, construcciones, escritos, enunciados). Se espera que el profesor favorezca la evolución de los signos personales a signos matemáticos, y iii) actividades colectivas de discusión matemática con el fin de promover el surgimiento de signos compartidos.

Esta propuesta de ciclo didáctico,exige el liderazgode un experto,se desarrolla gracias a la mediación de dicho experto.En ese sentido, el rol del profesor es fundamental. A partir delos signos personales, debe favorecer su evolución hacia signos matemáticos aprovechando el potencial semiótico del artefacto. Esta orquestación[7] busca que esos signos matemáticos estén cercanos a los aceptados por la comunidad matemática.

Como se mencionó al inicio del presente capítulo, en este estudio el ciclo didáctico propuesto por la TMS, en este estudio tal ciclo está inspirado en la aproximación

[7]Término acuñado por una de las autoras de la TMS para describir el manejo del profesor durante una discusión matemática (Mariotti, 2012)

metodológica propuesta por el grupo de investigación Æ•G, con la cual pretenden favorecer la actividad demostrativa en cursos de geometría a nivel universitario.

2.2.3.1.1 Aproximación metodológica

Para presentar la aproximación metodológica empleada en este estudio, inicialmente se hace una descripción de algunos elementos clavedela aproximación que propone el grupoÆ•G, yque justifican el hecho de que ésta haya sido base para el presente estudio.Luego se describe la aproximación misma, listando los momentos que hacen parte de dicha propuesta.

Para la aproximación propuesta por el grupo Æ•G, lograr que los estudiantes posean un convencimiento personal de que es verdadero lo que se debe justificar esuna condiciónque se logra al proponer tareas de indagación en las que se exploran propiedades y relaciones de manera empírica o teórica (para aclarar lo que se entiende por estos tipos de exploración ver sección 2.1). Para favorecer la actividad demostrativa y la exploración teórica, las situaciones problema propuestas, al igual que en la TMS, hacen parte integral de las clases, y no se proponen como aplicación posterior a conocer la teoría matemática. El grupo Æ•Gproponeque se formulen*problemas abiertos*que propician exploraciones empíricas empleando un software de geometría dinámica favoreciendo quelos estudiantes puedan entender la situación planteada, establecer dependencias, validar afirmaciones, formular conjeturas y/o producir sus justificaciones en el sistema teórico que se ha construido con la comunidad de clase. Estos problemas abiertos les deben plantear preguntas a los estudiantes que los lleven a explorar los elementos conceptuales conocidos y/o elementos teóricos, para así lograr construir nuevos elementos para el sistema teórico aceptado por la comunidad de clase (Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013).

La aproximación metodológica se enfoca entonces en proponer tareas que propicien la actividad demostrativa que serán resueltas por los estudiantes en pequeños grupos haciendo uso de un software de geometría dinámica.

En consonancia con la TMS, el grupo Æ•Gestablece dos tipos de signos que son producidos por los estudiantes: el *signo-figura*,que corresponde a las figuras construidas por los estudiantes empleando un Software de Geometría Dinámica, que va acompañado de un informe escrito que reporta dicha construcción, y el *signo-enunciado* que corresponde a los enunciados con contenido matemático producidos por los estudiantes(Camargo, Pérez, Plazas, Perry, Samper & Molina, 2013). Para el caso del presente estudio, los signos que producen los estudiantes serán clasificados en tres tipos: i) Signo construcción (mismo *signo-figura no necesariamente acompañado de un reporte*): Se refiere a las construcciones realizadas por los estudiantes con el artefacto para dar solución al problema que se les propone, ii) Signo enunciado-concepción: Se refiere a las afirmaciones (escritas o verbales) realizadas por los estudiantes que ayudan a precisar cuál es su significado personal de un objeto o relación geométrica, iii) Signo enunciado-conjetura: Se refiere a las afirmaciones (escritas o verbales) realizadas por los estudiantes que están relacionadas con la conjetura que da solución al problema propuesto. En el presente estudio, tanto los signos construcción como los signos enunciado pueden ser clasificados por el profesor como del artefacto o como matemáticos, y según el uso que él les de, podrían ser además empleados como signos pivote.

De manera específica, esta aproximación pretende que:

1. Los estudiantes en grupos pequeños, planteen soluciones a un problema abierto, con el apoyo del software.
2. Los estudiantes reportan el trabajo en pequeños grupos y se proponen conjeturas.
3. El trabajo con el artefacto es retomada por el profesor para que los estudiantes produzcan signos con los que él pueda mediar.
4. Se analiza tanto el uso del instrumento como la información que surgió de la exploración y realiza una validación colectiva de los signos producto del uso del artefacto.

5. De manera privada, el profesor decide qué signos-enunciado serán empleados e infiere los significados personales que han emergido.
6. Los signos que sean utilizados como pivote son empleados por el profesor para que los significados personales evolucionen.
7. Finalmente, los signos matemáticos son institucionalizados (aceptados por la comunidad de clase) y el profesor favorece la negociación de significados, los signos son reconstruidos a partir de los significados matemáticos aceptados.

Esta aproximación metodológica es un punto de referencia en el presente estudio para adaptarlo al contexto de estudiantes de octavo grado y establecer un ciclo didáctico análogo al propuesto por la TMS. Para este estudio, se realizará una adaptación de la mencionada aproximación metodológica y será empleada de manera sistemática como ciclo didáctico en las clases. En la sección 3.3.2.1 del capítulo de metodología, se presenta la aproximación metodológica desarrollada en el presente estudio.

2.2.3.2 Acciones del profesor

A continuación se exponen las categorías de intervención del profesor enunciadas por la TMS para analizar la mediación semiótica del profesor. Estas categorías, corresponden a acciones que sus autoras observaron como recurrentes y en las que, afirman, es posible reconocer la intención del profesor para explotar el potencial semiótico del artefacto Cabri(Mariotti, 2009). Luego de esto, se presentanacciones propuestas por el grupo Æ•Gpara abordar el análisis dela mediación semiótica delprofesor.

Para describir la mediación del profesor, las cuatro categorías de intervención del profesor propuestas por la TMS son: volver a la tarea, enfocarse en ciertos aspectos del uso del artefacto, pedir una síntesis y proporcionar una síntesis. Las dos primeras categorías buscan promover el potencial semiótico del artefacto y la co-construcción de signos compartidos, las dos últimas buscan promover la evolución del punto de vista personal, signos personales, signos del artefactohacia los signos matemáticos al poner en cuenta el punto de vista general.

1. Volver a la tarea: Tipo de intervenciones del profesor encaminadas a reconstruir el contexto de la tarea, particularmente la manera en que se hizo uso del artefacto para solucionar la tarea. Usualmente este tipo de intervención, genera la producción de signos del artefacto.
2. Enfocarse en ciertos aspectos del uso del artefacto: Tipo de intervenciones del profesor (incluye gestos, tono de la voz) encaminadas a dirigir la atención de los estudiantes hacia algún aspecto de su experiencia con el artefacto, como complemento al primer tipo de intervención, para especificar los aspectos sobre los que se vuelve a la tarea. Dicha experiencia sobre la que el profesor dirige la atención puede haber sucedido en cualquier momento pasado.
3. Solicitar una síntesis: Intervenciones en las que el profesor pide que se haga explícita la comprensión del estudiante para que se evidencien los signos personales. Con esto se genera la posibilidad de compartir significados en la interacción social.
4. Proveer una síntesis: Intervenciones en las que el profesor retoma signos particulares que emergieron en la clase para establecer su uso en el discurso de la clase y de manera más específica en el discurso matemático. Estas intervenciones explícitamente ratifican la aceptación de un signo, y el uso y el estatus de este en el contexto matemático.

El grupo Æ•Gha identificado acciones propias y menos generalespara describir de manera más detallada las acciones del profesor. Dichas acciones básicamente se engloban en las siguientes categorías centradas en cinco aspectos importantes:

1. Conceptualizar objetos y relaciones.
2. Comprensión yuso del enunciado condicional.
3. La conjetura como solución al problema propuesto.
4. El teorema al que se quiere llegar.

5. Formación de nociones de Teorema, Postulado y Definición.

Sin perder de vista que la aproximación metodológica del grupo Æ•Ginspiró el ciclo didáctico diseñado para el presente estudio, en la sección 3.3.3.2se detallanestas categorías así comolos descriptores de las acciones que las componen.

3 METODOLOGÍA

En este capítulo se hace referencia al proceso que orientó la realización de este estudio. Está estructurado de tal manera que presenta una caracterización de la población, una descripción del tipo de estudio que se realiza y una descripción de las fases del mismo, con las acciones y etapas que se establecieron para desarrollar cada fase. Específicamente, tales fases y sus respectivas etapas son: fase depreparación del estudioconstituida por las etapas revisión bibliográfica y establecimiento de los referentes teóricos, y diseño de las actividades; fase de experimentación constituida por las etapas de implementación de la secuencia de actividades propuestas y recolección de información; fase de análisis constituida por las etapas de selección de los datos, establecimiento de las categorías de análisis, análisis de los datos bajo las categorías establecidas y presentación de resultados del análisis.

3.1 CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN

Esta experiencia fue llevada a cabo en la institución, de carácter privado, The English School (Bogotá, Colombia). Esta institución cuenta con salas de computadores con pantalla táctil; además, cada uno de los salones cuenta con tableros inteligentes con un software dirigido a propósitos educativos que fueron empleados por la profesora para la implementación de la secuencia didáctica del presente estudio. Aunque la institución cuenta con tales recursos, era usual que hasta el momento de laimplementación de esta secuencia, la utilización de estos elementos no fuera incluida en la práctica docente de los profesores que laboran ella, aunque es una exigencia de la institución. En lo que sigue, se hará una descripción del ambiente frecuente de clase del que se tomaron los datos para desarrollar este estudio. Con miras a establecer tal descripción, en el año anterior al que se realizó la implementación de esta experiencia, se llevó a cabo una recolección de información sobre cuál era el rol del profesor y de los estudiantes en la clase de matemáticas. Para tal recolección se tuvo en cuenta el currículo del colegio, entrevistas no estructuradas con el profesor del curso y videos de sesiones de clase en las que se abordabantemáticas de la geometría. Esta experiencia se desarrolló en un curso de geometría con un grupo de 13 estudiantes de grado octavo(calendario B), cuyas edades estaban entre 14 y 16 años. A continuación se presenta a grandes rasgos dicha descripción.

En esta institución es usual que en los cursos de secundaria, se concentre en una época específica del año todos los temas relativos al estudio de la geometría. En este caso, tal época fue al finalizar el año 2012 y se desarrolló durante siete semanas; en cada semana había dos sesiones de 45 minutos destinadas al trabajo en geometría. Para las sesiones de clase, no se había propuesto el uso de algún SGD ni tampoco el uso de instrumentos como la regla y el compás. Además no fueron propuestas a los estudiantes actividades que pretendieran abordar procesos de conjeturación y justificación. Era costumbre que los contenidos de grado octavo en relación con geometría, se centraran en cuatro asuntos: revisar teoremas establecidos por autoridad en años anteriores (dicho por un profesor o enunciado en el libro de texto), trabajar en los teoremas relativos a circunferencias, proveer los criterios de congruencia de triángulos para aplicarlos en problemas propuestos como ejercicio, y plantear problemas en los que la semejanza de triángulos fuera utilizada para resolverlos. La mayoría de las temáticas expuestas estaban dadas en el libro de texto y era decisión del profesor emplearlo o no. Durante las clases los estudiantes en su cuaderno hacían ejercicios de práctica de manera individual.

En este curso, el papel del profesor en el proceso de enseñanza consistía en exponer la temática de turno, ilustrar con ejemplos algunos de los conceptos abordados y proponer ejercicios rutinarios que él mismo resolvía, para luego proponer a los estudiantes ejercicios similares. Durante el tiempo de trabajo individual, el profesor se dirigía al estudiante que lo solicitaba para contestar las preguntas que surgían.

En las clasesde los estudiantes,que correspondían al área de tecnología(*ITInformation technology* y *DTDesign technology*), era usual que se emplearan los salones de computadoresusando aplicaciones del*software Microsoft office* con propósitos educativos (e.g. *excel*, *power point*).

Cabe aclarar que la profesora del curso en el que se llevó a cabo este experimento es la misma autora del presente documento, cuenta con el título de licenciada en matemáticas de la *UPN* y ha tenido experiencia en cursos de matemáticas desde hace 15 años. Sin embargo no ha tenido a su cargo cursos de geometría en los que haya hecho uso de algún SGD ni ha recibido formación en cómo emplear alguno, más allá de la exploración que ha realizado de manera autónoma.

3.2 TIPO DE ESTUDIO

Este es un estudio cualitativo-descriptivo en el que la profesora es también investigadora y las mismas acciones de este son objeto de análisis. Específicamente, es un experimento de enseñanza que, tal como lo describen Steffe & Thompson (2000, en Molina, Castro, Molina & Castro, 2011), es un tipo particular de investigación de diseño en la que sus participantes son un investigador docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores observadores. Estos estudios tienen como característica propia que el profesor docente es usualmente profesor investigador; así se logra que la información sea de primera mano. Un estudio bajo esta metodología se realiza para generar o poner a prueba una hipótesis durante el experimento, siendo factible reformularlas(Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). Particularmente,en el presente estudio se diseñó e implementó una secuencia didáctica que pretendía favorecer la actividad demostrativa mediante la mediación del profesor y del uso de un SGD. Específicamente, se ilustraelpapel del profesor en el marco de una aproximación metodológica a la luz de la TMS.

De acuerdo con Cobb & Gravemeijer (2008, citado en Molina, Castro, Molina & Castro, 2011) en los experimentos de enseñanza se distinguen tres grandes fases, que en términos generales, también están presentes en el presente estudio:

1. Preparación del experimento: se define el problema, objetivos de investigación e instruccionales, metodologías y se enmarca el experimento en un contexto teórico más amplio.
2. Experimentación para promover el aprendizaje: en donde ocurren ciclos iterados de intervenciones en el aula, recolección de datos, revisión y reformulación de hipótesis y de intervenciones.
3. Análisis retrospectivo de los datos, en donde existe una fuerte relación entre el diseño de las tareas propuestas y la investigación, y en donde, a la luz de una teoría, se analizan los datos recolectados y se proveen unos resultados.

3.3 FASES DEL ESTUDIO

Para el presente estudio, el trabajo entre la profesora investigadora y el asesor del estudio fueron claves en cada uno de los momentos de aplicación del mismo, por cuanto las fases de planeación, experimentación y análisis siempre fueron trabajadas de manera conjunta, excepto las acciones mismas de la gestión en el aula que estuvieron a cargo de la profesora investigadora. Las acciones que se pueden identificar en este estudio están esbozadas en la tabla3-1y han sido inspiradas en las acciones presentadas por Molina, Castro, Molina & Castro (2011) para cada una de las fases de un experimento de enseñanza.

Tabla 3-1:

Fases y acciones del presente estudio

Preparación del estudio	• Determinar la TMS como herramienta para el diseño y análisis del estudio. • Definir el problema cumbre que sería abordado por los estudiantes al finalizar el estudio. • Establecer los elementos geométricos que debían ser abordados para la conformación del sistema teórico local. • Tomando como base la aproximación metodológica para la enseñanza del grupo Æ•G, diseñar la secuencia de actividades que se desarrollarían en el aula y establecer los problemas que serían planteados a los estudiantes[8], de tal manera que se abordaran los elementos geométricos del sistema teórico que se conforma. • Establecer una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado de cada sesión de clase y el tipo de intervenciones que podría hacer la profesora para propiciar la evolución de signos de los estudiantes.
Experimentación de la secuencia	Antes de cada sesión de clase: • Realizar un libreto y planeación de cada sesión con los que sea posible: -Obtener información sobre el trabajo realizado en la clase. -Establecer objetivos didácticos e investigativos de los problemas propuestos. -Ultimar el diseño de los problemas incluyendo las conjeturas a las que se podía llegar.
	Durante cada sesión de clase: • Recoger datos por distintos medios, según fuera pertinente. • Modificar el diseño de la sesión de clase propuesto de manera inicial si es que se veía necesario.
	Después de cada sesión de clase: • Complementar la planeación previamente diseñada con observaciones pertinentes de cómo se desarrolló la sesión de clase, con mejoras que deban ser implementadas o con aspectos a retomar en la próxima sesión. • Si era necesario, reformular la sesión siguiente teniendo en cuenta lo sucedido en el aula.
Análisis retrospectivo de los datos	• Recopilar y organizar la información. • Analizar de manera general los datos del estudio (i.e. decantar el conjunto de los datos recogidos para establecer qué apartados servirán para ser analizados bajo los referentes teóricos) • Determinar las categorías del análisis con base en los referentes teóricos • Analizar los datos bajo las categorías establecidas • Presentar los resultados del análisis

[8]En la sección 3.3.1.2 se incluyen los problemas que fueron planteados a los estudiantes para conformar el sistema teórico local

Para definir las acciones de cada una de las tres fases (descritas en la tabla 3-1), se establecieron las que se llamarán etapas del estudioque están descritas a continuación.

3.3.1 ETAPAS DE LA FASE DE PREPARACIÓN DEL ESTUDIO

3.3.1.1 Revisión bibliográfica y establecimiento de los referentes teóricos

Esta revisión estuvo encaminada a decantar los referentes teóricos que soportan la inclusión de artefactos en el aula y aquellos que hacen referencia al papel del profesor que los emplea parafavorecer el proceso de enseñanza aprendizaje. Estos referentes apuntan tanto a la aproximación metodológica que sería implementada, como al posterior análisis y categorización que se realizaría de los datos recogidos. Esta revisión, posibilitó establecer los dos referentes teóricos que se explicitaron en el capítulo 2, a saber la demostración y la teoría de la mediación semiótica.

3.3.1.2 Diseño de las actividades

El propósito de la investigadora era lograr que los estudiantes hicieran actividad demostrativa. Por tal razón, esto se tuvo en cuenta al momento de diseñar la secuencia didáctica llevada a cabo.

La secuencia de actividades consistió de un conjunto desituacionesque fueabordado durante siete semanas, cada una de ellas con dos sesiones de clase. Un primer subconjunto de situaciones involucró asuntos que fueron considerados como introductorios y de base para poder proponer las demás situaciones. La primera de estas situacionesestaba encaminada a realizar acciones de visualización; los estudiantes tenían la tarea de reflexionar sobre afirmaciones que se hacían respecto de las imágenes o videos que se les mostraban. Para esta presentaciónse hizo usode unsoftware específico con el que cuenta el tablero inteligente. Dosnormas de clase que adquirieron especial importancia para los estudiantes a partir de estas presentaciones fueron: “No todo es como se ve” y “debemos ver más allá de lo que se ve”. La segunda situaciónestaba encaminadaa actividades de exploración con el software GeoGebra, con las que se pretendía que los estudiantes se familiarizaran con el artefacto; específicamente se les presentó una construcción previamente realizada, para la que ellos debíanestablecer las propiedades geométricas invariantes luego de manipularla, así se introducían algunas de las diferentes herramientas y funciones de la geometría dinámica. La tercera, estaba encaminada a una actividad de construcción en la que los estudiantes debían empleartambién GeoGebra para realizar la construcción de la figura de la segunda situación, a partir de las propiedades geométricas establecidas y ya consensuadas por la clase. En el Anexo 3a, se incluye la construcción presentada a los estudiantes en la segunda situación y las preguntas que los estudiantescontestaron al respecto de dicha actividad, primero de manera individual y luego en los pequeños grupos.

Con estas actividades, se establecieron algunos de los elementos teóricos (definiciones de objetos de la geometría) del sistema teórico local que se conformaría con la comunidad de clase;a su vez, dieron lugar a precisar asuntos de lenguaje (representaciones figurales, escritas y orales). Se estableció la necesidad de que los estudiantes llevaran un diario de campo, en el que se registrasen todos los datos relevantes de las sesiones de clase (hechos geométricos, definiciones, conclusiones, percepciones, lenguaje geométrico –representaciones gráficas y escritura- etc.).

Luego de estas actividades introductorias, se diseñó unnuevo conjunto de situaciones. Cada una de ellas tenía como objetivo agregar un elemento más al sistema teórico local que se estaba conformando. Con ellas, se esperaba que los estudiantes realizaran actividad demostrativa en el marco de la aproximación metodológica empleada.

El diseño de dichas situaciones se realizó de tal manera que se determinó en primera instancia un problema pertinente para el currículo y acorde con los objetivos establecidos para la geometría de grado octavo, en el que además, se hiciera uso del artefacto GeoGebra. Para llegar a la construcción de un sistema teórico local, se le propuso a los estudiantes un ciclo didáctico tendiente a conformar de manera colectiva en la comunidad de clase, todos los elementos teóricos necesarios para resolver un problema (al que se le dio el nombre de *Problema Cumbre*) que sería presentado como último elemento a agregar en tal sistema. En cada una de las situacionesproblema propuestas, se buscó tener elementos para establecer cuál podría ser elpapel del profesor como mediador. En el proceso de solución de cada problema se pretendía propiciar la producción de signos por parte de los estudiantes; estos signos son los que la profesorareconociócomo del artefacto, matemáticos o pivote.

El enunciado del Problema Cumbre fue el siguiente:

Dados tres puntos no colineales A, B y C en un mismo plano, construir el punto A' que es simétrico axial de A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$***.***   ***Exploren con la herramienta arrastre cada uno de los puntos. ¿Qué notan?***   ***Al arrastrar el punto C, ¿qué sucede con el punto A'?***   ***Escriban una conjetura***

Producto de este problema, se esperaba una conjetura similar a la siguiente:

> *Si A, B y C son tres puntos no colineales en el mismo plano y el punto A´ es el simétrico axial de A con respecto a* $\overleftrightarrow{BC}$*, entonces A´ es un punto de la circunferencia con centro en B y radio* $\overline{AB}$*.*

Al momentode tener definido el Problema Cumbre, se pasó a establecer los que serían los problemas tendientes a aportar los elementos para el sistema teórico local que se necesitaban para su solución.

A continuación se presentan los problemas planteados a los estudiantes teniendo en cuenta que cada uno tieneun contenido geométrico en relación con los elementos necesarios para abordar el Problema Cumbre, tanto en lo que tiene que ver con la conjetura respectiva, como con su justificación. Dichos problemas giran en torno a los siguientes asuntos: criterios de congruencia de triángulos, par lineal, simetría axial yrecta mediatriz de un segmento. Se describe, grosso modo, lo que sucedió en clase:

> ***Problema 1: Usando los ángulos y lados dados, construyan otros triángulos teniendo en cuenta las condiciones planteadas en la tabla[9].***
>
> 1. ***¿En qué casos pudieron construir más de un triángulo?***
> 2. ***¿En qué casos pudieron construir sólo un triángulo?***
> 3. ***Escriban qué conclusiones pueden establecer a partir de la información que consignaron en la tabla.***

Para abordar el problema, cada grupo de estudiantes trabajó en su propio computador; el grupo contaba con una tabla que debía ser completada teniendo en cuenta las construcciones con las condiciones planteadas en ella y con un archivo, realizado en el software del tablero inteligente, que presentaba un triángulo diferente al de los demás grupos. En dicho software se pueden mover las figuras construidas haciendo uso del mouse o en la pantalla táctil directamente (en el anexo 3b se incluyen tanto la tabla como imágenes del archivo). Concretamente, con este problema se pretendía que los estudiantes detectaran invariantes y los corroboraran al realizar construcciones libres con el archivo presentado. A partir de la exploración empírica, las construcciones y conclusiones establecidas por los estudiantes en los pequeños grupos, se realizó la posterior presentación de las mismas ante la comunidad de clase. En la mediación de la profesora con los signos producidos, empleando ejemplos y contraejemplos, se estableció la que sería respuesta a la tabla aceptada por la comunidad de clase.Vale la pena precisar que los estudiantes debían determinar en qué casos era posible hacer un triángulo que fuera congruente con el triángulo dado (e.g., al emplear los tres lados, puedo construir un solo triángulo congruente al dado). De la actividad, surgió el hecho geométrico de los criterios de congruencia para triángulos, reconocido como un nuevo elemento para el sistema teórico local.

[9]Ver Anexo 3b

Tal hecho se presenta a continuación:

Hecho geométrico de criterios de congruencia de triángulos: i) dados los $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *con* $\overline{BC}$ *congruente con* $\overline{EF}$, $\angle C$ *congruente con* $\angle F$ *y* $\overline{AC}$ *congruente con* $\overline{DF}$, *entonces* $\triangle ABC$ *es congruente con* $\triangle DEF$ *(LAL), ii) dados los* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *con* $\angle B$ *y* $\angle E$ *rectos,* $\overline{BC}$ *congruente con* $\overline{EF}$ *y* $\overline{AC}$ *congruente con* $\overline{DF}$, *entonces* $\triangle ABC$ *es congruente con* $\triangle DEF$ *(HC), iii) dados los* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *con* $\overline{BC}$ *congruente con* $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ *congruente con* $\overline{DF}$ *y* $\overline{AB}$ *congruente con* $\overline{DE}$ *entonces* $\triangle ABC$ *es congruente con* $\triangle DEF$ *(LLL), iv)dados los* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *con* $\angle A$ *congruente con* $\angle D$, $\overline{AB}$ *congruente con* $\overline{DE}$ *y* $\overline{AC}$ *congruente con* $\overline{DF}$ *y* $\angle B$ *congruente con* $\angle E$ *entonces* $\triangle ABC$ *es congruente con* $\triangle DEF$ *(ALA), v)dados los* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *con* $\angle A$ *congruente con* $\angle D$, $\angle B$ *congruente con* $\angle E$ *y* $\overline{BC}$ *congruente con* $\overline{EF}$ *entonces* $\triangle ABC$ *es congruente con* $\triangle DEF$ *(AAL).*

Problema 2: Dadas las figuras en el archivo par lineal:

1. ***Establezcan una definición para ángulos que conforman par lineal.***
2. ***Realicen en GeoGebra la construcción de un par lineal.***
3. ***Exploren la construcción. ¿Qué pueden afirmar sobre sus medidas?***
4. ***Escriban una conjetura teniendo en cuenta lo que afirmaron en el punto 3.***

Para el problema 2, cada grupo de estudiantes contaba con un archivo de Word que contenía una tabla en la que se presentaronconstrucciones de ejemplos y no ejemplos de ángulos par lineal (ver Anexo 3c). El contenido geométrico que esta situación proveía, en relación con el problema cumbre, era la definición de ángulos par lineal y dos hechos geométricos relativos a estos.Se esperaba que los estudiantes,a partir de la visualización geométrica, determinaran las propiedades de dos ángulos que son *par lineal*, y de allí obtener información que los llevara a producir una definición de*ángulos par lineal*[10].

[10]Definición de ángulos par lineal: Dos ángulos conforman un par lineal si comparten un lado y los lados no comunes son rayos opuestos

Con relación al ítem 3, producto de la exploración dinámica de las construcciones de los estudiantes, ellos lograron establecer invariantes y se formularon las siguientes conjeturas:

Hecho geométrico medida par lineal: Si dos ángulos conforman un par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180°.

Hecho geométrico par lineal congruente: Si dos ángulos conforman un par lineal y son congruentes, entonces los ángulos son rectos.

Para facilitar la justificación de las conjeturas, se les proveyó a los estudiantes fichas con información. En el anexo 3d, se muestra en qué consistía la actividad de justificación.

Problema 3: Explore la construcción realizada con GeoGebra ***1. ¿Qué puede decir del movimiento de los puntos?*** ***2. Activen la herramienta rastro, ¿qué propiedades tiene dicha construcción que permanecen al activar la herramienta rastro?*** ***3. Escriba las afirmaciones que puede hacer a partir de su exploración***

Para el tercer problema, cada grupo de estudiantes contaba con una construcción en GeoGebra previamente realizada por la profesora, en la que presentaba un punto A y su simétrico axial P respecto a una recta. Tal recta se había ocultado en la construcción. El contenido geométrico que se pretendía incluir con miras al Problema Cumbre, erala *Definición de simetría axial*. A partir de las soluciones de los estudiantesy con la mediación de la profesora se formuló la siguiente definición aceptada por la clase:

La simetría axial respecto a una recta r es una transformación que a cada punto A en el plano le hace corresponder un punto P tal que:

1) *La recta r es perpendicular a* $\overline{AP}$.
2) *La recta r y el segmento* $\overline{AP}$ *se intersectan en el punto medio del segmento.*

Con el anterior problema, también se esperaba que gracias a la exploración dinámicay la visualización realizada por los estudiantes en el artefacto, se produjeranenunciados que hicieran referencia a la recta eje de simetríay se establecieran propiedades de ella.Con la mediación de la profesora yal agregar al sistema teórico local la definición de recta mediatriz de un segmento[11], se escribió una nueva definición de simetríaaxial enla quese incluyó el elemento mediatriz:

> *La simetría axial respecto a una recta r es una transformación tal que a cada punto A del plano le hace corresponder un punto P, de manera que la recta r es la mediatriz del $\overline{AP}$.*

Problema 4: Construyan un segmento AB. Hallen un punto que equidiste de los extremos del segmento AB. ***¿Pueden hallar más puntos que equidisten de los extremos del segmento AB?*** ***¿Qué condición cumplen esos puntos?*** ***Escriban una conjetura***

Con este problema, los estudiantes debían producir una conjetura asociada a la mediatriz del segmento. Producto de la exploración dinámica, el reconocimiento de relaciones de dependencia entre objetos, propiedades involucradas en el problema, se esperaba que los estudiantes establecieran como invariante que cualquier punto que pertenezca a dicha recta, equidista de los extremos del segmento. El hecho geométricoque se agregó al sistema teórico, a partir de la producción de los estudiantes, fue el siguiente:

> *Si una recta r es mediatriz del segmento $\overline{AB}$, entonces todos los puntos de r equidistan de A y de B.*

[11] A partir de una construcción presentada a los estudiantes en GeoGebra de $\overline{AB}$ y su mediatriz, los estudiantes establecieron dos condiciones: la recta contiene al punto medio del segmento y es perpendicular a él. Se construyó la siguiente definición: La recta mediatriz de $\overline{AB}$ es una recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

Además de resolver estos problemas, también se realizaron actividades tendientes a abordar otros elementos que pasaron a conformar parte del sistema teórico local que se constituyó para realizar la fase de experimentación que se presenta a continuación. En el anexo 3e, se encuentra la lista de las definiciones y los hechos geométricos que fueron establecidos por la comunidad de clase.Los estudiantes contaron con el registro escrito del sistema teórico local en la medida que se agregaron dichos elementos al sistema.

3.3.2 ETAPAS DE LA FASE DE EXPERIMENTACIÓN

Después de la planeación del estudio, descrita en el anterior apartado, se realiza la fase de experimentación. En las etapas de esta fase, se hacen evidentes dos tipos de intervenciones: las que corresponden al profesor y las que corresponden al investigador. Es importante notar que no necesariamente todas las intervenciones se atribuyen de manera exclusiva a uno o al otro, pues la profesora es también investigadora en este estudio.

3.3.2.1 Implementación de la Secuencia de Actividades Propuestas

3.3.2.1.1 *Gestión del profesor*

Para esta etapa de implementación, se tuvieron en cuenta la acciones que fueron reportadas para la aproximación metodológica del grupo. La gestión de la profesora estuvo centrada particularmente en:

1. Plantear problemas abiertos a los estudiantes quienes estaban organizados en grupos de 3 o 4. Dichos problemas fueron diseñados para ser resueltos con el apoyo de GeoGebra.
2. Favorecer la producción de signos construcción y signos enunciado (ver sección 2.2.3.1.1) al tiempo que se realiza el trabajo en los pequeños grupos.
3. Retomar el trabajo realizado por los estudiantes para que produzcan signos construcción o enunciado con los que el profesor pueda mediar.

4. Realizar una validación colectiva de estos signos construcción o enunciado producidos.
5. Decidir de manera privada qué signos serían empleados e inferir los significados personales que han emergido, categorizando dichos signos como del artefacto o signos pivote con los que la profesora, en su mediación, podría hacerlos evolucionar a signos matemáticos aceptados por la comunidad de clase.
6. Emplear los signos que la profesora haya escogido para que los significados personales evolucionen.
7. Institucionalizar los signos matemáticos aceptados por la comunidad de clase luego de la negociación de significados que se ha dado en la clase.

En el Anexo 3fse incluye uno de los libretos que se desarrollaron, previos a la realización de cada sesión de clase, acompañado de la planeación de las tareas propuestas. Como ya se había mencionado en la Tabla 3-1,esta planeación también incluye las observaciones de la profesora luego de cada sesión de clase.

3.3.2.2 Recolección de Información

3.3.2.2.1 *Gestión del investigador*

Para esta etapa de recolección de información, las clases fueron filmadas. Se tienen registros escritos de la producción de los estudiantes, algunos de ellos haciendo uso de formatos electrónicos como grabaciones en video, archivos enviados por los estudiantes, imágenes tomadas del trabajo realizado por los estudiantes con el software GeoGebra o capturas de pantalla sobre las que se realizaron anotaciones a mano empleando el tablero electrónico y el software con que dicho tablero cuenta. El propósito de contar con estos formatos fue tener más de una fuente de información con la cual la profesora investigadora pudiera realizar un análisis de los signos producidos por los estudiantes, además de grabaciones del desarrollo de las tareas que son el objeto de análisis de este escrito. De manera adicional, como se había mencionado, se realizó un protocolo y una planeación que fue enriqueciéndose con las observaciones de la profesora al finalizar las clases de manera tal que los registros obtenidos deriven también en datos de investigación.

3.3.3 ETAPAS DE LA FASE ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE LOS DATOS

3.3.3.1 Selección de los datos:

Se realizó una recopilación y organización de los datos, para así poder realizar un análisis general de los mismos. Es decir se decantó el conjunto de los datos recogidos para escoger cuáles de ellos servirían para ser analizados empleando los referentes teóricos del estudio, considerando aquellos datos que a la luz de la teoría de la mediación semióticapudieran ser objeto de análisis. Tal escogencia se realizó teniendo en mente que las situaciones debían evidenciartanto la mediación de la profesora relativa a los signos de los estudiantes, como la práctica de la actividad demostrativa en su proceso de conjeturación, haciendo uso del software GeoGebra como artefacto. No de manera exclusiva se analizará la producción de un único grupo. Estos análisis se presentan en el Capítulo 4 de manera detallada.

3.3.3.2 Establecimiento de las categorías de análisis:

Para abordar el diseño de categorías de análisis, se tomaron como base las acciones propuestas por el grupo Æ•G y la TMS. Como se había mencionado en el Capítulo 2, las categorías de la TMS son demasiado generales para el propósito de describir y analizar la mediación semiótica de la profesora en el curso de geometría en grado octavo, así que las categorías de análisis que se establecieron*a priori* para el presente estudio, son las categorías propuestas por el grupo Æ•G(Samper, Perry, Camargo, & Molina, 2011). Tales categoríasatienden al propósito del presente estudio, pues describende manera muy específica la mediación semiótica del profesor. Aunque durante las sesiones de clase la profesora realizó acciones descritas dentro de las cinco categorías del grupo, se determinó que las categorías que se usarían para el análisis serían solo las tres primeras, pues están centradas en la conceptualización de objetos y relaciones, la comprensión y uso del enunciado condicional y la conjetura como solución al problema propuesto. Esto se hizo teniendo en cuenta que las sesiones de clase escogidas inicialmente para el análisis están centradas en el proceso de conjeturación.En las tablas3-2 a la 3-6, se ilustran tales categorías con sus correspondientes indicadores, es decir, acciones que el profesor puede llevar a cabo en el marco de cada categoría(Samper, Perry, Camargo, & Molina, 2011).

Las categorías que eventualmente surjan como nuevas o emergentes, serán explicitadas en el Capítulo 4 en el momento mismo en el que aparezcan al hacer el análisis de las sesiones de clase seleccionadas.

Tabla 3-2:

Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la conceptualización de objetos y relaciones

I. Conceptualización de objetos y relaciones	
1.	(concepción-artefacto) Elicitar concepción sobre objetos matemáticos a través de lo hecho con el artefacto para detectar imágenes conceptuales reducidas o deficientes, para que entiendan qué propiedades se requieren para que la figura represente el objeto que se quiere, construir buenas definiciones.
2.	(enunciado sintético) Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado, para que la proposición se asemeje a la forma como se comunica en la matemática, debe usarse el sistema teórico para ello, las proposiciones deben ser sintéticas y económicas.
3.	(ubicación objetos) Explicitar o destacar qué elementos del sistema teórico están involucrados en lo que se afirma. Interpretación del profesor para mostrar que los objetos involucrados en la proposición tienen un lugar en el sistema teórico, para legitimar la afirmación. Control teórico de objetos involucrados en la afirmación.
4.	(abordar imprecisiones) Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablado) para impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso de la comunidad de la clase.
5.	(construcción-sistema teórico) Promover que las representaciones hechas con el artefacto estén supeditadas al sistema teórico disponible para hacer ostensivas las propiedades dadas en las definiciones, postulados y teoremas.
22.	(significado personal-concepto) Indagar acerca del significado personal de un concepto. Preguntar por el significado personal de un objeto o relación de índole geométrica con el propósito de determinar su correspondencia con la solución del problema.

Tabla 3-3:

Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la comprensión y uso del enunciado condicional

II. Comprensión y uso del enunciado condicional como objeto	
6.	(artefacto-antecedente y consecuente) Revisar o pedir revisión del uso del artefacto de las construcciones hechas con base en un relato como preparación para determinar si lo que se pone de antecedente se corresponde con lo construido, ya sea directamente o con el arrastre, y en el consecuente con lo obtenido.
7.	(identificación-antecedente y/o consecuente) Identificar o solicitar identificación de condiciones construidas y propiedades encontradas, paso previo para determinar si lo que se pone de antecedente se corresponde con lo construido, ya sea directamente o con el arrastre, y en el consecuente con lo obtenido.
8.	(dependencia-conjetura) Utilizar lo hecho y obtenido con el artefacto como referencia para evaluar si la conjetura expresa la dependencia que el artefacto hace ostensiva.
9.	(conjetura-condicional) Pedir el uso o usar expresión de conjeturas en formato condicional para explicitar la relación de dependencia y con qué se cuenta para comenzar la demostración y qué es lo que se debe demostrar.
10.	(condicional-ejemplos y contraejemplos) Destacar elementos fundamentales que caracterizan una condicional y una bicondicional, y destacar cómo se pueden aprovechar para producir ejemplos o contraejemplos, y cómo se modifica la hipótesis de la condicional para poder hacer una demostración por contradicción.
11.	(enriquecer signos) Enriquecer signos con recursos gráficos o icónicos para favorecer la interpretación del significado de lo que establece una condicional.

Tabla 3-4:

Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la conjetura como solución al problema propuesto

III. El problema y su solución (la tarea y la conjetura como solución al problema)	
12.	(problema-control teórico) Controlar el universo teórico en que se va a trabajar para asegurar que los elementos matemáticos que subyacen a las propuestas de solución del problema estén enmarcados en el sistema teórico con que se cuenta o permitan la ampliación del sistema teórico local en el que se enmarca el problema.
13.	(síntesis-foco de atención) Sintetizar o recoger ideas que establecen el foco de atención para destacar de los signos de los estudiantes elementos útiles para la producción de la conjetura.
14.	(indagar sobre signos) Indagar sobre los signos producidos por los estudiantes para rescatar elementos útiles para la producción de la conjetura, o para

	favorecer que los estudiantes revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás.
15.	(modelo de actuación) Proveer un modelo para enfrentar la resolución matemática de un problema (en el análisis, en formulación de conjetura) con el fin de favorecer la emergencia de signos que conduzcan a la conjetura que soluciona el problema.
11.	(enriquecer signos) Enriquece signos con recursos gráficos o icónicos para favorecer la interpretación de soluciones que se dan al problema.
4.	(abordar imprecisiones) Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablado) e impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso matemático.
16.	(elementos-enunciado) Destacar de las conjeturas de los estudiantes elementos que son parte del enunciado al que se quiere llegar.
17.	(proposición-operacional) Promover que las proposiciones se transformen para hacer operacional la demostración.

Tabla 3-5:

Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en el teorema al que se quiere llegar

IV. Teorema (enunciado, demostración, marco teórico) al que se quiere llegar	
18.	(nuevo elemento del sistema) Explicitar la necesidad de introducir un elemento al sistema teórico para poder sustentar un paso de la construcción.
2.	(enunciado sintético) Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética usando teoremas del sistema para que la proposición se asemeje a la forma como se comunica en la matemática.
4.	(abordar imprecisiones) Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablado) para impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso de la comunidad de la clase.
17.	(proposición-operacional) Promover que las proposiciones en términos particulares y/o expliciten los datos y la conclusión para hacer operacional la demostración.
13.	(síntesis-foco de atención) Sintetizar o recoger ideas que establecen el foco de atención para destacar de los signos de los estudiantes elementos útiles para la producción de la conjetura.
12.	(problema-control teórico) Controlar el universo teórico en que se va a trabajar para asegurar que los elementos matemáticos que subyacen a las propuestas del teorema al que se quiere llegar estén enmarcados en el sistema teórico con que se cuenta o permitan la ampliación del sistema teórico local en el que se enmarca el problema.
16.	(elementos-enunciado) Destacar de los signos de los estudiantes elementos que son parte del enunciado al que se quiere llegar.

Tabla 3-6:

Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la formación de nociones de teorema, postulado, definición

V. Nociones de teorema, postulado, definición	
19.	(exigencias enunciado matemático) Hacer referencia a que el enunciado de una proposición matemática debe construirse de manera sintética, económica y general, usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado.
20.	(requisitos-teorema) Señalar requisitos desde la matemática para que un enunciado sea teorema.
21.	(asuntos especiales) Mencionar asuntos especiales relacionados (tipos de teoremas (unicidad, existencia, proceso), en qué consiste una definición, un postulado, un teorema, cómo se hace una demostración).

La forma en que se codificarán las categorías con su respectiva acción se explica con el siguiente ejemplo. En la búsqueda por establecer el signo enunciado-conjetura Problema Cumbre, los estudiantes producen,por ejemplo, el signo construcciónque un punto A' se mueve en circunferencia, pero para llegar a él no han empleado herramienta algunaque lo verifique. La profesora busca mediar con este signos para que evolucione a un signo matemático, en donde la circunferencia aparezca. Por ejemplo preguntando sobre cómo se sabe si lo que se afirma es cierto, o cómo el *software* puede ayudar a verificarlo. La acción dela profesora estará entonces ***Centrada en la Conjetura como Solución al Problema Propuesto,***ya que ha indagado sobre los signos producidos para que los estudiantes revisen sus afirmaciones empleando las herramientas del SGD. Secodifica como *CIII 14indagar sobre signos*, por cuanto corresponde a la acción numerada en la categoría III como 14 y que tiene como subtítulo indagar sobre signos.

3.3.3.3 Análisis de los datos bajo las categorías establecidas:

Para esta etapa y empleando las categorías anteriormente descritas, se realizó el análisis seleccionando dos sesiones de clase. A continuación se presentan tanto el problema central que fue planteado en cada sesión de clase, como los signos enunciado-conjetura que se esperaba fueran producto de la evolución de los signos iniciales producidos por los estudiantes y mediados por la profesora.

Problema A:

Construyan un segmento AB. Hallen un punto que equidiste de los extremos del segmento AB. ¿Pueden hallar más puntos que equidisten de los extremos del segmento AB? ¿Qué condición cumplen esos puntos? Escriban una conjetura

Signo enunciado-conjetura esperado:

Si una recta r es mediatriz de un segmento, entonces todos los puntos de r equidistan de los extremos del segmento

Problema B:

PROBLEMA CUMBRE: Dados tres puntos no colineales A, B y C, construir el punto A', que es simétrico axial de A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$.

Exploren con la herramienta arrastre cada uno de los puntos. ¿Qué notan?

Cuando arrastran el punto C, ¿qué sucede con el punto A´?

Escriban una conjetura

Signo enunciado conjetura esperado:

Si A, B y C son tres puntos no colineales en el mismo plano y el punto A' es el simétrico axial de A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces A' es un punto de la circunferencia con centro en B y radio $\overline{AB}$.

Cada una de esastareas escogidas, se separó en episodiosen donde fueranmás específicas las acciones realizadas por la profesora en torno a la evolución de signos y su mediación. Estas dos sesiones de clase fueron escogidas por cuanto se hizo evidente,en mayor medida, las acciones prototípicas de la profesora en su gestión de clase, y en donde se acapararon asuntos relativos a la aproximación metodológica, varias categorías de lamediación del profesor, varios signos producidos por los estudiantes y al potencial semiótico del artefacto GeoGebra.

3.3.3.4 ***Presentación de los resultados del análisis:***

El análisis de los datos se sintetiza en el siguiente capítulo junto con cada uno de los resultados de las etapas del proceso que se llevó a cabo durante la realización del estudio.El análisis de cada sesión de clase, estuvo centrado en codificar las acciones de la profesora en cuanto a los signos y su evolución, y empleando las categorías del grupo *Æ•G* o las emergentes.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis realizado del trabajo llevado a cabo en dos sesiones de clase. De la primera de ellas, cuyo foco está en la formulación de una conjetura relativa a la Mediatriz (denominada La Conjetura de la Mediatriz), se analizarán tres episodios. Con relación a la segunda, que se centró en la producción asociada al Problema Cumbre (denominada Clase del Problema Cumbre), ha sido dividida en dos bloques para ser analizada: el primero de ellos está compuesto por tres episodios y el segundo de ellos, por dos. Para el análisis de cada sesión de clase, inicialmente se realiza una descripción general de dicha sesión que contiene el propósito de enseñanza que se tenía para la misma, las tareas que los estudiantes debían llevar a cabo, el enunciado del problema alrededor del cual gira la actividad, la manera como se dividió la sesión misma y el propósito específico del análisis. Enseguida, se presentan las situaciones de clase ilustrativas de tales propósitos, con fragmentos de las transcripciones de los apartados, y su respectivo análisis a la luz de la TMS empleando tanto las categorías del grupo Æ•G como las categorías que fueron emergiendo. Al finalizar el capítulo, se realiza una síntesis en la que se recogen generalidades de los análisis presentados.

4.1 DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DE CLASE LA CONJETURA DE LA MEDIATRIZ:

Para esta sesión de clase, se tenía el propósito de formular el enunciado del Teorema de la mediatriz como conjetura (i.e., *Si una recta r es mediatriz de un segmento, entonces todos los puntos de r equidistan de los extremos del segmento*), a partir de una serie de instrucciones dadas por la profesora, en las que los estudiantes debían hacer uso de GeoGebra; una vez formulada la conjetura, debían hacer su respectiva justificación. En cuanto a la labor de los estudiantes, se esperaba que formularan un enunciado de carácter general, basados en lo que previamente habíanexplorado en el software que proporcionara elementos para su justificación haciendo uso de los conocimientos geométricos conocidos, y, finalmente que realizaran dicha justificación empleando tales elementos (como la definición de mediatriz y los criterios de congruencia para triángulos entre otros).

El problema propuesto a los estudiantes por la profesora fue el siguiente:

Construyan un segmento AB. Hallen un punto que equidiste de los extremos del segmento AB.
¿Pueden hallar más puntos que equidisten de los extremos del segmento AB?
¿Qué condición cumplen esos puntos?
Escriban una conjetura.

Para el análisis de esta sesión de clase, la misma se dividió en tres apartados, en los que se presentan extractos de la producción de dos grupos de estudiantes (denominados Grupo 1 y Grupo 2) y sus interacciones con la profesora.

De manera particular, los objetivos de análisis de la sesión de clase mediatriz son los siguientes:

1. Describir el papel de la profesora y su mediación para que los estudiantes expliciten sus concepciones con respecto a los objetos geométricos *punto medio* y *mediatriz*.
2. Describir el papel de la profesora cuyo objetivo de enseñanza es que sus estudiantes establezcan dependencias entre objetos y propiedades involucrados en el problema (e.g., determinar que uno de los puntos que equidistan de los extremos del segmento es el punto medio del segmento, pero que este punto no es el único con tal condición; determinar que los puntos de la mediatriz de un segmento, equidistan delos extremos del segmento).
3. Describir el papel de la profesora y del software durante el proceso de exploración de la construcción de los estudiantes con el propósito de que

ellos evoquen elementos teóricos valiosos para establecer una conjetura que en términos generales sea como la siguiente: *Si una recta r es mediatriz de un segmento, entonces todos los puntos de r equidistan de los extremos del segmento.*

A continuación se presenta el análisis respectivo a la clase *Conjetura de la Mediatriz*.

4.1.1 ANÁLISIS DE LA SESIÓN DE CLASE MEDIATRIZ

En la sesión de clase anterior, a partir de una construcción presentada a los estudiantes en GeoGebra de $\overline{AB}$y su mediatriz, los estudiantes, empleando las herramientas medida de ángulos y de segmentos, establecieron dos condiciones de la recta dada: i) contiene el punto medio de $\overline{AB}$ y ii) es perpendicular a dicho segmento. A partir de ello se construyó, con la comunidad de clase, la siguiente definición de mediatriz de un segmento (en GeoGebra, bisector perpendicular) para ser agregada al sistema teórico local:

> *La recta mediatriz de un $\overline{AB}$es la recta perpendicular a dicho segmento por su punto medio.*

Específicamente, esta sesión de clase se dividió en los siguientes tres episodios:

1. Construcción con cuadrícula[12] y concepción de equidistancia.
2. Uso del signo construcción "mediatriz" como signo pivote.
3. Identificación del invariante y construcción del enunciado de la conjetura como solución al problema propuesto.

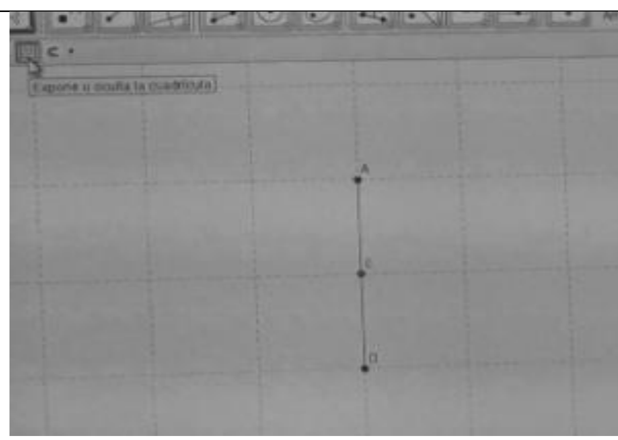
A continuación, se presenta en análisis de cada uno de tales episodios.

4.1.1.1 Construcción con cuadrícula y concepción de equidistancia

Como actividad inicial de la clase, la profesora solicita a los estudiantes construir un segmento $\overline{AB}$ en GeoGebra, y habiendo garantizado que todos los grupos han

[12]La cuadrícula es una herramienta de GeoGebra que activa una cuadrícula sobre la pantalla.

seguido la instrucción, pide *encontrar varios puntos que equidisten del puntoAy delpuntoB*. En este momento, tiene lugar la siguiente interacción entre profesora y estudiantes del Grupo 1. En la trascripción, P corresponde a las intervenciones de la profesora, y E1 corresponde a las intervenciones de uno de los tres estudiantes del grupo.

1	P	[Dirigiéndose a todo el curso] Encuentre en el segmento ($\overline{AB}$) un punto que equidiste del punto A y del punto B.
		[los estudiantes exploran las herramientas y buscan cuál es la que mejor se ajusta a lo que deben construir. E1 alza la mano para indicar que su grupo tiene la construcción].
2	P	Qué punto encontraron. Déjenme ver. Un punto que equidiste de los extremos del segmento. ¿Qué punto encontraste tú?
3	E1	E [señalando un punto en el segmento AB].
4	P	¿Y cómo sabes que equidista?
5	E1	Porque está en la mitad de los dos [señalando los puntos A y B].
6	P	¿Y cómo sabes que está en la mitad?
7	E1	Porque…no sé, porque usamos cuadrícula.
8	P	Ah ok. ¡Usaste cuadrícula!
9	E1	Ajá.
10	P	O sea, como usaste cuadrícula [Figura 4-1] garantizas que está en la mitad. Bueno, bien. O sea ¿el primer punto que se les ocurrió fue qué punto? ¿Cómo se llama ese punto?  Figura 4-1

11	E1	El punto medio.

Al inicio de la transcripción se muestra que, atendiendo a la aproximación metodológica empleada en el presente estudio, la profesora favorece espacios en los que los estudiantes puedan realizar una exploración autónoma, sin su intervención, para resolver el problema y discutir entre ellos qué elementos deben ser tenidos en cuenta en la solución del problema.Así posibilita la producción de signos.

El Grupo 1 ha construido el punto medio del segmento realizando una construcción blanda pues al punto que ubican como equidistante de los puntos A y B lo establecen utilizando la cuadrícula del software y no la herramienta esperada por la profesora, esto es, uso de la mediatriz del $\overline{AB}$ para determinar el punto medio (según la definición del mediatriz establecida) y establecer ese punto como equidistante de A y de B. La profesora recorre todos los grupos y se percata que han empleado el mismo método.

Con relación al signo construcción que los estudiantes del Grupo 1 realizan, la profesora, en las intervenciones 4 y 6, busca indagar acerca del significado personal de equidistancia que ellos tienen, intentando determinar la correspondencia de lo que entienden por equidistancia con el uso de la opción cuadrícula empleada por los estudiantes [5] y [7]. Lamentablemente, las respuestas lacónicas de E1 no permiten vislumbrar por completo una relación. La profesora está dirigiendo su acción a la ***Conceptualización de objetos y relaciones***que corresponde a la categoría *CI* del grupo*Æ•G,* y a partir del signo construcción del Grupo 1, indagar sobre la concepción que tienen los estudiantes de equidistancia de dos puntos a un tercero. Aunque esta no es explícita en los enunciados de los estudiantes, se puede interpretar como dos puntos que tienen igual distancia a uno dado, garantizada por el uso de la cuadrícula (*CI 22, significado personal-concepto*). En este sentido, el signo construcción producido por los estudiantes puede considerarse como un signo del artefacto pues el fundamento de la equidistancia se basa en la cuadrícula del software y no en una alusión explícita de la correspondencia entre tal cuadrícula y la equidistancia.

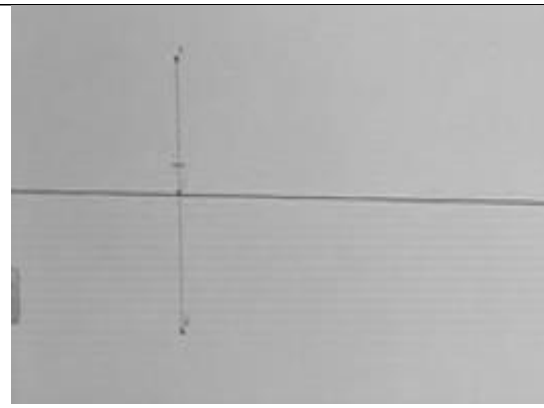
De otro lado, con su intervención 10, la profesora lleva a cabo una acción orientada en dos vías: por un lado, valida la construcción realizada por los estudiantes, pues asume que tal signo construcción se corresponde con su significado personal de equidistancia; por otro lado, lleva a que los estudiantes expliciten el nombre teórico dado al punto encontrado,el cual es un elemento que hace parte del sistema teórico ya conformado, es decir que aludan a punto medio. En este caso, la profesora está centrando su acción en *CI 3*, *ubicación objetos*, al destacar al punto medio como un elemento del sistema teórico involucrado en lo que se construye. Con esta precisión, la profesora pretende lograr que los estudiantes puedan reemplazar su signo construcción (una construcción blanda) por un signo construcción matemático que sea producto de construcción robusta (e.g. construcción del punto medio usando la herramienta que lleva ese mismo nombre, o recurriendo al objeto mediatriz).

Hasta este momento, la mediación de la profesora ha estado enfocada en indagar sobre los signos producidos por los estudiantes, de manera tal que ellos hagan ostensivas sus concepciones y reconozcan objetos del sistema teórico en la situación. Como se dijo, todas estas acciones de mediación semiótica han estado centradas en la conceptualización de objetos y relaciones. En los siguientes dos apartados, se presenta cómo los signos producidos por los estudiantes se modifican producto de la mediación de la profesora.

4.1.1.2 Uso del signo construcción "mediatriz" como signo pivote

Luego de establecer con la comunidad de clase al punto medio como un punto equidistante de los extremos del segmento a partir de una construcción blanda (la reportada en la sesión anterior y realizada por todos los grupos), la profesora se percata de que los integrantes del Grupo 2 han cambiado su construcción blanda.

1	P	[Dirigiéndose a todo el curso]. Bueno aquí el grupo de E4 se fue por otro

		lado. E4 construyó la mediatriz.
2	E1	¿Cómo construyó la mediatriz?
3	E4	Con la herramienta mediatriz.
4	P	Y como él sabe que la mediatriz, ¿por dónde corta al segmento?
5	E1	¡Por la mitad! [El Grupo 1 produce un signo construcción: la mediatriz del $\overline{AB}$ marcando el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento como lo ilustra la Figura 4-2]  Figura 4-2
6	P	Por el punto medio.
7	E4	Entonces ese punto de corte [entre la mediatriz y el segmento] que es el punto medio, va a ser un punto que equidista de A y un punto que equidista de B.

Luego de que todos los grupos emplearon la misma construcción blanda, el Grupo 2 construye la mediatriz del $\overline{AB}$, esto es, realiza una construcción robusta para encontrar al punto medio del $\overline{AB}$ [1] (punto de intersección entre la mediatriz y el segmento). La profesora reconoce que el signo construcción del Grupo 2 es apropiado para lo que se quiere (determinar puntos que equidisten de los puntos A y B), y solicita al Grupo 2 que recuente su método [3] y [7], con el propósito de favorecer la modificación del signo producido por el Grupo 1.De esta manera, al establecer el foco de atención en el signo producido por el Grupo 2 y destacar el elemento mediatriz, implícitamente la profesora valida la construcción realizada [1] y [4]. Con esto, específicamente la profesora pretende que i) el signo construcción de los demás grupos evolucione de la previa construcción blanda a la propuesta en la que interviene el objeto mediatriz y ii) se genere una primera conjetura en la que se refiera al punto medio, provocado por tal mediatriz, como uno de los puntos que equidista de A y B.

El signo construcción de la mediatriz del $\overline{AB}$ [3], que hubiese podido ser considerado como matemático pues implícitamente hacía uso de su definición para determinar el punto medio (uno de los puntos que soluciona el problema), es empleado por la profesora como pivote para que el Grupo 1 modifique su primer signo y se acerque a uno matemático [5]. En otras palabras, la construcción del Grupo 2 es un signo pivote pues se convierte en eslabón entre una construcción pegada al artefacto (construcción blanda de punto medio usando cuadrícula) y una construcción que atiende a una definición de un objeto geométrico (construcción robusta de punto medio usando mediatriz).

En este caso, las acciones de mediación semiótica de la profesora estuvieroncentradas en dos grandes asuntos: la ***Conceptualización de objetos y relaciones***y la ***Conjetura como solución al problema propuesto*** que corresponden a las categorías *CI*y *CIII* del grupo*Æ•G*.

Por un lado, es debido a la definición de mediatriz que se logra determinar que el punto medio es solución. Las acciones de la profesora aluden a obtener información de lo que se ha realizado con el artefacto para que los estudiantes reconozcan que la mediatriz construida hace explícita la ubicación del punto medio del segmento (*CI 1*,*concepción – artefacto*).

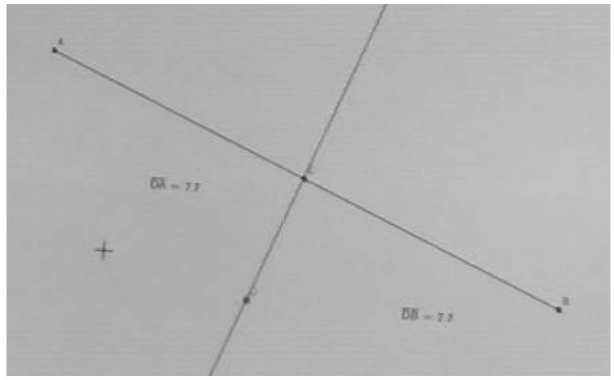
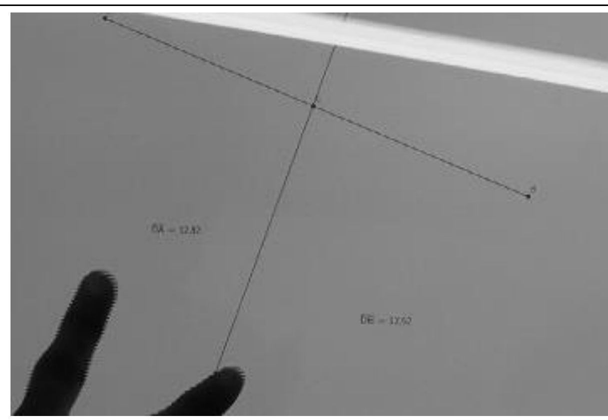
Adicionalmente, la profesora indaga sobre el signo construcción producido por el Grupo 2 (la mediatriz del segmento) para favorecer que sea interpretado por el resto de la clase. Busca recoger ideas que centren su atención en tal signo, que es un elemento útil para la producción de la conjetura buscada, por cuanto el punto medio y todos los puntos que equidistan de A y de B están contenidos en la recta mediatriz*(CIII 14*, *indagar sobre signos* y *CIII 13*, *síntesis-foco de atención)*.

A continuación, se presenta cómo el Grupo 2 produce el signo matemático del enunciado conjetura a partir de la construcción robusta que realizaron.

4.1.1.3 Identificación del invariante y construcción del enunciado de la conjetura como solución al problema propuesto

Luego de que profesora valoró como útil el signo construcción del Grupo 2, se da la siguiente interacción entre la profesora y los estudiantes del Grupo 2 con el objetivo de determinar más puntos que provean la solución al problema:

1	P	¿Encontraron otro punto?
2	E5	Sí, sí encontramos
3	P	¿Dónde?
4	E5	En la mediatriz del segmento [han construido un punto D sobre la mediatriz, distinto al punto medio del $\overline{AB}$]
5	P	En la recta mediatriz…y ¿cómo saben que ese punto equidista de los extremos del segmento?
6	E4	Porque está perpendicular a la …
7	P	¿Tenemos alguna herramienta que nos ayude a verificar eso?
8	E4	Pues…porque está perpendicular al segmento AB y está en la mitad.
9	P	Pero ¿cómo saben que efectivamente equidista?, ¿tenemos algún hecho geométrico?, ¿hicieron alguna prueba con las herramientas de GeoGebra?, ¿qué herramienta se les ocurre usar ahí?
10	E5	La herramienta distancia [señalando el ícono con el dedo]
11	P	Ah, vamos a usar la herramienta distancia

12	E5	[Emplea la herramienta distancia para verificar que la distancia del punto D a los puntos A y B es la misma, tal como lo ilustra la Figura 4-3]  Figura 4-3
13	P	Ahora sí tal vez podemos decir que lo estamos mostrando. Ahora toca probarlo. ¿Dónde pueden encontrar otro punto que equidiste de los extremos?
14	E4	En cualquier parte de la mediatriz [señalando con el dedo la recta como si empleara la herramienta arrastre]
15	P	¿Cualquier punto de la mediatriz va a equidistar? Muéstrenme otros dos, o ¿qué podrías hacer para mostrarme otro empleando las herramientas de GeoGebra?
16	E4	Emplear la herramienta arrastre.
17	P	¿Para arrastrar a quién?
18	E4	D [arrastra al punto D con el dedo sobre la pantalla táctil]
19	P	¿Y qué pasa?
20	E4	Pues que las distancias se mantienen. Que en ambas siempre siempre es la misma [Señalando con los dos dedos las distancias entre los puntos de la mediatriz a los puntos A y B obtenidas con  Figura 4-4

		GeoGebra como lo ilustra la Figura 4-4].
21	P	Ah, que las distancias se mantienen. Escriban una conjetura. Escríbanme el hecho geométrico que acaban de encontrar [la profesora se retira del grupo para realizar mediación en los Grupos 1, 3 y 4].
22	E6	[E6 escribe rápidamente la conjetura en su cuaderno como producto de un trabajo en el que los tres estudiantes interactúan para escribirla como un enunciado condicional] Si ubicamos un punto en cualquier parte de la mediatriz del$\overline{AB}$ entonces este punto equidista de los puntos *A y B.*
23	P	[los estudiantes llaman a la profesora] Muy bien muchachos. Me gusta. ¡Qué buen trabajo!

En la interacción presentada, las intervenciones 1 a 9 ilustran lamediación de la profesora centrada en indagar sobre el signo construcción punto D en la mediatriz producido por los estudiantes, con el propósito de que verifiquen la equidistancia del punto D a los extremos del segmento. Efectivamente en las intervenciones 10 y 12 actúan en respuesta a la solicitud de la profesora usando la herramientadistancia del *software*, acción que es validada por la profesora en 11 y 13. En las intervenciones 13 a 19, la profesora continúa indagando sobre el signo construcción producido por los estudiantes para que puedan establecer más puntos que cumplen con la condición del problema. Los estudiantes responden que todos los puntos sobre la recta equidistan de los puntos A y B [20] y ante la solicitud de la profesora de hacer una verificación de ello usan la función del arrastre, para mostrar lo que previamente han determinado. Los signos producidos por los estudiantes son: signo construcción punto D sobre la mediatriz del segmento, toma de medidas del punto D a los extremos del segmento y acción de arrastrarlo para verificar la equidistancia [12, 16 y 18]; signo enunciado: pues que las distancias se mantienen. Que en ambas siempre es la misma [20].La profesora considera que los estudiantes están listos para producir un signo enunciado-conjetura, asunto que solicita en la intervención 21. Hasta este punto, vale la pena rescatar que la profesora ha empleado el signo construcción, compuesto de las intervenciones 12, 16 y 18 de los estudiantes,como signo pivote pues ella vio en este una conexión con el artefacto -vía función del arrastre y toma de medidas- con la propiedad invariante que se debe reportar en la conjetura (signo matemático) y que los estudiantes intentaron comentar en la intervención 20. Frente al primer signo construcción del Grupo 2, las acciones de la profesora provocaron la producción de un signo enunciado [20] que les permitiría establecer una propiedad invariante que la profesora valida en la intervención 21. Finalmente, en la intervención 22, los estudiantes responden a la solicitud de la profesora y producen un signo enunciado-conjetura (Si ubicamos un punto en cualquier parte de la mediatriz del $\overline{AB}$ entonces este punto equidista de los puntos A y B) que en la intervención 23 es validada por la profesora. Es decir, hay evolución de signos por cuanto los estudiantes producen un signo enunciado-conjetura cercano a lo esperado por la profesora, lo que ilustra una mediación relativamente acertada de la profesora para ello.

En el anterior apartado, las acciones de la profesora han estado centradas en ***Conjetura como solución al problema propuesto*** indagando sobre los signos que han producido los estudiantes y estableciendo el foco de atención en ellos tanto para favorecer que los estudiantes revisen sus ideas como para rescatar elementos útiles para la producción de la conjetura *(CIII 13*, *síntesis – foco de atención* y *CIII 14*, *indagar sobre signos)*.

Luego de la intervención 23, la profesora continúa con su interacción con los otros tres grupos hasta garantizar que cada uno tiene una construcción y una conjetura propias. Enseguida, la profesora emplea el tablero electrónico para hacer la acostumbrada presentación tanto del signo construcción, como del signo enunciado-conjetura producido por cada grupo de manera tal que todos los

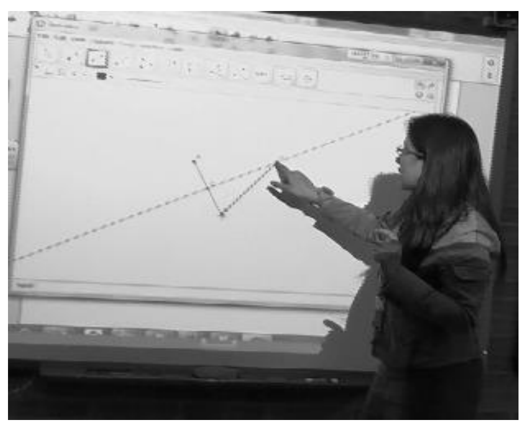


Figura 4-5

respectivos enunciados fueron ajustados a la conjetura que institucionaliza para la clase (ver Figura 4-5).

La conjetura finalmente establecida fue:

> Si una recta r es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, entonces todo punto de la recta r equidista de A y de B.

4.1.1.4 Una breve síntesis del análisis

En los apartados analizados de la sesión de clase la Conjetura de la Mediatriz, las acciones de la profesora estuvieron centradas en i) la conceptualización de objetos y relaciones y ii) la conjetura que se esperaba fuera producida por los estudiantes.

En la siguiente tabla se presenta, como cierre de los asuntos relativos a esta primera sesión de clase analizada, un resumen de dichas acciones con sus respectivos descriptores y de la evolución de los signos producidos por los estudiantes.

Tabla 4-1:

Acciones de la profesora y signos provocados durante la sesión de clase Conjetura de laMediatriz

EPISODIO	PRIMER SIGNO DE LOS ESTUDIANTES	ACCIONES ESPECÍFICAS DEL PROFESOR	SIGNO PROVOCADO POR LAS ACCIONES DE LA PROFESORA
1. Construcción con cuadrícula y concepción de equidistancia	Signo construcción pegado al artefacto (construcción blanda con cuadrícula) Signo enunciado – concepción del punto que "está en la mitad" del segmento como un signo del artefacto	3. Ubicación objetos (CI) 22. Significado personal – concepto (CI)	Signo enunciado matemático uso del término "punto medio"
2. Uso del signo construcción "mediatriz" como signo pivote	Signo construcción del punto medio empleando la mediatriz (Grupo 2), como un signo pivote (construcción robusta)	1. Concepción – artefacto (CI) 13. Síntesis – foco de atención (CIII) 14. Indagar sobre signos (CIII)	Signo construcción matemático del punto medio empleando la mediatriz (Grupo 1).
3. Identificación del invariante y construcción del enunciado de la conjetura como solución al problema propuesto	Signo construcción de cualquier punto D en la mediatriz, toma de medidas del punto D a los extremos del segmento y uso de la función arrastre. Signo empleado como pivote [12, 16, 18]	13. Síntesis – foco de atención (CIII) 14. Indagar sobre signos (CIII)	Signo enunciado-conjetura "Si ubicamos un punto en cualquier parte de la mediatriz del $\overline{AB}$ entonces este punto equidista de los puntos A y B" [22] cercano al signo matemático esperado

A continuación, se presenta el análisis de la segunda sesión de clase que se incluye en el presente estudio.

4.2 DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DE CLASE PROBLEMA CUMBRE

En esta sesión de clase se tenía el propósito de abordar el Problema Cumbre, mediante el cual se esperaba que los estudiantes hicieran actividad demostrativa de manera autónoma, esto es, que trabajaran de manera independiente sin necesidad de la mediación de la profesora de manera continuada. El enunciado del problema es:

> *Dados tres puntos no colineales A, B y C, construir el punto A´, simétrico axial de A con respecto a* $\overleftrightarrow{BC}$.
> *Exploren con la herramienta arrastre cada uno de los puntos. ¿Qué notan?*
> *Cuando arrastran el punto C, ¿qué sucede con el punto A´?*
> *Escriban una conjetura y justifíquenla.*

Como se vislumbra en el enunciado, los estudiantes tenían como tarea formular una conjetura y realizar la justificación de la misma. Se consideró que esto último era posible, ya que la comunidad de clase habíaestablecido el sistema teórico local suficiente para ello y se habían hecho acercamientos a la construcción de una justificación a partir de la solución de los problemas propuestos en las sesiones de clase anteriores. No se reportan por cuanto, como ya se ha mencionado, desborda las posibilidades del presente estudio.

Para el análisis de esta sesión de clase, la misma se va a dividir en dos grandes bloques. El primer bloque está compuesto de tres episodios relativos a la construcción en GeoGebra de los elementos planteados por el problema propuesto, y el segundo bloque se centra en el reconocimiento del invariante presente en dicha construcción y la posterior formulación de la conjetura.

De manera particular, los objetivos de análisis de esta sesión de clase son los siguientes:

1. Describir el papel de la profesora y su mediación para que los estudiantes expliciten sus concepciones con respecto a los objetos geométricos *puntos no colineales*, *simetría axial*, *circunferencia*.
2. Describir el papel del profesor cuyo objetivo es que sus estudiantes establezcan dependencias entre objetos y propiedades involucrados en el

problema (e.g. a medida que la recta se mueve, el punto A' también en un sentido circular).

3. Describir el papel del profesor y del software durante el proceso de exploración de la construcción de los estudiantes con el propósito de que ellos evoquen elementos teóricos valiosos para establecer unaconjetura que en términos generales sea como la siguiente:

Si A, B y C son tres puntos no colineales en el mismo plano y el punto A' es el simétrico axial de A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces A' es un punto de la circunferencia con centro en B y radio $\overline{AB}$.

A continuación se presenta el análisis respectivo al primer bloque antes referenciado.

4.2.1 PRIMER BLOQUE: CONSTRUCCIÓN EN GEOGEBRA DE LOS ELEMENTOS PLANTEADOS POR EL PROBLEMA PROPUESTO

Como actividad inicial, la profesora presenta una diapositiva con el enunciado del problema. Los estudiantes inician el proceso de construcción de los objetos y relaciones que son condiciones del problema, es decir, el punto A, la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y el punto A' simétrico de A respecto a$\overleftrightarrow{BC}$. En este bloque se analizará la mediación de la profesora, en torno a la construcción de tales objetos. Con ello, se vislumbra la concepción que tienen los estudiantes de ellos.

Específicamente, los tres episodios son:

1. Construcción puntos *A, B* y *C* no colineales.
2. Construcción $\overleftrightarrow{BC}$.
3. Construcción punto A' simétrico del punto$A$ con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$ como producto de una concepción del objeto eje de simetría.

4.2.1.1 Construcción puntos A, B y C no colineales:

Los estudiantes del Grupo 1 (E1, E2 y E3) luego de leer el problema, se han tomado más de cinco minutos intentando abordarlo sin mostrar evidencia de producción de signos. Al ver esto, la profesora se acerca al grupo. En este momento tiene lugar la siguiente interacción.

1	E1	Construyamos el punto A, simetría axial de A [construyen el punto A. Luego de ello, pasan 5 minutos sin que el grupo de estudiantes haga algo en el software. Releen el problema, para saber qué es lo que deben hacer].
2	P	[La profesora recorre todos los grupos y se da cuenta que no han construido nada más y reconoce sus caras de confusión] ¿Qué más dice el enunciado?
3	E2	Simetríaaxial.
4	E3	Un B y un C no colineales.
5	P	Y ¿qué quiere decir no colineales?
6	E3	Que no están en la misma línea. [E1 construye los puntos B y C esperados].
7	P	Que no están en la misma recta. ¡Exacto!

En el anterior apartado, se resalta la mediación de la profesora, en términos de enfocarse en hacer ostensivo lo que los estudiantes reconocen como puntos no colineales. De manera específica, las intervenciones [2] y [5] muestran la intención de la profesora en términos de dos asuntos: i) lograr que los estudiantes precisen las condiciones del problema y determinen la primera construcción que se debe abordar con el software [2] y ii) lograr que los estudiantes expliciten la definición de puntos no colineales [5] pretendiendo que ello sea un primer paso para hacer la construcción respectiva. Producto de tales intervenciones, E3 en la línea 4 precisa la condición que se debe construir primero (lo cual se relaciona al primero de los dos asuntos) y en la línea 6, E3 explicita la definición de puntos colineales que luego es puesta en juego por E1 en el software mediante la construcción correspondiente.

Estos dos asuntos de mediación no están de manera explícita en las cinco categorías que el grupo Æ•G tiene para abordar la mediación semiótica del profesor. Se hace necesario entonces precisar, para este estudio, en el que la población de estudiantes corresponde a un contexto escolar donde el uso de software GeoGebra ha sido escaso, el surgimiento de una sexta categoría de análisis que esté orientada a evidenciar acciones que describan el acompañamiento del profesor en el proceso de construcción. Esta categoría será llamada ***Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la construcción de los elementos que hacen parte del problema propuesto(CVI)***, de la cual los indicadores que surgen son:

1. **Orden-Objeto** Pedir revisión del enunciado del problema propuesto enfocándose en el orden en el que deben construirse los objetos (signo construcción) o en el orden en el que deben tenerse en cuenta relaciones geométricas con el fin de que los estudiantes construyan las condiciones propuestas por el problema. [Asociado al asunto i]
2. **Concepción-Objeto** Indagar acerca de la concepción de un objeto (signo enunciado-concepción) o relación geométrica con el propósito de emplearla para que los estudiantes construyan de manera correcta elementos que hacen parte del problema. [Asociado al asunto ii]

Vale la pena precisar que esta última acción es distinta a la acción *concepción-artefacto* propuesta por el grupo Æ•G por cuanto en ella primero debe haber un signo producido por los estudiantes (bien sea una figura o un enunciado) para de ellos indagar sobre concepciones de objetos geométricos involucrados, mientras que en la acción *Concepción-Objeto* primero el profesor cuestiona sobre las concepciones de objetos involucrados en la situación, para que luego se puedan producir signos. En este caso particular, los estudiantes deben tener una concepción sobre puntos no colineales, para luego producir un signo construcción que ilustra los puntos A, B y C no colineales, hecho que sucede luego de la última intervención de la anterior trascripción. La respectiva ilustración se muestra en la Figura 4-6:

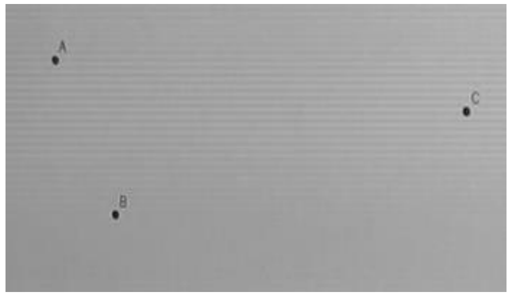


Figura 4-6: Puntos A, B y C no colineales, construidos por los estudiantes

4.2.1.2 Construcción $\overleftrightarrow{BC}$:

En el siguiente apartado, los estudiantes se centran en la construcción de la$\overleftrightarrow{BC}$ (segunda condición a construir del problema). Se presenta entonces la interacción de la profesora con los estudiantes con el propósito de que el grupo produzca el signo asociado a este paso de construcción (es decir $\overleftrightarrow{BC}$).

Hasta este momento, los estudiantes han construido los tres puntos no colineales. E1 tiene en la mano las hojas en las que están las definiciones y los hechos geométricos que hacen parte del sistema teórico local conformado durante las sesiones de clase (ver anexo 3e).

8	E1	[lee el enunciado] Exploren con la herramienta arrastre sobre cada uno de los puntos ¿Qué notan? [arrastran los puntos].
9	P	Pero ¿qué más dice antes de irse a explorar?
10	E3	Construir el punto A [el estudiante no lee prima], simetría axial de A con respecto a la recta BC…Pero eso no tiene sentido
11	E2	Necesitamos una línea.
12	P	Entonces, ¿qué hay que hacer?
13	E2	mmm…¿No toca unirlos? [haciendo una seña con la mano y sobre los puntos

		B y C como si trazara la recta que contiene esos puntos].
14	E3	¿Pero es una recta o es un segmento?
15	E1	Pues hay que hacer un segmento [construyen el segmento BC y lo borran].
16	E3	No porque no dice segmento, pero al mismo tiempo dice que no pueden ser colineales.
17	E1	Pero es que la [definición de] simetría axial dice segmento, se refiere al segmento cuyos extremos son el punto y su simétrico [lee el siguiente fragmento de la lista de definiciones]. La simetría axial de un punto respecto a una recta r, es una transformación que a cada punto A en el plano, le hace corresponder un punto P tal que: 1) la recta r es perpendicular al segmento AP. 2) ...
18	E3	Pero entonces ¿sería recta o segmento?
19	P	¿Qué dice ahí?,[refiriéndose a la definición de simetría axial en la lista de definiciones del sistema teórico local].
20	E1, E2	Recta [empiezan a explorar las herramientas para construir la recta, dudan qué recta construir]
21	E3	[Leyendo las opciones que se despliegan en los íconos] ¿Recta perpendicular?, ¡no!
22	P	¿Qué recta les está pidiendo el enunciado [del problema]?
23	E1	[explora los iconos y abre el de recta perpendicular] Una perpendicular
24	P	¿Dónde dice perpendicular en el enunciado [del problema]?
25	E3	Por ser la simetría axial ¿no tendría que ser perpendicular?
26	P	Claro ¿pero quién es perpendicular? Lean el enunciado [refiriéndose al enunciado del problema cumbre] ¿Qué recta tenemos?
27	E3	BC [En un tono muy bajo]
28	E1	A es perpendicular a BC
29	P	¿A es perpendicular a BC?, ¿un punto es perpendicular a una recta?
30	E2	No. BC [señalando sobre la pantalla la recta que hay que construir, y esta vez en un tono más alto, y aludiendo a la pregunta hecha por la profesora en 26]
31	P	Ubiquen la recta BC primero

32	E3	Es que también nos dicen que no sean colineales
33	P	Les están pidiendo que hagan una simetría axial con respecto a la recta BC. ¿Cuál es la recta BC?
34	E1 E2	Esta [señalando con el dedo la recta BC que aún no está construida]
35	P	¿Cuál? Yo veo puntos
36	E2	Pues toca hacerla. ¡Pon una recta normal E3!
37	E3	Ah pues claro. [se van a el ícono recta y construyen la recta BC] Ahora sí listo, es la que estábamos buscando, ya la tenemos.

En la transcripción anterior[13], se evidencia cómo la profesora continúa indagando sobre los elementos que hacen parte de las condiciones planteadas en el problema y el orden en que éstas deben ser construidas, tal como se ilustra en las intervenciones 9 y 12. En estas intervenciones, la profesora busca que los estudiantes centren su atención en los elementos que deben construir y que están en el problema propuesto (i.e., $\overleftrightarrow{BC}$), pues los hace volver al enunciado para identificar los objetos que deben ponerse en juego,enfocándose en el orden y en la construcción de los mismos para construir las condiciones propuestas por el problema. En este sentido, la acción de la profesora es categorizada como *CVI 1 orden-objeto*. El estudiante E2, en la intervención 13, hace alusión a tal objeto al hacer un gesto con su mano, hecho que es interpretado por la profesora como ilustración de la recta solicitada, y que posteriormente el mismo estudiante ratifica en 27 y 30. No obstante lo anterior, vale la pena resaltar que para que los estudiantes aludan a la $\overleftrightarrow{BC}$, requiere más mediación de la profesora. Así, en las intervenciones 14 a 26, ella pretende indagar las concepciones que tienen los estudiantes de los objetos involucrados en el problema (para este caso, la *simetría axial* y *eje de simetría*), de manera tal que ellos se percaten

[13]El tono gris en la transcripción fue usado para separar los apartados de la misma en los que se dividió el análisis posterior: 8 a 13, *CVI 1*; 14 a 27, *CVI 2* con relación al objeto simetría axial; 28 a 31, *CVI 2* con relación a la noción de perpendicularidad; y 32 a 37, *CVI 1*.

de la necesidad de construir la recta en cuestión. Con ello, la categoría correspondiente a la acción de la profesora es *CVI 2*, *concepción-objeto*.

Para este caso, se evidencia que aunque la definición de simetría axial hacía parte del sistema teórico construido en las sesiones de clase, existe una comprensión no adecuada de dicha definición entre los estudiantes. En lo que sigue, esta afirmación se justifica.

En las intervenciones 23 y 25, los estudiantes hacen referencia a "perpendicularidad". La profesora toma este enunciado e interpreta que los estudiantes aluden a la condición expresada en la definición de simetría axial *la recta r es perpendicular a* $\overline{AP}$, y que con ello han evocado tal definición. Con esto en mente, la acción de la profesora se centra en buscar que los estudiantes usen su concepción de simetría axial, cualquiera que ésta sea, de una manera más completa de tal suerte que se enfoquen en explicitar las condiciones que se necesitan para construir el punto A' (en este caso, un punto A y $\overleftrightarrow{BC}$), y no tanto en la propiedad geométrica de perpendicularidad entre la $\overleftrightarrow{BC}$ y el$\overline{AA'}$ que provee tal definición. Claramente, la profesora de nuevo realiza una acción categorizada por *CVI 2, concepción-objeto*.

Aun cuando la profesora tiene esta intención (explicitar las condiciones que se necesitan para construir el punto A' y no usar la perpendicularidad), en las líneas 28 y 29 se tratan asuntos relativos a la concepción de perpendicularidad. Frente a la afirmación 28 de E1, por ejemplo, la mediación de la profesora se centra en la relación de perpendicularidad, intentando que los estudiantes precisen los objetos que se deben asociar con tal relación; así, ella pregunta ¿A es perpendicular a BC?, ¿un punto es perpendicular a una recta? [29]. Rápidamente E2 responde la pregunta de la profesora aludiendo sólo a la$\overleftrightarrow{BC}$. Con esta intervención, la profesora intenta cuestionar sobre las concepciones de los objetos que los estudiantes involucran mediante la perpendicularidad, asunto que está asociado con la concepción que puedan tener de tal relación *(CVI 2, concepción-objeto).*

De las intervenciones 32 a la 37, la interacción muestra que se retoma la construcción de la$\overleftrightarrow{BC}$. Específicamente, con las intervenciones 33 y 35 la profesora pretende poner el foco en dicha construcción de manera tal que los estudiantes produzcan finalmente el signo correspondiente *(CVI 1, orden-objeto).* En la intervención 33, al preguntar específicamente por la recta, la profesora quiere hacer notar que la simetría axial requiere de la$\overleftrightarrow{BC}$ y con la 35, pretende que los estudiantes efectivamente la construyan, hecho que finalmente ocurre en las intervenciones de los estudiantes E2 y E3 [36 y 37]. (Figura 4-7)

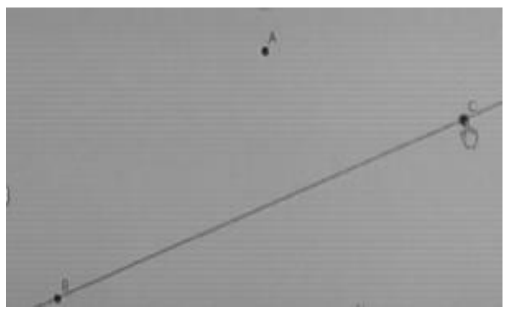


Figura 4-7: Construcción de $\overleftrightarrow{BC}$ agregada a la construcción previa de los estudiantes

Después de construir los puntos A, B y C no colineales y la $\overleftrightarrow{BC}$, la interacción entre los estudiantes ilustra que aún no hay una buena comprensión de la definición de simetría axial. En las intervenciones 38 a la 46 se continúa dando una interacción similar a la que se ha dado hasta este momento en la que nuevamente se evidencia que persiste una confusión entre los estudiantes con respecto al concepto de simetría, y entre cuáles objetos se presenta la relación de perpendicularidad. Aunque la profesora realizó mediación previamente para especificar que entre un punto y una recta no se habla de perpendicularidad [29], su acción categorizada en este caso por *CVI 2, concepción-objeto* no fue efectiva por cuanto los estudiantes no evolucionan en su signo enunciado (repiten que un punto es perpendicular a una recta), como se evidencia en la siguiente intervención:

40	E1	[leyendo la definición de la lista] Miren, la simetría axial con respecto a una recta *r* es una transformación que a cada punto A del plano le hace corresponder un punto P tal que la recta *r* es perpendicular al segmento AP [no la lee por completo]. O sea más o menos sería queA es perpendicular al segmento BC ¿no?
41	E3	Ah listo, o a la recta en este caso.

Pese a lo anterior, sí se puede decir que ha habido una modificación del signo – construcción pues poco a poco se va enriqueciendo la construcción (ver Figuras 4-6 y 4-7) que luego posibilitará hacer una exploración para establecer la conjetura que se solicita como tarea.

4.2.1.3 Construcción punto A' simétrico del punto A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$como producto de una concepción del objeto eje de simetría

Con el panorama descrito anteriormente, la profesora reconoce que debe hacer mediación para que los estudiantes logren poner en juego en esta situación la definición que tienen escrita de simetría axial, pues aún no la han operacionalizado para encontrar A'ycomprender que para determinar el punto A' como simétrico axial del punto A en esta situación, deben identificar la recta con respecto a la cual A' es el simétrico axial de A, es decir la $\overleftrightarrow{BC}$ y determinar que esa es la recta con respecto a la cual se debe "reflejar" el punto A usando la herramienta "*refleja objeto en recta*" del SGD. Surge entonces la ultima interacción de este primer gran bloque, que se ha dividido en dos momentos: uno que tiene que ver con la conceptualización de simetría axial e identificación de la recta eje de simetría en la situación, y otro que está asociado con la realización de la construcción del punto A' simétrico de A.

4.2.1.3.1 Concepción e identificación del eje de simetría.

Previo a esta interacción, la profesora ya había hecho un recorrido por todos los grupos y se había percatado que los demás grupos también tenían confusión respecto a la recta que debe ser usada como eje de simetría pues aún no la han identificado, ni la han construido.

En la siguiente parte de la interacción se evidencia el interés de la profesora por centrar su mediación en que los estudiantes aludan a su concepción del objeto eje de simetría y con ello, identifiquen a la$\overleftrightarrow{BC}$ como eje de simetría de manera tal que con respecto a elladeterminen el simétrico del punto A.

47	P	[Dirigiéndose a todo el curso] Bueno aquí algo para todos. ¿Qué me piden que construya?
48	E1	Una recta
49	P	Bueno sí una recta, pero ¿me piden qué más?
50	Estudiantes	¡El espejito!
51	P	El espejito del que nosotros hablamos era una recta.
52	E1	¡Simétrico axial de A con respecto a la recta BC!
53	P	O sea, ¿Qué tengo que construir?
54	E1	La línea BC.
55	P	La línea BC y además la simetría axial de un punto. ¿Alguna vez nosotros hemos construido el simétrico axial de un punto?
56	E3	No
57	P	¿No? Exploren las herramientas a ver si hay alguna que se lo construya. Explore las herramientas
58	E1	Esta es la línea, porque es el espejo. [Señala la recta BC mientras arrastra el punto A]
59	E2	Uy,ahora sí.
60	E3	Uy, ah claro, lo logramos.[El estudiante hace una cara de satisfacción alhaber identificado, después de una larga interacción, a la recta BC como eje de simetría sin construirla]

En las intervenciones 49, 53 y 55, la profesora centra sus acciones en dos aspectos i) la identificación de $\overleftrightarrow{BC}$ como el eje de simetría tal como lo plantea el problema y ii) el reconocimiento de tener que construir el punto A', a partir del signo construcción que ya se tiene y lo dicho en i).

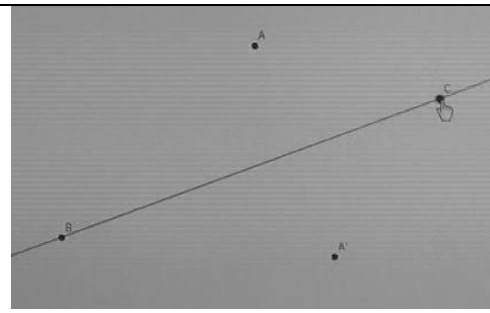
En este sentido, tienen lugar las intervenciones 50 y 51, en las que se observa claramente queel concepto de eje de simetría que tienen los estudiantes como "espejito" (signo enunciado-concepción), surge la construcción del punto A' con las condiciones deseadas. En este caso la palabra "espejito" está tan asociada a la simetría axial y los estudiantes se han apropiado tanto de ella, que después de que los estudiantes la mencionan [50] y la profesora interviene recordando que ese espejito es una recta [51], E1 menciona de manera inmediata a qué objeto se le aplicaría la simetría axial (punto A) y con respecto a qué objeto ($\overleftrightarrow{BC}$) [52].

A partir de la concepción que los estudiantes tienen de un objeto por el que la profesora indaga (simetría axial), se realiza la identificación de un elemento que hace parte del problema y se desea construir. Con la intervención 49, además de que la profesora precisa el objeto a construir de acuerdo con el orden que exige la construcción, tiene como objetivo que los estudiantes aludan a su concepción (como "espejito") de la recta involucrada en la simetría y que una vez hecho eso, traten de precisar cuál es el objeto que tienen que construir asociándolo a esa idea. La profesora está llevando a que sus estudiantes usen las concepciones que tienen de un objeto específico que está involucrado en el problema para producir un signo construcción *(CVI 2, concepción-objeto)*. En este episodio no se mencionó la definición formal de simetría axial. Sólo se hizo uso de la concepción que se tiene de ella en la clase.

4.2.1.3.2 Construcción del punto A' simétrico de A

En la última parte del diálogo anterior entre la profesora y los estudiantes, ella llama la atención sobre las herramientas del software que posibilitarían la representación de la situación descrita en el problema para hacer la exploración que permita resolverlo [57]. A continuación se presenta una interacción en la cual la profesora dialoga con un solo grupo. Específicamente, la mediación de la profesora se centra en que los estudiantes reconozcan la herramienta del software que les permite realizar dicha construcción, y como consecuencia de este reconocimiento, realicen la construcción del punto A’

61	P	¿Dónde está el punto A’?
62	E2	Ahí [señala al punto A]
63	P	Y ¿dónde está el punto A’? ¿Qué es A’?
64	E1	El de la mitad, ¿no? [señalando al punto que sería la intersección entre la recta BC y el segmento AA’]
65	P	¿Qué es lo que dice [refiriéndose al enunciado de el problema cumbre]? ¿Quién es A’?
66	E3	El simétrico axial de A con respecto a la recta BC.
67	P	Exactamente. ¿Dónde está ese punto? [se refiere al punto simétrico de A con respecto a la recta BC].
68	E2	No está.
69	P	Exploren las herramientas [del software]… Les acabo de decir, exploren las herramientas para sacar ese punto, a ver de dónde lo pueden sacar.
⋮		[De la intervención 71 a la 74 los estudiantes exploran las herramientas y buscan cuál es la que mejor se ajusta a lo que deben construir]
75	E1	“refleja objeto en recta” [lee las herramientas del software al pasar el mouse sobre ellas]. Pero…
76	E2	Esa es [Se refiere a la que acaba de decir E1].
77	P	¿Qué es lo que hace el espejo?, ¿El espejo qué es lo que hace con su imagen?
78	E1	El simétrico, la refleja.
79	P	¿Qué es lo que van a reflejar?
80	E2	El punto A.
81	P	¿Con respecto a quién? [Los estudiantes titubean para responder, y mueven el mouse sobre los puntos]. Chicos, ¿qué dice la herramienta? Lean, párate encima de la herramienta. [señalando con el dedo dónde deben ubicar el mouse] ¿Qué dice?
82	E2	Objeto a reflejar, luego eje de reflexión [leyendo la etiqueta que se despliega

		al ubicar el mouse sobre el ícono sobre el que deben hacer clic]
83	P	Ok, entonces en ese orden debemos hacerlo.
84	E3	Ah, ya.
85	E2	Esto es lo que tenemos, el punto A y esto es lo que pensamos que era el espejo [señalando la recta BC], falta el otro [los estudiantes hacen clic sobre el punto A].
86	E1	Y luego eje de reflexión.
87	E2	Vuelvo a intentarlo [han seleccionado accidentalmente puntos distintos a A cuando emplean la herramienta]. A ver. Por fin.
88	E3	Exacto, ahí está perfecto [mientras arrastra el punto A y verifica que el punto A' es efectivamente su simétrico con respecto a la recta BC]  Figura 4-8

Con las intervenciones de la 61 a la 69, la profesora llama la atención de los estudiantes sobre el hecho de que aún hay elementos faltantes en la construcción de acuerdo a lo solicitado, planteando preguntas como ¿dónde está el punto A'?, ¿Qué (quién) es A'?, con las que pretende que los estudiantes reconozcan los elementos que efectivamente se han construido, es decir está centrada en *CVI 1, orden-objeto.* También indaga sobre la identificación que han hecho los estudiantes del punto A' y la condición particular que este tiene, a diferencia de los otros elementos que propone la construcción, el punto A' es un punto que debe aparecer producto de una transformación; no se construye de igual manera que los otros tres puntos A, B y C [63 y 65]; con esto, centra su mediación hacia la producción del signo construcción que complete el producido hasta ahora, con la determinación del punto A'. Producto de la mencionada indagación, E2 [68] cae en cuenta de que aún falta construir el punto A', razón por la cual es posible que piense que debe aparecer producto de la transformación mencionada.

Vale la pena rescatar que en esa secuencia de intervenciones se refleja evolución de signos producidos por el grupo: modifican el signoenunciado en el que sospechan que el punto A' ya está construido (han asumido que el punto es la intersección entre $\overleftrightarrow{BC}$ y un segmento sin haber realizado la construcción de $\overline{AA'}$ y sin haber reconocido aún que ese es el segmento) [62 y 64], por un signo en el que reconocen que efectivamente aún no se ha construido el punto A' [68]. El primero de estos signosenunciado podría considerarse como un signo pegado al artefacto por cuanto la intersección que mencionan surgiría producto de una construcción que podrían desarrollar con el artefacto a partir de la construcción que tenían hasta el momento ($\overleftrightarrow{BC}$, y punto A). El segundo signo enunciado (en el que los estudiantes se refieren a que aún no se ha construido el punto A') no se puede catalogar como matemático, pero sí es importante para continuar con la consecución de un signoconstrucción útil para la exploración que cumpla con las condiciones del problema.

Siguiendo con el análisis de la interacción, de manera específica, en sus intervenciones 69, 81 y 83, la profesora llama la atención sobre el uso del artefacto y las cosas que se pueden hacer con él para realizar construcciones, indagando sobre la(s) herramienta(s) del software que permitiría(n) elaborar dicha construcción para que así, los estudiantes hagan asociaciones entre qué herramienta se debe seleccionar y los objetos de la construcción que deben ser seleccionados. En la Figura 4-9 se muestran las etiquetas que aparecen sobre el ícono de la herramienta que los estudiantes emplean en GeoGebra para realizar la reflexión de un punto respecto a una recta.

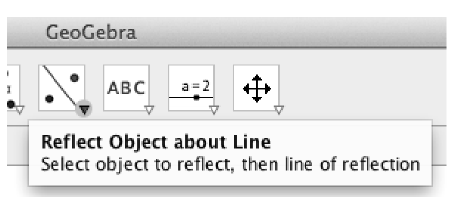


Figura 4-9

Dado que el propósito de la profesora es que los estudiantes hagan uso de la herramienta “refleja objeto en recta” para construir el punto A’, vale la pena mencionar que el SGD ha sido empleado en dos vías: i) con el propósito de que los estudiantes se familiaricen con el *software*, asociando los objetos geométricos con la herramienta mismay ii)con el propósito de que se use ese *software* para cumplir con las condiciones del problema [77 y 79] (asociar el punto dado A con el punto que se debe picar en la herramienta como el objeto a reflejar -tal como aparece en la etiqueta-, y asociar la recta de reflexión con $\overleftrightarrow{BC}$ que han construido).

Con lo anterior, tiene lugar el indicador 3 de la categoría *CVI* que emerge como una nueva acción de la profesora en su mediación:.

> **3. Artefacto-objeto** revisar o pedir revisión del uso del artefacto en términos del uso de sus herramientas o funciones, para enfocarse en los elementos necesarios requeridos por el artefacto (información en las etiquetas), al hacer uso de él para obtener la construcción buscada.

Así, la profesora busca específicamente que algunos elementos asociados con el uso de la herramienta (como los enunciados que aparecen al ubicar el mouse sobre los íconos), permitan que los estudiantes se enfoquen en todos los elementos requeridos de acuerdo a la herramienta*(CVI 3, artefacto-objeto)*, y logren hacer uso del artefacto de la manera adecuada para producir el signo esperado como lo evidencian en su intervención 87.

Finalmente, los estudiantes han realizado la construcción necesaria, asociada a la situación, para poder hacer la exploración que les permitirá solucionar el problema. Aunque la mediación de la profesora es efectiva por cuanto el grupo realiza el esperado signoconstrucción (Figura 4-7), la investigadora considera que los signos producidos por los estudiantes están pegados al artefacto dado que para realizarlos, los estudiantes hicieron uso de los recursos de ayuda del software (ver indicador 3 de la CVI). Más aun, considera que tal signo no puede ser considerado matemático en ningún sentido, pues es producto de una conceptualización de eje de simetría como "espejito" y no al uso de la definición formal de simetría axial. Definitivamente, hubo demasiada mediación por parte de la profesora y los estudiantes no trabajaron de manera autónoma como se esperaba dada su no apropiación de la teoría geométrica y del software mismo. Producto de tal mediación de la profesora, se evidenciauna modificación en los significados de los estudiantes; por un lado en la asociación de la concepción de "espejito" con la recta eje de simetría y por otro en el concepto de la simetría axial.

4.2.1.4 Una breve síntesis del análisis

Este primer bloque estuvo centrado en la construcción de las condiciones del problema. En este contexto, la mediación de la profesora se centró en tres aspectos relacionados con la construcción de las condiciones pedidas por el problema: i) pedir revisión del enunciado propuesto por el problema y del orden en que se deben construir los objetos, ii) indagar acerca de las concepciones de los estudiantes para asociarlas con construcciones de los objetos, y iii) revisar o pedir revisión del uso que se hace de las herramientas o funciones del artefacto para obtener una construcción pedida, a partir de la información del "cómo se usa" que aparece en las etiquetas cuando se pasa el mouse sobre los íconos de las herramientas de GeoGebra. Dado lo anterior, surgió la categoría emergente *CVI* que aportó tres indicadores para analizar la mediación semiótica de la profesora en los asuntos relacionados con la construcción de objetos solicitada en los problemas mismos.

En la siguiente tabla se hace una descripción de las acciones de la profesora y de la modificación de signos de los estudiantes

Tabla 4-2:

Acciones de la profesora y modificación de signos de los estudiantes durante el Primer Bloque de la sesión de clase Problema Cumbre

EPISODIO	PRIMER SIGNO DE LOS ESTUDIANTES	ACCIONES ESPECÍFICAS DE LA PROFESORA CATEGORÍA EMERGENTE CVI	SIGNO MODIFICADO
1. Construcción puntos A, B y C no colineales	Signo construcción punto A	1. Orden - objeto 2. Concepción - objeto	Signo construcción puntos A, B y C no colineales
2. Construcción $\overleftrightarrow{BC}$	Signo construcción $\overline{BC}$	1. Orden – objeto 2. Concepción - objeto	Signo construcción $\overleftrightarrow{BC}$ asociado al significado matemático recta eje de simetría.
3. Construcción punto A' simétrico del punto A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$ como producto de una concepción del objeto eje de simetría	Signo enunciado concepción "espejito" al referirse al eje de simetría en una reflexión	1. Orden - objeto 2. Concepción – objeto 3. Artefacto - objeto	Signo construcción A' como la reflexión del punto A respecto a $\overleftrightarrow{BC}$.

4.2.2 SEGUNDO BLOQUE: FORMULACIÓN DE LA CONJETURA

A continuación se presenta el análisis del segundo bloque de esta sesión de clase, centrado también en el proceso de conjeturación, pero esta vez haciendo énfasis en acciones de la profesora que llevan a la producción de signos por parte de los estudiantes entorno a la exploración, determinación de invariantes y formulación de la conjetura esperada. Se espera que este signo enunciado conjetura sea formulado por los estudiantes a partir de los signos que han producido. Se pretende entonces, que al finalizar este segundo bloque, los estudiantes formulen un enunciado condicional cercano al que sigue:

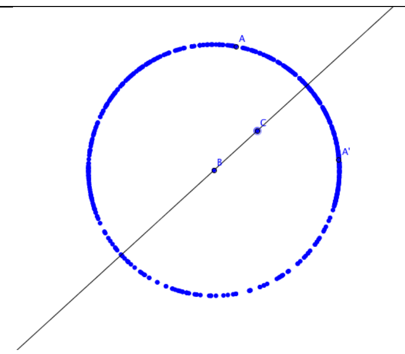
> *Si A, B y C son tres puntos no colineales en el mismo plano y el punto A' es el simétrico axial de A con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces A' es un punto de la circunferencia con centro en B y radio $\overline{AB}$.*

Se ha dividido este segundo bloque en dos episodios, uno relativo al momento en el que los estudiantes se dan cuenta de la propiedad invariante, y otro enfocado en la escritura de la conjetura como un enunciado condicional.

4.2.2.1 Identificación del invariante

Ya teniendo la construcción de los objetos planteados por el problema (puntos A, B, C, A' y $\overleftrightarrow{AB}$) la profesora orienta el trabajo de los estudiantes de manera tal que se percaten de la propiedad invariante. En este contexto, tiene lugar la siguiente interacción.

1	E1	Mira listo, cuando arrastras el punto C, ¿qué pasa con el punto A? ¿Con el punto A'? [Lee el enunciado del problema; mientras tanto, E2 arrastra el punto C nuevamente]. Mira es este, se mueve [señalando con el dedo al punto A'].
2	E2	¡En circunferencia, haciendo una circunferencia! [Arrastran el punto C].
3	E3	¿Será una circunferencia?. Bueno parece que sí es una circunferencia.
4	E1	[Llama a la profesora]. Mira.
5	P	A ver, ah, ¡bueno!
6	E1	Entonces ahí dice: "Cuando arrastras el punto C, ¿qué pasa con el punto A'?" [Lee el enunciado del problema].
7	P	¿Qué ven que pasa ahí?
8	E1	Se mueve en una circunferencia.
9	P	¿Segura? ¿Cómo puedo verificar yo eso?, ¿cómo puedo hacerlo con todas esas herramientas que tengo?
10	E1	¡En circunferencia!

11	E2	Yo pienso que por propiedades de objeto y activa la herramienta rastro
12	E3	[Mientras exploran herramientas] ¿Dónde está? No, ya sé, ya sé [Activa la herramienta rastro sobre el punto A' en la opción preferencias y arrastra nuevamente el punto C]
13	E2	Dale, listo.
14	E1	Mueve. [Llama a la profesora]. Mira. [Muestra la Figura 4-10 en su pantalla].  Figura 4-10
15	P	Pareciera que están en lo cierto mis muchachos.
16	E3	Estamos en lo cierto [afirmando que es correcto lo que dijeron en 2, 8 y 10].
17	P	Esperen porque me están hablando todos al tiempo. Bien, o sea, ¿tú dices [dirigiéndose a E3] que lo que sucede es…[se aleja hacia el tablero electrónico y señalando la misma construcción] que se mueve en circunferencia el punto A'?.
18	E2	Sí.

En el anterior apartado, las acciones de la profesora están dirigidas inicialmente a proveer tiempo suficiente para que los estudiantes realicen una exploración autónoma sobre la construcción realizada con miras a determinar una invariante. En las acciones del profesor propuestas por el grupo Æ•G, algo como ello no es explícito, pero debe suceder en el marco de la aproximación metodológica para la enseñanza que el grupo propone. Ésta no es una acción que deliberadamente todos los profesores del colegio donde se realizó el experimento tengan presente.

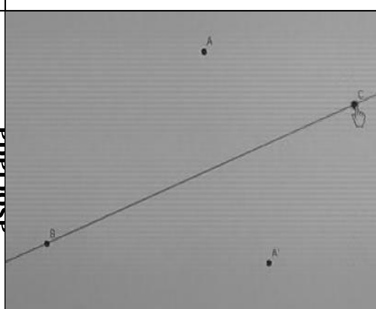
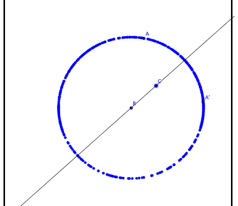
Con esta acción la profesora pretende favorecer que los estudiantes reconozcan el invariante “el punto A’ pertenece a la circunferencia con centro en B y radio $\overline{AB}$”. En las intervenciones 1, 2 y 3, la acción de la profesora refleja sus frutos dado que los estudiantes efectivamente identifican un invariante que se corresponde parcialmente con lo esperado: en la intervención 2, E2 produce un signoenunciado en el que afirma que el punto A’ se mueve describiendo una circunferencia. Con afirmaciones como “ah ¡bueno!“ [5] la profesora está validando el trabajo realizado por los estudiantes. Luego de esto, en su intervención 7, al indagar sobre los signos que ellos han producido y señalar: “qué es lo que ven que sucede”, está solicitando que los estudiantes precisen la propiedad invariante que han percibido. Esta acción se categoriza como ***centrada en la conjetura como solución al problema propuesto*** (*CIII 14, indagar sobre signos*). Igualmente indaga sobre los signos producidos, al pretender que los estudiantes verifiquen que efectivamente sus ideas son acertadas por medio de preguntas como “¿Segura? ¿Cómo puedo verificar yo eso?, ¿Cómo puedo hacerlo con todas esas herramientas que tengo?” [9].

Los estudiantes producen el signo enunciado concepción “En una circunferencia” [2], “Se mueve en una circunferencia” [8]. La mediación de la profesora lleva a que los estudiantes activen la herramienta rastro [11, 12] y se produce el signo construcción: la circunferencia aparece de manera explícita [14, 16]. En este momento la profesora se percata de que los estudiantes tienen todo para precisar la propiedad invariante, verificarla y producir un signo conjetura. La profesora considera que los estudiantes están ya próximos a producir una conjetura cercana a la esperada.

En la siguiente tabla, se ilustra una relación entre los tipos de signo producidos por los estudiantes, y la modificación en los mismos:

Tabla 4-3:

Modificación de los signos de los estudiantes

Tipo de signo	Primer signoconstrucción		Primer signo – enunciado		Segundo signo construcción		Segundo signo enunciado
Descripción del signo	Representación de $\overleftrightarrow{BC}$, el punto A y su simétrico axial A'. Arrastre del punto C	**Provocó:**	¡En circunferencia, haciendo una circunferencia! [2] Se mueve en una circunferencia [8] En una circunferencia [10]	**Mediación de la profesora provocó:**	Representación de $\overleftrightarrow{BC}$, el punto A y su simétrico axial A'. Activar rastro del punto A'. Arrastre del punto C	**Provocó:**	Estamos en lo cierto. [Afirmando que es correcto lo que dijeron en 2, 8 y 10].
Representación asociada							

Vale la pena resaltar que los primeros signos (tanto construcción como enunciado), presentados en la tabla son del artefacto ya que sus producciones están totalmente fundamentadas en el uso del artefacto (arrastre del punto C y movimiento aparentemente circular del punto A'). Ahora bien, los segundos signos producidos, son utilizados por la profesora como signos pivote. En su intervención 15, la profesora valida el invariante encontrado por los estudiantes, y al afirmar que "…tú dices que lo que sucede es… que se mueve en circunferencia el punto A´" [17], está haciendo una síntesis de una idea de los estudiantes y establece el foco de atención en dichos signos (*CIII 13*, *síntesis-foco de atención*) que serán útiles al momento de producir el signo enunciado conjetura esperado.

4.2.2.2 *Construcción del enunciado de la conjetura*

El presente episodio relacionado también con el proceso de conjeturación, centra esta vez la atención en la producción del signo enunciado-conjetura esperado.

19	P	Listo, ¿pueden escribir una conjetura?. Ahora escriban la conjetura.
20	E1	Si… y entonces… [haciendo referencia a la estructura de enunciado condicional con que se han construido conjeturas en la clase].
21	E3	Listo Si… y entonces… [E3 lee otras conjeturas que se han escrito en el curso para tomarlas como ejemplo].
22	E1	Bueno, a ver Si… si que, ¿qué vas a decir E3? [titubean al establecer qué deben escribir]. Si el punto C se mueve, entonces el punto A´…
23	E3	[Escribe mientras E1 y E2 dictan] Si arrastramos el punto C, entonces el punto A´ se mueve haciendo una circunferencia.
24	E2	Pero esperen. Es que no está completa. Igual toca ponerle lo que tenemos. Tenemos que hablar de simetría axial […] Si el punto A´ es el simétrico axial…[…]
25	P	¿Qué tienen ahí chicos?
26	E2	Una circunferencia
27	P	Listo, entonces. ¿Qué quieres decir?
28	E2	El punto medio, siempre va a ser B.
29	P	¿Cómo se llama eso en una circunferencia?
30	E3	Mejor dicho, la recta va a actuar como un radio y la mitad de la circunferencia
31	P	A la mitad, a ese punto, lo llamamos también centro.
32	E3	Sería el centro de la circunferencia y además su radio también. [Titubean al decidir qué escribir].
36	P	¿Pero quién es ese A’? Piensen en lo que construyeron, el punto A’ era algo con respecto a la recta BC. De ahí partieron, y llegaron a ver que el punto A’, ¿dónde estaba?
37	E1	En la circunferencia.
38	P	Pero, ¿de qué circunferencia estamos hablando? Es una circunferencia especial.

39	E3	¿Por qué?
40	P	Bueno piénsenlo.
41	E2	Porque su centro es B
42	P	Busquen su definición de circunferencia, busquen sus definiciones.
43	E1	BC
44	P	¿BC? Mueve C [E2 mueve C] ¿Cuál es el radio?
45	E2	BA
46	P	¿Y cuál es el centro?
47	E1	El centro es B
48	P	¿Qué fue lo primero que hicieron?
49	E2	Tres puntos.
50	P	Bueno, ¿después?
51	E3	La recta BC
52	P	¿Después?
53	E2	Encontramos el punto A’.
54	P	¿Después qué pasó?
55	E2	Encontramos la circunferencia con el punto C.
56	P	Bueno mueves el punto C ¿cierto? Y se dieron cuenta que ese punto A’pertenece ¿a qué?
57	E1	A la circunferencia.
58	P	¿A qué circunferencia?
59	E1	A una circunferencia con radio AB, entonces ya tenemos la conjetura.
60	P	Ya la tienen, si…entonces… [la profesora mira el reloj y se percata que la sesión de clase ya va a terminar].
61	E2	Ya la tenemos [E3 abre *Word*].
62	E3	A ver.¿Qué queremos decir, cuál es nuestro enunciado?
63	E2	Si el punto…¿puedo poner los puntos?

64	P	Los puntos no colineales.
65	E2	Si los puntos no colineales A, B, C …[titubean al continuar]. No sé qué hacer, te lo juro.
66	P	¿Y la simetría axial?
67	P	Es que aquí ya está. Usen la información, se acuerdan que lo primero que uno pone ahí es lo que yo conozco. ¿Qué es lo que pongo allí? ¿No es lo que me da la situación?
68	E2	Que los puntos A, B y C son no colineales.
69	P	Perfecto. ¿Y qué otra cosa me da la situación?
70	E2	Que A' es el simétrico de A.
71	P	¿Con respecto a quién?
72	E1	A BC. El simétrico de A con respecto a la recta BC.
73	P	¿Qué quieres decir? [dirigiéndose a E2]
74	E2	Que A' pertenece a la circunferencia con centro en B y radio AB.
75	E2	[Escribe con los aportes de E1 la conjetura] Si puntos no colineales A, B y C, tienen un punto simétrico A' de A con respecto a la recta BC, entonces A' pertenece a la circunferencia con radio AB
76	P	Y yo qué más tengo que decir de la circunferencia. ¿Sólo el radio? ¿Qué más datos tengo que nombrar de una circunferencia? ¿Ustedes ya lo habían dicho?
77	E2	El centro
78	P	Cuando hablamos de circunferencia, hablamos del radio y del centro *A*
79	E1	[Agrega a la conjetura "y su centro de B"] La conjetura del grupo queda escrita de la siguiente manera: *Si puntos no colineales A, B y C, tienen un punto simétrico A' de A con respecto a la recta BC, entonces A' pertenece a la circunferencia con radio AB y su centro de B*]

En el momento en el que la profesora pide a los estudiantes que produzcan un enunciado conjetura [19] sus acciones se centran en la ***comprensión y uso del enunciado condicional como objeto***, específicamente en pedir que se haga uso de tal enunciado (*CII 9, Conjetura – condicional).* Tiene lugar una interacción entre los estudiantes [20 – 23] en la que se produce una modificación del signo enunciado producido con anterioridad [2, 8, 10] que inicialmente está pegado al artefacto, a uno que tiene un poco más de elaboración y que está más cercano al signo matemático esperado: "Si arrastramos el punto C, entonces el punto A' se mueve haciendo una circunferencia". Así, la profesora lo ve como útil para usarlo como pivote pues aunque se refiere a elementos que están asociados al artefacto ("si arrastramos…se mueve"), ella reconoce que en términos generales, el hecho geométrico que se quiere reportar está presente en tal enunciado.

De las intervenciones 25 a la 58, se produce una interacción en la que la profesora busca que los estudiantes identifiquen los elementos que tienen hasta el momento**.** Particularmente con la intervención 25 "¿qué tienen ahí chicos?" y 36 "¿Pero quién es ese A'? Piensen en lo que construyeron, el punto A' era algo con respecto a la recta BC, de ahí partieron, y llegaron a ver que el punto A', ¿dónde estaba?", está pidiendo explicitación de las condiciones construidas (*CII 7, identificación – antecedente y/o consecuente*), es decir de lo que sería el antecedente de la conjetura. Aunque la mediación busca que, en el signo de los estudiantes, se modifique el antecedente [36], ellos mencionan elementos del consecuente [37], razón por la cual la profesora orienta la interacción para que los estudiantes aludan a las características de la circunferencia [38], es decir sigue la idea de los estudiantes. Luego que los estudiantes han precisado en cierta medida el consecuente [45, 47], la profesora se centra nuevamente en que reconozcan las propiedades del antecedente mediante la alusión a los objetos construidos antes de iniciar la exploración (*CII 7, identificación – antecedente y/o consecuente*). Así, pregunta "¿Qué fue lo primero que hicieron?... Bueno, ¿después?... ¿Después que pasó?" [48 - 54]. Con esto y las interacciones ocurridas de la línea 56 a la 58, la profesora nuevamente se centra en que los estudiantes expliciten las condiciones que deben ir tanto en el antecedente como las propiedades que deben estar en el consecuente. Seguido de esto, con la afirmación "…entonces ya tenemos la conjetura" [59] de E1, pareciera que por lo menos él, ha ganado conciencia de las componentes que debe tener el enunciado condicional solicitado, hecho que muestra unos réditos parciales puesto que existe esta identificación, los estudiantes dan respuesta acertada en términos del consecuente, pero aún no dilucidan el antecedente de manera completa.

En su intervención 62, la profesora les pide escribir el enunciado de la conjetura (*CII 9, conjetura-condicional*). Sin embargo, en sus intervenciones 64 y 66, la profesora de nuevo tuvo que guiar el trabajo de los estudiantes y es ella quien menciona dos de los elementos del antecedente (A, B y C son puntos no colineales y A’ es el simétrico del punto A respecto de la recta BC), hecho que ratifica un comentario anterior. En las intervenciones de 67 a la 74, la profesora sigue guiando el proceso haciendo que los estudiantes expliciten de nuevo, antecedente de la posible conjetura. Es en la intervención 79, que E2 escribe el signo conjetura del grupo que la profesora reconoce como un signo matemático cercano a la conjetura esperada. Así pues, pese al esfuerzo de la profesora por intentar que los estudiantes generen una producción autónoma, se reconoce que los estudiantes aún están lejanos de ello. La profesora constantemente debe hacer preguntas que focalicen a los estudiantes es ciertas acciones, para este casa, en la identificación de las condiciones del antecedente. Parece que los estudiantes tienen claro cómo determinar el consecuente (propiedad invariante: A’ pertenece a una circunferencia) pero olvidan todas las condiciones que conllevan a tal propiedad.

Vale la pena mencionar que en medio de esta interacción, en las intervenciones 29 y 31, sus acciones están dirigidas a que los estudiantes precisen su concepción del objeto ”centro de circunferencia”; de manera, la profesora pretende que el signo producido por E2 [28] y E3 [30], en el que afirman que el punto medio o mitad de la circunferencia es el punto B, sea modificado. En este sentido, tiene lugar la acción *CI 4*, *abordar imprecisiones*.

4.2.2.3 Una breve síntesis del análisis

Este segundo bloque estuvo centrado en la identificación del invariante y la producción del signo enunciado–conjetura por parte de los estudiantes. En este sentido, la mediación de la profesora se centró en dos aspectos, uno relacionado con la conjetura misma como solución al problema propuesto y el otro en la comprensión y uso del enunciado condicional. En cuanto al primer aspecto, las acciones de la profesora se dirigieron a indagar sobre los signos y a realizar una síntesis en torno a los elementos útiles en la producción de la conjetura. En cuanto al segundo, tales acciones se orientaron a establecer el antecedente o consecuente y a pedir el uso de la conjetura en formato condicional.

Para terminar este segundo bloque, al igual que se hizo en el primero, se hace una descripción en una tabla de la evolución de signos, y las acciones de la profesora.

Tabla 4-4:

Acciones de la profesora y modificación de signos de los estudiantes durante el Segundo Bloque de la sesión de clase Problema Cumbre

EPISODIO	PRIMER SIGNO DE LOS ESTUDIANTES	ACCIONES ESPECÍFICAS DELA PROFESORA	SIGNO MODIFICADO
1. Identificación del invariante	Signo construcción $\overleftrightarrow{BC}$, A y su simétrico axial A'. Arrastre del punto C. Signo del artefacto	13. Síntesis – foco de atención (CIII) 14. Indagar sobre signos (CIII)	Signo construcción al emplear la herramienta rastro y describir la circunferencia. La profesora lo empleará como pivote para producir la conjetura.
	Signo enunciado-concepción “Se mueve en una circunferencia”. Signo del artefacto		Signo enunciado “Estamos en lo cierto”
2. Construcción del enunciado de la conjetura	Signo enunciado-conjetura “Si arrastramos el punto C, entonces el punto A´ se mueve haciendo una circunferencia” [23] Signo del artefacto empleado como pivote.	4. Abordar imprecisiones (CI) 7. Identificación antecedente y/o consecuente (CII) 9. Conjetura - condicional (CII)	Signo enunciado-conjetura “Si puntos no colineales A, B y C, tienen un punto simétrico A´ de A con respecto a la recta BC, entonces A´ pertenece a la circunferencia con radio AB y su centro de B” [78]. Signo matemático

4.3 RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Teniendo en cuenta los análisis realizados, a continuación se presenta una síntesis de las acciones de mediación semiótica de la profesora tendientes a favorecer la modificación de signos de los estudiantes. Se presentan consideraciones en torno a la categoría emergente CVI y a la gestión misma de las sesiones de clase cuyas producciones fueron objeto de análisis.

La Tabla 4-5 contiene la frecuencia (ver columna tres) de las acciones de la profesora en su mediación, producto del análisis realizado a la luz de la TMS y en el marco de las categorías que fueron empleadas, tanto las del grupo Æ•G como las categorías emergentes.

Tabla 4-5:

Acciones de mediación semiótica de la profesora categorizadas en el presente estudio

A. Categorías del grupo Æ•G empleadas en el análisis		
I. Conceptualización de objetos y relaciones		
Acción N°	Acción	Frecuencia
1	Concepción – artefacto	1
3	Ubicación objetos	1
4	Abordar imprecisiones	1
22	Significado personal-concepto	1
II. Comprensión y uso del enunciado condicional como objeto		
7	Identificación antecedente y/o consecuente	2
9	Conjetura – condicional	2
III. La conjetura como solución al problema propuesto		

13	Síntesis foco de atención	4
14	Indagar sobre signos	3
B. Categoría emergente empleada en el análisis		
CVI. Construcción de los elementos que hacen parte del problema propuesto		
1	Orden objeto	4
2	Concepción objeto	5
3	Artefacto objeto	1

Considerando las frecuencias de las acciones de la profesora en la mediación,dichas acciones estuvieron dirigidas a favorecer de manera especial la producción de signos en torno al proceso de conjeturación. Se evidencia que las acciones i)sintetizar ideas para establecer el foco de atencióncon el propósito de establecer elementos útiles en la conjetura eii) indagar sobre los signos producidos por los estudiantes para producir la conjetura o para entender ideas de otros o revisar las propias, son las de mayor frecuencia.Esto puede deberse a que tanto la profesora como los estudiantes se están acomodando a una aproximación metodológica en la que los estudiantes deben hacer explícitas sus ideas, sin alejarse del centro de la discusión, con lo que es necesario que se retomen las ideas tanto propias como de otros para dar solución al problema propuesto. Es así que los signos de los estudiantes, que fueron empleados como pivote, redundaron en la evolución de signos de manera más efectiva.

Un hecho que llamó la atención de la autora de este documento, y que redundó en el surgimiento de la categoría CVI, es que para que los estudiantes construyeran las condiciones del problema correspondiente al primer bloque de la sesión de clase Problema Cumbre, fueron necesarias acciones de mediación de la profesora tendientes a establecer qué objetos reconocen los estudiantes en el problema propuesto y qué concepciones tienen de tales objetos (aunque ya haga parte del sistema teórico local que ha sido aceptado por la comunidad de clase) con el propósito de que el signo construcción producido por los estudiantes represente las condiciones planteadas por el problema y que esos signos evolucionen a signos matemáticos. Dicha situación se presentó con frecuencia durante el curso, tal como lo revela la Tabla 4-5.

La categoría emergente CVI con sus indicadores propios (empleada en el análisis de la sesión de clase Problema Cumbre), surge debido a la extensa e inesperada mediación que se llevó a cabo para que los estudiantes reconocieran y construyeran los objetos involucrados en el problema que les fue propuesto. El hecho de que esto haya sucedido de manera reiterada en las sesiones de clase permite lanzar la hipótesis de que puede ser una acción recurrente a nivel escolar, en el que al emplear artefactos, la producción de signos construcción no siempre se da de la manera esperada.

En torno a los asuntos relativos a la gestión de la clase, se resaltan los siguientes aspectos tenidos en cuenta por la profesora:

1. No dejar algún grupo desatendido. Todas las producciones son importantes y algo aportan para la producción de signos matemáticos.
2. Usar el software en la medida de lo posible y no dejarlo de lado. Más bien, emplearlo de manera tal que los estudiantes vieran su utilidad no sólo en funciones como el arrastre, rastro o medidas, sino también en las representaciones de los íconos de las herramientas de la ventana del software o de las etiquetas de ayuda quesobresalen cuando el mouse pasa por encima de tales íconos (Ver CVI 3).
3. Los signos producidos por todos los grupos deben ser tenidos en cuenta para intentar lograr su modificación a signos matemáticos.

Siguiendo con el desarrollo de las sesiones de clase, hay que reconocer que aunque entre la comunidad de clase se hayan establecido definiciones, la realidad mostró que no siempre son ideales los escenarios a los que la profesora se enfrenta (ver el caso de la concepción de la recta eje de simetría como *espejito*). Aún así, los estudiantes modificaron sus signos sin usar las definiciones formales, correspondientes a significados matemáticos que aparentemente ya tenían (como sucedió con la construcción del punto A' en la clase Problema Cumbre). La mediación de la profesora se centró entonces en aludir a cualquier elemento que le permitiera a los estudiantes construir el signo esperado. En este contexto, el análisis lleva a concluir que privilegiar lo efectivo por encima de lo formal aporta elementos con los que la profesora puede mediar.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio que intentan dar respuesta a la pregunta que orientó la investigación. Para ello, las mismas giran en torno a los siguientes aspectos: i) potencialidad de los referentes teóricos para decantar las acciones del profesor, ii) precisar las acciones mismas del profesor cuando usa GeoGebra en un ambiente de clase en el que se pretende que sus estudiantes se involucren en el proceso de conjeturación, iii) aspectos a considerar para futuros estudios afines a este, y iv) reflexiones de la autora.

En cuanto a los referentes teóricos, la Teoría de la Mediación Semiótica propende por el diseño de clases en las que lasacciones del profesor, al emplear un artefacto (para este caso, GeoGebra), está previamente establecido por medio del diseño de un ciclo didáctico, que para este caso fue la aproximación metodológica del grupo Æ•G. En tal sentido, esta Teoría resulta ser muy afortunada para orientar la enseñanza y propiciar la producción de signos en la clase de geometría con estudiantes en edad escolar. Efectivamente el trinomio *TMS*, *categorías de acciones del profesor* y *aproximación metodológica*,permite describir lasacciones del profesor en una mediación en la que se pretende que los estudiantes experimenten el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa y favorece el hecho de que los estudiantes se acerquen al contenido matemático de una manera genuina.

El analizar y hacer la descripción de las acciones del profesor hace que este estudio sea un primer sustrato para que los esfuerzos por favorecer el aprendizaje, al emplear la Teoría de la Mediación Semiótica, no se queden sólo en intenciones de un profesorpues se dieron a conocer a los maestros de la institución donde se llevó a cabo el experimento.Como consecuencia del estudio llevado a cabo, sobresalen acciones del profesor producto del contexto particular de este curso antes de la experimentación: no se usaba un software especializado como GeoGebra, el estilo de enseñanza es tradicional, no se privilegia el trabajo cooperativo en grupo, el estudio de la geometría se centra en contenidos y no en procesos, etc.

En torno a la gestión, se resaltan tres aspectos sugeridos desde el ciclo didáctico asumido (i.e., aproximación metodológica): atender a todos los grupos, usar el software de manera que sea una herramienta necesaria en la enseñanza y promover la producción de signos por parte de los estudiantes para favorecer el aprendizaje. El diseño de las actividades previas a las sesiones de clase, también hace parte de esta gestión y se hace necesario que de antemano, el profesor que pretende emplear artefactos para la enseñanza de la geometría, conozca el potencial semiótico de dicho artefactopara aprovecharlo de tal manera influyaen el diseñode problemas abiertos con objetivos específicos. En este estudio se ratifica el potencial de GeoGebra en términos de decantar dependencias y hacer ostensivo lo que los estudiantes tienen en la mente respecto de algunos objetos (v.g., simetría como espejito). Con este estudio, se tienen herramientas para suponer que los estudiantes de secundaria que apenas tienen su primera experiencia con un ambiente de clase como el que se propuso, deben en principio tener alguna idea sobre los objetos que se proponen como condición en un enunciado para que ellos puedan construirlo, pero además cómo se gestionan en el *software*. En este sentido, el *software* obligó a que los estudiantes explicitaran una concepción para realizar construcciones en dicho entorno y los hizo dudar de ellascuando debían hacer su representación. Por ejemplo, aun cuando los niños podían saber qué son punto colineales tenían alguna dificultad en hacer su representación en GeoGebra pues quizá pensaban que debía hacer algún procedimiento especial que garantizara las condiciones de la definición, asunto que no pasaría si tuvieran que hacer tal representación en lápiz y papel.

En relación con las acciones del profesor, tal como se presenta en la Tabla 4-5,estas se centraron principalmente en la categoría III (la conjetura como solución al problema propuesto) y VI (construcción de los elementos que hacen parte del problema). En relación la primera categoría se resaltan acciones como: i) sintetizar o recoger ideas que establecen el foco de atención, eii) indagar sobre los signos producidos para rescatar elementos útiles (ideas propias o de los demás) en el proceso; en cuanto la segunda categoría, sobresalen: i) indagar acerca de la concepción de un objeto para usarla en la construcción de las condiciones del problema y ii)pregunta por el orden en que deben realizarse las construcciones de las condiciones del problema. Se considera que ello ocurre dado que los estudiantes apenas tienen su primer contacto con un SGD, razón por la cual no hubo muchas ocasiones en la que los estudiantes trabajaran autónomamente; así pues la intervención de la profesora fue permanentepara que ellos generaran ideas que finalmente aportaran a la producción de unsigno enunciado-conjetura.

Eventualmente otras acciones (ver sección 3.3.3.2) relativas a la comprensión y uso del enunciado condicional (categoría II) son también importantes en casos específicos como se mostró en el Capítulo 4.

Se debe resaltar que aun cuando se hace un diseño deliberado, con uso de artefactos no usuales en la clase, con una aproximación metodológica de enseñanza distinta a la que los estudiantes y la profesora están acostumbrados, desafortunadamente no se logra por completo lo esperado, esto es, la producción de conjeturas autónomamente o múltiples formas de solucionar un problema; el estudiante, dada su experiencia, espera que la profesora le diga todo. Pese a este panorama, se considera que definitivamente el ambiente de clase cambió. Por un lado, al preguntar a los estudiantes qué pensaban de sus clases de geometría de los últimos dos meses se evidenció que el entorno generado por la aproximación metodológica favoreció sus percepciones respecto de la clase misma. Algunos de ellos reconocen que este nuevo entorno, entre otras cosas, les presentó un punto de vista diferente de la geometría escolar y favoreció el trabajo en grupo:

> Nicolle: Creo que como en este momento estoy aprendiendo geometría, es una manera completamente diferente a como nos la habían enseñado en otros años. Es un poco complicado pero es otra manera de enseñar, y aunque las palabras son un poco confusas, al final todo en conjunto tiene más lógica y es una manera mejor de aprender al usar GeoGebra, y ha sido inesperado empezar a usar tanta tecnología. [...] En clase nos entendemos, y aunque en ocasiones hay cosas un poco confusas, al final entre todos logramos entenderlas. Creo que me uní con mis compañeros.

> Sebastián: Este proyecto de geometría a mí me ha parecido muy chévere; en principio porque me pareció una manera distinta de aprender matemáticas. A mí nunca me llamó la atención la matemática y mucho menos geometría, [...] y en contraste con lo que había visto, porque uno poder saber o poder ver lo que realmente está haciendo y no memorizando reglas y que le digan que eso es así porque lo dibujó en un papel. Eso me pareció muy importante [...] construir definiciones, conjeturas y utilizarlas, y en ocasiones aplicarlas al contexto me ha ayudado a ver matemáticas desde una perspectiva distinta, porque uno puede sacar conclusiones. Aprendí a hacer una justificación. Mis papás me dijeron que esto es un hit en el colegio. Qué bueno que hagan eso ahí.

> Nicolás: He visto una diferencia en mi trabajo, pues he construido y he logrado trabajar en grupo.

En las anteriores intervenciones, los estudiantes dejan entrever su interés en emplear artefactos con un propósito, y en aprender geometría de una manera en la que se sientan involucrados de manera auténtica con el conocimiento.

Por otro lado, para la profesora investigadora el cambio de ambiente de clase fue notorio no sólo porque introdujo un nuevo *software* e incentivó la participación de los estudiantes mediante una actividad de permanente indagación, sino porque también, mediante la producción de los estudiantes y su interacción en la clase, se favorecieron acciones de los estudiantes como argumentar sus afirmaciones, explorar una situación en la que se les plantea un problema para proveer una solución, entender que puede haber más de una solución al problema, trabajar en grupos, y cuestionar tanto el discurso matemático de los profesores como los textos escritos en los libros. Así mismo, ella alude que toda la experiencia llevada a cabo en el marco de la elaboración del trabajo de grado, contribuyó a su formación tanto profesional como personal por cuanto no sólo exigió la disciplina hacer una planeación de clase deliberada teniendo en mente propósitos tanto pedagógicos como investigativos, sino que también influyóen el hecho de sistematizar lo realizado como mecanismo para reflexionar sobre su conocimiento prácticoy sobre la geometría y su didáctica. Considera que esta experiencia conllevó a una interacción con sus colegas que giró en torno a los productos del estudio, hecho que de alguna manera intentó generar que sus prácticas fueran también modificadas.

Para finalizar esta sección, vale la pena resaltar que en un principio este estudio tenía el propósito de decantar acciones del profesor que usa un SGD en proceso de enseñanza de toda la actividad demostrativa. Sin embargo, desafortunadamente las intenciones desbordaron las realidades del estudio mismo, dado que se tuvo el tiempo suficiente para generar un ambiente en el que los estudiantes se involucraran en el proceso de justificación; se pensó que no llevaría tanto tiempo un proceso de enseñanza asociado a la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes utilizado como mediador un SGD. Ello justifica de paso, el cambio de título y de los objetivos del anteproyecto. Con el panorama anterior, para futuros estudios se puede pensar en continuar un trabajo en un sentido similar a este ampliar el trabajo, pero haciendo énfasis en las acciones del profesor empleando un ciclo didáctico determinado que busca favorecer el proceso de justificación de la actividad demostrativa. También se podría establecer cuáles el uso específico que le dan los estudiantes al *software* GeoGebra en procesos de conjeturación y justificación.

6. BIBLIOGRAFÍA

Bartolini-Bussi, M., &Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education* .

Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C., & Molina, O. (2013).Enseñanza de la Geometría Mediada por Artefactos: Teoría de la Mediación Semiótica. (P. Perry, Ed.) *Memorias 21º Encuentro de la Geometría y sus Aplicaciones*.UPN

Cobb, P., &Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Back (Eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). New York: Routledge.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-29.

Drijvers, P., Kieran, C., &Mariotti, M.-A. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. En The 17th ICMI Study* (Vol. 13, pp. 89-132). New York: Springer.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", 44 (1-2)*, 5-23.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (2010). Chapter 1. Introduction. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. En The 17th ICMI Study* (Vol. 13, pp. 1-11). New York: Springer.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics , 44* (1-3), 55-85.

Loewenberg Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H. N., &Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of Proof.*Proceedings of the ICM, III*, 907-922.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM, 41*, 427-440.

Mariotti, M. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, pp. 25-55. Taipei.

Mariotti, M. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *EducationalStudies in Mathematics*, *44,* 144-214

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un Acercamiento a la Investigación de diseño através de los Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de lasCiencias, 29*, 75-86.

Olive, J., &Makar, K. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology, Rethinking the terrain. En The 17th ICMI Study* (Vol. 13, pp. 133-178). New York: Springer.

Ospina, Y., & Plazas, T. (2011). *Acciones del Profesor que Promueven la Actividad Demostrativa con Estudiantes de Sexto Grado.* Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2013). *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje. Capítulo 1. Innovación en un aula de geometría de nivel universitario.* Bogotá, Colombia: Fondo Editorial UPN.

Pinzón, I., & Rodríguez, J. (2011). *Acciones Del Profesor Que Favorecen El Desarrollo De La Actividad Demostrativa En Grado Noveno.* Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., & Molina, O. (2011). Conjeturas y organización del contenido matemático en clase. *Proyecto de Investigación financiado por el CIUP.* Universidad Pedagógica Nacional.

Villarreal, M., &Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education:notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, 42, 49–62.

7. ANEXOS

Anexo 3a:

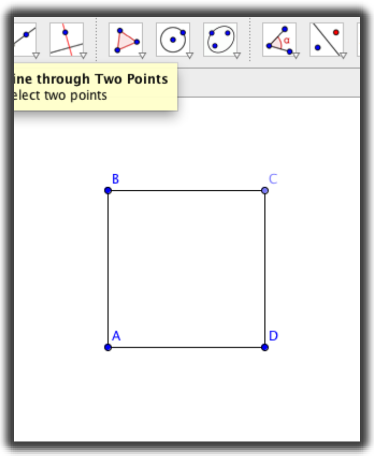


Figura 7-1: Construcción visible a los estudiantes al abrir el archivo Construcción 1.ggb

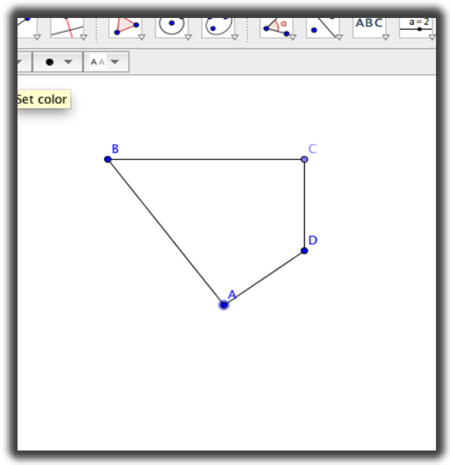


Figura 7-2: La misma construcción al emplear la herramienta arrastre

Tabla 7-1:

Preguntas realizadas a los estudiantes luego de explorar la construcción

Respondan las siguientes preguntas empleando el archivo Construcción 1.ggb
1. ¿Qué pueden decir sobre la figura?
2. Observando el ambiente de GeoGebra, ¿qué herramientas de GeoGebra pueden emplear para establecer más afirmaciones sobre la figura? Empleen esas herramientas.
3. ¿Pueden mover los puntos en la figura? Exploren con las herramientas de GeoGebra. ¿Qué puntos pueden mover? ¿Hay algún punto que no puedan mover?
4. ¿Es el movimiento de algún punto dependiente del movimiento de otro?¿Qué puntos no dependen del movimiento de otros?
5. ¿Qué tipo de figura forman los puntos marcados cuando los mueven? ¿Notan algo especial sobre el movimiento de algunos puntos?
6. Mientras están moviendo los puntos, ¿notan algo especial sobre la medida de los ángulos o de los segmentos?
7. Después de haber explorado con las herramientas de GeoGebra, contesten nuevamente la pregunta 1 a partir de sus respuestas en 5 y 6
8. Escriba un párrafo corto explicando qué cosas puede usted explorar con figuras hechas en GeoGebra y qué cosas puede usted explorar con figuras hechas con lápiz y papel

Anexo 3b:

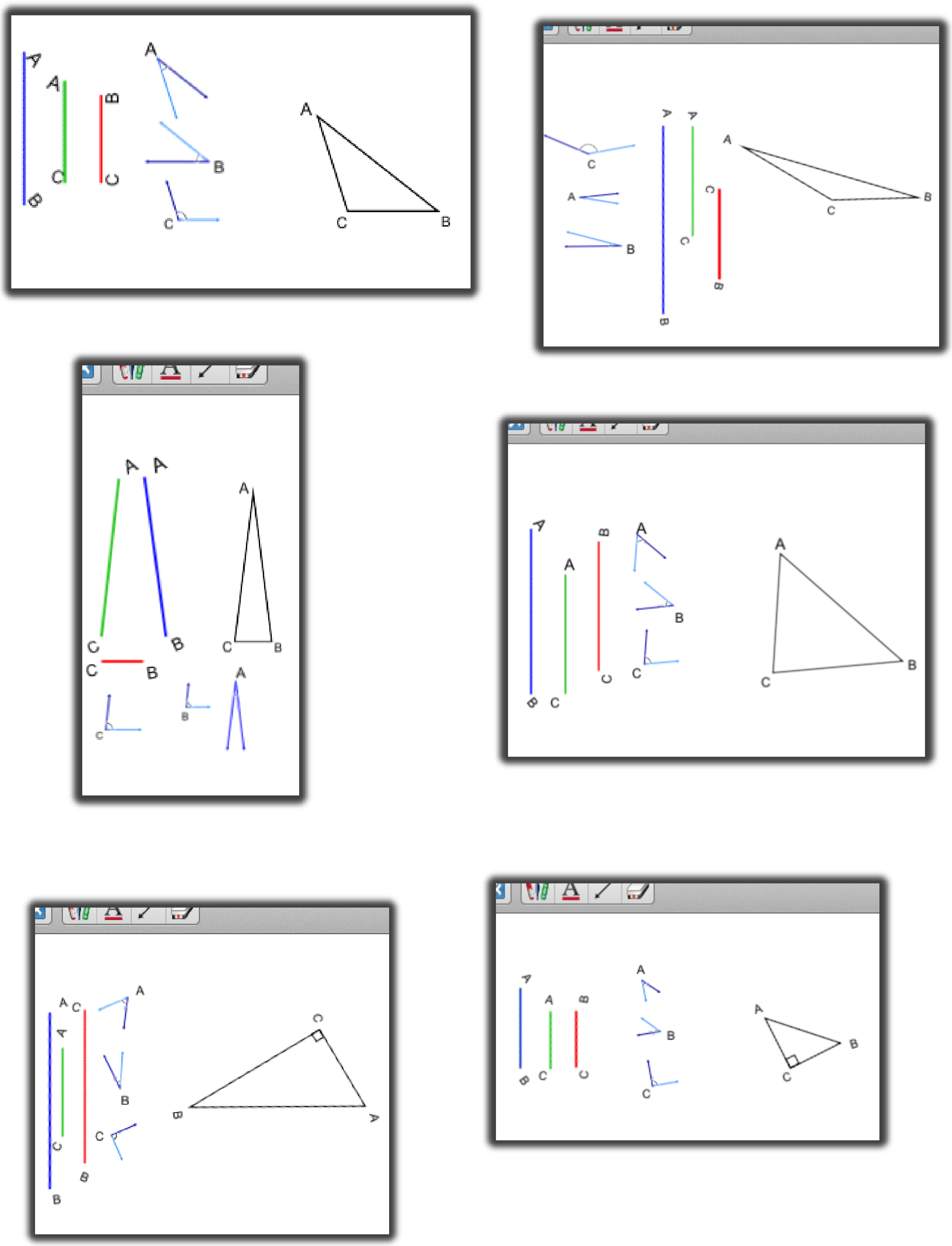


Figura 7-3: Archivos con los que los estudiantes construyeron triángulos para establecer los criterios de congruencia

Tabla 7-2:

Tabla empleada por los estudiantes para establecer los criterios de congruencia

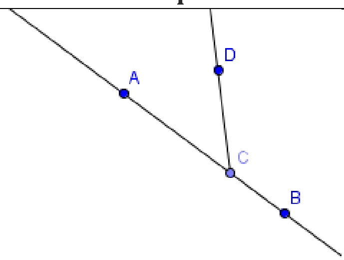
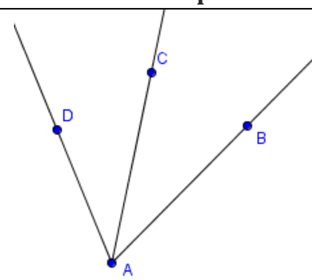
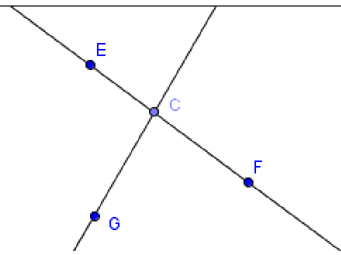
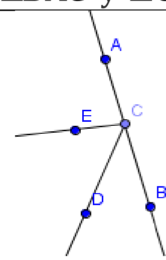
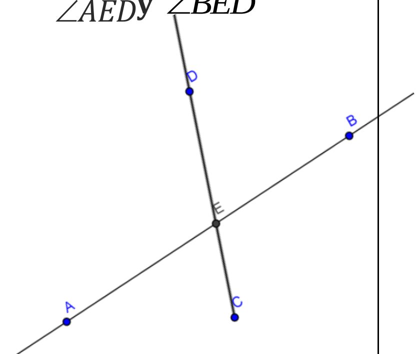
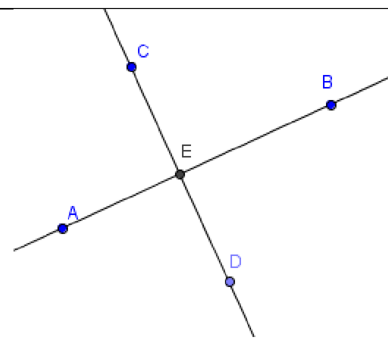
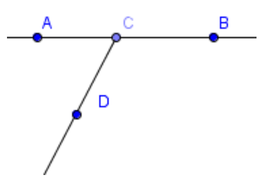
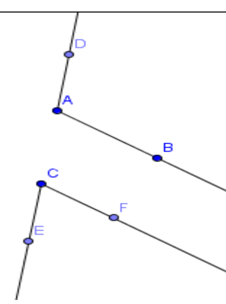
De acuerdo con las construcciones hechas con los lados y ángulos del triángulo, completen la tabla con una X donde corresponda.

CONDICIÓN	SE CONSTRUYE UN SOLO TRIÁNGULO		SE CONSTRUYE MÁS DE UN TRIÁNGULO
	¿ES EL MISMO TRIÁNGULO DADO?		
	SÍ	NO	
USANDO DOS LADOS			
Lados rojo y azul			
Lados rojo y verde			
Lados azul y verde			
USANDO DOS LADOS Y UN ÁNGULO			
USANDO TRES LADOS			
USANDO DOS ÁNGULOS			
USANDO TRES ÁNGULOS			
USANDO DOS ÁNGULOS Y UN LADO			

Anexo 3c:

Tabla 7-3:

Ejemplos y no ejemplos de ángulos que conforman par lineal

Conforman par lineal	**No conforman par lineal**
 $\angle ACD$ y $\angle DCB$	 $\angle DAC$ y $\angle CAB$
 $\angle ECG$ y $\angle FCG$	 $\angle BCD$ y $\angle ECA$
$\angle AED$ y $\angle BED$ 	 $\angle AEC$ y $\angle BED$
 $\angle ACD$ y $\angle BCD$	 $\angle DAB$ y $\angle ECF$

Anexo 3d:

Durante la acostumbrada socialización de los signos producidos por los estudiantes, la interacción entre toda la comunidad de clase se centraba en establecer la conjetura que sería institucionalizada, y al tiempo con esto, los elementos que serían tenidos en cuenta para el proceso de justificación, estableciendo siempre tres tipos de elementos: i) **qué tenemos:** qué elementos son los que nos da el problema (e.g. que tenemos dos ángulos que conforman un par lineal), ii) **qué podemos usar de esa información** con miras a afirmar algo que pueda ser empleado luego durante la justificación (e.g. la definición de par lineal) y iii) **qué podemos concluir**(e.g. que la suma de sus medidas es de 180°).

Para facilitar este proceso, los estudiantes contaban con un listado de todos los enunciados que serían colocados en un formato a tres columnas como el siguiente

Tabla 7-4:

Formato para justificación a tres columnas

Qué tengo	Qué uso	Qué concluyo

La misión de cada grupo de estudiantes consistía en acomodar los enunciados de tal manera que las ideas allí establecidas, justificaran el hecho geométrico. La profesora hacia uso del recurso del tablero inteligente con*LINOIT* (herramienta web que permite crear un tablero con pequeños avisos que pueden ser organizados de manera aleatoria). En el momento en que todos los grupos ubicaban un enunciado correctamente en secuencia, la profesora lo ilustraba allí. Al finalizar la clase se presentaba el archivo como lo muestra la Figura 7-4 y cada grupo de estudiantes había completado su formato de tres columnas escribiendo o pegando los enunciados que estaban en el listado.

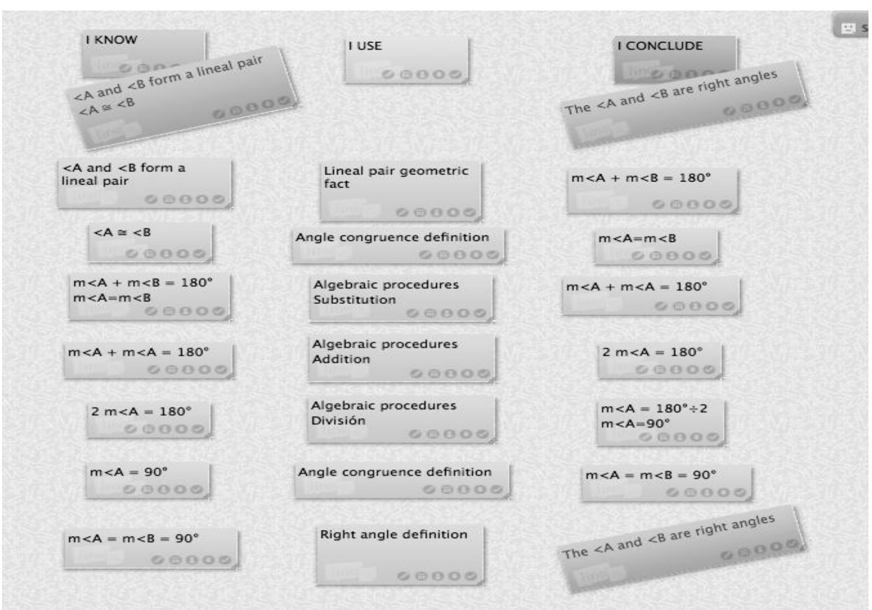


Figura7-4: Justificación a tres columnas

Anexo 3e:

Definiciones:

Circunferencia: Conjunto de todos los puntos en un mismo plano que están a la misma distancia de un punto fijo en el mismo plano llamado centro.

Triángulos congruentes: Dos triángulos son congruentes si sus correspondientes lados tienen igual longitud y sus correspondientes ángulos tienen la misma medida.

Ángulos congruentes: Dos ángulos son congruentes, si los ángulos tienen la misma medida.

Segmentos congruentes: Dos segmentos son congruentes, si los segmentos tienen la misma medida:

Propiedad reflexiva: Un triángulo es congruente con sigo mismo.

Ángulo recto: Ángulo cuya medida es de 90 grados.

Perpendicularidad: Dos rectas (segmentos, rayos, recta y segmento, etc.) son perpendiculares si cuando se intersectan, determinan un ángulo recto.

Ángulos par lineal: Dos ángulos conforman un par lineal si comparten un lado y los lados no comunes son rayos opuestos.

Punto medio de un segmento: M es el punto medio de $\overline{AB}$ si M es un punto del segmento $\overline{AB}$ y la distancia AM y BM son la misma.

Simetría Axial: La simetría axial respecto a una recta r es una transformación que a cada punto A en el plano, le hace corresponder un punto P tal que:

1) La recta r es perpendicular a$\overline{AP}$
2) La recta r y el segmento$\overline{AP}$ se intersectan en el punto medio del segmento.

Mediatriz de un segmento: La recta mediatriz de $\overline{AB}$es una recta perpendicular al $\overline{AB}$que pasa por su punto medio.

Simetría Axial (reescrita con mediatriz): La simetría axial respecto a una recta r es una transformación que a cada punto A en el plano, le hace corresponder un punto P tal que la recta r es la mediatriz del$\overline{AP}$

Equidistancia: Un punto A es equidistante de los puntos B y C, si la medida de $\overline{AB}$ es la misma medida del segmento $\overline{AC}$

Hechos Geométricos:

Criterios de congruencia de triángulos:

Lado-ángulo-lado

Hipotenusa-lado (solo en triángulos rectángulos)

Lado-lado-lado

Ángulo-lado-ángulo

Ángulo-ángulo-lado

180: La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es de 180 grados

Medida par lineal: Si dos ángulos conforman un par lineal, entonces la suma de la medida de sus ángulos es 180 grados

Par lineal congruentes: Si dos ángulos conforman un par lineal y son congruentes, entonces los ángulos son rectos.

HG de la mediatriz: Si una recta r es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, entonces todoslos puntos de$r$ equidistan de A y de B.

Problema cumbre: Si A, B y C son tres puntos no colineales en el mismo plano y el punto $A´$ es la simetría axial de A con respecto a$\overleftrightarrow{BC}$, entonces $A´$ es un punto de la circunferencia con centro en B y radio$\overline{AB}$.

Anexo 3f:

Tabla 7-5:

Formato de planeación con libreto

<table>
<tr>
<td>7. CLASE DE 50 MINUTOS EN EL SALON CRJ. OCTUBRE 31. NOVIEMBRE 1.</td>
<td>Se empezará escribiendo en el tablero los invariantes que encontraron para el cuadrilátero: ABCD es un cuadrilátero con dos pares de lados congruentes y dos ángulos rectos determinados por los lados no congruentes.
1. Segmento AB congruente con segmento CB
2. Segmento AD congruente con segmento CD
3. Angulo BAD y ángulo BCD congruentes y rectos
Se iniciará retomando de la clase pasada la CONSTRUCCIÓN 1 with notes, Para ver que pasa con el movimiento de cada punto, la profesora llenará en el tablero la tabla del archivo POINTS MOVEMENT con la ayuda de todo el grupo.
Para contestar las preguntas, se activará la herramienta arrastre con cada punto, y así llenar entre todos una sola tabla en Word.
La tabla quedará más o menos con esta estructura.
<table>
<tr><td>A: libremente</td><td>B: No se mueve</td><td>C:Se mueve sobre la recta BC</td><td>D: Depende de A</td></tr>
<tr><td>B: libremente</td><td>A: No se mueve</td><td>C:Depende de B</td><td>D: Depende de B</td></tr>
<tr><td>C:Solo se mueve formando una circunferencia con centro en B y radio AB</td><td>A: No se mueve</td><td>B: No se mueve</td><td>D: Se mueve sobre la recta AD</td></tr>
</table>
Se continuará retomando el archivo SUMMARY, donde están todas las respuestas de los estudiantes para verificarlas una por una, dado que algunos contestaron preguntas que no correspondían a lo que se les preguntaba (se les llamó la atención sobre este aspecto pues refleja una desatención y desinterés total)
Se revisara una por una y se establecerán las respuestas mas adecuadas socializándolas.
El tiempo restante se empleará para iniciar la construcción empleando las pautas del archivo CLASS CONSTRUCTION</td>
<td>Archivo:
CONSTRUCTION 1.ggb
CONSTRUCCIÓN 1
GeoGebra

POINTS MOVEMENT.docx
TABLA PARA LLENAR</td>
<td>Se pretende que los estudiantes exploren, establezcan invariantes y logren establecer las relaciones entre las partes que conforman la figura para realizar la construcción.

Esta construcción está dada en términos de que los estudiantes se familiaricen con el software. Se le debe ocurrir a los estudiantes, a partir de sus ideas, la profesora realizará la construcción.

El objetivo de esta actividad de construcción:
Primer momento para explorar
Segundo momento para construir (este no es el momento de estudiar geometría)

Dado que las respuestas escritas de los estudiantes fueron completamente inapropiadas en algunos casos, se retomará con todo el grupo para descubrir que pasa con el movimiento de cada punto.

Las dos primeras filas de la tabla se llenaron entre todos, la última fila la llenaron solitos.

Fue necesario hacer énfasis en que lo más difícil de ver, es la relación entre los dos lados que tienen igual medida, usualmente las relaciones que se ven, los estudiantes las establecen en solo un elemento.</td>
</tr>
</table>

Cristina Fern..., 10/31/12 12:29 PM
Comment [9]: Sistematizar la charla de gestión con los chicos, halón de orejas.

Cristina Ferna..., 10/31/12 1:37 PM
Comment [10]: No se hará pues con la tabla se espera que todo haya quedado establecido!