ANÁLISIS DIDÁCTICO A UNA TRAYECTORIA EPISTÉMICA DE ENSEÑANZA AL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Enrique Mateus Nieves
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jeman124@gmail.com, enrique.mateus@uexternado.edu.co

Palabras clave: Análisis didáctico, trayectoria epistémica, integración por partes
Keywords: Didactic analysis, epistemic trajectory, integration by parts

RESUMEN

Se observa una tendencia en la enseñanza de los conceptos implicados en la integración por partes a seguir un desarrollo casi exclusivamente de rutinización algebraica. Se conocen las técnicas algorítmicas, sin una contextualización adecuada del proceso de integración. El enseñar separadamente los algoritmos de problemas contextualizados, responde al interés de la presente investigación en aras de buscar respuestas que proporcionen razones para entender ¿por qué los estudiantes se sienten abrumados por tantos requerimientos formalistas de las matemáticas en la formación superior? También trata de determinar si el quehacer del profesor durante la clase influye o no en este sentimiento.

ABSTRACT

A trend seen in teaching the concepts involved in the integration by parts a further development almost exclusively on algebraic routinization. Algorithmic techniques are known, without proper contextualization of the integration process. Teaching separately algorithms contextualized problems, in the interest of this research in order to find answers to provide reasons to understand why students are overwhelmed by so many formalistic requirements of mathematics in higher education? It also seeks to determine whether the task of the teacher during class influences or not this feeling.

Contextualización

El Cálculo Integral (CI) es un elemento esencial, un conjunto de nociones básicas, al que se enfrenta un estudiante de pregrado que en su malla curricular tenga que ver con el cálculo infinitesimal. Sin embargo la tendencia que se observa en la enseñanza de los conceptos implicados en CI, particularmente en el método de integración por partes, es la de seguir un desarrollo casi exclusivamente de rutinización algebraica. Esto supone que el estudiante llega a conocer las técnicas algorítmicas, sin una contextualización adecuada del proceso de integración. Se observaron y grabaron 12 sesiones de clase, cada una de hora y media de duración. Se impartieron en la asignatura CI durante el tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de una universidad colombiana, con 20 alumnos entre 21 a 23 años de edad. La universidad es de tipo pública estatal. El profesor tenía una antigüedad en la docencia de cinco años, una formación en matemática pura y una especialización en docencia de la matemática universitaria.

Delimitación del problema

Investigaciones recientes dentro del Pensamiento Matemático Avanzado [PMA] como las de Artigue (2002), Salinas y Alanís (2009), comentan que la situación actual en cuanto a la enseñanza del Cálculo, se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, aunque no se ha percibido de la misma manera, sí parece trascender las diferencias culturales y que las dificultades en el aprendizaje no han cambiado de manera sustancial; esta problemática general también se percibe en Colombia como lo relaciona el documento ¿cómo es la evaluación en matemáticas? del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2003). Dicha situación motiva a realizar esta investigación mediante un estudio de caso que aunque no se puede generalizar, involucra a un profesor representativo de esta problemática que arroja información que si va más allá del caso particular.

Problema

Se percibe un sentimiento general de crisis en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los cálculos, (en particular del CI). En este estudio de caso es interesante responder -a partir del análisis didáctico realizado de las clases impartidas por el profesor- a estas preguntas: ¿Qué matemáticas se han implementado? ¿Cuál ha sido la gestión realizada por el profesor? ¿Cuál es el modelo de clase que sigue el profesor? ¿Cuál es la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza ejecutado por el profesor?

Objetivo general

Caracterizar el proceso de enseñanza que ha seguido un profesor cuando explica un contenido específico del cálculo integral (método de integración por partes) y hacer su valoración a posteriori utilizando los criterios de idoneidad propuestos por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

Objetivos específicos

- Realizar el análisis didáctico del proceso de enseñanza utilizando algunas herramientas del EOS e inferir el modelo de clase que sigue el profesor
- Caracterizar las dificultades observadas en el desarrollo de la clase
- Analizar y valorar la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza

Estado del arte

Se contemplaron tres aspectos fundamentales: La línea de investigación sobre el conocimiento del profesor. Se revisaron las investigaciones realizadas desde finales del Siglo XX donde se consideró ¿cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas? Los resultados muestran que se han dado diversas respuestas entre las que se destacan: Conocimiento Pedagógico del Contenido (Shulman, 1986); Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Lewenberg y Shilling, 2008). En ellas se muestra cómo esta línea de investigación ha evolucionado desde perspectivas más cognitivas (estudio del pensamiento del profesor), cuyas bases se cimentan en la psicología cognitiva (Shulman, 1986; Simon y Tzur, 1999; Moreno y Azcárate, 2003), hasta perspectivas más socioculturales (estudio del conocimiento y práctica profesional del profesor), cuyas bases se consolidan en principios antropológicos y epistemológicos del conocimiento (Azcárate y Camacho, 2003; Gavilán, García y Llinares, 2007; Ramos y Font, 2008), hasta llegar a investigaciones contemporáneas sobre la formación y pensamiento del profesor (Philipp, 2007; Tirosh y Wood, 2008) quienes encontraron diversos modelos teóricos que describen los tipos de conocimiento que los profesores deben poner en juego para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Los aportes de la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), (Dubinsky, 2001; Cooley, Trigueros y Baker 2007; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011) que permiten delimitar y describir el camino hacia la construcción de un concepto matemático en la mente de un sujeto.

Investigaciones realizadas como el estudio de Clark, Cordero, Cotrill, Czarnocha, Devries, Tolias y Vidakovic (1997) sobre la comprensión de los estudiantes de las reglas de derivación ratifican que la teoría APOE era insuficiente para analizar sus datos sobre la comprensión de los estudiantes donde los conceptos eran considerados como esquemas en los cuales se hace útil la triada de Piaget y García (2004) como herramienta útil en la interpretación de los niveles de comprensión en el desarrollo de un esquema (intra, inter y trans). El uso de la tríada aporta ventajas, en especial cuando un esquema puede depender mucho del desarrollo de uno o más esquemas. Por consiguiente, en la comprensión del desarrollo de un esquema global, se deben identificar no sólo los esquemas componentes del desarrollo en términos de acciones, procesos y objetos, sino también su coordinación. Dentro del esquema global, su coordinación nos conduce a nuevas estructuras que se construyen sobre las propiedades de los esquemas componentes (niveles inter, intra y trans). Se han planteado dos limitaciones de la teoría APOE, que considero relevantes para esta investigación:

> 1) En la teoría APOE, el constructo «objeto» se considera como el producto del proceso de reificación (encapsulación en la terminología de dicha teoría). Esta caracterización, que proviene básicamente de la tradición psicológica, es insuficiente para afrontar la problemática ontológica que presentan los objetos matemáticos. Para afrontar esta limitación resulta útil tener en cuenta la propuesta de caracterización de la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas que ofrecen las perspectivas semióticas, en especial el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007). 2) Los constructos de representación o «medio semiótico» no son considerados explícitamente en la teoría APOE. En el marco APOE se echa de menos un tratamiento específico del papel de las representaciones semióticas asociadas a los conceptos matemáticos. (Badillo, Azcárate y Font, 2011, p.194)

De ahí que, investigaciones recientes que han ampliado la teoría APOE con perspectivas semióticas recurren a la Teoría de los Registros Semióticos de Duval (Trigueros y Martínez, 2010) o bien al EOS (Font, Carvajal, Adán, Ferreres, Vanegas y Rubio, 2012), elementos que permiten a este investigador considerar tres aportaciones fundamentales del EOS para reconocer esta teoría como marco teórico y metodológico de esta investigación doctoral; son ellos: La reflexión sobre los registros semióticos realizada en Font (2011); Las ideas de complejidad semiótica, trama de funciones semióticas y conflicto semiótico (Font y Contreras, 2008); y La reflexión realizada por este marco teórico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas.

■ Marco teórico

El EOS está fundado en tres aspectos: 1) las matemáticas son una actividad humana (fundamento antropológico); 2) los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera "vital y necesaria" (fundamento ecológico); y 3) el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento pragmático). La noción central de esta perspectiva es la de situación problemática, a partir de la cual emergen las nociones de "práctica matemática", "objeto matemático" y "significado de un objeto".

Esta actividad matemática es analizada por el EOS a partir de seis entidades primarias: Elementos lingüísticos (términos, notaciones, gráficos...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual...). Situaciones-problema (aplicaciones, tareas, cuestiones, etc). Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, número, función.). Proposiciones (enunciados sobre conceptos...). Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo...). Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.). Estas entidades primarias se interrelacionan formando configuraciones o redes de objetos, que serán cognitivas o epistémicas.

De ahí que, cada situación matemática se enmarca dentro de una configuración epistémica diferente, se puede entender de manera metafórica, que la situación-problema "sitúa" el objeto en un "lugar" o en "otro" es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentaciones, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades. Desde esta perspectiva, cada situación problema sitúa al objeto en un determinado "nicho". De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo-intensivo y otra, de tipo "ecológico", al situar el objeto matemático en un "nicho" o bien en otro, (Ramos y Font, 2006, p.541). Entonces nos podríamos preguntar si "¿es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados?" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, p.80). La noción de holosignificado introducida por estos autores permite responder a esta cuestión; es decir, determinar qué expresamos al afirmar que una persona comprende una determinada noción. La adquisición del holosignificado supone la capacidad de poner en funcionamiento un pensamiento matemático flexible ((PMF); Wilhelmi, Font y Godino, 2005); es decir, la capacidad de tránsito rutinario entre diferentes significados asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos. El holosignificado incorpora las relaciones entre dichos significados y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen. (El PMF, permite identificar, describir y controlar).

La evolución histórica de la integral ha determinado diferentes significados parciales de dicha noción. Estos significados pueden ser descritos mediante configuraciones epistémicas (CE), constituidas por diferentes redes de objetos matemáticos (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos). En relación con la complejidad del objeto Integral, Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010) y Ordoñez (2011) consideran siete CE asociadas a dicho objeto. Mientras que Crisóstomo (2012), en su tesis doctoral considera ocho tipos diferentes de CE para este mismo objeto matemático situando al teorema fundamental del cálculo como un objeto primario central de varias de las CE (al menos cinco), poniendo en evidencia su papel relevante en la articulación de las diferentes configuraciones que modelan la complejidad del objeto integral.

■ Metodología

Se trata de una investigación cualitativa, basada en el estudio de caso de un profesor elegido que enseña un contenido matemático, (método de integración por partes). Su ubicación está dentro del PMA, específicamente en la didáctica del cálculo integral en un contexto educativo particular donde se aplican y desarrollan las categorías de análisis del EOS que permite combinar diversos métodos y técnicas de acuerdo a las fases de la investigación, y de manera más especifica la noción de idoneidad didáctica de procesos de instrucción y aprendizaje de las matemáticas. Para ello se consideraron los cinco niveles de análisis que propone el EOS. Los cuatro primeros son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa. Permiten descomponer una transcripción de una sesión de clase en una trayectoria de configuraciones didácticas y, para cada configuración, estudiar diferentes aspectos, mientras que el quinto se centra en la valoración de la idoneidad didáctica (Godino, et al, 2006). Este último nivel se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones. Para este informe por cuestión de espacio solo nos referiremos al quinto nivel.

De ahí que, en lo metodológico, esta investigación sigue cuatro fases procesales: Fase Heurística: elaboración del estado del arte; etapa de observación, descripción, reflexión y generalización inductiva, realizada mediante observación directa y grabación a las clases de un docente encargado de la asignatura calculo integral de la Facultad de Educación de una Universidad de Colombia. Fase Hermenéutica: justificación-confirmación y categorización: proceso de comprobación o refutación de las hipótesis de investigación. Fase de recolección y triangulación de la información, Construcción de categorías de análisis. Fase de Resultados. Presentación y análisis de resultados, Conclusiones, limitaciones del estudio, perspectivas y recomendaciones hacia el futuro.

■ Resultados encontrados a este nivel de la investigación

Durante las sesiones analizadas la intervención del profesor se ha centrado en presentar (institucionalizar) el método de integración por partes a partir de la resolución de una integral particular. El patrón de interacción sirve para tipificar el proceso de enseñanza como magistral interactiva. Se presentan varios conflictos semióticos potenciales causados por las explicaciones ambiguas del profesor y por el uso de simbología imprecisa.

Los elementos matemáticos asociados con la solución de problemas corresponden a un curso del nivel de Licenciatura en Matemáticas y se encuentran descritos en el currículo de las materias que cursan los estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología. El diseño curricular no favorece la enseñanza con base en problemas. Los cursos están concebidos en forma expositiva ilustrativa, con tareas y actividades específicas propias de esa modalidad. El aprendizaje mediante la resolución de problemas requiere de otras estrategias y otros tiempos, dado que la normatividad está acorde con la modalidad tradicional, pueden surgir contratiempos con la problemática, que deberán ser negociados con los estudiantes mediante un contrato didáctico adecuado.

En lo que se refiere a la integral se concluye que el tipo de enseñanza propuesto es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto meramente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del saber matemático. Se destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizado. Tal como se observa en los libros de texto, la enseñanza del CI no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento.

Se observa una aproximación socio-constructivista por parte del profesor, privilegia el trabajo cooperativo y en equipo, mientras que en general los sistemas y tiempos de la docencia tradicionales fomentan el trabajo individual y la evaluación cognitiva. Los problemas que presenta el profesor pertenecen estrictamente a un contexto intramatemático y por tanto no se fomentan procesos de modelización. El profesor enseña matemáticas con exposición, seguida de ejercicios sobre los contenidos vistos. Este modelo se repite en toda la secuencia de clases observada. Este modelo de enseñanza deja a los alumnos la responsabilidad de dar sentido a los objetos matemáticos que se introducen a través de los ejemplos y ejercicios que se van mostrando. Como expresan Godino et al. (2006, p. 31), se estaría tratando de una decisión topogenética: primero yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas.

La institucionalización -regulación-, formulación y validación quedan exclusivamente a cargo del profesor, sin intervención alguna de los alumnos, más allá de salir al tablero. Por dicho motivo, las configuraciones didácticas de toda la secuencia de clases se han considerado del tipo magistral-interactivo o bien de configuración didáctica personal.

■ Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 1-17

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f ’(a) y f ’(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias,* 29(2), 191–206

Ball, D., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching (4th ed.)* (pp. 433-456). Washington, DC: American Education Research Association.

Clark, J. M., Cordero, F., Cotrill, J., Czarnocha, B., Devries, D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. *Journal of mathematical Behavior, 14*(4), 345-364.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de proseos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemática. Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis doctoral. Universidad de Granda, Granada.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 28* (3), 367-384.

Dubinsky, E. (2001). *Using a Theory of Learning in college Mathematics Courses*. Coventry: University of Warwick.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26, 9-25.

Font, V., Carvajal, S., Adán, M., Ferreres, S., Vanegas, Y., y Rubio, N. (2012*). Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de Matemáticas.* Universitat de Barcelona, Pontificia Universidad Católica del Perú

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 9(5), 1023-1045.

Gavilán, J.M., Garcia. M. y Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), 5-39

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Maracay. *Paradigma,* 27(2), 1-27.

Hill, H., Lewenberg, D. y Shilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge, Conceptualizing and Measuring Teachers´ Topic Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 327-400.

ICFES. (2003). *¿Cómo es la evaluación en matemáticas?.* Subdirección Académica Grupo de Evaluación. Bogotá D. C.

Moreno, M. y Azcarate, C. (2003). Concepciones de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 265-280

Ordóñez, L. (2011). *Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén. España.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En Frank K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.257-315). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. y García, L. (2004). *Psicogénesis e Historia de las ciencias*. (10ª Edición.) México: Siglo XXI Editores.

Ramos, A. y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Paradigma*, 27(1), 237-264.

Ramos, A. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática Educativa*, 11(2), 233-265.

Salinas, P., Alanis, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Noviembre, 355-382.

Sánchez–Matamoros, G., García, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85–98.

Simon, M. y Tzur, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), 252-264

Shulman, L. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. En M. C. Wittrock (Ed.). *Handbook of Research on Teaching.* Third Edict, (pp.3-36). Nueva York: Macmillan.

Tirosh, D. y Wood, T. (2008). The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education 2. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010), Geometrical representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (1), 3-19.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2* (2), 72-90.

Wilhelmi, M., Font, V. y Godino, J. (2005). *Bases Empíricas De Modelos Teóricos En Didáctica De Las Matemáticas: Reflexiones Sobre La Teoría De Situaciones Didácticas Y El Enfoque Ontológico Y Semiótico*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas.pdf