LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: UN EJEMPLO A TRAVÉS DE LA PRODUCCIÓN DE MODELOS CUADRÁTICOS

SARA MARCELA HENAO 0743003
JHONNY ALFREDO VANEGAS 0841140

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI
2012

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: UN EJEMPLO A TRAVÉS DE LA PRODUCCIÓN DE MODELOS CUADRÁTICOS

SARA MARCELA HENAO SALDARRIAGA
JHONNY ALFREDO VANEGAS DIAZ

OCTAVIO AUGUSTO PABÓN RAMIREZ
Asesor

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI
2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	LA MODELACION MATEMÁTICA EN LA EDUCACION MATEMÁTICA REALISTA: UN EJEMPLO A TRAVÉS DE LA PRODUCCION DE MODELOS CUADRÁTICOS						
Se trata de:	*Proyecto* [ ]			*Informe Final* [X]			
Director:	OCTAVIO AUGUSTO PABON RAMIREZ						
1er Evaluador:	LIGIA AMPARO TORRES						
2do Evaluador:	MARITZA PEDREROS						
Fecha y Hora	*Año:*	2012	*Mes:*	09	*Día:*	14	*Hora:* 5:30 p.m

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
SARA MARCELA HENAO	0743003	3487
JHONNY ALFREDO VANEGAS	0841140	3487

Evaluación					
Aprobado	X	*Meritorio*	X	*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No Aprobado*		*Incompleto*	

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* __________________ *(máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo		*1er Evaluador*		*2do Evaluador*	

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de* __________________ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

		Maritza Pedreros P
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones:		Recomendaciones:		Razón del Desacuerdo – Alternativas:	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

1. El trabajo aborda una temática actual y objeto de estudio en el campo de la Educación Matemática (ampliamente) Esta bien escrito lo que permite una lectura agil
2. Se hicieron sugerencias sobre la organización de algunos apartados del trabajo y sobre la calidad de las imagenes. Y se sugirió reescribir las conclusiones en términos de los objetivos y el marco teórico.
3. Algunas observaciones previas sobre la dimension matemática fueron incorporadas al informe de manera adecuada.

Los evaluadores proponen que este trabajo sea evaluado como MERITORIO y sustentan esta solicitud, con base en las siguientes consideraciones:

1. Es una propuesta original desde un enfoque teórico de alta valoración en el campo de la Educación Matemática
2. El trabajo evidencia una coherencia entre los análisis y el Marco teórico
3. El nivel de escritura es fluido lo que permite una buena lectura
4. Es un trabajo donde se reconoce una gran coherencia entre el diseño metodológico y el objeto de estudio abordado.

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	Martha Pedreros P. 2do Evaluador

Gdo

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Página.

Resumen			1
Introducción			2
Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación			8
1.1.	Contextualización y formulación del problema		9
1.2.	Justificación		13
1.3.	Objetivos		16
1.4.	Estado del arte de la modelación matemática		17
Capítulo 2. Marco de referencia conceptual			28
2.1.	Los inicios de la Educación Matemática Realista		29
2.2.	El enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR)		30
2.3.	Concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la EMR		31
2.4.	Principios de la Educación Matemática Realista		33
	2.4.1.	Principio de actividad	35
	2.4.2.	Principio de realidad	36
	2.4.3.	Principio de niveles	37
	2.4.4.	Principio de reinvención-principio de orientación	42
	2.4.5.	Principio de interacción	43
	2.4.6.	Principio de interconexión	44
2.5.	Dimensión matemática de las nociones cuadráticas		45

Capítulo 3. La modelación y los modelos cuadráticos en el trabajo matemático			53
3.1.	Marco metodológico de la investigación		54
3.2.	Diseño del estudio de caso		56
	3.2.1.	El contexto	56
	3.2.2.	Los sujetos participantes en el estudio	58
	3.2.3.	Los instrumentos	60
3.3.	Momentos de intervención con los estudiantes		63
3.4.	Categorías de análisis		66
3.5.	Fundamentación teórica de las tareas		68
	3.5.1.	Análisis fenomenológico	68
	3.5.2.	Requerimientos de los contextos	72
3.6.	Diseño de las tareas		75
3.7.	La secuencia		76
	3.7.1.	Tarea 1. A que no adivinas cuántos hay	77
	3.7.2.	Tarea 2. Apretones de mano	79
	3.7.3.	Tarea 3. Configuraciones navideñas	81
3.8.	Análisis predictivo de las tareas		83
	3.8.1.	Tarea 1. A que no adivinas cuántos hay	83
	3.8.2.	Tarea 2. Apretones de mano	88
	3.8.3.	Tarea 3. Configuraciones navideñas	93
3.9.	Importancia del análisis predictivo		99
Capítulo 4. Resultados y conclusiones			100
4.1.	Introducción		101
4.2.	Análisis prospectivo de las tareas		101
	4.2.1.	Tarea 1. A que no adivinas cuántos hay	101
	4.2.2.	Tarea 2. Apretones de mano	113
	4.2.3.	Tarea 3. Configuraciones navideñas	123
4.3.	Consideraciones finales del análisis prospectivo		131
4.4.	Conclusiones y reflexiones finales		133

Referencias		137
Anexos		143
Anexo 1.		143
Anexo 2.		145

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Proceso de modelación desde una perspectiva educativa	23
Figura 2. Ciclo de modelación desde una perspectiva cognitiva	25
Figura 3. Niveles de comprensión	40
Figura 4. Gráfica de las funciones $f(x) = x^2 \; y \; f(x) = -x^2$	45
Figura 5. Variación de la función $f(x) = \mathrm{ax}^2$ cuando $\mathrm{a} > 1$	46
Figura 6. Variación de la función $f(x) = ax^2 \; cuando \; 0 < a < 1$	47
Figura 7. Variación de la función $f(x) = ax^2 \; cuando \; a < 0$	47
Figura 8. Variación de la función $f(x) = ax^2 + bx \; cuando \; b > 0$ y $b < 0$	48
Figura 9. Variación de la función $\mathrm{f(x) = ax^2 + bx + c}$ cuando c > 0 y c < 0	49
Figura 10. Gráfica de la parábola $\mathrm{(y - k)^2 = 4p(y - k)}$	51
Figura 11. Disposición de los recursos tecnológicos	63
Figura 12. Diagrama de correspondencia de la tarea 1.	86
Figura 13. Representación gráfica de la tarea 2.	88
Figura 14. Fórmula de recurrencia de la tarea 2.	90
Figura 15. Modelo “fórmula de recurrencia”	95
Figura 16. Modelo “conteo de triángulos”	97
Figura 17. Puesta en escena de la tarea 1.	102
Figura 18. Estudiantes empleando los palillos para representar la tarea 1.	104
Figura 19. Dibujos de algunos arreglos de la tarea 1.	105
Figura 20. Diagrama de correspondencias del grupo 2 en la tarea 1.	107
Figura 21. Aproximación a una fórmula de recurrencia	107
Figura 22. Acercamiento a la relación general del fenómeno estudiado	109
Figura 23. Modelo algebraico de la tarea 1.	110
Figura 24. Modelo cuadrático	112
Figura 25. Puesta en escena de la tarea 2.	114
Figura 26. Esquemas poligonales construidos por los grupos 1 y 3	115
Figura 27. Patrón de construcción encontrado por el grupo 1	116
Figura 28. Diagrama de correspondencia construido por el grupo 3	118

Figura 29. Regularidades encontradas por el grupo 2	119
Figura 30. Modelo inicial del grupo 4	120
Figura 31. Expresión algebraica encontrada por el grupo 4	121
Figura 32. Uso de la fórmula cuadrática en el grupo 4	122
Figura 33. Puesta en escena de la tarea 3.	123
Figura 34. Modelo construido por el grupo 2	126
Figura 35. Modelo de tabla construido por el grupo 1	127
Figura 36. Esquema construido por el grupo 1	128
Figura 37. Razonamiento del grupo 1	128
Figura 38. Modelo inicial construido por el grupo 4	129
Figura 39. Modelo final construido por el grupo 4	130

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Clasificación de las perspectivas sobre modelación matemática	19
Tabla 2. Principios de la Educación Matemática Realista	34
Tabla 3. Cronología de la práctica de modelación	64
Tabla 4. Fórmula de recurrencia de la tarea 1.	86
Tabla 5. Tabla de datos de la tarea 2.	89
Tabla 6. Demostración fórmula de recurrencia de la tarea 2.	90
Tabla 7. Tabla de valores de la tarea 3.	94
Tabla 8. Generalización del modelo “fórmula de recurrencia”	96

RESUMEN

La presente investigación se enmarca en el enfoque de la *Educación Matemática Realista* y busca a partir de algunos de sus referentes teóricos y metodológicos fundamentar un diseño relativo al trabajo con *modelos cuadráticos* que permita estudiar el proceso de modelación matemática de estudiantes de los últimos grados de educación media (10° y 11°), en particular lo concerniente a los *niveles de matematización* y la incidencia de las tareas diseñadas en el aprendizaje de los *modelos cuadráticos*. La indagación se plantea en términos del estudio de los *niveles de matematización*, como una posibilidad de analizar el desempeño matemático de los estudiantes y las implicaciones didácticas y cognitivas, en relación con el proceso de modelación matemática en el aula de matemáticas.

Inicialmente se hace un recorrido a través de los principios fundantes de la *Educación Matemática Realista*, buscando entrelazar elementos teóricos y metodológicos que permitan dimensionar y comprender este enfoque teórico. En segundo lugar, y con el objeto de caracterizar los niveles de matematización de los estudiantes, se propone el diseño e implementación de una serie de tareas fundamentadas en la *Educación Matemática Realista* que a futuro puedan servir de insumos para el desarrollo de estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular de los *modelos cuadráticos*.

Adicionalmente, se pretende mostrar la importancia de la modelación matemática como un proceso matemático que permite conjugar la matemática y la realidad en la promoción de la formación de conceptos matemáticos, aportando al conocimiento por parte de los docentes de algunas estrategias de enseñanza que podrían contribuir a mejorar la enseñanza de la modelación matemática en los últimos grados de la educación media y a mejorar el desempeño matemático de los estudiantes.

Palabras claves: Educación Matemática Realista, modelos cuadráticos, niveles de matematización, contexto, niveles de comprensión.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se inscribe en la *Línea de formación Didáctica de las Matemática*s del Programa Licenciatura en Matemáticas y Física, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle y se realizó en el marco del proyecto "*Caracterización de los vínculos entre los Recursos Pedagógicos y el Conocimiento Matemático en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica*", que desarrolló el Grupo de Educación Matemática, GEM. (Universidad del Valle – COLCIENCIAS, Contrato 110648925213).

Esta investigación surge como resultado del reconocimiento de algunas problemáticas y preocupaciones recurrentes en la investigación en Di*dáctica de las Matemáticas* en relación con la búsqueda, el diseño e implementación de nuevas propuestas de enseñanza formuladas para abordar el (sin) sentido común de los estudiantes en la interpretación y resolución de problemas en diferentes contextos, lo cual a su vez involucra el problema actual de los estudiantes, para conectar la matemática escolar con sus saberes informales.

De esta manera, emergen algunos interrogantes iníciales, ¿Por qué los estudiantes tienen dificultades para aplicar sus conocimientos científicos escolares en situaciones cotidianas? ¿De qué manera se deben presentar las situaciones matemáticas para que tengan sentido para los estudiantes? ¿Cómo ayudar a los estudiantes a crear puentes que les permitan pasearse entre lo concreto y lo abstracto?

En la discusión de tales preguntas, algunas investigaciones en el campo de la *Didáctica de las Matemáticas* reconocen la importancia de estudiar los fenómenos asociados a los procesos de "transferencia" de los conocimientos matemáticos a actividades de la vida diaria. A título de ejemplo, Arrieta citando a Lave (Arrieta, 2003) se interesa en las formas en que vive el conocimiento matemático en el ámbito escolar y extraescolar, a partir del supuesto de que las actividades en matemáticas surgen y se desarrollan en contextos sociales concretos.

Por otro lado, Martínez, Da Valle, Bressan y Zolkower (2002) indican que los contextos constituyen un punto de partida importante en este asunto, al poner en juego elementos del sentido común de los estudiantes y conocimientos de lo que ellos saben acerca de cómo son las cosas en el ámbito extraescolar.

De este modo, argumentan que el sentido común y las formas de razonamiento aprendidas fuera de la escuela funcionan como fuente de estrategias para solucionar diferentes problemas y direccionar el quehacer matemático con sentido.

Estas perspectivas dejan entrever al menos dos aspectos importantes: la concepción de una matemática más humana permeada por las actividades socioculturales de cada época y, nuevas ideas en *Didáctica de las Matemáticas* en relación con la forma en que deben ser presentados los contenidos matemáticos en la escuela, asumiendo que generalmente están distanciados de un contexto significativo para los estudiantes.

Bajo estas consideraciones la presente investigación, asume como principal referente teórico el enfoque de la *Educación Matemática Realista* (en adelante, EMR) con sus fundamentos acerca de la introducción de conceptos matemáticos mediante contextos realistas o situaciones que los sujetos pueden imaginar fácilmente y que son razonables dentro de lo que ellos conocen.

De hecho, las investigaciones que adoptan este enfoque teórico indican que las tareas propuestas desde contextos realistas presentan mejores perspectivas en el proceso de aprendizaje matemático de los estudiantes, en comparación a los resultados obtenidos cuando se trabaja desde contextos eminentemente matemáticos, en gran parte porque los estudiantes suelen sentirse más atraídos y motivados durante el proceso de adquisición de conocimientos científicos cuando se enfrentan a contextos cercanos a su realidad. (Bressan, A. & Zolkower B., s.f.; Arrieta, 2003). Incluso estas concepciones y justificaciones en relación con el uso de contextos en las clases de matemáticas, aparecen con frecuencia en diferentes investigaciones (Martínez & et al, 2002; Panhuizen, 2003; Valero, 2006; Arcavi, 2006). A nivel nacional por ejemplo, el MEN (2006) reconoce que:

"La búsqueda de una relación cercana con el contexto extraescolar o sociocultural de los estudiantes… es importante para despertar su interés y permitirles acceder a las actividades con una cierta familiaridad y comprensión previa". (MEN, 2006, p. 71).

Además, en la EMR la *modelación matemática* ocupa un papel central en la conjugación de las matemáticas y la realidad, promoviendo la construcción de puentes que permiten que los estudiantes se paseen por lo abstracto y lo concreto.

En otras palabras, esta perspectiva favorece la capacidad de los estudiantes para analizar y organizar los problemas presentados en el contexto mediante la producción y uso de modelos. Modelos que inicialmente están asociados al uso de conocimientos informales, pero que gradualmente adquieren un carácter más general.

Para la EMR, "los modelos son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionarla" (Bressan, s.f., p. 4). Razón por la cual, los modelos representan no sólo la transformación de una situación problemática a una expresión simbólica, sino que además son el resultado de la compresión u organización de la actividad matemática por parte de los estudiantes. Es este proceso de organización lo que se reconoce dentro de la EMR como modelación matemática o *matematización*.

En la discusión de este proceso de *matematización* la EMR considera la existencia de dos componentes: la *matematización horizontal* que implica el proceso de partir de la situación real hacia el mundo de lo simbólico y la *matematización vertical* que describe los cambios que sufre la expresión matemática del modelo dentro del propio mundo de los símbolos. Goffree (2000).

Evidentemente, el proceso de modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ocupa un lugar transcendental en las investigaciones de la comunidad de educadores matemáticos. Básicamente porque se vincula con la promoción de aspectos relacionados con la "transferencia" de conocimientos matemáticos en diferentes ámbitos dentro y fuera de la escuela. Por ejemplo, Goffree (2000) considera que la modelación matemática es fundamental en el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas de los estudiantes, en particular aquellas que se relacionan con saber estructurar el contexto, matematizar, reinterpretar los resultados obtenidos de dicha matematización, revisar el modelo y también modificarlo.

Sin embargo existen otras visiones. Entre ellas, se pueden citar los estudios realizados por Biembengut y Hein (2004) quienes indican que la modelación matemática es un método de enseñanza, puesto que permite aprender las matemáticas aplicadas a otras ciencias y puede mejorar la capacidad de los estudiantes para interpretar, formular y solucionar situaciones problemas, así como también favorecer la conexión entre las matemáticas y el mundo real.

Por su parte, Bosch, García, Gascón e Higuera (2006) en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) plantean que la modelación matemática puede estudiarse desde dos enfoques diferentes aunque no necesariamente independientes.

Estos autores indican que la modelación matemática es una herramienta a través del cual los estudiantes pueden aprender nociones matemáticas, pero al mismo tiempo proponen concebirla como una noción matemática que debe hacerse explicita en el aula.

De esta manera, se pone de manifiesto una amplia variedad de matices, usos y significados del proceso matemático de modelación que se tornan particulares dependiendo de los objetivos que se quieran alcanzar. Así pues, para introducir la modelación matemática en el ámbito escolar existen diferentes perspectivas, algunas de ellas complementarias entre si y otras sustancialmente diferenciables.

No obstante, e independientemente del marco de fundamentación conceptual que se adopte, los intereses alrededor de la modelación matemática confieren gran importancia a la identificación de fenómenos susceptibles de ser modelados mediante objetos matemáticos y que permitan estudiar dichos objetos. (Triviño, 2011).

En nuestra investigación el objeto de interés a la luz de la EMR son los *modelos cuadráticos*, en particular los que tienen un acercamiento hacia lo funcional (la función cuadrática), porque a través de ellos se puede estudiar el proceso de modelación, gracias a que el concepto mismo se validó, inicialmente a través de un referente empírico, el cual poco a poco fue sometido a un sistema racional, hasta llegar a adquirir un estatus matemático y el posterior desarrollo de nuevos conceptos (Mesa & Villa, 2007).

De manera particular, la investigación desarrollada buscó enfatizar en los fenómenos asociados al estudio de la modelación matemática, con el objeto central de determinar cuáles son las características de los niveles de matematización que presenta un grupo de estudiantes de los últimos grados de educación media, cuando resuelven tareas diseñadas desde la EMR, específicamente tareas que promueven el uso y la producción de modelos cuadráticos.

En este sentido, se abordó el diseño y gestión de tareas vinculadas al trabajo con modelos cuadráticos. Así, se adoptó un estudio cualitativo, básicamente un *estudio de caso descriptivo* para abordar el trabajo de modelación con un grupo de estudiantes pertenecientes al programa de formación “semilleros de matemáticas” de la Universidad del Valle sede Cali.

Frente a lo expuesto anteriormente, la presente investigación espera que a partir de su desarrollo, surjan elementos teóricos y metodológicos que fortalezcan y mejoren los procesos de formación profesional de los futuros docentes de matemáticas al promover un acercamiento a las herramientas conceptuales de la EMR, así como al estudio de las implicaciones de estos elementos en el aula de clases.

Para tal fin, la organización del trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se presentan los aspectos generales de la investigación, donde se discuten algunas problemáticas centrales de investigación en didáctica de las matemáticas, asociadas al problema de interés y cómo a partir de estas cuestiones, emerge la problemática propuesta. Además se hace la revisión de diferentes documentos, a partir de los cuales se abordan las principales perspectivas de la modelación matemática a nivel internacional en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, su importancia, aportes y visiones. Desde tal revisión de literatura se ubica la perspectiva epistemológica y particularmente, el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista como sustento de la investigación.

En el segundo capítulo, se presenta el marco de referencia conceptual que incluye el enfoque de la Educación Matemática Realista con sus principales referentes teóricos y metodológicos, así como el referente matemático asociado al proceso de modelación matemática que se esta estudiando. En este sentido, se define qué se entiende por lo cuadrático y se delimita el concepto matemático central en una perspectiva funcional, donde se deja explícito un primer acercamiento en relación con la producción y uso de modelos.

En el tercer capítulo, se presenta el diseño metodológico de la investigación, el cual se lleva a cabo en consideración con los elementos de un *estudio de caso* de tipo *descriptivo*, gracias a que permite comprender procesos presentes en contextos singulares al tiempo que posibilita la explicación de nuevos fenómenos.

Dicho estudio se centra principalmente en las producciones de un grupo de estudiantes de los últimos grados de educación media pertenecientes al programa de formación "semilleros de matemáticas" de la Universidad del Valle.

Adicionalmente, se aborda la fundamentación teórica de las tareas, basado en un análisis fenomenológico de lo cuadrático, los requisitos de los contextos y la gestión docente. También se incluyen las tareas diseñadas y un análisis predictivo de las mismas, en el que se anticipan los posibles resultados de los estudiantes en el desarrollo de cada una de las tareas.

En el capítulo cuatro, se exponen las producciones elaboradas por los grupos, su interpretación a la luz de la teoría y la manera en que estas permiten evidenciar características del proceso de modelación en los participantes de la investigación. Además se hace mención sobre algunas conclusiones generales y se abren algunos interrogantes para nuevas rutas de investigación.

Capítulo 1

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. CONTEXTUALIZACIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la actualidad existe un interés creciente por desarrollar propuestas curriculares y estrategias metodológicas que permita a los estudiantes una mejor comprensión de las matemáticas. Para alcanzar este propósito, algunos investigadores consideran que la atención de los educadores debe centrarse en los procesos propios de las matemáticas (*la resolución de problemas* y la *modelación matemática*) y en la enseñanza de unas matemáticas más humanas, que sean menos formales pero, a partir de las cuales el conocimiento matemático cobre sentido para los estudiantes (Font, 2008). De acuerdo con esta visión, el MEN (1998) plantea que es necesario vincular los contenidos matemáticos con experiencias cercanas a la realidad de los estudiantes, de tal forma que los conocimientos matemáticos sean presentados y enseñados desde situaciones matemáticas concretas para que faciliten su manejo y apropiación, al tiempo que promuevan el desarrollo de ciertas competencias en el pensamiento matemático.

Así mismo, el MEN (2006) considera que en una situación problema, la modelación matemática juega un papel preponderante porque posibilita que los estudiantes construyan sus propios modelos matemáticos en diferentes niveles de complejidad, a través de los cuales, los estudiantes pueden hacer predicciones, obtener resultados y evaluar que tan razonables son esos modelos respecto a las condiciones iníciales.

En consecuencia, el proceso matemático de la modelación matemática permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, experimentar, evaluar, aplicar y de esta manera, construir los conocimientos matemáticos en forma significativa (MEN, 1998), consolidándose así, como una estrategia de enseñanza de las matemáticas que favorece en los estudiantes el tratamiento y la resolución de problemas, pero también un mejor aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, son diversas las dificultades que se pueden presentar al introducir la modelación en las clases de matemáticas, debido a la complejidad que exige la producción de un modelo, el tiempo de convivencia de los docentes y de los estudiantes ante unos métodos de enseñanza "tradicionalistas", y esto a su vez, puede interferir de manera negativa si los docentes que la usan no tienen la suficiente formación para hacerlo (Biembengut & Hein, 2004; Trigueros, 2009).

Eso sin considerar que la búsqueda, el diseño y la aplicación de situaciones que promuevan la construcción de modelos que sean inventados o reinventados por los mismos estudiantes, se relega como tarea a los desarrollistas curriculares, puesto que los docentes admiten no tener suficiente claridad para escoger situaciones apropiadas, ni contextos significativos para sus estudiantes (Bressan, s.f.)

De esta manera, se pone de manifiesto la existencia de algunas dificultades de los docentes para comprender cuáles contextos o situaciones favorecen la matematización y producción de modelos por parte de los estudiantes; manifestándose así, una necesidad primordial por capacitar a los docentes en el reconocimiento de contextos paradigmáticos a través de los cuales se despierte el interés de los estudiantes y se promueva el establecimiento de puentes para pasearse entre lo abstracto y lo concreto, facilitando diversas conexiones matemáticas con temáticas de todas las ciencias y la realidad.

En particular, el trabajo con contextos que promuevan la producción y usos de modelos matemáticos, es más factible cuando el objeto matemático central que interviene en la situación-problema, también se ha desarrollado y comprendido a partir de consideraciones de la realidad física junto a un proceso constante de matematización.

Uno de estos objetos es la *función cuadrática*, fuertemente reconocida dentro de la disciplina matemática por su papel en la modelación de fenómenos físicos (cinemática, gravitación, fuerza eléctrica) y fundamental en el estudio de las matemáticas escolares, gracias a su poder modelizador y a sus múltiples presentaciones que permiten un mejor acercamiento con otras disciplinas científicas (Luna & Bravo, s.f.).

Sin embargo, pese a ser un concepto central en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, su comprensión sigue siendo un asunto problemático para los estudiantes (Lacasta & Pascual, 1998; Azcárate & Deulofeu, 1990) que no se sienten atraídos por las estrategias de enseñanza “tradicionales”, basadas en la construcción de tablas de valores y representaciones gráficas, que en otras cosas pueden presentar muchas imprecisiones y en ocasiones obstaculizar los procesos de transferencia y aplicación del conocimiento a otros campos (Arboleda & Meneses, 1996).

Por su parte, y en consideración con lo anterior (Trigueros, 2009; Martínez, Da valle, Zolkower & Bressan, 2002) indican que los estudiantes presentan dificultades para aplicar sus conocimientos matemáticos en la solución de un problema, específicamente cuando dichos conocimientos son aprendidos desde un contexto eminentemente matemático. De hecho, Martínez y et al (2002), señalan que incluso ante situaciones de su cotidianidad los estudiantes tienden a reaccionar de un modo mecánico, como si se tratara de un problema matemático formal (donde el papel del contexto es insignificante para la comprensión y resolución matemática del problema).

Ante estas problemáticas, algunos investigadores consideran que los conocimientos matemáticos deben construirse a partir de situaciones reales, en el ejercicio de las prácticas sociales, en contextos, etc., es decir, donde se utilizan (Arrieta, 2003) y en consecuencia, plantean que la dificultad de los estudiantes en la comprensión de los conceptos, aún frente a este tipo de actividades contextualizadas, es producto de muy poco trabajo con contextos preponderantes que los acerquen a la producción y uso de modelos matemáticos. (Bressan, s.f.)

En el caso de *lo cuadrático* el vínculo que se puede establecer con fenómenos físicos del mundo real, favorece que pueda trabajarse significativamente en las clases matemáticas y acercar a los estudiantes hacia una mejor conexión entre el mundo matemático y el mundo real, ayudando también a que se fortalezca la articulación e integración de la modelación matemática en el aula.

Surge de esta manera, un interés de tipo didáctico relacionado con la búsqueda, el diseño y la aplicación de algunas situaciones problemáticas a partir de las cuales se puedan estudiar los procesos de *matematización* de los estudiantes cuando trabajan en la construcción y uso de modelos cuadráticos, principalmente aquellos que tienen cierta cercanía a lo funcional, dejando abierta la posibilidad de que emerjan expresiones algebraicas y representaciones gráficas como la parábola.

Así, la presente investigación problematiza el asunto de las limitaciones, alcances y posibilidades de la *Educación Matemática Realista* en la implementación de la modelación matemática en el ámbito escolar, con miras a aportar elementos que permita atender a las debilidades que se han pronunciado y especialmente a las dificultades de los docentes, en relación con el reconocimiento de situaciones que sean significativas para los estudiantes y que puedan usarse como insumo en la enseñanza y aprendizaje de lo cuadrático.

Con base a los elementos anteriormente descritos, la presente investigación se centra en responder a la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las características de los procesos de matematización de los estudiantes de educación media (10° y 11°) cuando se involucran en tareas diseñadas desde el enfoque de la Educación Matemática Realista en la dinámica del trabajo con modelos cuadráticos?

En este orden de ideas se plantean dos hipótesis de investigación:

1. La dinámica de trabajo con contextos y modelos matemáticos desde el Enfoque de la Educación Matemática Realista podría contribuir a una mirada alternativa a la integración de la modelación matemática en las aulas matemáticas.

2. El trabajo con modelos matemáticos desde el Enfoque de la Educación Matemática Realista podría contribuir a un aprendizaje significativo de conceptos y procesos matemáticos asociados a los modelos cuadráticos.

1.2. JUSTIFICACIÓN

Dentro de los aspectos que sustentan la importancia de profundizar en el problema formulado, se reconoce en primer lugar, la necesidad de adelantar trabajos en un enfoque como la EMR, con desarrollos recientes en nuestro ámbito académico y que eventualmente podrían llegar a constituirse en estrategias potentes para el trabajo en *Didáctica de las Matemáticas*. De paso podría promoverse la discusión sobre la formulación o integración de propuestas curriculares que reconozcan la importancia de involucrar el trabajo con contextos en las aulas de matemáticas, a nivel de la educación secundaria, habida cuenta de que la mayoría de las investigaciones se han planteado para la educación primaria.

De otra parte, esta investigación podría ayudar a dimensionar el impacto del diseño, gestión y evaluación de tareas matemáticas desde la EMR y su correlato con la construcción de conceptos matemáticos.

Además, la discusión alrededor de esta problemática permite ofrecer posiciones fundamentadas sobre el papel de los contextos realistas en la modelación matemática que amplíen el horizonte teórico y metodológico de las propuestas curriculares para el área de matemáticas. Más aún, aporta a la reivindicación a nivel de las prácticas de docentes del proceso mismo de la modelación matemática, que si bien aparece justificado en nuestras propuestas curriculares, no se traduce necesariamente en estrategias de trabajo en las aulas. Al respecto debe recordarse que el MEN (1998) plantea que:

"*La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas que permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia se considera que todos los estudiantes necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles*" (p. 101)

Consideraciones a partir de las cuales se infiere que para el MEN (1998) la modelación matemática o matematización es un eje central en la organización de los procesos de aprendizaje de los contenidos matemáticos y en el desarrollo del pensamiento matemático.

No obstante, debe considerarse como señalan Villa y Ruiz (2009) que pese a este tipo de disposiciones educativas, las prácticas en el aula de matemáticas presentan una brecha creciente en relación con las primeras, en gran parte producto de la poca comprensión de los elementos teóricos que se discuten en esas disposiciones.

Sin embargo, bajo una mirada más amplia, se pueden citar países como Puerto Rico, el cual a través de los CRAIM (centros regionales de adiestramiento en instrucción matemática) y siguiendo los diseños de la EMR, ha desarrollado una amplia gama de materiales didácticos y de evaluación, con el fin de desarrollar un currículo contextual e integrado para la escuela primaria, obteniendo resultados que han servido para re-direccionar el diseño de las actividades de los libros de texto, así como las unidades de evaluación para los estudiantes. (López & Velázquez, 2006)

Por otra parte, la discusión en torno a los *niveles de matematización*, pone de manifiesto que la integración de la modelación matemática en el salón de clases promueve la aplicación de las matemáticas para solucionar diferentes problemas de la cotidianidad de los estudiantes, generando una mejor comprensión del mundo en que viven, facilitando el aprendizaje de la disciplina y la motivación por seguir aprendiendo (Maab & Mischo, 2011)

Así, desde un punto de vista educativo, la modelación matemática introduce una presentación más humana de la actividad matemática, que comparada con la postura tradicionalista de situar la matemática como un conjunto perfecto de conceptos y procedimientos, resulta ser menos atractiva para los estudiantes, los cuales generalmente suelen inclinarse por unos conocimientos matemáticos significativos, lo cual implica que, pueden aplicarlos para modelar y resolver problemas reales de su cotidianidad y de otras disciplinas científicas (Trigueros, 2009).

Además, en lo que concierne al aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática se plantea que este proceso matemático facilita en los estudiantes la construcción de nuevos conocimientos y habilidades durante el proceso de aplicación y socialización de conocimientos previos (Biembengut & Hein, 2004).

Por ejemplo, en esta misma línea de argumentación, Godino (2010) encontró que dentro de los problemas propuestos en el salón de clases, aquellas situaciones problemáticas dentro de un contexto real, proporcionan en principio, la base intuitiva en la que descansa la construcción de nuevos conceptos y nociones matemáticas.

De este modo, se pone de manifiesto la importancia de la modelación matemática en el ámbito escolar, así como el uso de contextos realistas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el marco de la EMR.

Una mirada a las propuestas curriculares en el contexto nacional permite reconocer una conexión entre la caracterización de los contextos realistas desde la EMR y la manera en que las primeras caracterizan el contexto en el aprendizaje de las matemáticas. Para el MEN (1998) el contexto se entiende como todo lo concerniente al entorno del estudiante y que le da sentido a la matemática que aprende. Sin embargo, el tratamiento matemático de los contenidos de la disciplina en el currículo nacional y la presentación de las situaciones problema pocas veces refleja la naturaleza y los aspectos fenomenológicos del concepto implicado (Villa & Ruiz, 2009). Debe reiterarse que estos son considerados como elementos indispensables que favorecen los procesos de aprendizaje, puesto que ayudan a cerrar la brecha entre el concepto y los fenómenos iníciales donde surgió y se desarrolló el concepto (Puig, 1997). Pero, ¿Cuáles conceptos o nociones matemáticas son apropiados para ilustrar los procesos de modelación en su construcción?

Un recorrido histórico y epistemológico en busca de la construcción y evolución de conceptos matemáticos abordados alrededor del siglo XVII dejan entrever la presencia de un vínculo estrecho entre las matemáticas y los aspectos fenomenológicos que dan origen a esos objetos, de tal manera que la matemática traduce la naturaleza y ésta a su vez obedece las leyes de la matemática. A modo de ejemplo, el concepto de función que emerge precisamente a partir de las indagaciones alrededor de la variación y las dependencias entre magnitudes como el tiempo y el espacio recorrido. Específicamente, los trabajos de Galileo con situaciones de variación cuadrática ponen de manifiesto un proceso de modelación continúa en la construcción de modelos cuadráticos, que emergen de un vínculo entre la matemática y el entorno físico (Mesa & Villa, 2011).

En concordancia con estas ideas, la justificación de la presente propuesta remite al reconocimiento de que los *modelos cuadráticos* han estado ligados a la modelación de procesos de variación y que su presencia permanente en el entorno cotidiano posibilita en los estudiantes una mejor exploración de los fenómenos que se pueden modelar mediante un modelo cuadrático, permitiendo que ellos establezcan algunas relaciones cuadráticas de tales fenómenos. (Mesa & Villa, 2011)

1.3. OBJETIVOS

GENERAL

Caracterizar el proceso de modelación matemática desde los principios teóricos y metodológicos de la Educación Matemática Realista, en un grupo de estudiantes de educación media cuando se involucran en el trabajo con modelos cuadráticos.

ESPECIFICOS

- Identificar elementos teóricos y metodológicos desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista* para diseñar tareas relativas a la modelación matemática.

- Diseñar y gestionar en el aula tareas desde el *Enfoque de la Educación Matemática Realista* para el trabajo con modelos cuadráticos en educación media.

- Identificar y caracterizar los niveles de matematización horizontal y vertical que se configuran en los estudiantes durante el trabajo con las tareas diseñadas.

1.4. ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

En los últimos años, diversas investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas han mostrado un interés creciente por estudiar la modelación matemática (Biembengut & Hein, s.f.; Bassanezi & Biembengut, 1997; Blomhoj, 2004; Godino 2010, Trigueros, 2009). Debido a este interés y como consecuencia de las concepciones e interpretaciones de diversos investigadores, aparecieron significados diferentes a lo que inicialmente se conocía como modelación matemática y que se entendía en el marco de las aplicaciones de la matemática. Así pues, tal como indica Trigueros (2009) "la modelación matemática ha pasado de ser sólo un dominio de quienes se dedican a las matemáticas aplicadas a un área de interés para la educación matemática" (p.77) y en consecuencia, ha ido adquiriendo un reconocimiento fundamental en la enseñanza misma de las matemáticas, como una vía que permite contextualizar los conocimientos matemáticos.

En consecuencia, es posible hablar de modelación matemática en el ámbito escolar, aunque con diferentes visiones y perspectivas según la didáctica y los objetivos que se persigan. (Villa & Ruiz, 2009; Trigueros, 2009)

❖ DIFERENTES PERSPECTIVAS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

En la actualidad existen diversas maneras de aproximarse a este proceso matemático en la escuela. Las dos perspectivas más resonantes se refieren, por un lado, a la modelación matemática como una herramienta curricular que debe hacerse explicita en la escuela, con un programa a seguir, en un tiempo determinado, con un tema único y una intención didáctica definida, ubicando la modelación como un objeto de enseñanza.

De otra parte, hay quienes consideran que la modelación matemática, debe pensarse como una herramienta didáctica que promueve la construcción de conceptos matemáticos, en tanto que, los dota de sentido y posibilita la aplicación de las matemáticas en diferentes contextos dentro y fuera de la disciplina, pensando la modelación como una herramienta de aprendizaje.

Estas posturas serán ampliadas y clasificadas en los siguientes párrafos. De hecho, un gran número de investigadores han concentrado su atención en la elaboración de diversas perspectivas de lo que podría significar la modelación matemática, tanto en la aplicación de la modelación en el aula, como en las investigaciones para su uso.

Entre las investigaciones más elaboradas y fundamentadas en este asunto se encuentran los trabajos de Kaiser y Sriraman (2006); Kaiser y Schwarz (2010) donde se recogen diferentes perspectivas en el ámbito internacional, enfatizando no sólo los fines que cada una de ellas persigue, sino también los antecedentes que les han dado origen.

A continuación se presenta un esquema de Kaiser y Sriraman (2006) destacando las siete principales perspectivas que describen las tendencias actuales de investigación, sin que ello implique la consideración de otras perspectivas que han ido apareciendo y que no habían sido consideradas en esta clasificación (ver tabla1):

Nombre de la perspectiva	Propósito central	Relación con perspectivas previas	Antecedentes
Realística o modelación aplicada	*Objetivos pragmáticos utilitaristas*, por ejemplo, resolver problemas del mundo real, comprender el mundo real, la promoción de competencias de modelación.	Perspectiva pragmática de Pollak	Pragmatismo anglo – sajón y matemáticas aplicadas
Modelación contextual	Objetivos relacionados con contenidos temáticos y objetivos psicológicos, por ejemplo, resolver problemas verbales	Aproximaciones al procesamiento de la información dirigidos a la aproximación a los sistemas	Debate sobre la resolución de problemas en Norteamérica así como también prácticas escolares cotidianas y experimentos de laboratorio de carácter psicológico
Modelación educativa. **Diferenciada en:** **a) Modelación didáctica y** **b) Modelación conceptual**	Objetivos pedagógicos y objetivos relacionados con contenidos temáticos: a) Estructuración del proceso de aprendizaje y su promoción. b) Introducción y desarrollo de conceptos	Perspectivas integradoras (Blum, Niss) y desarrollos adicionales de la aproximación científica – humanista.	Teorías didácticas y teorías del aprendizaje
Modelación socio crítica	Objetivos pedagógicos tales como la comprensión crítica del mundo que nos rodea	Perspectiva emancipadora	Aproximaciones socio críticas en sociología política
Modelación epistemológica o teórica	Teoría orientada a objetivos, por ejemplo, la promoción del desarrollo teórico	Perspectiva científica humanista del "temprano" Freudenthal	Epistemología romana
Modelación cognitiva	Objetivos de investigación a) Análisis de procesos cognitivos que toman lugar durante los procesos de modelación y comprensión de esos procesos cognitivos. Objetivos psicológicos b) Promoción de procesos de pensamiento matemático a través del uso de modelos como imágenes mentales o aún como representaciones físicas o por el énfasis en la modelación como proceso mental tal como la abstracción o la generalización.		Psicología cognitiva

Tabla 1. Clasificación de las perspectivas sobre modelación matemática (versión traducida del original, Kaiser & Sriraman, 2006. p.304)

De la clasificación anterior, Córdoba (2011) citando a Kaiser y Schwarz (2010) indica que es posible distinguir dos enfoques centrados en la matemática escolar (los cuales fueron mencionados al inicio de este apartado). El primero que considera la modelación matemática como un contenido a enseñar, el cual apunta al desarrollo de competencias para solucionar problemas del mundo real y el segundo, que concibe la modelación como una estrategia que motiva el proceso de aprendizaje y brinda bases para el desarrollo de un contenido matemático particular.

A continuación se hace un recorrido por cada una de las siete perspectivas, tomando como referencia los aportes de Blomhoj (2009), ya que mantiene la misma clasificación de Kaiser y Sriraman (2006), pero enriquece este trabajo con la adición de ejemplos concretos, algunas cuestiones que se investigan y el papel del ciclo de modelación, para cada una de las perspectivas enunciadas.

- **PERSPECTIVA REALISTA**

Para la perspectiva realista o aplicada de la modelación, hay una tendencia hacia lo pragmático-utilitario en lo cual, lo importante es la solución de problemas aplicados con un fuerte énfasis en situaciones del mundo real. En esta perspectiva es fundamental que los estudiantes trabajen con la modelación de situaciones autenticas o del mundo real, ya que a partir de estas, se apoya el desarrollo de competencias asociadas a la producción y uso de modelos que sean relevantes para la formación profesional de los estudiantes. (Kaiser & Sriraman, 2006).

El proceso de modelación debe ser evaluado a través de la validación de datos reales y en consecuencia, es necesario estudiar con profundidad la modelación en diferentes profesiones y áreas de aplicación que den lugar a la construcción de modelos matemáticos. (Blomhoj, 2009). En consecuencia, los contextos tomados del mundo real deben ser comprensibles para los estudiantes y la modelación como tal debería estar en el horizonte para ellos. En esta perspectiva se puede ubicar el enfoque de la conceptualización desarrollado por Biembengut y Hein (2004) quienes entienden la modelación como un proceso que tiene como objeto la obtención de un modelo matemático de un fenómeno o una situación problema.

Según, Biembengut y Hein (2004) ese proceso de trasformación requiere de una serie de sub-procesos: elección del tema a modelar, reconocimiento de la situación problema, delimitación del problema, familiarización con el tema que va ser modelado, referencial teórico, formulación del problema e hipótesis, formulación de un problema matemático y desarrollo, resolución del problema, partir del modelo y aplicación, interpretación de la solución y validación del modelo.

En otras palabras, la modelación es el proceso que permite transformar una situación del mundo real, a través de abstracciones y simplificaciones que se concretizan en la obtención de un modelo, el cual será validado y reinterpretado en la situación real que le dio origen. (Córdoba, 2011).

- **PERSPECTIVA CONTEXTUAL**

La perspectiva contextual defiende la importancia del contexto no sólo en la formulación, sino también en la solución de un problema de modelación. Esta perspectiva de investigación se centra en desarrollar y probar los diseños para la modelación, definida como una actividad de solución de problemas que son guiados, según Lesh y Doerr (2003) por seis principios:

1) Principio de realidad: la situación debe ser significativa para los estudiantes y relacionarse con sus experiencias anteriores.

2) Principio de construcción del modelo: la situación debe crear la necesidad de que los estudiantes desarrollen importantes construcciones matemáticas.

3) Principio de auto-evaluación: la situación debe permitir a los estudiantes evaluar sus propios modelos.

4) Principio de documentación: la situación y el contexto requieren que los estudiantes expresen sus ideas acerca de la solución del problema.

5) Principio de generalización de construcción: debe ser posible generalizar el modelo como solución a otras situaciones similares.

6) Principio de simplicidad: la situación problema debe ser simple.

Entonces, el objetivo central de esta perspectiva es el diseño didáctico de actividades que apoyen el proceso de aprendizaje de los estudiantes mediante la modelación matemática, entendida como un tipo particular de solución de la situación-problema.

Por esta razón, es especialmente útil dentro de esta perspectiva, considerar los aspectos psicológicos asociados a la resolución de problemas, los cuales actúan como base para comprender las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelación matemática y la enseñanza de modelos matemáticos (Blomhoj, 2009).

- **PERSPECTIVA EDUCATIVA**

Relacionada con la perspectiva anterior se encuentra la perspectiva educativa, centrada en los procesos de aprendizaje y por tanto, en la promoción de la formación de conceptos matemáticos. Desde esta perspectiva, la modelación matemática puede ser tratada como un medio para el aprendizaje de las matemáticas o como una meta educativa.

Al respecto, Blomhoj (2009) citando el documento de Hofe y et al. (TSG21) plantea que la modelación matemática es vista como un medio para desafiar y desarrollar la comprensión matemática de los estudiantes, pero también es concebida como un objetivo educativo en sí mismo. En dicho documento inicialmente se presentan una serie de conclusiones relativas al desarrollo de competencias adquiridas durante el trabajo de modelación y además, los datos son utilizados para localizar debilidades en los procesos de comprensión matemática de los estudiantes, con la intención de formar una base para el diseño de materiales didácticos que ayuden a superar dificultades de aprendizaje identificadas en el futuro. Estos autores también afirman que es en los procesos de matematización e interpretación que los estudiantes revelan sus creencias matemáticas. En la siguiente figura ilustra la conexión entre las creencias matemáticas de los estudiantes y su desempeño en las tareas de modelación. (Ver figura1)

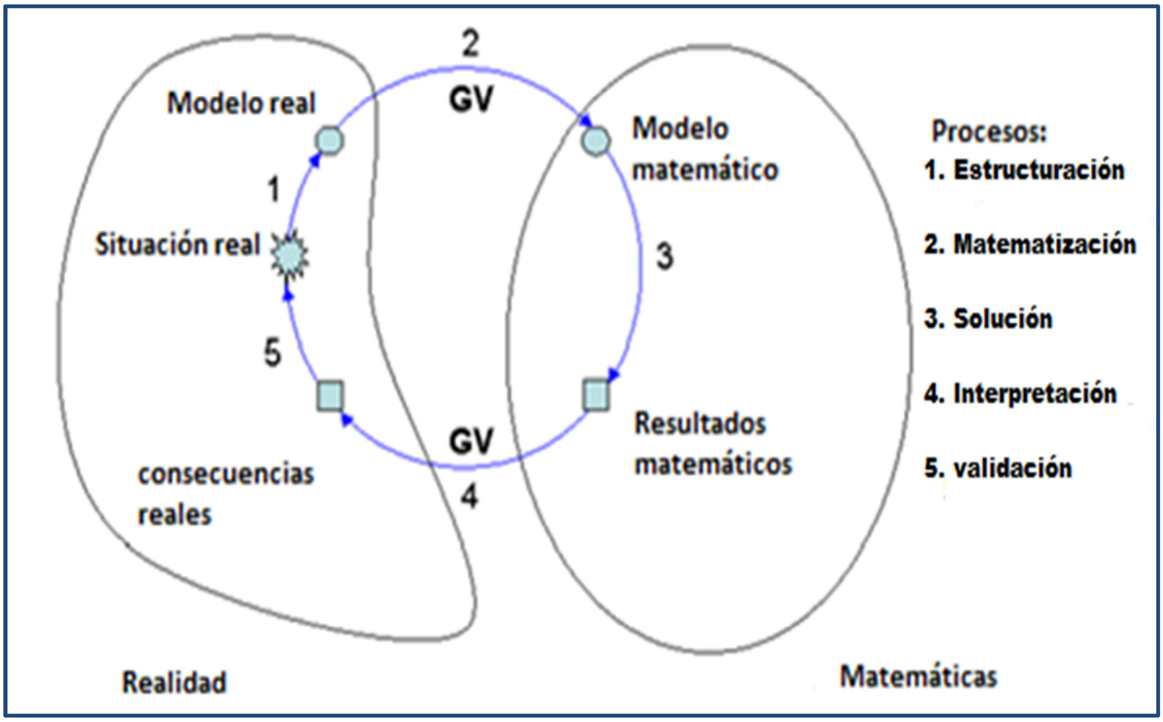


Figura 1. Proceso de modelación desde una perspectiva educativa (Versión traducida del original, Blomhoj, 2009, p.12).

En esta perspectiva las nociones básicas asociadas a la modelación; modelo, modelación, ciclo de modelación, aplicaciones y competencias de la modelación, así como el significado de estas nociones en relación con la enseñanza de las matemáticas, constituyen un elemento central para estructurar el aprendizaje de las matemáticas. (Blomhoj, 2009)

- **PERSPECTIVA SOCIO-CRITICA**

La perspectiva socio-critica, tiene relación con las dimensiones socioculturales de las matemáticas, centrándose particularmente en el papel que estas desempeñan dentro del funcionamiento y formación de la sociedad. En este sentido, esta perspectiva se enfatiza en la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del rol de las matemáticas en la sociedad, el rol y la naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática en la sociedad. (Kaiser & Sriraman, 2006). La filosofía socio-critica sostiene que el uso de la modelación matemática (en la sociedad) puede crear una motivación importante para el aprendizaje de las matemáticas, pero también llevarlos a reflexionar críticamente sobre problemas sociales.

Esto implica que en las prácticas de enseñanza, los estudiantes trabajen con la modelación de situaciones que tienen un carácter real, pero que se relacionan con problemas de tipo social, cultural o del medio ambiente.

Según Córdoba (2011), en esta línea de trabajo se pueden ubicar los trabajos de D´Ambrosio (1999), Barbosa (2006) y Araujo (2009). Además, citando a Kaiser y Sriraman (2006) señala que el discurso de tipo matemático, tecnológico y reflexivo representa un papel crucial en el desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes y se constituye en un aspecto fundamental en la enseñanza de esta perspectiva.

- **PERSPECTIVA COGNITIVA**

La perspectiva cognitiva tiene como principal objetivo analizar los procesos cognitivos involucrados en la modelación matemática. En este sentido, dentro de esta perspectiva se persigue entre otros aspectos, la reconstrucción de las rutas de modelación individuales de cada uno de los estudiantes y la identificación de las barreras y dificultades de estos, durante la actividad de modelación. (Kaiser & Sriraman, 2006).

En esta perspectiva se puede ubicar el trabajo de Borromeo (2010). En dicho artículo, la atención se centra en la reconstrucción de rutas de aprendizaje y en la influencia que tienen los estilos de pensamiento matemático de los estudiantes en los procesos de modelación. Además, plantea un ciclo de modelación particular que tiene un importante papel como instrumento para analizar las tareas y estudiar individualmente los procesos de modelación (ver figura 2.)

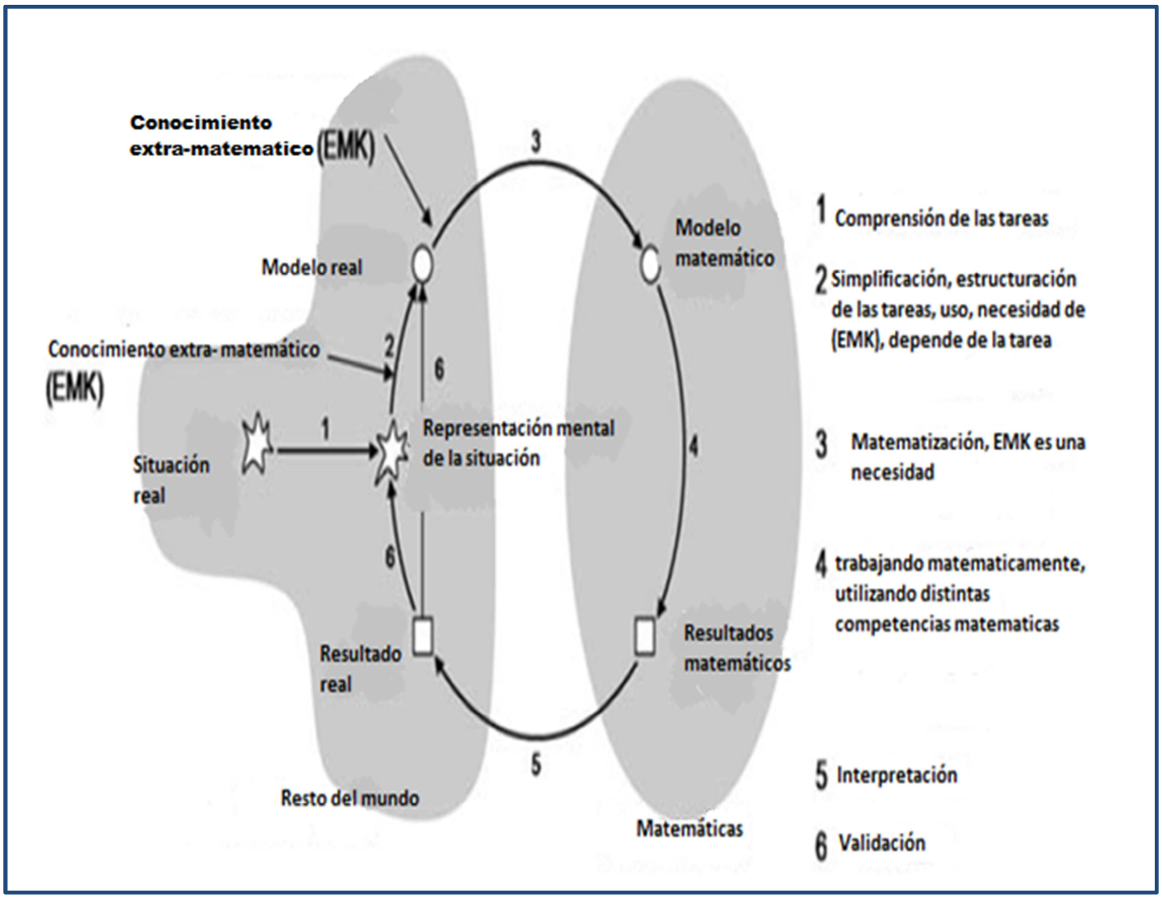


Figura 2. Ciclo de modelación desde una perspectiva cognitiva (versión traducida del original, Borromeo, 2010, p. 7)

La importancia de este ciclo reside en que es suficientemente detallado y por lo tanto puede utilizarse como un instrumento adecuado para el análisis de los procesos cognitivos. Así pues, además de estructurar el proceso de modelación, este ciclo tiene como fin identificar las habilidades cognitivas necesarias para modelar una situación dada (Blomhoj, 2009).

- **PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA**

En esta línea de investigación se puede ubicar el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la aproximación a las praxeologías de Chevallard y el contracto didáctico de Brousseau. A diferencia de la perspectiva realista, la perspectiva epistemológica le da menos importancia al trabajo con situaciones propias del mundo real.

En la TAD por ejemplo, cualquier actividad humana es susceptible de ser modelada mediante *praxeologías*[1] y en consecuencia la modelación no se ve limitada a cuestiones extra-matemáticas (Kaiser & Sriraman, 2006).

Lo mismo ocurre con el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) que también se inscribe en esta perspectiva, debido a la tradición adquirida por la perspectiva científico-humanista[2] principalmente determinada por los aportes de Freudenthal (1973) y continuados por Treffers (1987).

Dentro de los trabajos que se aproximan a esta perspectiva se puede encontrar el artículo de Andresen (TSG21) en el que se presenta y discute un modelo (en un sentido diferente) para la enseñanza de la modelación matemática que se basa en la combinación de cuatro niveles de actividad matemática desarrollados en la EMR (niveles de comprensión). El modelo de enseñanza se ilustra con una serie de preguntas, que se refieren a tareas matemáticas específicas, destinadas a impulsar la reflexión de los estudiantes en cada uno de los cuatro niveles (Blomhoj, 2009).

Finalmente, uno de los objetivos que persigue esta perspectiva, es lograr que los contenidos fundamentales de la matemática puedan ser re-inventados en el trabajo con la modelación de fenómenos reales, sin perder aspectos importantes de la epistemología de los conceptos. Aspectos que son ampliamente acogidos por la EMR (ver capitulo 2).

Este recorrido a través de las diferentes perspectivas de la modelación matemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, permite identificar diferentes acepciones del término, que si bien en algunos casos tienen elementos en común, en otros muestran diferencias importantes. Lo cual implica, entre otras cosas, la dificultad conceptual y de implementación de la modelación en la enseñanza de las matemáticas (Córdoba, 2011).

---

[1]Todo sujeto al enfrentarse a una serie de problemas y situaciones en su vida diaria se ve obligado a recurrir a técnicas para resolverlos (praxis) así como a un conjunto de conocimientos (logos) que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan (praxeologías) (Bosch et al 2006).

[2] En esta perspectiva se entendía la matemática como una ciencia con ideales humanistas para la educación. Se centra en las habilidades de los estudiantes para establecer relaciones entre las matemáticas y la realidad. (Kaiser & Sriraman, 2006)

En conclusión, la exposición de estas perspectivas tiene como finalidad, no solo ampliar la comprensión alrededor de la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mediante el reconocimiento de similitudes y diferencias, sino también ir delimitando gradualmente el enfoque teórico que sirve de base a esta investigación: La Educación Matemática Realista (presentada en el capitulo 2) que ha sido reconocida, según los planteamientos anteriores, como una teoría inscrita dentro de la perspectiva epistemológica para abordar el estudio de la modelación en la matemática escolar.

Capítulo 2

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

2.1. LOS INICIOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La presente investigación relativa al proceso de modelación matemática, toma como referencia las principales aportaciones teóricas de la Educación Matemática Realista (EMR)

Los inicios de la EMR tiene sus raíces alrededor de los años 70, período en el cual se hizo ostensible la necesidad de revertir las situaciones de enseñanza orientadas hacia la matemática moderna[3], la cual había ayudado a producir incontables fracasos de aprendizaje en los estudiantes, gran perdida de la intuición y perdida de comprensión sobre lo que se hacía. Al respecto, Santamaría (2006) señala que alrededor de los años ochenta se reconoció la necesidad de recuperar la intuición, la manipulación operativa del espacio, y de los mismos símbolos que se habían perdido en la incorporación de la matemática moderna al currículo y, la cual generó que la matemática se alejará aún más de la realidad de los escolares.

En este proceso de construcción de un nuevo proyecto curricular para la enseñanza elemental de las matemáticas, nace en Holanda un proyecto de reforma llamado Wiskobas liderado por Freudenthal y sus colegas del antiguo IOWO (Instituto para el desarrollo de la Educación Matemática) en el que se desarrollaron investigaciones alrededor de la caracterización de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza.

En la consolidación de dicho proyecto fueron transcendentales las ideas de Freudenthal acerca de su conocimiento profundo sobre las matemáticas, su interés por la enseñanza y las experiencias recogidas de la práctica en el aula. A título de ejemplo, Freudenthal sostenía que las matemáticas son en esencia una actividad humana cuya finalidad es *organizar* (matematizar) el mundo que nos rodea incluyendo la propia matemática. En este sentido, uno de los intereses de la EMR es que la matemática este conectada a la realidad de los estudiantes, a sus experiencias y además, que sean pertinentes dentro de la sociedad para rescatar así, su valor humano (Panhuizen, 2003).

[3] En este trabajo la *matemática moderna* se entiende como el movimiento de enseñanza que incluyó el enfoque conjuntista-estructuralista en la educación escolar.

Esta y otras ideas acogidas en el citado proyecto culminaron en la creación y diseño del actual enfoque de la EMR, como una teoría especifica de instrucción de la educación matemática, con continuos ajustes a nivel global y local, pero a partir de la cual se han desarrollado numerosas investigaciones. (Goffree, 2000).

2.2. EL ENFOQUE DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)

La EMR busca al igual que la gran mayoría de teorías en Educación Matemática, favorecer a los estudiantes en el desarrollo de herramientas matemáticas y comprensión de conceptos para resolver problemas. De esta manera, el actual enfoque de la EMR no se limita únicamente a enseñar conceptos matemáticos, sino también a resolver problemas enseñando a construir modelos por medio de la matematización progresiva.

Según, Panhuizen (2003) ambos procesos de aprendizaje son necesarios y se apoyan mutuamente, pero es un error trabajar sólo en la actitud de construcción de modelos, ya que esto no es suficiente para que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos.

De otra parte, la idea central que distingue este enfoque de muchos otros es que en la EMR se trata de superar la dicotomía entre los conocimientos formales de la matemática y los conocimientos informales de los estudiantes, mediante el uso de una trayectoria de aprendizaje que ayude a los estudiantes a *reinventar* las matemáticas formales, apoyándose para ello, en el uso de contextos o situaciones cercanas a la realidad que promuevan procesos de matematización progresiva.

Esta aproximación al uso de contextos y modelos pone especial atención al proceso de modelación matemática, sus dos formas de manifestación y los posibles niveles de comprensión que es posible distinguir y que tipifican el proceso de aprendizaje.

Con base a estas consideraciones, algunas investigaciones (Panhuizen, 2003) en EMR se han limitado a responder cómo pueden los estudiantes desempeñar un papel activo en el desarrollo de modelos, cómo evolucionan los modelos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y cómo los modelos promueven y apoyan la elevación de nivel, entre otros.

Además, en relación con los intereses de esta investigación, el GPDM (Grupo Patagónico de Didáctica de las Matemáticas) y los CRAIM (Centro Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática) han dedicado gran parte de sus investigaciones a analizar los niveles de matematización en las clases, aportando significativamente a la comprensión de la modelación matemática y la manera en que esta se puede generar en los estudiantes. Más aún, dichas investigaciones han permitido consolidar algunas ideas generales sobre los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las cuales se ilustran en el siguiente apartado.

2.3. CONCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EMR

Las ideas de Freudenthal acerca del aprendizaje de las matemáticas trascendieron en la construcción teórica de la EMR y, en la actualidad este enfoque sostiene (al igual que lo hacia Freudenthal) la existencia de una discontinuidad en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, es decir que es ineludible la presencia de saltos repentinos en el proceso de *reinvención*, los cuales se reflejan en el uso de modelos de distintos niveles de formalización.

Además, para la EMR el aprendizaje de las matemáticas debe partir de estructuras complejas y ricas del mundo real para que gradualmente emerjan estructuras más generales, abstractas y formales de la matemática. (Bressan, Zolkower & Gallego, 2004). En consecuencia, los puntos de partida del proceso de aprendizaje deben partir de situaciones cercanas a la realidad de los aprendices; situaciones que demanden ser *organizadas* a través de categorías que no están predefinidas, sino que se desarrollan por los mismos estudiantes.

De esta manera, los estudiantes dotan de sentido y significado los objetos matemáticos, llegando a constituirlos en autenticas herramientas para matematizar diferentes situaciones de su cotidianidad.

Con base a las ideas de Freudenthal, la EMR considera fundamental que los estudiantes aprendan a través del proceso de construcción de las estructuras matemáticas y no de estas últimas como objetos acabados. En este sentido, la matemática es vista como una actividad de resolver y buscar problemas, a través de los cuales, se posibilita la organización de la disciplina, bien sea por medio de la realidad o de la matemática misma.

Así pues, la EMR insiste en que es necesario que los estudiantes aprendan a abordar la matemática por medio de situaciones-problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución. (Bressan, Zolkower & Gallego, 2004).

En particular la EMR invita a cambiar la visión del estudiante pasivo, receptor de una matemática prefabricada, por la de un estudiante activo, reflexivo y crítico, que participe de la creación de modelos matemáticos propios, a través de la utilización de métodos informales, estrategias intuitivas o herramientas matemáticas como elementos que posibilitan la organización de diferentes situaciones-problema próximas a su realidad.

Por otra parte, la EMR considera fundamental que durante la matematización progresiva el docente se convierta en un guía y promotor de los procesos de interacción en el aula, ya sea generando espacios de reflexión, que pueden efectuarse a través de preguntas o sugerencias, o bien, ocupando un lugar protagónico mediador entre las situaciones problemáticas y los estudiantes; entre las producciones de los estudiantes y las herramientas formales, ya institucionalizadas por la disciplina. (Bressan & Gallego, 2011).

En general, para la EMR las actividades implementadas deben ser guiadas por un docente con la capacidad de anticipar, organizar didácticamente y facilitar las trayectorias de aprendizaje de sus estudiantes. Esto implica que el docente, debe prever las producciones de sus estudiantes, utilizarlas para mejorar sus habilidades matemáticas y procurar que su clase funcione como una unidad, organizada en *grupos heterogéneos* para que emerjan diversas soluciones desde diferentes niveles de formalización, sin que esto justifique una clasificación de los estudiantes, pues lo que se piensa dentro de este enfoque es que los estudiantes sigan sus propias trayectorias de aprendizaje.

En síntesis la enseñanza de las matemáticas en la EMR toma la forma de *reinvención guiada*, es decir un proceso en el que los estudiantes reinventan las matemáticas mediante la *organización* de situaciones-problema en interacción con sus pares y bajo la guía del docente, mientras el aprendizaje es concebido como un proceso discontinuo de *matematización progresiva* que involucra distintos niveles y en el que los contextos y modelos ocupan un lugar central como puente para favorecer el paso de un nivel a otro más avanzado.

2.4. PRINCIPIOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La EMR es una teoría en construcción sujeta a un constante proceso de renovación acerca del qué y el cómo de la educación matemática. Dicha teoría se concretiza en un conjunto de teorías locales de enseñanza de tópicos de la matemática, las cuales descansan sobre unos principios básicos. Algunos de estos principios tienen relación con la idea de que “saber matemáticas” es “hacer matemáticas”, lo cual comporta, entre otros aspectos, usar la realidad como punto de partida para la *matematización progresiva* y dar la oportunidad de que los estudiantes *reinventen* los conceptos matemáticos. Otro principio es que hay que entrelazar los ejes de contenido de aprendizaje de las matemáticas.

Goffree (2000) propone una clasificación de estos principios que pone de relieve las relaciones inherentes entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (ver tabla 2).

APRENDIZAJE	ENSEÑANZA
Construcción	**Bases concretas para la orientación**
El aprendizaje de las matemáticas es una actividad constructivista. Esto contradice la idea de que los estudiantes simplemente absorben el conocimiento matemático que se les presenta y ubica a los mismos como participantes activos en el proceso educativo.	Hacer de las matemáticas algo concreto, lo cual no significa únicamente materializable, sino también algo que los estudiantes puedan "imaginar fácilmente" y para ello se deben crear contextos reconocibles a los cuales los estudiantes puedan asignar sus propios significados.
Subiendo el nivel	**Modelos**
El aprendizaje de las matemáticas se da en algún momento entre las matemáticas informales (relacionadas con el contexto) y las matemáticas formales. Esto implica que el proceso de aprendizaje de cada alumno se da a diferentes niveles de formalización. Los cambios de niveles se dan de modo súbito y crean una discontinuidad en el proceso de aprendizaje	Para conseguir el avance en los niveles durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, es necesario tener a su disposición herramientas que les permitan establecer un vínculo entre las matemáticas informales y las formales. Una herramienta importante es el uso de modelos (de pensamiento). La producción de un modelo de una situación permite que los estudiantes investiguen la situación. Promover que lo usen en otras situaciones y ayudarles para que lo conviertan en un modelo para solucionar problemas fuera y dentro de la matemática misma.
Reflexión	**Momentos de reflexión**
El aprendizaje de las matemáticas se estimula con la reflexión. La reflexión es el motor que permite progresar o avanzar en el nivel de aprendizaje.	El maestro debe encontrar el momento oportuno para incluir la reflexión en la clase. Cualquier conflicto cognitivo y cualquier producción propia del alumno hacen parte de los momentos claves para la reflexión.
El contexto social	**Lecciones de matemáticas interactivas**
El proceso de aprendizaje necesita otros actores además del niño que aprende. Los diferentes actores comparten entre sí procedimientos y conceptos matemáticos discuten sobre ellos y generan ideas colectivamente.	El maestro debe organizar la actividad matemática de manera que la interacción sea parte natural de ella. El profesor debe ser consciente que la interacción social puede obstaculizar el proceso de aprendizaje
Estructuración	**Entretejer los hilos del aprendizaje**
Si los estudiantes construyen sus propias matemáticas significativamente entonces las nuevas ideas y reflexiones se incorporan a las que ya se tienen. Esto significa que el conocimiento matemático está sujeto a constante reformulaciones. En este proceso de asimilación y acomodación los estudiantes aprenden matemáticas como un todo coherente y no como partes separadas. Se consigue entonces cerrar la brecha entre las ideas matemáticas y su conexión con el mundo real	El maestro debe basar su enseñanza de las matemáticas en situaciones del mundo real, como fuente de ideas (matematización horizontal) y como situaciones para poder aplicarlas (matematización vertical).

Tabla 2. Principios de la Educación Matemática Realista (Goffree, 2000).

De la clasificación anterior se pueden identificar, según Santamaría (2006) seis principios básicos de la teoría general de la EMR, a saber, *principio de actividad*, *principio de niveles*, *principio de interacción*, *principio de realidad*, *principio de reinvención* y *principio de interconexión*. Los primeros tres principios están más conectados al aprendizaje de las matemáticas, en comparación a los restantes, cuyo énfasis esta más próximo a la enseñanza de las matemáticas.

2.4.1. PRINCIPIO DE ACTIVIDAD

Desde la perspectiva de la EMR, la matemática es ante todo una actividad humana que se encarga de organizar el mundo que nos rodea incluyendo la matemática misma. Así pues y en concordancia con las ideas de Freudenthal (1973) la matemática es una actividad que se aprende mejor haciendo y a la que todas las personas pueden acceder.

"*El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que esta al alcance de todos los seres humanos*" Freudenthal (1973, p. 14)

Desde esta visión la *matematización* se concibe como el proceso que permite organizar y esquematizar las realidades en que viven los seres humanos, lo cual implica, entre otros aspectos, la búsqueda y solución de situaciones problemáticas mediante la identificación de regularidades, patrones numéricos, y en general, el uso de herramientas matemáticas. Sin embargo, para Freudenthal (1973) lo más importante de este proceso de matematización es que ayuda a los estudiantes a estructurar la matemática misma.

Otra consecuencia de estas ideas, es la generación de espacios donde los estudiantes puedan hacer matemáticas (matematizar), contraria a la visión tradicionalista determinada por el papel pasivo de los estudiantes y el aprendizaje de unas matemáticas ya acabadas, sustentado en la falsa premisa de que el pensamiento matemático puede ser transmitido a los estudiantes (Santamaría, 2006).

De esta manera, en la EMR los estudiantes no son vistos como simples receptores de matemáticas ya hechas, por el contrario, son tratados como participantes activos durante su proceso de aprendizaje. Básicamente el papel dinámico de los estudiantes en el proceso educativo se consigue a través de situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar conocimientos (formales e informales) para su organización y solución.

En particular, lo que pretende este enfoque teórico es desarrollar en los estudiantes una actitud matemática desde edades tempranas, que los impulse a reinventar los conceptos matemáticos, mediante la organización y estructuración de *situaciones realistas*.

Entonces, la importancia del principio de actividad reside en el hecho de que los estudiantes se enfrentan a *situaciones realistas*, las cuales involucran algún contenido matemático que deben ser construidos por los estudiantes mediante el uso de estrategias informales y su intuición. Además, dentro de esta *reinvención* se dan negociaciones y discusiones que son fundamentales para la construcción del aprendizaje que se sustentan en métodos informales que luego serán utilizados como base para la creación de los conceptos formales (Bressan & Gallego, 2011).

2.4.2. PRINCIPIO DE REALIDAD

En el principio de actividad se discutió sobre la importancia que tiene para los estudiantes hacer matemáticas y cómo a partir de la implementación de *situaciones realistas* que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas se puede conseguir tal objetivo. Sin embargo, es importante aclarar que en la filosofía de la EMR una *situación realista* no se limita únicamente a las situaciones del mundo real, también incluye la consideración de situaciones que son experimentalmente realizables o imaginables por los estudiantes, como son los cuentos de hadas y las fantasías.

Desde este punto de vista, el carácter de realidad en una situación determinada, depende de que tan real pueda ser en la mente de los estudiantes y en consecuencia el mundo fantástico de los cuentos de hadas o el mundo formal de las matemáticas representan escenarios adecuados para crear situaciones problemáticas, siempre y cuando los estudiantes puedan imaginar la situaciones en cuestión. Inicialmente es conveniente que las situaciones diseñadas estén estrechamente relacionadas con lo concreto y lo cotidiano, pero es necesario que se desprendan de esto, para que puedan adquirir un carácter más general, es decir, de modelos matemáticos. (Santamaría, 2006)

Es precisamente el énfasis en tratar de hacer algo real en la mente de los estudiantes lo que le da el nombre a la EMR, pero uno de los objetivos que se persigue es poder fomentar en las aulas de clases unas matemáticas útiles para la sociedad, es decir, que los estudiantes utilicen su comprensión y herramientas matemáticas para resolver diversos problemas.

Es claro que esta visión, no asume las situaciones realistas como problemas de aplicación, pues además, las enriquece ubicándolas como una fuente para aprender matemáticas.

Al respecto, Bressan et al. (2004) defienden el aprendizaje de las matemáticas desde una fundamentación en la realidad misma, indicando que la matemática surge de un proceso de matematización de la realidad. Aunque esto no implica de ningún modo restringir la realidad a los fenómenos del mundo real, ya que esto limitaría a los estudiantes a pasearse por el mundo de las matemáticas.

Entonces, tal como señala Goffree (2000) el principio de realidad consiste en hacer de las matemáticas algo concreto, que no significa únicamente materializable, sino además imaginable en la mente de los estudiantes y para ello es necesario que en la enseñanza de las matemáticas se diseñen contextos significativos para los estudiantes[4]; contextos que posibiliten la asignación de significados propios de los estudiantes y que además puedan ser organizados mediante la matemática, para promover un proceso de *reinvención* de las herramientas matemáticas que les permitirá tener una mejor comprensión de los conceptos matemáticos.

Los contextos al ser significativos para los estudiantes se constituyen en puntos de partida para su aprendizaje y para las actividades de matematización, promoviendo el uso del sentido común, la intuición y las estrategias informales. No obstante, es importante recordar que los contextos en los cuales se inscriben las situaciones realistas adquieren un carácter relativo que depende de la experiencia previa de los estudiantes y de la capacidad de cada uno de ellos para imaginarlos o visualizarlos. (Bressan & Gallego, 2011)

2.4.3. PRINCIPIO DE NIVELES

Dentro de este enfoque teórico se considera que el aprendizaje de las matemáticas se da en algún momento entre las matemáticas informales (relacionadas con el contexto) y las matemáticas formales. De esta manera, los estudiantes deben iniciarse en la matematización de temas cercanos a su realidad para después pasar a analizar su propia actividad matemática.

[4] Para encontrar situaciones realistas, es decir contextos significativos, es necesario acudir a la fenomenología didáctica, la cual se encarga de estudiar e indagar situaciones que puedan ser estructuradas por medio de conceptos matemáticos que deben ser descubiertos y reinventados por los estudiantes.

- **LA MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO MATEMATIZACIÓN**

Desde la perspectiva de la EMR no se habla directamente de modelación matemática, sino de matematización en correspondencia con las ideas de Freudenthal, quién acuño el término para referirse al proceso que describe el paso desde el conocimiento informal, relacionado con los contextos, y las matemáticas formales.

Literalmente para Freudenthal (1973) "*Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma*." (p. 44)

El enfoque principal de Freudenthal (1973) fue en realidad, la matematización como un proceso dinámico que conservará las matemáticas dentro del sentido común y la realidad de los estudiantes. Así, enfatiza en la importancia de iniciar a los estudiantes con problemas derivados de un conjunto de contextos limitados, que puedan ser esquematizados fácilmente para que sirvan como mediadores entre lo abstracto y lo concreto (asociado a una situación específica).

En este sentido, la EMR interpreta la matematización como el proceso mediante el cual los estudiantes organizan su actividad matemática. Esto lo consiguen con la producción de modelos, ya que los estudiantes gradualmente van adquiriendo una comprensión particular de la situación-problema, descubren regularidades, encuentran patrones y posteriormente aparecen medios cada vez más avanzados, hasta finalizar con la construcción de un modelo eficaz, a través del cual pueden conectar varias situaciones con características similares.

En particular, la matematización se entiende como el proceso de trabajar la realidad mediante conocimientos informales (relacionados con el contexto) y herramientas matemáticas (objetos matemáticos, algoritmos, operaciones, modelos, etc.) concretando este trabajo en dos direcciones; la *matematización horizontal* y la *matematización vertical*. Direcciones que según Freudenthal (1991) son claramente diferenciables, pese a que la manera en que se relacionan ambos procesos no esta claramente definida.

- <u>*Matematización horizontal;*</u> entendido como el proceso matemático a través del cual, los estudiantes (con ayuda del docente) logran hacer una modelación particular de la situación problema, en gran parte de los casos, trasladando el problema de su contexto a algún tipo de matemáticas, mediante métodos informales o pre-formales a diferentes niveles de abstracción (Arcavi, 2006).

Este proceso se pone de relieve en actividades que buscan comprender la situación-problema, como son; la identificación o descripción de la matemática que es relevante en la situación en cuestión, la esquematización, formulación y visualización del problema desde diferentes puntos de vista, y aún en el instante en que se hallan semejanzas con otros problemas.

- *Matematización vertical;* que consiste en la elevación del pensamiento abstracto propiciando la reorganización de las ideas (alcanzadas en el nivel anterior) dentro del mismo sistema matemático. En palabras de Bressan y Gallego (2011) este proceso esta sujeto a estrategias de reflexión, generalización, prueba y simbolización, logrando mayores niveles de formalización matemática. Son ejemplo de matematización vertical, la representación de una relación como una fórmula, la prueba de regularidades, la generalización y la combinación de diversos modelos matemáticos.

- **LOS DIFERENTES NIVELES DE COMPRENSIÓN**

La EMR admite que los *modelos descriptivos* producidos en el componente horizontal, gradualmente van evolucionando en *modelos prospectivos*, los cuales constituyen el ingrediente central que lleva de la matematización horizontal a la matematización vertical al impulsar y elevar los *niveles de comprensión*. Dichos niveles de comprensión (situacional, referencial, general y formal) representan el pasaje del conocimiento informal al conocimiento formal y se caracterizan por distintos tipos de actividades cognitivas y lingüísticas, asociadas al uso de diferentes estrategias y modelos, pese a que no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada. (Bressan & Gallego, 2011).

El nivel situacional esta asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Lo cual implica que los estudiantes introducen sus conocimientos informales, su sentido común, su experiencia y estrategias situacionales para identificar y descubrir la matemática existente en el contexto. A este proceso se lo denomina *matematización horizontal*

Los otros niveles están enmarcados dentro de la *matematización vertical* y por lo tanto, se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, el uso de la prueba y la generalización, entre otros.

El nivel referencial es donde aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí que los modelos se consideren como *modelos de* en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.

El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto**.** En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior surgen aspectos generalizables de los mismos y los estudiantes pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los *modelos para* la resolución de los mismos.

El nivel formal esta relacionado con la comprensión, utilización de los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

Recientemente Bressan y Gallego (2011) han producido una síntesis de estos niveles de comprensión a través de la figura 3 y de la cual, es posible inferir algunas relaciones importantes.

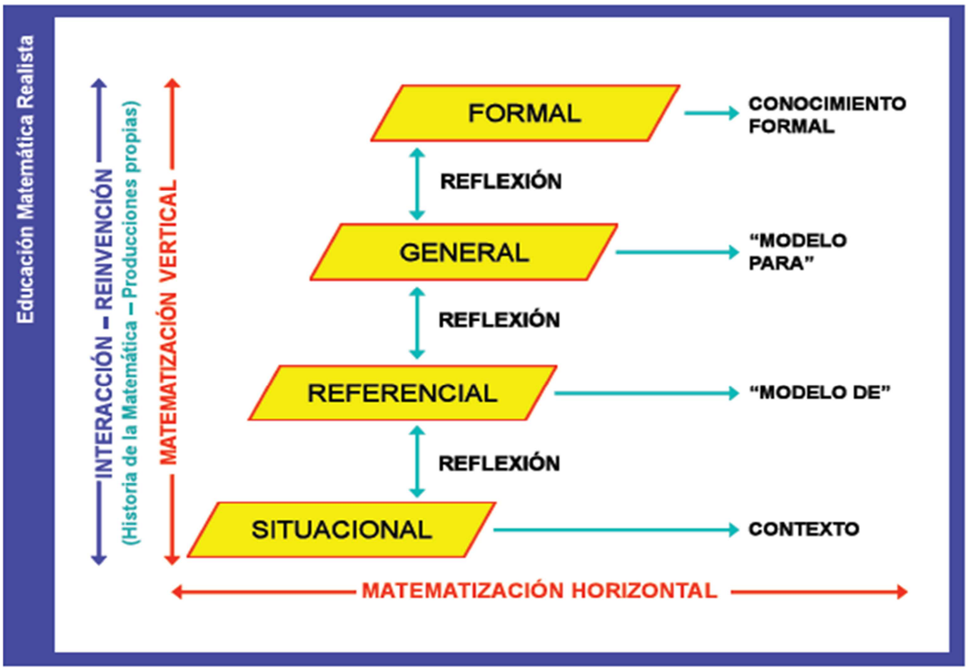


Figura 3. Niveles de comprensión (Bressan & Gallego, 2011, p.7)

En primera instancia, que los estudiantes asciendan a niveles de comprensión más avanzados, si y solo si, reflexionan sobre las actividades realizadas en el nivel anterior. Esta reflexión puede ser suscitada por la interacción (estudiante-estudiante; estudiante-docente).

En segundo lugar, que los modelos sirven como un importante recurso para cerrar la brecha entre la matemáticas informales, relacionadas con los contextos, y las matemáticas más formales. Inicialmente los estudiantes utilizan sus conocimientos y estrategias informales y los introducen a la situación, pero posteriormente ciertos aspectos del contexto adquieren un carácter mas general, convirtiéndose en un "*modelo de*" especifico de la situación, el cual describe y esquematiza los conocimientos y procedimientos de la situación problema. Finalmente, se produce un desprendimiento total del contexto inicial construyéndose así, un "*modelo para*", general y descontextualizado, el cual puede servir para organizar matemáticamente otras situaciones (Santamaría, 2006)

Por último, que la historia de la matemática en los orígenes de cada conocimiento, ejemplifica y brinda situaciones que dan pie a este proceso de matematización progresiva, del mismo modo que también lo hacen, las producciones propias de los estudiantes con todos sus conocimientos informales.

- **INTERPRETACIÓN DE LOS MODELOS EN LA EMR**

En la EMR los modelos representan los instrumentos básicos para que los estudiantes se muevan por diferentes niveles de conceptualización y dado que el proceso de matematización esta orientado a la producción y uso de modelos, es importante esclarecer como se conciben los modelos en este enfoque teórico.

Según Bressan (s.f.) para la EMR los modelos son "*representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos fundamentales de los conceptos y relaciones matemáticas que son indispensables para solucionarla*" (p. 4). En este sentido, materiales, bosquejos visuales (tablas y gráficas), esquemas, diagramas e incluso símbolos pueden servir como modelos, siempre que expresen relaciones matemáticas relevantes para la situación.

Otro aspecto característico de los modelos, es que son el resultado de organizar la matemática inherente a la situación-problema. Lo cual implica dos cosas importantes; la primera tiene relación con el hecho de que los modelos no están siendo pensados únicamente como representaciones, sino también como objetos de trabajo y reflexión en si mismos, sobre los cuales se aplican operaciones y se visualizan, explican y comparan relaciones. (Bressan & Gallego, 2011). La otra, es que los modelos emergen de la propia actividad constructiva de los estudiantes, por lo que no hay un modelo pre-construido o impuesto por la matemática formal, destacándose así, el valor que tienen las producciones de los aprendices para promover el surgimiento de soluciones especificas, que sean posible esquematizar y que tengan una perspectiva vertical.

Igualmente importante, y con el fin de que los modelos puedan brindar el apoyo deseado a los procesos de aprendizaje, éstos deben reunir al menos dos características principales; estar enraizados en situaciones realistas y ser lo suficientemente flexibles para ser aplicados en niveles de formalización más avanzados, sin obstruir el paso a niveles inferiores. De esta forma, los modelos se constituyen en auténticos promotores del aprendizaje, dado que conllevan a la comprensión de los conceptos matemáticos y ayudan para que el conocimiento progrese y evolucione. (Trigueros, 2009).

Para finalizar, hay que resaltar que los modelos sirven en la conjugación de las matemáticas informales (relacionadas con el contexto) y las matemáticas formales. Si bien, en un principio estrechamente ligados al contexto (*modelos descriptivos*), poco a poco se van despegando de tal contexto gracias a la comprensión de relaciones más amplias y a un constante proceso de reflexión sobre las tareas realizadas (*modelos prospectivos*), hasta finalmente convertirse en modelos generales y formales.

2.4.4. PRINCIPIO DE REINVENCIÓN – PRINCIPIO DE ORIENTACIÓN

Uno de los objetivos centrales de la EMR es tener estudiantes que matematicen situaciones cercanas a sus experiencias reales; para conseguir dicho propósito es fundamental dentro de la enseñanza de las matemáticas, propiciar espacios y oportunidades *dirigidas* para que los estudiantes *reinventen* las matemáticas.

Esto implica que los docentes y los programas educativos tienen como misión conducir el proceso de aprendizaje de manera que sean los mismos estudiantes quienes progresivamente construyan las herramientas y discernimientos matemáticos, y no limitarlos a recibir una matemática pre-construida.

En términos generales, este proceso se traduce didácticamente en *reinvención guiada* cuando se mira desde la óptica del alumno y en *matematización progresiva* desde el punto de vista del observador (Santamaría, 2006).

Entonces, la *reinvención guiada* aboga para que el conocimiento formal de las matemáticas pueda ser re-construido por parte de los estudiantes, a partir de *organizar* o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares académicos y bajo la orientación del docente.

En este sentido, la tarea del docente como mediador de los procesos de aprendizaje se agudiza, puesto que no sólo debe nutrir la *reinvención* a través del diseño de contextos significativos (que demanden una organización matemática), sino que además, debe ser capaz de prever dónde y cómo anticipar las herramientas matemáticas que apenas se asoman en el horizonte. (Panhuizen, 2008).

En general, para orientar adecuadamente este proceso de reinvención guiada es necesario que los docentes reflexionen a corto y largo plazo sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes, para que así, se puedan dar una idea de las posibles comprensiones e interpretaciones que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemáticas y, dar lugar a esa *reinvención* apoyándose de una re-estructuración de las actividades de clase.

2.4.5. PRINCIPIO DE INTERACCIÓN

Para la EMR el aprendizaje es una actividad social y como tal es importante que los actores principales (los estudiantes) de ese proceso interactúen con sus pares, para que se generen espacios de reflexión que ayuden a los estudiantes a alcanzar *niveles de comprensión* mas avanzados. (Bressan, Zolkower & Gallego, 2004; Panhuizen, 2008).

De hecho, es importante que las interacciones no se limiten a la interacción entre estudiantes y estudiantes, ya que la dinámica interactiva entre los estudiantes y el docente ocupa un lugar central en la reinvención, siendo clave la manera en que el docente organiza la interacción de la clase, con el propósito de maximizar oportunidades para la producción, intercambio y apropiación de nuevas ideas por parte de los estudiantes.

En este sentido, lo que la EMR pretende con una clase interactiva es ofrecer la oportunidad de un espacio dinámico, donde los estudiantes puedan darse a conocer unos a otros, sus estrategias, hallazgos e ideas y reflexionar sobre ellas; pues al escuchar lo que los compañeros piensan, los estudiantes toman ideas para mejorar sus estrategias alcanzado niveles de comprensión mas generales.

La idea de una clase interactiva, también considera que los estudiantes siguen sus propias trayectorias de aprendizaje, lo cual implica que el trabajo cooperativo se realice a través de *grupos heterogéneos*, esto es, grupos de trabajo con diferentes niveles de habilidad, con tal suerte, que las soluciones de los problemas apelen a diversos niveles de comprensión, donde todos los estudiantes pueden trabajar en ellos. (Santamaría, 2006).

Así pues, lo interesante de este principio de interacción es que prefiere mantener la clase general junta como una unidad de organización, pero propone que lo mejor para posibilitar procesos de matematización progresivo es que se trabaje con grupos heterogéneos, aprovechando que cada uno de los estudiantes sigue una senda de aprendizaje individual.

2.4.6. PRINCIPIO DE INTERCONEXIÓN

En el enfoque de la EMR los contenidos y unidades matemáticas no son tratados de manera individual dentro del proceso de aprendizaje, cada tema que se desea enseñar esta interrelacionado con varios contenidos matemáticos. Esta postura implica que las situaciones realistas deben permitir conectar simultáneamente diferentes contenidos y herramientas matemáticas en una misma unidad de aprendizaje (Santamaría 2006). Además, este principio pone de manifiesto que durante el trabajo con situaciones realistas los estudiantes utilizan diferentes herramientas y estrategias que conducen a la creación de modelos de diferente naturaleza, que bien, podrían ser geométricos y aritméticos, pero lo importante es que la interconexión promueve la generación de nuevos aprendizajes.

2.5. DIMENSIÓN MATEMÁTICA DE LAS NOCIONES CUADRÁTICAS

El término *cuadrático* tiene significados y sentidos matemáticos variados que pueden vincularse a diferentes tipos de pensamientos matemáticos: el geométrico, el algebraico y el variacional, entre otros. Sentidos y significados que se corresponden con la génesis y evolución de los objetos de conocimiento matemático asociados. Para efectos de esta investigación lo cuadrático se asocia a tres nociones matemáticas: función cuadrática, ecuación de segundo grado y parábola (Mesa & Villa, 2007), aunque se privilegia una perspectiva moderna que posiciona *lo cuadrático* en consonancia con los trabajos de galileo y la variación con cierto acercamiento hacia lo funcional.

- **FUNCIÓN CUADRÁTICA**[5]

En matemáticas toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c, ϵ **R** y $a \neq 0$ se le llama función cuadrática. En la expresión anterior ax^2 es el término cuadrático, bx es el término lineal y c el término independiente. El dominio de la función cuadrática es **R** y su gráfica esta determinada por una curva llamada parábola. A modo de ejemplo, se presenta la representación gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x^2$ (ver figura 4).

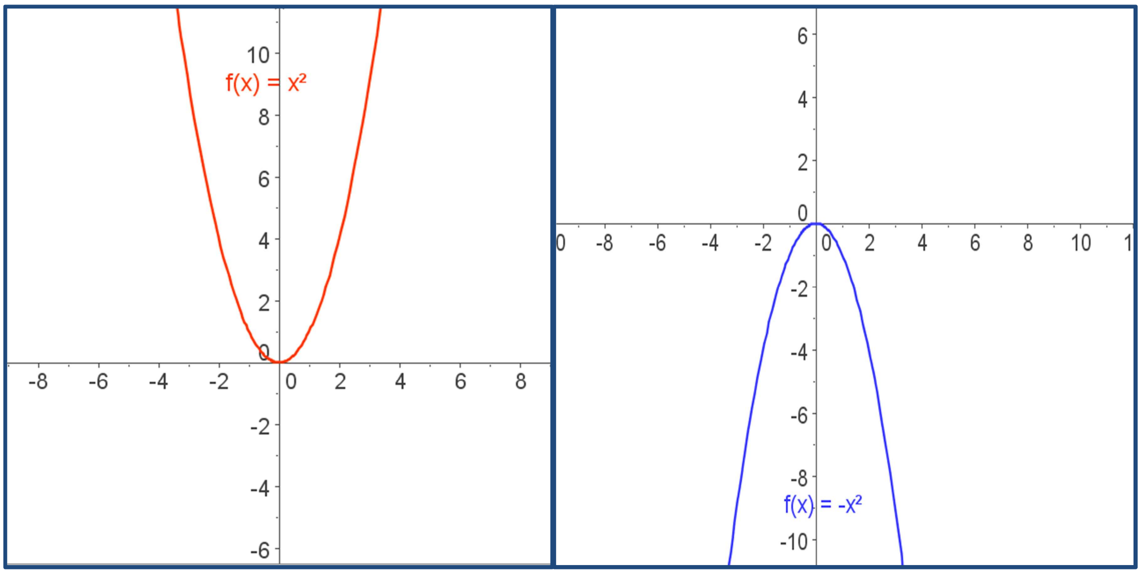


Figura 4. Grafica de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x^2$

[5] Fuente: Oaxaca J., Valderrama M. (s.f.)

Las funciones cuadráticas que están conformadas únicamente por un término cuadrático son de la forma $f(x) = ax^2$. Si el coeficiente a de la función cuadrática es mayor que uno, a medida que se aumenta este valor, la gráfica de la función tiende a comprimirse positivamente hacia el eje de las ordenadas (ver figura 5).

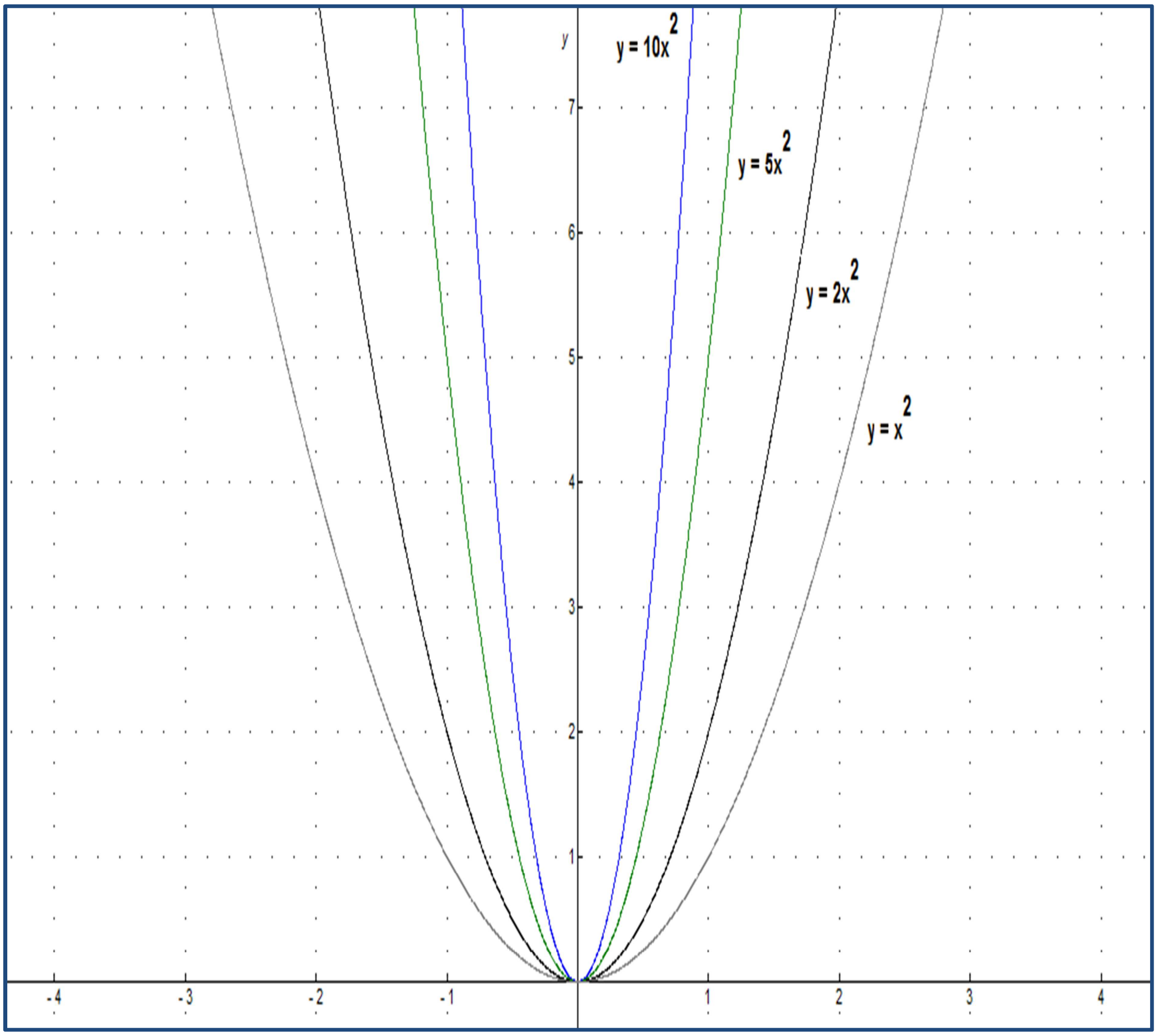


Figura 5. Variación de la función $\mathbf{f(x) = ax^2}$ cuando $\mathbf{a > 1}$

Si el valor del coeficiente a se encuentra entre cero y uno, se evidencia que a medida que este se hace más pequeño, la gráfica de la función se acerca al eje de las abscisas (ver figura 6).

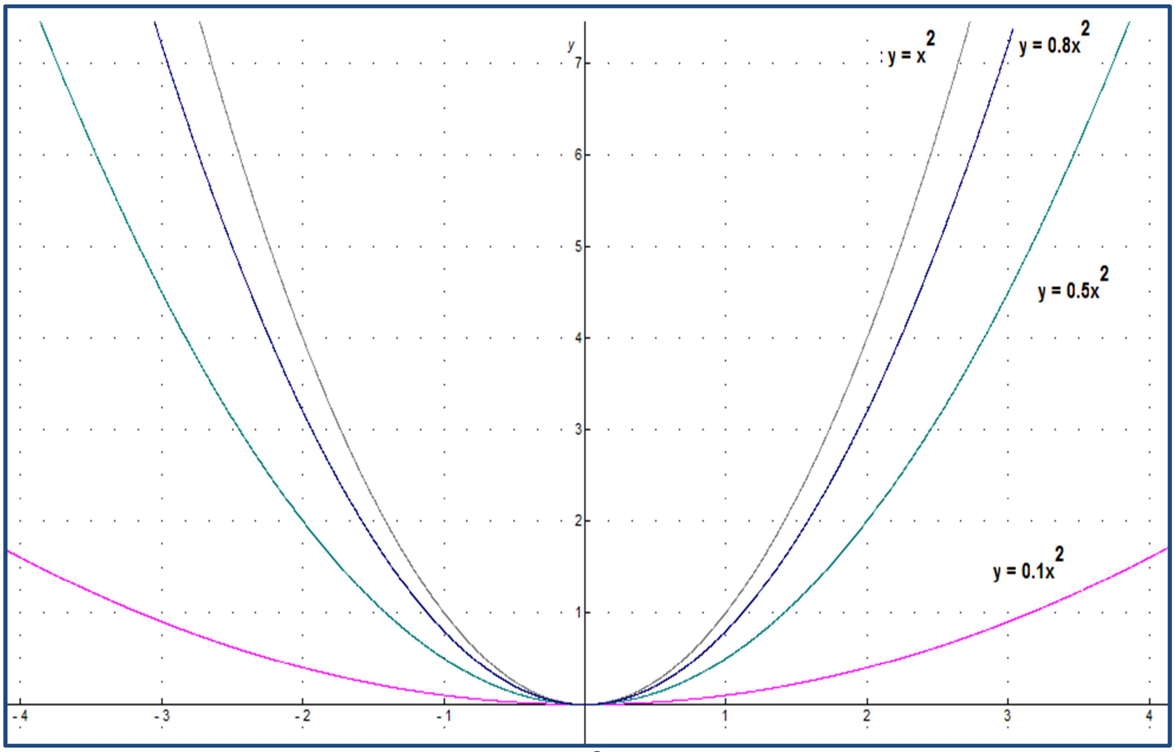


Figura 6. **Variación de la función $f(x) = ax^2$ *cuando* $0 < a < 1$**

Si el coeficiente *a* de la función cuadrática es menor que cero, a medida que este disminuye la gráfica de la función se comprime negativamente hacia el eje de las ordenadas (figura 7).

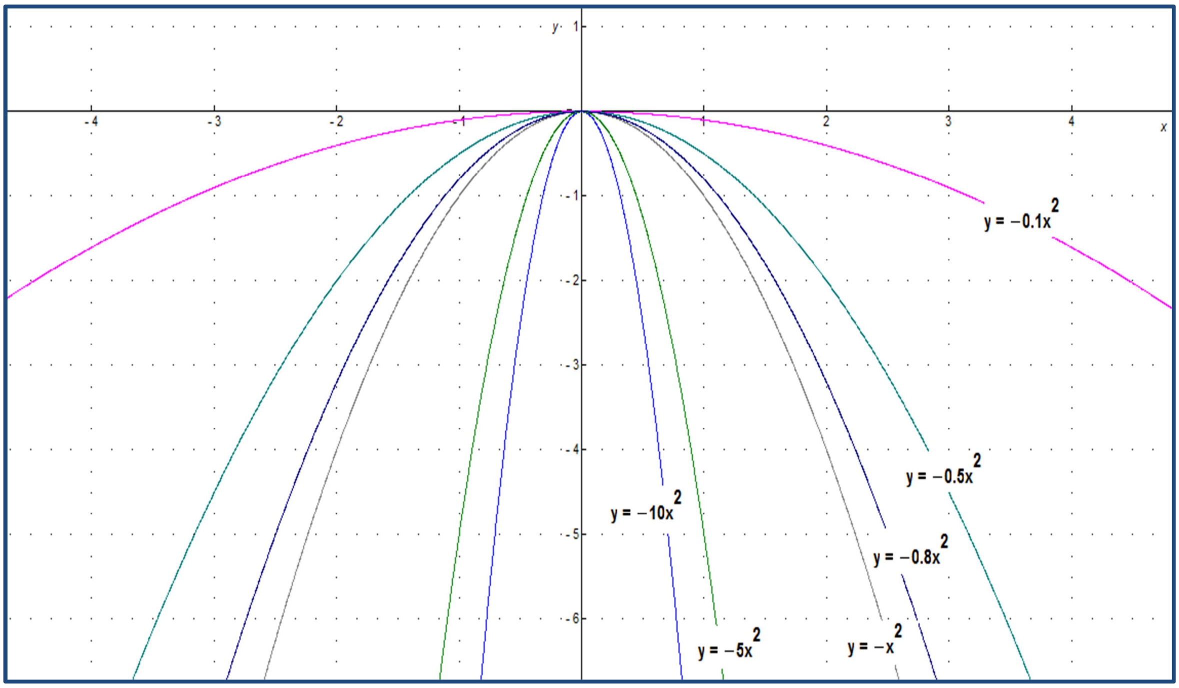


Figura 7. Variación de la función $f(x) = ax^2$ *cuando* $a < 0$

Por otra parte, al considerar una función con un término lineal es decir $f(x) = ax^2 + bx$ el comportamiento queda determinado de la siguiente manera (ver figura 8).

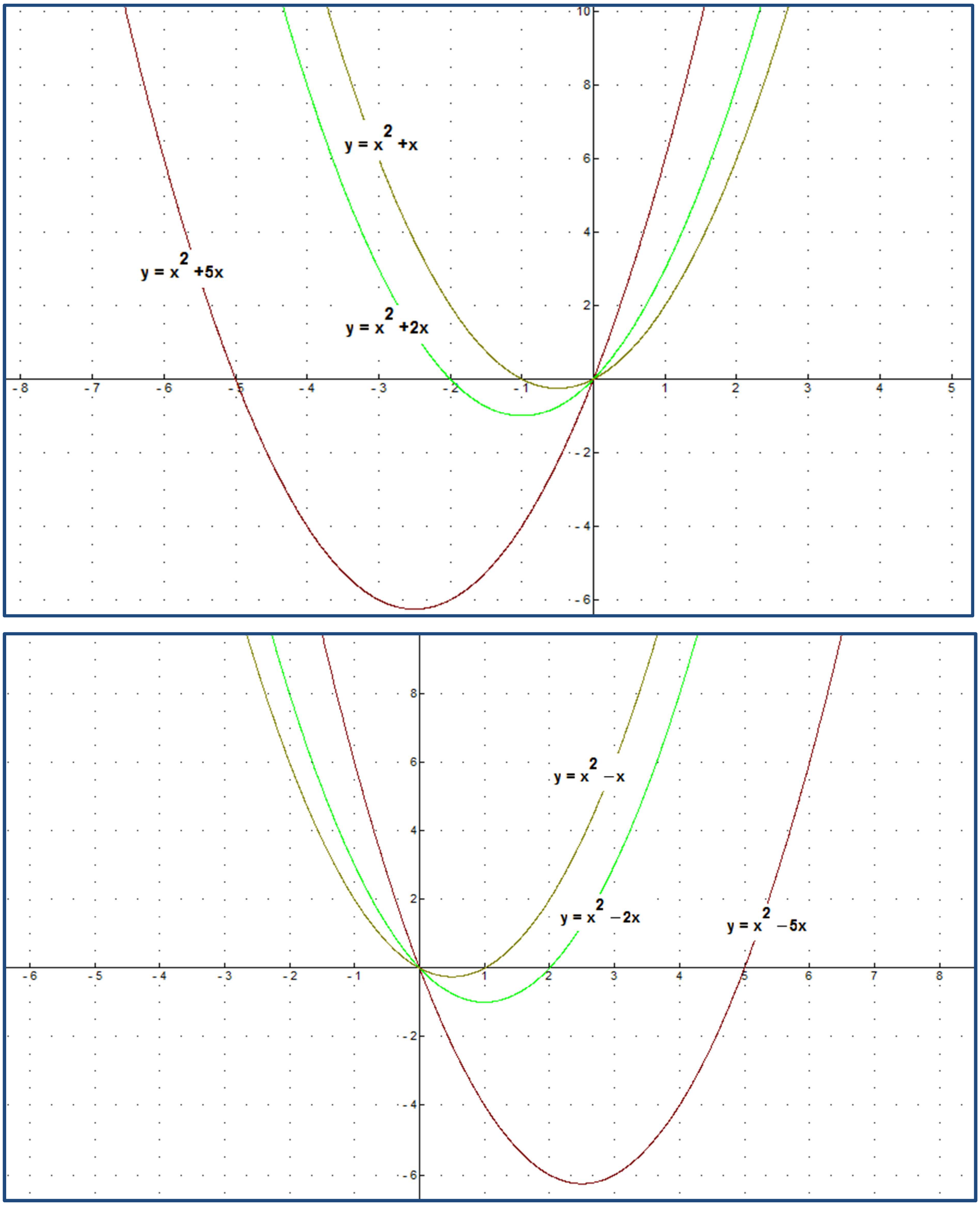


Figura 8.Variación de la función $f(x) = ax^2 + bx$ $cuando$ $b > 0$ y $b < 0$

De las gráficas anteriores es posible observar que si b>0 el desplazamiento de la función es a la izquierda y si b<0 el desplazamiento de la función es a la derecha. En ambos casos a medida que el valor absoluto de b aumenta la ordenada del vértice de la parábola se hace más negativa, además la gráfica de la función coincide en el origen.

Considerando la función con un término independiente, es decir $f(x) = ax^2 + bx + c$ dejando los coeficientes a y b constantes la gráfica de la función queda determinada por el siguiente comportamiento (ver figura 9).

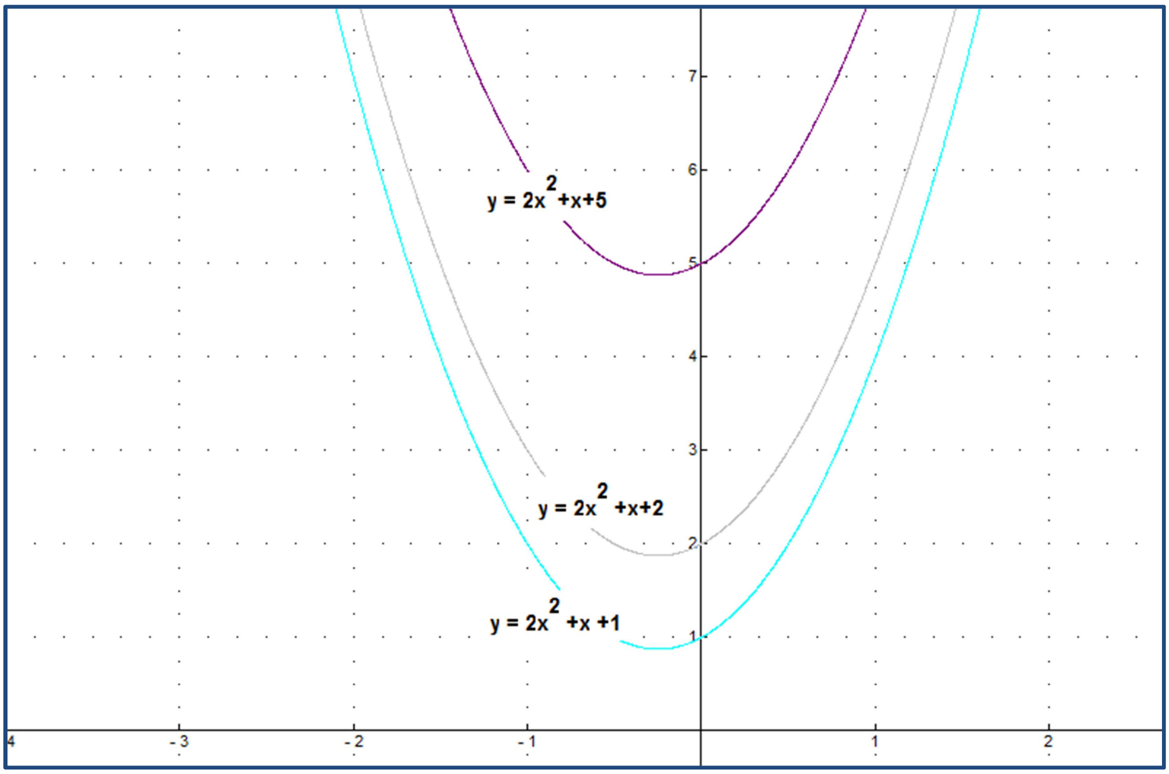


Figura 9. Variación de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ **cuando c > 0 y c < 0**

En la gráfica anterior se evidencia que el desplazamiento es vertical y la ordenada del vértice se hace más positiva en el caso en que *c* sea mayor que cero y, es negativa si c es menor que cero.

Los cortes de la parábola con los ejes coordenados quedan determinados por dos consideraciones: la existencia de un único corte con el eje de las ordenadas dado por el punto (0, *c*) y a lo sumo dos puntos de corte con el eje de las abscisas (las raíces de la ecuación cuadrática) que se obtienen resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

- **ECUACIÓN CUADRÁTICA**[6]

Matemáticamente toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación de segundo grado con una incógnita. Los coeficientes *a*, *b* y *c* representan números reales positivos o negativos y se requiere además que *a* sea diferente de cero.

Respecto a la solución de esta ecuación, se sabe a partir del teorema fundamental del algebra que toda ecuación de segundo grado tiene a lo sumo dos raíces en el campo de los números complejos x_1 y x_2. Para hallar dichas raíces se aplica la formula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El termino D = $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante de la ecuación y es el responsable de determinar las raíces de toda ecuación de segundo grado. Veamos:

Si D>0 la ecuación tiene dos raíces reales distintas $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y su representación en el plano cartesiano esta dada por dos cortes en el eje de las abscisas.

Si D=0 la ecuación tiene dos raíces coincidentes reales $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ y su representación en el plano cartesiano es tangente al eje de las abscisas.

Si D<0 la ecuación no tiene raíces reales y su representación en el plano cartesiano queda estrictamente por encima o por debajo del eje de las abscisa, ya que en este caso tiene dos raíces complejas distintas.

Entonces, es claro que las raíces de la ecuación de segundo grado se corresponden con los ceros de la función cuadrática $f(x) = 0$ y en consecuencia, con los cortes de la parábola con el eje de las abscisas. Además, si se considera la ecuación $ax^2 + bx + c = k$, siendo k un número real cualquiera, se obtiene el conjunto de valores de x que cumple con la igualdad $f(x) = ax^2 + bx + c = k$.

[6] Fuente: Oaxaca J., Valderrama M. (s.f.)

- **PARÁBOLA** [7]

En geometría euclidiana, la parábola se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el plano llamado foco (F) y de una recta fija en el plano llamada directriz. El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice V ($\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$). La distancia del vértice al foco o del vértice a la directriz se le denota mediante la letra $\boldsymbol{p}$. La siguiente figura muestra una parábola que se abre a la derecha (ver figura 10).

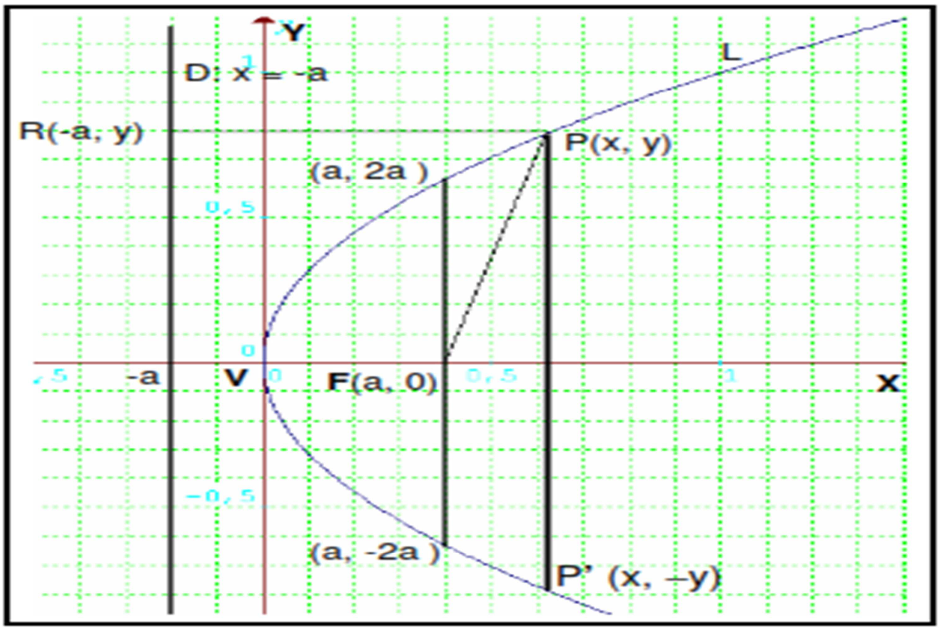


Figura 10. Gráfica de la parábola $(\mathbf{y}-\mathbf{k})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4p}(\mathbf{y}-\mathbf{k})$

En la figura anterior el punto F($\boldsymbol{a}$, $\mathbf{0}$) es el foco, la recta D es la directriz y el punto V ($\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$) es el vértice de la parábola. La recta que pasa por los puntos V y F es perpendicular a la directriz y se denomina eje de la parábola; se conoce que la parábola es simétrica respecto a su eje, de aquí que toda cuerda trazada dentro de una parábola es bisecada perpendicularmente por el eje, por ejemplo la recta L paralela a la directriz intercepta a la parábola en los puntos P y P´ los cuales son simétricos. Uno de los principales elementos que conforman la parábola es el lado recto, este se define como el segmento de recta comprendido por la parábola que pasa por el foco y es paralelo a la directriz, cuya longitud siempre es 4 veces la distancia focal (distancia entre el vértice y el foco).

[7] Fuente: Bravo J (s.f.)

En conclusión, la dimensión matemática permite inferir ciertas conexiones entre las nociones matemáticas asociadas a lo cuadrático.

En primer lugar, la función cuadrática pone de manifiesto cierta relación de dependencia entre las variables que facilita una relación en el plano cartesiano (la parábola) por medio de la expresión algebraica (la ecuación).

En segunda instancia, dicho recorrido deja entrever que la ecuación cuadrática esta dada por la igualdad de dos funciones, la primera de la forma $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ y la segunda $\mathrm{f(x)} = k$ siendo *k* un número real cualquiera. De manera particular, en la función la *x* se interpreta como una variable que puede tomar valores en un rango determinado (dominio de la función), pero en la ecuación claramente la *x* se interpreta como una incógnita o el valor para el cual las dos funciones son iguales.

De este estudio también se concluye que la gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática es una parábola, cuyos cortes con el eje de las abscisas son las raíces o ceros de la función, los cuales están dados por la solución de la ecuación de segundo grado, específicamente de $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$.

Finalmente, es importante mencionar que para los intereses de esta investigación, la producción y uso de modelos cuadráticos por parte de los estudiantes, esta limitada a modelos cercanos a lo funcional desde una perspectiva didáctica hacia lo variacional, pues no se alude únicamente al carácter estático de la variable, sino que además *lo cuadrático* se concibe como una relación de dependencia entre dos cantidades que varían. En este sentido, las tareas diseñadas se enmarcaron en una perspectiva variacional, donde es primordial la relación de dependencia entre las dos o más cantidades que varían y para la cual, los estudiantes pueden construir modelos que logren establecer la manera en que una variable cambia respecto a la otra.

Capítulo 3

LA MODELACIÓN Y LOS MODELOS CUADRÁTICOS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

3.1. MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación que se desarrolló en el presente trabajo buscaba caracterizar los procesos de *matematización* de un grupo de estudiantes de los últimos grados de educación media cuando se enfrentan a *situaciones realistas* que eventualmente puedan dar lugar u origen a la creación y uso de modelos cuadráticos. En el marco este objetivo y en vista de los pocos antecedentes relacionados con este trabajo, es ineludible enfrentarse a preguntas recurrentes en algunas las investigaciones en educación, ¿Cuál debe ser el método para realizar una investigación sistemática cuando se adopta un particular modelo teórico?

La respuesta a dicho interrogante direcciona las acciones del investigador en la búsqueda de la solución de su problemática y más aún, exige al investigador que cualquier acción metodológica deba ser justificada a luz de los objetivos y del problema de investigación. En este sentido, se debe buscar un método que permita un acercamiento al escenario de investigación y a los estudiantes.

Emerge de esta manera, el interés por la *investigación cualitativa*, gracias a que permite estudiar la naturaleza profunda de los fenómenos, la estructura dinámica de estos, y posibilita la explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos (Martínez, 2006). En este sentido, la investigación actual toma un carácter cualitativo, pensando en la promoción de espacios donde se dé una interacción permanente entre estudiantes-estudiantes y estudiantes-docentes, favoreciendo el estudio de los procesos de modelación matemática dentro del marco teórico adoptado.

Además, las investigaciones llevadas a cabo por Berrio (2011) y Córdoba (2011), privilegian ampliamente los métodos cualitativos en el estudio de los fenómenos asociados al proceso de modelación matemática. A modo de ejemplo, Berrio (2011) señala que adoptar un enfoque cualitativo para el estudio de la modelación matemática, permite que la fuente directa de los datos sea el ambiente natural e involucra en la investigación un fuerte componente descriptivo, así como una preocupación principal sobre los procesos que se manifiestan y no sobre los resultados finales.

De otra parte, Córdoba (2011) argumenta que los métodos cualitativos son los que mejor se ajustan para el estudio de las necesidades educativas, en tanto que, favorecen la exploración del contexto estudiado, facilitando descripciones más detalladas y completas de la situación, en este caso, las características de los procesos de modelación matemática de los estudiantes que trabajan en la producción de modelos cuadráticos.

Así pues y en concordancia con los intereses de la presente investigación, se asume un enfoque cualitativo de investigación, donde el método de *estudio de casos* se postula como el más adecuado.

- **EL ESTUDIO DE CASO COMO MÉTODO DE INVESTIGACIÓN**

Esta investigación se enmarca en un enfoque metodológico de *estudio de casos*, sin que ello implique una delimitación precisa y absoluta, puesto que sólo se tienen en cuenta algunos elementos de esta metodología de investigación. Los otros componentes metodológicos son tomados de las investigaciones realizadas por la EMR y están orientados fundamentalmente al análisis de la información.

Para mayor claridad sobre los aspectos metodológicos, se propone concebir el *estudio de casos* en concordancia con Yacuzzi (s.f.) el cual se apoya en Yin (1994) para definir el *estudio de casos* como "una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real, especialmente cuando los limites entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes" (p. 3).

Bajo esta perspectiva es posible responder a los interrogantes cómo y por qué se presenta un fenómeno en un determinado contexto, al tiempo que se posibilita la elaboración de un estudio más detallado y profundo alrededor del fenómeno que quiere ser investigado (Martínez, 2006). Además, el propósito principal dentro de este enfoque metodológico consiste en comprender el proceso por el cual tienen lugar ciertos fenómenos, propiciando condiciones que permiten abordar el análisis de los procesos de matematización de los estudiantes, elemento que justifica fuertemente la adopción de esta metodología.

De otra parte, según Morra & Friedlander (2001) existen tres tipos de estudios de caso; aquellos que tienen el propósito de explicar las relaciones entre las componentes de un programa se denominan *explicativos*, los *descriptivos* que son más focalizados que los anteriores, en tanto que, examinan una situación singular de interés, añaden realismo y ejemplos de fondo y generan hipótesis para posteriores investigaciones. Y finalmente la *metodología combinada*, que tal como su nombre lo indica, reúne hallazgos de muchos estudios de caso.

A partir de los planteamientos anteriores y teniendo en cuenta los intereses de esta investigación se ha optado por un *estudio de caso descriptivo* que pretende identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, en este caso, caracterizar, identificar y describir los diferentes *niveles de matematización* que se presentan en algunos estudiantes de educación media cuando se enfrentan a situaciones realistas que involucran la creación de modelos cuadráticos.

Además, desde esta aproximación metodológica, se posibilita el empleo de recursos tales como: entrevistas, videos y grabaciones de audio, los cuales permiten realizar con mayor detalle la interpretación y análisis de los resultados obtenidos (Berrio 2011). Esta y las razones anteriores, justifican por qué se escogió el estudio de caso descriptivo como metodología de investigación en este proyecto.

3.2. DISEÑO DEL ESTUDIO DE CASO

3.2.1. EL CONTEXTO

La presente investigación fue desarrollada en el contexto del *Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle* (LabMatUV[8]), en particular por la fuerte vinculación que allí se promueve entre los contextos de las *matemáticas experimentales* y el uso de materiales físicos (manipulativos) para la puesta en escena de las actividades diseñadas.

[8] El Laboratorio de Matemáticas del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, (LabMatUV), Cali, Colombia, es una estrategia didáctica de acompañamiento al diseño y uso de materiales, medios, recursos manipulativos y "recursos pedagógicos" en el estudio de la actividad y experimentación matemática desarrollada autónomamente por cada participante.

En este punto es importante señalar que un elemento importante de la investigación fue la vinculación del diseño y desarrollo de las tareas propuestas a los estudiantes con algunos de los referentes teóricos y metodológicos del LabMatUV.

Es precisamente en el LabMatUV donde se promueve una vinculación tanto de la enseñanza como del aprendizaje a la *dimensión experimental de las matemáticas*, la cual se soporta en el reconocimiento de la importancia y necesidad de ver el aprendizaje de ellas como un proceso constructivo, lo cual significa aceptar que los alumnos tienen, descubren y adquieren habilidades y conocimientos matemáticos y, que por lo regular, lo hacen en el marco de actividades sociales en las que se proponen tales aprendizajes. Por consiguiente, por esta vía, la enseñanza de las matemáticas en el aula se alejaría sensiblemente de la tendencia "transmisionista" de la información donde el profesor es proveedor de conocimientos y habilidades matemáticas y los alumnos sus receptores pasivos. (Pabón y Arce, 2012)

De igual manera, como señalan Pabón y Arce (2012) es evidente el interés por la creación de contextos matemáticos *significativos* y auténticos que se asocien a la posibilidad de que las invenciones y producciones de los alumnos puedan ser relacionadas con las habilidades y los conceptos matemáticos que se espera aprendan y, de esta manera, sean en verdad "démarches" útiles y apropiados para el aprendizaje. Es por tanto, esencial que los contextos en que se anclan los problemas matemáticos en juego representen la diversidad, la complejidad, la sobre información y ambigüedad de las situaciones problema que los alumnos puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas.

En el LabMatUV también se da especial importancia al trabajo con artefactos y recursos manipulativos fundamentado a partir del denominado *enfoque instrumental*[9]. Así se toman en consideración el análisis del tipo de artefactos que se vinculan a las tareas propuestas.

[9] De acuerdo con Drijvers y Gravemeijer (2005), la aproximación instrumental para aprender a usar herramientas surge en el marco de los trabajos sobre la ergonomía cognitiva (Rabardel, 1995). Las ideas de Vygotsky (1978) de cómo las herramientas median el aprendizaje pueden considerarse como las bases de esta aproximación. En Francia, los investigadores y educadores matemáticos (Artigue 1998, 2002, Güin & Trouche 1999, Lagrange 2000, Trouche 2003,) se han apoyado en la aproximación instrumental para el aprendizaje de las matemáticas usando herramientas informáticas y computacionales.

Un valor agregado de esta toma de posición es que a futuro permitiría ver la evolución de los artefactos utilizados en las aulas de matemáticas y una transformación/concepción de *recurso pedagógico*[10] para los profesores en formación, como fundamento del trabajo colaborativo y para la constitución de *comunidades de práctica*[11].

3.2.2. SUJETOS PARTICIPANTES EN EL ESTUDIO

En la aplicación de las tareas diseñadas participaron 19 estudiantes de los últimos grados de educación media, seleccionados del proyecto "*semilleros de matemáticas*"[12] de la Universidad del Valle. Para el proceso de selección se tuvieron en cuenta aspectos relacionados con el nivel de escolaridad, la institución educativa donde adelantan sus estudios y los cursos vistos dentro del citado proyecto.

---

10 La expresión *recurso* forma parte del lenguaje cotidiano con el significado de ser medio para el logro de fines. Como se puede encontrar en cualquier diccionario enciclopédico, se trata de un concepto con uso más o menos técnico en diversos ámbitos: economía, biología, ciencias de la computación, geología, administración, literatura, derecho, ecología, entre otros que seguramente se nos escapan. El sustrato conceptual de los usos posibles de la expresión en esos ámbitos permite definir los recursos como fuente o suministro del cual se produce un beneficio y caracterizarlos según su 1) utilidad, 2) disponibilidad limitada y 3) potencial de agotamiento o consumo. En fin, cuando se habla de recursos, por lo general están referidos o bien a algún tipo de materialidad (recursos hídricos, recursos minerales, recursos humanos, recursos bibliográficos) que al no ser perenne, su disfrute requiere de alguna reglamentación, o bien a algún procedimiento establecido y reconocido previamente (recurso de apelación, recurso literario) susceptible de obsolescencia. En el ámbito de la educación, específicamente en el de la administración educativa, se ha usado ampliamente la expresión *recurso* para referirse a la dotación con que cuentan las instituciones educativas para su funcionamiento: financiación, biblioteca, personal, edificación y su amueblamiento (pupitres, computadores, etc.); cuando se refieren a lo que requieren los profesores para su labor docente, se habla de *recursos didácticos*: software, manuales, juegos educativos. (Garzón et al., 2012).

11 Las ***comunidades de práctica*** son grupos sociales constituidos con el fin de desarrollar un conocimiento especializado, compartiendo aprendizajes basados en la reflexión compartida sobre experiencias prácticas. Etienne Wenger ha estudiado las Comunidades de práctica y las ha definido como un "grupo de personas que comparten un interés, un conjunto de problemas, o una pasión sobre un tema, y quienes profundizan su conocimiento y experiencia en el área a través de una interacción continua que fortalece sus relaciones" El término ha sido estudiado por Etienne Wenger (1998),Wenger y Snyder (2000), Pablo Peña (2001) y Antoni Garrido (2003). Observando el conocimiento que se difunde desde una comunidad científica y buscando potenciar este hecho a nivel corporativo como una institucionalización de la vieja 'tormenta de ideas', se recrean las comunidades de práctica. En una de ellas, es el mismo grupo quien establece los objetivos de aprendizaje y estos a su vez son seleccionados en el contexto de la 'práctica del trabajo en la corporación'. Fuente: wikipedia.org

12 Programa de formación que se vincula con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, orientado a mejorar el desempeño matemático de los estudiantes de educación básica y media (8°-11°).

Se favorecieron los estudiantes habían integrado los cursos: *algebra y funciones o probabilidad, funciones y limites*, independientemente de sus desempeños académicos, pues lo que se buscaba era la conformación de una clase con conocimientos matemáticos fundamentales, que posibilitarán la visualización de *niveles de matematización* en el desarrollo de cada una de las tareas.

La muestra la integraron nueve estudiantes de instituciones públicas y diez estudiantes de instituciones privadas, con el fin de ayudar a la conformación de *grupos heterogéneos* caracterizados por la presencia de estudiantes con diferentes habilidades matemáticas. Sin embargo, *el caso* como tal, fue constituido por sólo nueve estudiantes cuyas edades oscilaban entre los catorce y dieciséis años; tres de estos pertenecientes a instituciones públicas y seis adjuntos a instituciones con carácter privado.

De esta manera, se toman como elementos centrales para el estudio, las producciones de nueve estudiantes participantes, los cuales fueron seleccionados teniendo en cuenta factores como, la disposición para el trabajo cooperativo, el interés en el desarrollo de las tareas y fundamentalmente, la calidad de las producciones escritas. La formulación de estos criterios de selección a partir de los intereses de la investigación, se realizaron teniendo en cuenta que se quería hacer visible la distinción de dos niveles de matematización y particularmente, los cuatro *niveles de comprensión* asociados a la producción de diversos modelos de la situación-problema durante la práctica de modelación.

Dentro de la puesta en escena de la secuencia estos estudiantes se organizaron en parejas, conformando en total cuatro grupos de trabajo, entre los cuales, sólo uno contaba con tres integrantes.

Es importante señalar que los participantes de esta investigación conocían que el trabajo propuesto no hacia parte de las actividades habituales de los "*semilleros de matemáticas*", razón por la cual, no estaría implicado algún tipo de evaluación o reconocimiento por los desempeños presentados y la asistencia a cada una de las secciones. Se observó una buena asistencia durante las cuatro secciones.

3.2.3. LOS INSTRUMENTOS

En este apartado se presentan los instrumentos que apoyaron la recolección de la información. Se incluyen entre estos: un cuestionario, las producciones escritas de los estudiantes, el material manipulativo (palillos de madera), una cámara de video, una cámara fotográfica y dos grabadoras de voz. En lo relacionado con los métodos de estudio, se privilegió la *observación participativa*[13]

A continuación se describen los aspectos correspondientes a los instrumentos señalados

Cuestionario

Se diseñó un cuestionario [anexo 1] que se entiende como un instrumento para acercarse a la identidad de los estudiantes, en relación con su contexto socio-cultural y la actividad matemática. Este cuestionario se basó en uno elaborado por Arrieta (2003) donde es incorporado para conocer la situación socio-económica, el desarrollo escolar y las concepciones de los estudiantes acerca de las matemáticas y su papel social, sin abordar las formas de cómo estos elementos influyen en la practica de modelación.

Es importante señalar que el cuestionario se incorporó no sólo para reconocer aspectos importantes de los estudiantes relacionados con, el nivel de escolaridad, la vida familiar, las concepciones de la matemática y las nociones cuadráticas, entre otros; sino que además, se pensó como un instrumento que ayuda a reconocer contextos cercanos a las experiencias cotidianas de los estudiantes, a la vez que favorece la organización de la clase en pequeños *grupos heterogéneos*.

[13] La *observación participativa* es una técnica de observación utilizada en muchas investigaciones en educación, en donde el investigador comparte con los investigados su contexto, experiencia y vida cotidiana, para conocer directamente toda la información que poseen los sujetos de estudio sobre su propia realidad, o sea, conocer la vida cotidiana de un grupo desde el interior del mismo. Uno de los principales aspectos que debe vencer el investigador en la observación es el proceso de socialización con el grupo investigado para que sea aceptado como parte de él, y a la vez, definir claramente dónde, cómo y qué debe observar y escuchar. Durante el proceso de investigación, para recolectar la información, el investigador debe seleccionar el conjunto de informantes, a los cuales además de observar e interactuar con ellos, puede utilizar técnicas como la entrevista, la encuesta, la revisión de documentos y el diario de campo o cuaderno de notas en el cual se escribe las impresiones de lo vivido y observado, para organizarlas posteriormente.

De esta manera, se realizó una primera aproximación a este planteamiento, a partir de preguntas que buscaban encontrar contextos significativos para los estudiantes e identificar formas que puedan utilizarse para ayudar en la gestión docente, en relación con la conformación de *grupos heterogéneos.* Algunos hechos revelados en este cuestionario hacen evidente la importancia que los estudiantes le imprimen a las matemáticas, y el vinculo que ellos mismos consideran existente entre las matemáticas y algunos eventos de su vida diaria, aspecto que podría servir de insumo para encontrar *contextos significativos* que generen procesos de *matematización progresiva* por parte de los estudiantes.

La observación participativa

Esta observación cumple un papel central en el desarrollo de esta investigación, específicamente en relación con la organización y caracterización de los diferentes *niveles de matematización* presentes en los estudiantes. En tal sentido, se considera que permite dar respuesta a interrogantes como: quién, qué, dónde cuándo, cómo y por qué emergieron determinados modelos.

El rol como observadores participantes fue realizado durante la puesta en escena de las tareas, lo que también ayudó a construir *el caso* que compete a esta investigación. Además, la observación participativa se enriqueció en los principios de orientación e interacción de la EMR, lo que llevó la práctica a generar oportunidades de interacción y reflexión continúa, para que los estudiantes reinventaran por ellos mismos las herramientas y modelos matemáticos de las tareas propuestas.

De hecho las interacciones entre los investigadores y los estudiantes siempre se direccionaron para que el conocimiento matemático pudiera ser re-construido a partir de las ideas de los mismos estudiantes, creando de esta manera, un espacio dinámico donde cada estudiante seguía su propia trayectoria de aprendizaje.

Las producciones escritas de los estudiantes

Estas constituyeron una fuente de información principal para los análisis y la creación del caso, básicamente porque a partir de ellas se pudo poner en evidencia la correspondencia con los modelos anticipados y el proceso de construcción llevado a cabo por los estudiantes en la producción de dichos modelos. Así pues, las producciones escritas sirvieron como insumo para caracterizar los niveles de matematización presentes en los estudiantes cuando estos trabajan en la producción y uso de modelos cuadráticos.

Recursos tecnológicos

Los instrumentos tecnológicos para recoger información, al igual que los procedimientos y estrategias utilizadas durante la práctica, se sustentaron en la metodología escogida, por tal razón, se elaboraron videos de las cuatro sesiones, con el objeto de evidenciar conversaciones y acciones que ayudaron a observar y analizar con mayor profundidad las producciones escritas de los estudiantes. Además, la instalación de dos grabadoras de voz, contribuyeron a estudiar detalladamente las argumentaciones elaboradas por los estudiantes durante el desarrollo de las tareas. Así, cada sección fue grabada en video, incluyendo cintas de audio de las interacciones presentes en dos de los grupos conformados.

La figura 11 ilustra la disposición espacial de los recursos tecnológicos utilizados durante la puesta en escena de las tareas:

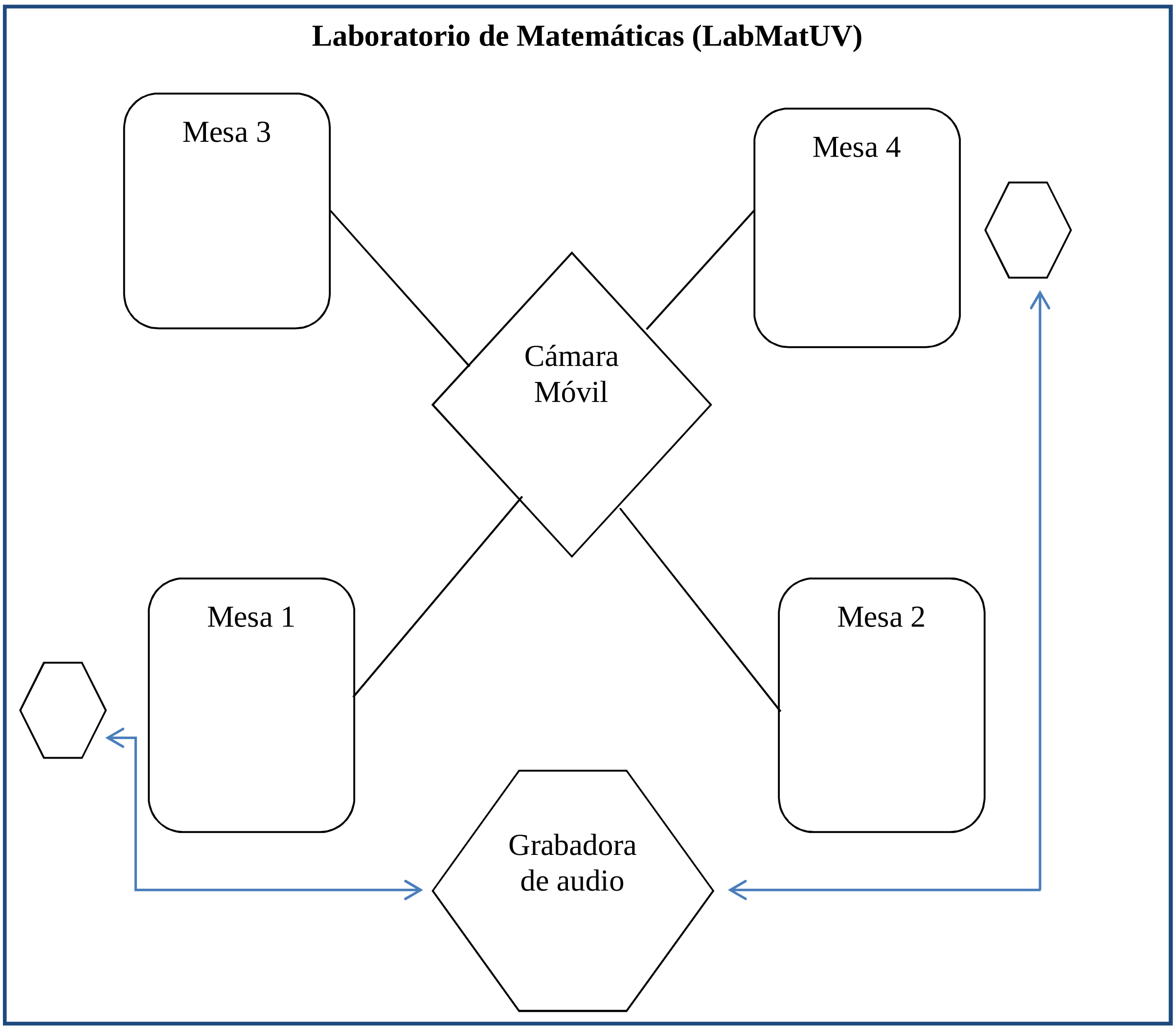


Figura 11. Disposición de los recursos tecnológicos

Los instrumentos y métodos utilizados en la recolección de los datos se complementan el uno al otro de una manera significativa para el establecimiento de unos momentos de intervención que serán expuestos en el siguiente apartado.

3.3. MOMENTOS DE INTERVENCIÓN CON LOS ESTUDIANTES

Una vez definidos los elementos metodológicos que direccionaron la práctica, se describe a continuación los detalles más relevantes de la ejecución y puesta en escena de las tareas diseñadas, así como los diferentes momentos de intervención con los estudiantes.

La práctica se realizó en cuatro secciones de 3 horas cada una, exceptuando la primera sección, que tuvo un tiempo estimado de dos horas donde el objetivo central era el desarrollo del cuestionario. Las otras tres secciones restantes se dedicaron específicamente al trabajo con las tareas, para lo que se estimo un tiempo de 120 min, otros 30 min para el descanso y 30 min más para que los grupos socializar los resultados obtenidos.

La tabla 3 ilustra con mayor claridad la puesta en escena de las cuatro sesiones.

Sesión	Tarea	Duración	Fecha
Primera	Cuestionario	30 minutos	9 de julio de 2012
Segunda	A que no adivinas cuantos hay	120 minutos	10 de julio de 2012
Tercera	Apretones de mano	120 minutos	11 de julio de 2012
Cuarta	Configuraciones navideñas	120 minutos	12 de julio de 2012

Tabla 3. Cronología de la práctica de modelación.

En la primera sección, se discutió con los estudiantes el carácter experimental de la investigación, la importancia del trabajo experimental en matemáticas y la pertinencia del LabMatUV para la implementación de la práctica. Además, en los últimos 30 min los estudiantes debían contestar un cuestionario, con el fin de generar información relevante para la posterior conformación de los grupos de trabajo.

La gestión de las tareas y su implementación en el desarrollo de la práctica se realizó en los siguientes momentos:

1) Organización de los grupos de trabajo

En el apartado anterior se mencionó que la selección de todos los participantes, estuvo enmarcada en el ideal de constituir una clase heterogénea. Así mismo, en cada sección se intento sobre la base de las respuestas de los cuestionarios, la conformación de grupos de dos o tres integrantes con diferentes niveles de habilidad.

Para alcanzar este objetivo, se procuró que dentro de cada grupo se integraran diferentes niveles de escolaridad (preferiblemente con procedencia de ambos tipos de instituciones: públicas y privadas), variados intereses por las matemáticas y conocimientos diferenciables, en relación con lo cuadrático. De esta forma se favorecen las interacciones internas y mayores espacios de reflexión donde la búsqueda de regularidad y patrones puede efectuarse desde distintos puntos de vista. Se pretendía así, enriquecer la labor realizada con las tareas mediante este tipo de gestiones que indiscutiblemente promocionan la construcción de modelos con diferentes niveles de complejidad.

2) Motivación inicial

Una vez conformados los grupos de trabajo, los autores de esta investigación pusieron de relieve la manera en que la tarea abordada se relacionaba con problemas cercanos a las experiencias reales de los estudiantes y cómo a partir de este supuesto los conocimientos previos no matemáticos podrían ayudar a solucionar la situación planteada. En este momento fue fundamental recordar dentro de la gestión de las tareas, que los estudiantes se sienten más atraídos a la actividad matemática cuando trabajan con contextos que tienen algún significado para ellos.

3) Configuración de modelos

Después de la motivación inicial se direccionó la gestión hacia la configuración de modelos que pudieran ser construidos por la actividad matemática propia de los estudiantes, aprovechando para esto cualquier tipo de conflicto cognitivo y cualquier aspecto que los estudiantes pudieran haber pensado por sí mismos.

Además, cada tarea intenta llevar de manera natural a los estudiantes a un proceso de matematización progresiva, iniciándolo en la solución de casos particulares antes de pasar a preguntas que requieren para su solución la obtención de un modelo matemático formal.

En principio, los modelos podían derivarse de la utilización de métodos informales, pero gradualmente el carácter evolutivo de los mismos, junto a un constante proceso de reflexión, favorecería el empleo de métodos más formales. La matematización bajo estas consideraciones conduce a un modelo de la situación problema.

4) Discusión de los modelos obtenidos

Una vez terminado el tiempo destinado para la solución de la tarea, un integrante de cada grupo expone los resultados obtenidos, el proceso que mediante el cual se llego al modelo final y la justificación matemática que lo valida (si se tiene). Se trata en este momento de favorecer las interacciones entre toda la clase y ayudarlos en la constitución de modelos matemáticos que puedan ser aplicados a situaciones similares.

Para la secuencia propuesta, se realizará una fundamentación teórica de las tareas, el respectivo diseño y la predicción de algunos modelos que pueden construir los estudiantes en los diferentes niveles de matematización.

3.4. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Dentro de esta investigación el análisis de la información se entiende como un proceso, en el cual las producciones e interacciones de los estudiantes participantes pueden ser interpretadas a través de los elementos teóricos y metodológicos de la EMR.

De acuerdo con Córdoba (2011) el análisis de la información no consiste en hacer una simple descripción de lo observado o una transcripción de diálogos y producciones escritas, lo esencial es darle significado y encontrar relaciones a lo que piensan, dicen, hacen y construyen estudiantes y docentes cuando se inscriben en procesos de modelación en el aula.

Por otra parte, caracterizar los *niveles de matematización* de los participantes cuando trabajan en la producción de modelos matemáticos cuadráticos, es una tarea compleja, porque no siempre es posible comprender eficientemente cada uno de los procesos individuales de los estudiantes. Sin embargo, como se mencionó inicialmente, el análisis de la información debe descansar sobre el marco teórico adoptado y por lo tanto, los *niveles de comprensión* representan un aspecto importante en este asunto, puesto que ayudan a seguir los procesos de aprendizaje, situando tanto el trabajo que hacen los estudiantes en niveles de *matematización horizontal*, como en niveles de *matematización vertical*.

Un análisis predictivo de los posibles modelos que pueden emerger de la actividad matemática de los estudiantes, sirvió de base para identificar y definir algunas características que delimitan los *niveles de matematización* cuando se trabaja con las tareas diseñadas. Para hacer este estudio fue importante obtener una visión más profunda, por ejemplo, de cómo los estudiantes utilizan sus conocimientos informales para producir modelos o cómo estos modelos evolucionan dentro de la misma matemática. Más aún, este esfuerzo por llegar a comprender los procesos individuales de los estudiantes, permitió la creación de unas categorías de análisis "parciales" asociadas a cada *nivel de comprensión*, de tal modo, que las acciones y modelos de los estudiantes podrían asignarse a un *nivel de comprensión* particular.

El carácter parcial de estas categorías se basa en los aportes realizados por Córdoba (2011) quien sostiene que no es conveniente acercarse al análisis de la información con categorías precisas, definidas de antemano, ya que esto puede pautar la mirada y no permite reconocer otras características que tal vez tengan mayor recurrencia en los modelos producidos por los estudiantes. De este modo, las categorías de análisis partieron de supuestos teóricos de la EMR, pero se fueron enriqueciendo a través de las acciones y construcciones que se visualizaron en los registros de los participantes.

En síntesis, el orden metodológico una vez recogidos los datos, consiste en hacer un *análisis predictivo* (supuestos iniciales sobre la forma en que los estudiantes pretenden dar solución a la situación-problema), que servirán como soporte para crear unas categorías de análisis que se nutren a la vez de elementos visibles en las producciones de los participantes y finalmente un *análisis prospectivo* para contrastar lo que se dice en el análisis predictivo con lo que realmente hicieron y construyeron de manera interactiva los participantes.

De esta manera, se analiza en qué medida los estudiantes construyeron los modelos esperados (discutidos en el *análisis predictivo*) y otros que no fueron tomados en cuenta pero que pueden asociarse a uno de los cuatro niveles de comprensión. Así pues, se confrontan los planteamientos expuestos en ambos tipos de análisis con el fin de caracterizar los niveles de matematización de los participantes y aportar elementos desde la práctica que permiten ampliar el enfoque teórico de la EMR.

3.5. FUNDAMENTACIÓN TEORICA DE LAS TAREAS

Dentro de las características del enfoque teórico de la EMR, se destacan en particular, unas que juegan un papel clave en lo relacionado con la fundamentación y diseño de tareas que pueden ayudar al proceso de *reinvención*.

En primer lugar, es importante considerar que ciertas situaciones-problema dentro de *contextos significativos* puedan ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución que vinculen sus conocimientos informales. Estos procedimientos de solución informal, gradualmente pueden actuar como catalizadores para la generalización o formalización. Pues bien, la tarea de quien diseña consiste en construir un conjunto de problemas en contexto que puedan conducir a una serie de procesos de *matematización horizontal* y *vertical* que juntos dan lugar a la reinvención de la matemática inmersa en la situación-problema.

En segunda instancia, el diseño de las tareas debe nutrirse de la historia de las matemáticas y más aún, de la *fenomenología didáctica* de los conceptos matemáticos implicados. Esta fenomenología se enriquece mucho más con las producciones de los estudiantes, dado que éstos estarían involucrados en la resolución de problemas para los que no conocen los procedimientos de solución estándar, posibilitando la manifestación de diversas estrategias asociadas a la utilización de conocimientos informales.

En concordancia con las ideas anteriores, se han elaborado los siguientes apartados que buscan ilustrar de qué manera el análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos implicados en las tareas y los requerimientos de los contextos, permiten fundamentar la producción de situaciones-problema que se corresponden con las bases teóricas de la EMR.

3.5.1. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Se entiende el *análisis fenomenológico* en concordancia con las ideas de Freudenthal (1983), el cual considera que el objeto central de una investigación fenomenológica es la búsqueda e investigación de situaciones (fenómenos) que puedan ser organizadas por conceptos matemáticos a través de un proceso de matematización.

Se busca entonces, mediante este análisis, reconocer cuáles son los fenómenos que se organizan mediante determinados conceptos matemáticos y cómo estos organizan la matemática misma. Esta visión es defendida y ampliada por Graveimejer y Terwuel (2000) al señalar que:

El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se puedan generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical (p. 12)

Desde ésta perspectiva, algo es considerado como un *fenómeno* cuando se tiene experiencia de ello, incluyendo como fenómenos los medios de organización de la matemática (estrategias, notaciones, conceptos) cuando se les considera como objeto de experiencia. (Bressan, 2011). En este sentido, para Freudenthal los objetos matemáticos que organizan una diversidad de fenómenos terminan por convertirse a través de un proceso de matematización en parte de una realidad o campos de fenómenos. Esto implica que los conceptos elaborados a partir de los objetos mentales, entran a un campo de fenómenos que son organizados por otros objetos mentales, que a su vez, son convertidos en nuevos conceptos (Puig, 1997).

Aunque Freudenthal (1973) distingue entre varios tipos de fenomenologías[14] (fenomenología pura, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica) los trabajos desarrollados en EMR privilegian el *análisis fenomenológico didáctico*, en tanto que, toma en cuenta los fenómenos que intervienen en el mundo de los estudiantes y los que se proponen en el ámbito escolar.

[14]**Fenomenología pura:** Que considera los fenómenos que están organizados mediante la matemática actual y considerando su uso actual. En este caso, las relaciones entre el fenómeno y el concepto de interés ya están establecidas**.**
Fenomenología didáctica: Los conceptos o estructuras matemáticas son considerados como *procesos* cognitivos, es decir, en tanto que se proponen como contenidos de enseñanza que están siendo aprendidos por los estudiantes.
Fenomenología genética: Los fenómenos se consideran en relación al desarrollo cognitivo de los estudiantes.
Fenomenología histórica: Se centra en determinar los fenómenos para cuya organización se origino el concepto en cuestión y como se extendió a otros fenómenos

Dicho análisis, permite descubrir y ayudar en el diseño de situaciones-problema que promuevan la constitución de modelos, su posterior evolución en una trayectoria de aprendizaje y que abran un sendero hacia niveles más altos de comprensión de los estudiantes.

- **ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO DIDÁCTICO DE LAS NOCIONES CUADRÁTICAS**

La exploración fenomenológica de lo cuadrático, tiene como propósito fundamental reconocer los fenómenos que dieron origen a algunas de las nociones matemáticas asociadas, estudiar sus desarrollos y variación de significado, así como la forma en que dichas nociones se entrelazan para organizar fenómenos de naturaleza diversa. En relación a lo anterior, lo que la historia nos enseña es que éstas nociones pueden rastrearse desde la ecuación de segundo grado, pasando por los aportes de la geometría analítica en el estudio de la parábola, los estudios alrededor del movimiento (la cinemática) hasta llegar a consolidarse mediante un proceso de abstracción profundo en lo que actualmente se conoce como función cuadrática.

Por otra parte, algunos investigadores (Tagle & Velázquez, 2007) señalan que el concepto de función se consolidó y tuvo su génesis en ideas geométricas. Esta visión se apoya en el hecho de que las ecuaciones de las curvas se encontraban mediante propiedades geométricas y básicamente en que las ecuaciones de segundo grado se correspondían con las secciones cónicas. A modo ejemplo, pueden presentarse los trabajos de Descartes, pues es uno de los primeros matemáticos que pone de manifiesto una relación explícita entre los puntos de las curvas algebraicas y los puntos de una línea recta mediante una expresión algebraica.

Algunos elementos importantes dentro de este relato histórico, que además pueden aportar significativamente a una fenomenología de lo cuadrático, tienen relación con el interés que se despertó en cierta época por conocer el cómo de algunos eventos de la naturaleza, más que el por qué se generaban.

Esta nueva perspectiva por querer entender el mundo, precisamente fue lo que dio origen al estudio de las situaciones de variación (donde intervienen magnitudes que se relacionan), las cuales, según Puig, (1997) representan el inicio de la fenomenología del concepto abstracto de función.

En efecto, el interés sobre cómo se comportan algunos fenómenos del mundo real, social o mental, puso de manifiesto una relación de tipo funcional entre magnitudes que varían. Como ejemplo de ello, se pueden considerar los trabajos de Galileo sobre el estudio del movimiento, ya que aparece por primera vez una justificación experimental que demuestra la existencia de relaciones cuantitativas entre algunas magnitudes físicas, y la obra de Descartes que comenzó a formar la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos.

Específicamente, las situaciones de variación que involucran el estudio del movimiento curvilíneo junto con los inicios del cálculo infinitesimal, diversos problemas de física y problemas de astronomía abrieron una brecha hacia la aparición y posterior desarrollo de los modelos matemáticos que atañen a lo cuadrático y al concepto mismo de función. Sin embargo, en la comprensión de dichas situaciones lo que se intenta enseñar desde una perspectiva fenomenológica, no es el abordaje de lo cuadrático desde contextos de la física, sino más bien, el reconocimiento de una presentación "dinámica" (que considera fundamental la relación de dependencia entre magnitudes que varían) de las nociones matemáticas asociadas a lo cuadrático.

De hecho, las situaciones de variación que involucran las nociones cuadráticas, no están limitadas a la física como disciplina, puesto que se puede ilustrar, cómo lo cuadrático se puede estudiar en conexión con otros fenómenos, que no necesariamente pertenecen al campo científico de las matemáticas o de la física. Lo cual implica, que los contextos que se proponen dentro de la misma disciplina son igualmente relevantes, siempre y cuando las situaciones propuestas promuevan una versión "dinámica" de lo cuadrático frente a la visión "estática" comúnmente desarrollada en los libros de textos de matemáticas que no consideran la fenomenología de los conceptos. (Valoyes & Malagón, 2006).

En concordancia con las ideas anteriores, se ha considerado para el diseño de las tareas una mirada al uso de contextos que involucren situaciones de variación (magnitudes que varían y dependencia funcional) que igualmente puedan corresponderse con los fundamentos teóricos de la EMR. Además, dichas tareas no provienen de contextos de la disciplina o de fenómenos cercanos a la física, puesto que existen otro tipo de fenómenos que son familiares para los estudiantes y donde lo cuadrático se estudia desde la variación y la relación entre magnitudes variables.

En general, este análisis fenomenológico de lo cuadrático amplia la comprensión sobre cómo las nociones matemáticas se pueden manifestar a los estudiantes y cómo estos últimos pueden construirlas. No obstante, la parte más importante del análisis, se hace mientras se trabaja con los estudiantes y se analizan sus producciones, pues de esta forma se puede reconocer lo qué es importante para crear un modelo y por tanto los elementos que se necesitan para que emerjan modelos o soluciones especificas, que puedan ser esquematizadas fácilmente y que tengan una perspectiva vertical. (Bressan, 2011).

Además, es importante mencionar que las nociones cuadráticas y en particular, la función cuadrática como objeto mental puede resultar mucho más compleja que otros conceptos, puesto que existen diversos fenómenos que se integran con esta noción, y más aún fenómenos que pertenecen al mismo mundo de las matemáticas. Por lo cual, si se quiere que los estudiantes se apropien de esta noción y sus asociadas, es necesario que ellos se familiaricen con un buen número de estos fenómenos desde etapas tempranas de su escolaridad. Respecto a lo anterior, Puig (1997) indica que la adquisición de conceptos tan abstractos como la función sólo es posible en etapas avanzadas de la escolaridad e incluso señala que en la escuela secundaria se puede constituir meramente la idea de variable y de dependencia funcional.

3.5.2. REQUERIMIENTOS DE LOS CONTEXTOS

El enfoque teórico de la EMR plantea que la introducción de conceptos matemáticos se debe realizar bajo contextos realistas o situaciones que los estudiantes puedan imaginar fácilmente y que sean razonables dentro de lo que ellos conocen.

De hecho, las investigaciones que adoptan este enfoque teórico indican que las tareas propuestas desde contextos realistas presentan mejores perspectivas en el proceso de aprendizaje matemático de los estudiantes, en comparación a los resultados obtenidos cuando se trabaja desde contextos eminentemente matemáticos, en gran parte porque los estudiantes suelen sentirse más atraídos y motivados durante el proceso de adquisición de conocimientos científicos cuando se enfrentan a contextos cercanos a su realidad. (Bressan, A. & Zolkower B., s.f.; Arrieta, 2003).

En este sentido, los contextos desempeñan un papel primordial para apoyar un proceso de *reinvención* por parte de los estudiantes, y en consecuencia una *matematización progresiva* que les ayude a enfrentarse a unas matemáticas más formales, lo cual no significa restringirse a contextos del mundo real (perceptual), pues esto limitaría las oportunidades para que los estudiantes aprendan a operar dentro de la misma matemática.

Por otro lado, Reeuwijk (1997) discutiendo sobre el uso de contextos en las clases de matemáticas, y sus implicaciones en el proceso de formación y comprensión de los objetos matemáticos, indica que éstos:

- Pueden motivar a los estudiantes y ayudarlos a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias.
- Pueden enseñarles a los estudiantes a usar las matemáticas en la sociedad, además de mostrarles cuales matemáticas podrían ser más relevantes en su formación y futura profesión.
- Brindan a los estudiantes la oportunidad de adquirir conocimientos acerca de la historia e incrementan el interés de los estudiantes por las matemáticas y la ciencia en general.
- Posibilita en los estudiantes una actitud crítica y flexible de las matemáticas en problemas que deberán afrontar en su cotidianidad.
- Pueden despertar la creatividad de los estudiantes, impulsarlos a emplear estrategias informales y de sentido común.
- Presentan un alto potencial para desencadenar estrategias intuitivas e informales.

Además deben tenerse en cuenta otras cuestiones relativas a los contextos, relacionadas con el papel que éstos desempeñan en una trayectoria de aprendizaje de los conceptos matemáticos. En primer lugar, promueven la creación y desarrollo de los conceptos matemáticos a partir de las diversas aplicaciones de las matemáticas. En segunda instancia, representan el punto de partida en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y finalmente, permiten que los estudiantes desarrollen diferentes niveles de conceptualización mediante el uso de estrategias informales.

En efecto, la misión de quien diseña situaciones-problema o tareas bajo el marco de la EMR consiste en encontrar contextos que reúnan las características anteriores. La búsqueda de dichos contextos que de lugar a un proceso de matematización progresiva se consolida mediante un proceso de *abajo-arriba* en el que los estudiantes construyen sus propios modelos a partir de un ambiente de aprendizaje adecuado. Así, entre las situaciones trabajadas en la EMR, Bressan (2011) destaca: las *situaciones paradigmáticas*, los *materiales físicos* y los *esquemas notacionales*.

Lo más importante es que estas situaciones estén enraizadas en contextos realistas, imaginables y a la vez que tengan suficiente flexibilidad para ser aplicadas en un nivel más avanzado (Bressan, 2011). De este modo, es claro que esto pone ciertos requerimientos en tales situaciones-problema, por ejemplo, Panhuizen (2003) destaca las siguientes consideraciones:

- Desde el punto de vista de los estudiantes, debe existir la necesidad de construir un modelo de la situación-problema. Lo cual implica, que las actividades que conforman la situación necesitan inducir la planeación y ejecución de etapas de solución, la generalización de explicaciones y el uso del modelo para hacer predicciones.

- Otro requerimiento fundamental es que la situación-problema pueda esquematizarse fácilmente. Y como consecuencia, emerjan diferentes modelos por parte de los estudiantes.

- La situación problemática y las actividades que en ella se vinculan necesitan conducir a los estudiantes a la identificación de estructuras y conceptos matemáticos.

Una situación que se diseñe en el marco de la EMR debe considerar los elementos que se han discutido en relación con los contextos, las actividades de la situación y la situación problema. No obstante, una de las tareas más difíciles de quienes diseñan bajo este enfoque teórico, es encontrar un contexto que funcione y adaptar una situación previamente establecida para que satisfaga los requerimientos presentados en los párrafos anteriores. Frente a esta problemática, Reeuwijk (1997) aconseja utilizar la intuición respecto a lo que funciona, la experiencia, y una actitud matemática abierta. Factores claves que también serán tenidos en cuenta durante la construcción de la secuencia de situaciones.

3.6. DISEÑO DE LAS TAREAS

En concordancia con las ideas de la EMR y al considerar los elementos discutidos en la fundamentación teórica de las tareas, se han diseñado unas situaciones matemáticas referentes a lo cuadrático, las cuales buscan promover un proceso de *matematización progresiva*, a través, de la consigna de unas preguntas directrices y de la orientación de los investigadores. Cada tarea está estructurada de la siguiente manera:

- ✓ Descripción general
- ✓ Conceptos y procesos implicados
- ✓ Objetivo
- ✓ Recurso
- ✓ Análisis predictivo

Por otra parte, todas las situaciones diseñadas, ponen de manifiesto que los contextos constituyen el vehículo a través del cual las matemáticas cobran sentido para los estudiantes, al aproximarlos con experiencias cercanas a su cotidianidad, al uso de material manipulativo y al empleo de estrategias, herramientas y procedimientos informales en la resolución de problemas.

Además, en el diseño de las situaciones se reconoce ampliamente el valor que tienen las producciones de los estudiantes en la promoción de procesos de modelación con perspectivas verticales.

En este sentido, las situaciones propuestas son fáciles de esquematizar y buscan una diversificación en la construcción de modelos que después puedan ser validados matemáticamente.

Es importante, recordar que el propósito fundamental de las situaciones diseñadas no remite a mejorar las perspectivas de aprendizaje de lo cuadrático, aunque bien, puede ser una consecuencia de esto, la preocupación principal reside en la caracterización de los procesos de matematización que evidencian los estudiantes cuando trabajan en la construcción de modelos cuadráticos.

Así pues, se buscaron, adaptaron y diseñaron algunas situaciones asociadas a lo cuadrático, que promovieran el proceso de modelación matemática desde la perspectiva teórica de la EMR. Situaciones o tareas que considera dentro del proceso de modelación los siguientes elementos, a saber,

- El uso de estrategias informales
- Producciones libres para describir lo cuadrático
- Conexiones entre los conocimientos aprendidos en diversos contextos
- Reconocimiento de regularidades

3.7. LA SECUENCIA

La secuencia se denomina "construyendo modelos cuadráticos" y básicamente se refiere al conjunto de tareas diseñadas alrededor del objetivo fundamental de esta propuesta (caracterizar el proceso de modelación matemática en los estudiantes seleccionados). Las tareas que se diseñaron son tres:

- A que no adivinas cuántos hay
- Apretones de mano
- Arreglos navideños

3.7.1. TAREA 1.

<u>“A QUE NO ADIVINAS CUÁNTOS HAY”</u>

Construye figuras tal como se muestra en la siguiente gráfica, utilizando para ello los fósforos necesarios:

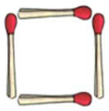


Figura 1.

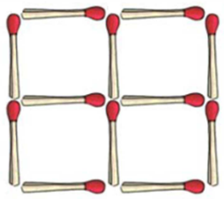


Figura 2.

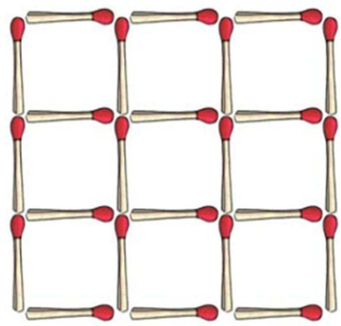


Figura 3.

En relación con esta situación, podrías plantearte algunos interrogantes, como los que se presentan a continuación:

1. ¿Cuántos fósforos se necesitan para armar cada figura?
2. Si deseamos construir figuras semejantes. ¿Cuántos fósforos se necesitan para armar una que tenga 4 fósforos en cada lado?
3. ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir una figura que tenga 5 fósforos en cada lado?
4. ¿Cuántos fósforos se necesitan para hacer una figura que tenga 7 fósforos en cada lado?
5. ¿Será posible construir una figura con 8 fósforos en cada lado, sin que sobren o falten fósforos, si se cuenta con 144 fósforos?
6. Sabemos que con 180 fósforos podemos armar una figura, pero ¿Cuántos fósforos en cada lado debe tener?
7. Conociendo la cantidad de fósforos de un lado, ¿Cómo podrías determinar el número total de fósforos?

Descripción general: Esta tarea constituye una primera aproximación a la búsqueda de contextos significativos para los estudiantes, a través del uso de un material manipulativo que propende a la generalización de un arreglo rectangular, al poner de manifiesto una relación cuadrática entre la cantidad de fósforos por lado y el total de fósforos utilizados en el arreglo. A partir de esta práctica se espera que los estudiantes construyan sus propios modelos, anticipando regularidades y relaciones entre las magnitudes que intervienen en la situación-problema. Elementos que indiscutiblemente dejar entrever diferentes estrategias informales asociadas al contexto por parte de los estudiantes[15]

***Conceptos y Procesos implicados*:** Dentro de los elementos discutidos en el análisis fenomenológico de lo cuadrático, se puso especial énfasis en la consideración de elementos didácticos que ilustrarán una versión dinámica de lo cuadrático. Así pues, se propone en el margen de las actividades que implican el desarrollo de la tarea, la utilización de conceptos tales como, la variación entre magnitudes que varían y las relaciones que de ellas se pueden derivar como un aspecto trascendental en la promoción de *niveles de matematización* y modelos suficientemente flexibles para ser usados en niveles más avanzados. (Bressan & Gallego, 2011).

***Objetivo*:** Construir diversos modelos matemáticos (en teoría, cuadráticos) que permitan contar la cantidad de elementos de la figura en función de su “tamaño”.

***Recurso*:** Cajas de fósforos o cajas de palillos[16]

---

[15] Esta tarea ha sido tomada y adaptada del documento: *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado*. Aportes para la enseñanza. Nivel medio del Ministerio de Educación (Argentina).

[16] Para facilitar la puesta en escena de la tarea, es recomendable cambiar los fósforos por palillos de madera tal como se hizo en ésta investigación.

3.7.2. TAREA 2.

“APRETONES DE MANO”

Al acabar una reunión a la que asisten un cierto número de personas todos se dan la mano para despedirse

1. ¿Cuántos apretones de mano se dieron si había tres personas? ¿Y si asistieron cuatro personas?
2. ¿Cuántas personas había si en total se dieron diez apretones de mano?
3. ¿Cuántos apretones de mano se dieron si se despidieron siete personas?
4. Sabemos que en una reunión se presentaron 66 apretones de mano. ¿Cuántas personas había en la reunión?
5. Si se conoce el número de personas en una reunión, ¿Cómo hallarías la cantidad de apretones de mano?

Descripción general**:** Esta tarea pretende destacar las interacciones entre los estudiantes, como parte natural de la situación y por tanto un elemento representativo de los *contextos significativos*. En este sentido, se espera que los estudiantes ocupen un papel protagónico dentro de la situación planteada y puedan al mismo tiempo, imaginar aspectos que les permitan llegar a formulaciones más generales, que pongan de manifiesto una relación cuadrática, entre la cantidad de personas que asisten a una reunión y el número de apretones de mano correspondientes al gesto de despedida. Es importante anotar que esta tarea le da continuidad al proceso de reinvención guiada, puesto que inicia a los estudiantes en la resolución de casos simples directos (como la pregunta 1) e inversos (como la pregunta 2), los cuales promocionan el avance hacia niveles de matematización avanzados[17]

Conceptos y Procesos implicados**:** Esta tarea pretende generar un proceso de reflexión constante, en relación con los modelos matemáticos, que pueden surgir de una actividad cotidiana. Adicionalmente, se busca que los estudiantes reconozcan algunos elementos implícitos de la situación-problema, como son; la identificación de las magnitudes que varían y la dependencia entre ellas. De este modo, se espera promover procesos de matematización horizontal, correspondientes a la utilización de estrategias informales, y procesos de matematización vertical, caracterizados por el trabajo simbólico y el planteamiento de generalidades.

Objetivo**:** Construir diferentes modelos cuadráticos que den cuenta de la cantidad de apretones de mano que se realiza en una reunión con un cierto número de personas.

Recurso**:** lápiz y papel

---

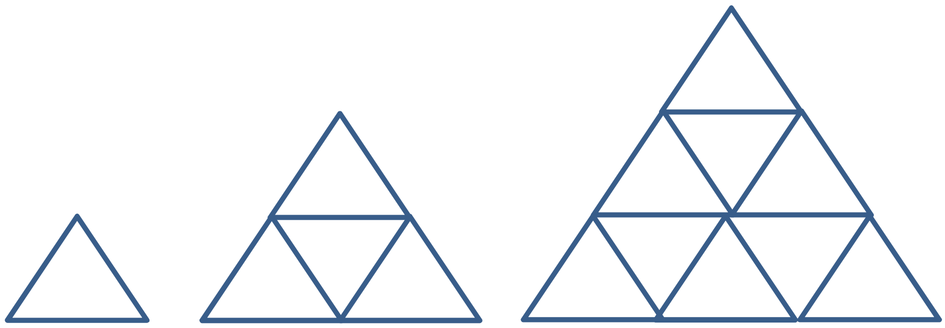
[17] Esta tarea ha sido modificada y seleccionada del libro: *Funciones y gráficas*, de los autores Azcárate, C. & Deulofeu, J.

3.7.3. TAREA 3.

“CONFIGURACIONES NAVIDEÑAS”

La siguiente grafica muestra 4 conexiones posibles para el montaje del alumbrado navideño de algunos parques de la ciudad. Para su construcción se utilizarán figuras en alambre, compuestas por triángulos equiláteros pequeños de un centímetro de lado.

Número de la conexión	**1**	**2**	**3**



Longitud total del alambre (cm)	3	9	18

1. Si deseas encontrar una conexión como la que iría en la número 5, ¿Cuánta longitud de alambre requieres?, ¿Para la número 7?, y ¿Para la conexión número 8?

2. Puedes escribir el perímetro de la conexión correspondiente a la número 10

3. Para hacer un montaje del alumbrado navideño contamos con 360 cm de alambre ¿Qué número de conexión seria posible trabajar?

4. Queremos realizar un montaje para el alumbrado y para ello contamos con 600 cm de alambre. Si queremos diseñar una conexión sin que sobre o falte material, ¿podrías ayudar a encontrarla?

5. Se quiere diseñar una conexión como la que iría en la número 30 ¿Cuánta longitud de alambre se necesita?

6. Si conoces el número de la conexión, ¿Cómo podemos encontrar la longitud total del alambre?

Descripción general**:** Esta tarea hace parte del conjunto de problemas que pueden llegar a ser imaginables en la mente de los estudiantes, debido a que el contexto de la situación-problema involucra un evento común de la vida diaria. Las actividades propuestas apuntan hacia la creación de modelos cuadráticos que relacionen la cantidad de alambre requerido para una configuración cualquiera con el número de la conexión correspondiente. De esta manera, la situación se enmarca dentro de un contexto variacional, el cual busca posibilitar el desarrollo de procesos de modelación matemática, a través de un trabajo sobre varios objetos conceptuales como son; las regularidades, los patrones, el perímetro de regiones y las nociones matemáticas asociadas a lo cuadrático, así como dependencia entre variables[18].

Conceptos y Procesos implicados**:** Dentro de los procesos implicados en esta tarea se encuentran los asociados al uso del lenguaje funcional en la producción de fórmulas que den cuenta de la cantidad de alambre solicitado según la conexión dada. De igual manera, se anticipa la utilización por parte de los estudiantes, de algunas estrategias situadas en el contexto, es decir, que los estudiantes pongan en juego su sentido común, para que puedan reconocer patrones y regularidades de la situación-problema, así como la determinación de datos necesarios para analizar y solucionar dicha tarea mediada por diversos modelos que movilizan el avance en los diferentes *niveles de matematización*.

Todos estos procesos contribuyen al reconocimiento de las relaciones existentes entre las variables implicadas y a la producción de demostraciones y justificaciones de los modelos encontrados por los estudiantes, donde el concepto matemático central asociado a dichas producciones es la función cuadrática.

Objetivo**:** Construir diferentes modelos cuadráticos que den cuenta de la cantidad de alambre solicitado en relación con el número de la conexión correspondiente.

Recurso**:** Lápiz y papel.

[18] Esta tarea ha sido tomada y adaptada del libro: *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Valoyes, L. & Malagón, M. (2006).

3.8. ANÁLISIS PREDICTIVO DE LAS TAREAS

En este apartado se pone en discusión algunos modelos que pueden emerger de la actividad matemática de los estudiantes y que representan tan sólo una posibilidad asociada a cada uno de los niveles de matematización definidos en la EMR.

La anticipación de estos modelos es transcendental para fundamentar contextos que posibiliten la diversidad de modelos con perspectivas verticales, pero es importante aclarar que la separación y categorización de los modelos en un determinado nivel de matematización, representa una posible ampliación teórica que puede ayudar a comprender el proceso de modelación matemática, pues se reconoce que los componentes horizontal y vertical no se desarrollan de manera independiente o secuencial sino que se entrelazan continuamente.

3.8.1. Tarea 1. *A que no adivinas cuántos hay*

En concordancia con el planteamiento anterior, se proponen algunos modelos asociados a niveles de *matematización horizontal* (modelo 1) y otros más que ejemplifican producciones relacionadas con niveles de *matematización vertical* (modelos 2, 3 y 4).

❖ ***Modelos anticipados asociados a niveles de matematización horizontal***

Los modelos relacionados con niveles de *matematización horizontal* se caracterizan porque están arraigados a la situación-problema (el contexto), lo que implica el uso de estrategias informales ligadas al contexto de la situación misma, caracterizadas fundamentalmente por la organización visual de los datos, esquematizaciones y búsqueda de regularidades y relaciones no matemáticas.

- ***Modelo 1*** (gráficas de casos particulares)

En la *matematización horizontal*, los modelos derivados de esta tarea pueden ser construidos por medio del uso del material concreto en este caso los palillos (ver nota al pie, p 74). Por ejemplo; se esperaría que los estudiantes utilicen los palillos para representar los fósforos y entonces construir otros arreglos con más fósforos de lado que los dados en la tarea.

Otro modelo asociado a este nivel se refiere a la manera en que los estudiantes comprenden cómo se construyen los otros arreglos, bien sea describiendo con sus propias palabras o dibujándolos haciendo uso del lápiz y el papel, sin que la actividad misma lo demande.

En este nivel, se hace visible la primera búsqueda de regularidades a través de la identificación de las magnitudes que intervienen en el problema y como estas se relacionan.

❖ ***Modelos anticipados asociados a niveles de matematización vertical***

Los modelos referidos a niveles de *matematización vertical* pueden tener algún vínculo o estar totalmente desprendidos del contexto. Estos últimos, se consideran de difícil acceso para los participantes, básicamente porque la construcción de un modelo que permita calcular la cantidad de fósforos totales que se necesitan para armar una figura de $\boldsymbol{n}$ fósforos de lado, representa una tarea de inusitada complejidad, pues se requiere que los estudiantes logren abstraer la regla de dependencia entre las dos variables y del conocimiento de que una fórmula de dos variables representa una función (Azcarate & Deulofeu, 1990).

No obstante, el contexto en el cual se enmarca la situación-problema desempeña un elemento dinamizador de los procesos de matematización que juntamente con la orientación del docente, puede promover la construcción de modelos generales. En este nivel se pueden citar modelos los modelos gráficos y notacionales, como el modelo 2.

- ***Modelo 2*** (Diagrama de correspondencia)

Se anticipa un modelo que se ha denominado diagrama de correspondencia. Este modelo posibilita la búsqueda de regularidades y relaciones entre las magnitudes que intervienen en el problema. A modo de ilustración, se describe una variante de dicho modelo:

Cantidad de fósforos de lado		Cantidad de fósforos totales
1	$\longrightarrow$	4
2	$\longrightarrow$	12
3	$\longrightarrow$	24
.		.
.		.
$\boldsymbol{n}$	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$

Esta simple representación tabular es un modelo de la situación que hace explícito, por un lado, la existencia de dos magnitudes variables y por otro lado, una relación o dependencia entre dichas variables. En principio, la dependencia que puede establecerse entre las dos magnitudes no es muy funcional, ya que se ve limitada a valores pequeños de la variable ***n***, pero progresivamente dicho modelo puede dar un giro repentino y convertirse en un modelo con mejores perspectivas hacia lo general. Es el caso, de fórmulas de recurrencia que pueden emerger del diagrama de correspondencia ante la búsqueda de regularidades y relaciones.

- ***Modelo 3*** (Fórmula de recurrencia)

Este nuevo modelo se le atribuye el nombre de fórmula de recurrencia, debido a que cada término de la secuencia numérica es definido como una función del término anterior, es decir, que una vez encontrada la cantidad de fósforos totales para la configuración de un solo fósforo de lado, es posible encontrar la cantidad de fósforos totales para 2, 3, 4,... fósforos por lado, aunque el resultado dependa de encontrar la solución inmediatamente anterior.

A modo de ilustración, se sabe del ***modelo 2***, que una configuración con 6 fósforos de lado necesita 84 fósforos en total. Pues bien, una configuración con 7 fósforos de lado necesitaría 112, puesto que sólo se requiere, operar con los datos conocidos de la siguiente manera:

$$\frac{84 \times 7}{6} + \frac{84}{6} = 112$$

Los argumentos matemáticos que otorgan validez al modelo se vincula con una regla de correspondencia (Ver figura 12)

Cantidad de fósforos de lado		Cantidad de fósforos totales
1	$\longrightarrow$	4
2	$\longrightarrow$	12
3	$\longrightarrow$	24
4	$\longrightarrow$	40
5	$\longrightarrow$	60
6	$\longrightarrow$	84
7	$\longrightarrow$	112
.		.
.		.
.		.
$\boldsymbol{n}$	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{n}) = \mathbf{2}\,\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\,\mathbf{+1})$
$\boldsymbol{n}$ +1	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{n}+1) = \mathbf{2}\,(\boldsymbol{n}\,\mathbf{+1})\,(\boldsymbol{n}\,\mathbf{+2})$

Figura 12. Diagrama de correspondencia de la tarea 1.

Procedimiento particular	**Procedimiento general**
$\frac{84\ \times\ 7}{6} + \frac{84}{6} =$	$\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\ \mathbf{+1})\ \times\ \boldsymbol{n} + 1}{\boldsymbol{n}} + \frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\ \mathbf{+1})}{\boldsymbol{n}} =$
112	$\mathbf{2}\,(\boldsymbol{n}\,\mathbf{+1})\,(\boldsymbol{n}\,\mathbf{+2})$

Tabla 4. Fórmula de recurrencia de la tarea 1.

Es claro que si $\boldsymbol{n} = 6$, entonces $\mathbf{2\,(}\boldsymbol{n}\ \mathbf{+1)\,(}\boldsymbol{n}\ \mathbf{+2) = 112}$.

De este modo se demuestra la validez del modelo y su suficiente flexibilidad para ser aplicado en un nivel más avanzado, apoyando la progresión en la matematización vertical sin obstruir el camino a las primeras fuentes que dieron origen a una estrategia. (Panhuizen, 2003; Bressan & Gallego, 2011).

- ***Modelo 4.*** (Conteo por filas y columnas)

Considérese n como la cantidad de fósforos que conforman un lado de la figura y $f(n)$ el modelo algebraico que describe la cantidad de fósforos totales en función de la cantidad de fósforos por lado. Así pues, un estudiante podría organizar el conteo de los fósforos $f(n)$ contando el número total de fósforos por columnas más el numero total de fósforos por fila. A modo de ejemplo, el razonamiento podría ser descripto de la siguiente manera:

Considere una configuración o figura conformada por n fósforos de lado, entonces existen $(n + 1)$ columnas, así que hay $n\ (n+1)$ fósforos en todas las columnas y debido a que la configuración es cuadrada, también existen $(n + 1)$ filas, lo cual implica que hay la misma cantidad de fósforos en las filas y en las columnas.

Así, el primer modelo seria causal de la expresión algebraica, $f(n) = n(n+1) + n(n+1)$, el cual puede ser denotado como $f(n) = 2n\ (n+1)$

- **Modelo 5.** (Conteo del interior y del perímetro)

Si asumimos que tanto n como $f(n)$ representan lo descrito en el ***modelo 4***, es posible realizar el conteo total de los fósforos de la siguiente forma, primero se cuenta la cantidad de fósforos totales que bordean la configuración (el perímetro de la figura) y se suma con la cantidad de fósforos del interior de la figura.

De esta manera, se tiene que el perímetro es cuatro veces la cantidad de fósforos por lado, es decir $4n$ y en el interior se forman n-1 columnas y n-1 filas, todas con el mismo número n de fósforos que el lado del cuadrado. Así, la expresión resultante para el segundo modelo resulta ser: $f(n) = 4n + (n-1)\ n + (n-1)\ n$ ó $4n + 2n\ (n-1)$

Dentro de los aspectos importantes de este análisis cabe reconocer el papel que juegan las producciones de los estudiantes en cualquier nivel de matematización, como un instrumento para comprender los procesos de aprendizaje, en relación con los conceptos matemáticos implicados. Por lo tanto, es vital que los modelos construidos por los estudiantes en niveles de matematización horizontal, no pasen a un segundo plano, sino que se constituyan en auténticos materiales, a partir de los cuales se busque la promoción de procesos de matematización más generales.

3.8.2. Tarea 2. *Apretones de mano*

Para el desarrollo de esta tarea, se han considerado algunos modelos que se corresponden con el marco teórico adoptado, en la medida en que permiten mostrar la flexibilidad de los mismos, para ser aplicados en niveles más avanzados. En primera instancia, se ilustrarán los modelos relacionados con niveles de *matematización horizontal* y finalmente, los modelos asociados a niveles de *matematización vertical*.

❖ ***Modelos anticipados asociados a niveles de matematización horizontal***

En un nivel de *matematización horizontal*, los modelos se caracterizan por una búsqueda constante de interpretación de la situación-problema, lo que obliga a los estudiantes a usar estrategias ligadas al contexto, que les ayuden a imaginar y organizar los elementos que son relevantes para encontrar la matemática que yace en el contexto. Es así, como emergen consideraciones del contexto que provienen de los conocimientos informales de los estudiantes, de sus experiencias y del sentido común, que pueden convertirse en esquemas, diagramas o tablas como el que se ilustra a continuación.

- ***Modelo 1*** (Esquema poligonal)

Este modelo es una representación gráfica de la situación-problema y su importancia reside en la posibilidad que brinda a los estudiantes de simplificar los elementos fundamentales del contexto, como son; el número de personas, vistos como puntos en el plano no alineados y, cada apretón de mano como un segmento que tiene por extremos dos de los puntos dibujados (ver figura 13).

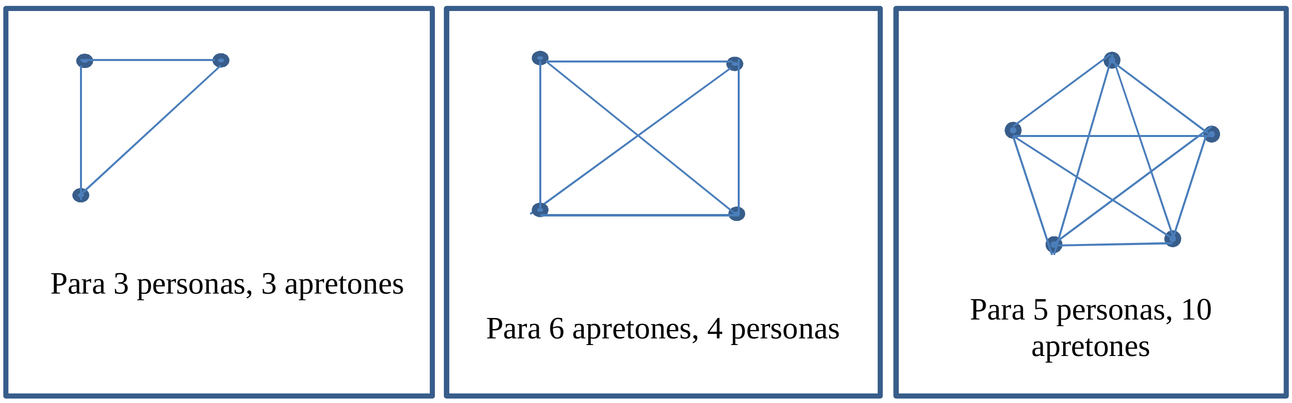


Figura 13. Representación gráfica de la tarea 2.

Este tipo de modelos son una excelente ayuda para afrontar los casos simples, y un camino significativo en la búsqueda de modelos con perspectivas verticales, generándose de este modo la necesidad de construir un modelo que organicen los datos encontrados.

- ***Modelos anticipados asociados a niveles de matematización vertical.***

Los modelos que emergen en este nivel dan continuidad al proceso de matematización y puede consolidarse, por ejemplo con la construcción de una tabla de valores, a partir de la cual es posible encontrar regularidades, o bien, una vez intuido el modelo, establecer un modelo algebraico que se corresponda con los pocos pares de valores dados por la tabla. A continuación se muestra la estructura de una posible tabla de valores (ver tabla 5).

- ***Modelo 2*** (Tabla de valores)

Número de personas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**n**
apretones de mano	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**?**

Tabla 5. Tabla de datos de la tarea 2.

En efecto, la ganancia de este modelo sobre el anterior, reside en las implicaciones que se derivan de la organización de los datos en orden ascendente, por ejemplo, algunos estudiantes podrían iniciar la búsqueda de regularidades, a través de identificar el valor de la variable dependiente que se corresponde a un valor cualquiera de la variable independiente, pero que toma en consideración los datos anteriores. De este modo, se propone a continuación la discusión de un modelo, que puede emerger de la actividad propia de los estudiantes al realizar una exploración detallada de los casos particulares.

- ***Modelo 3*** (fórmula de recurrencia)

Hay una regularidad “observable” en la fila de abajo de la tabla 10 del modelo 2, correspondiente al número de apretones de mano. Veamos:

Número de personas	1	2	3	4	5	6	n
apretones de mano	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**?**

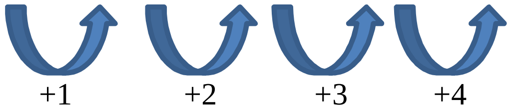


Figura 14. Fórmula de recurrencia de la tarea 2.

La diferencia entre un número y el siguiente va aumentando en uno. En términos más precisos se puede señalar que:

- Para encontrar el número de apretones de mano para 4 personas, basta con sumar el número de apretones realizados con 3 personas + 3.
- La cantidad de apretones para 5 personas, es simplemente 4 + la cantidad de apretones de mano que se dan esas 4 personas.

Es claro que este modelo se corresponde con niveles de matematización vertical, reflejados en la manera en que los procedimientos personales de los estudiantes logran esquematizar el problema. Emerge de esta manera, un modelo referencial presentado en términos de una conjetura general que ellos podrían enunciar de la siguiente manera:

Cantidad de apretones de mano para n personas = n-1 personas + cantidad de apretones de mano para n-1 personas

Dicha conjetura se puede validar matemáticamente si asumimos conocida la expresión algebraica para el término enésimo, al igual que se hizo para la tarea 1 (ver tabla 6).

Número de personas	1	2	3	4	5	n	n + 1
apretones de mano	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(n+1)n}{2}$

Tabla 6. Demostración fórmula de recurrencia de la tarea 2.

Solo resta probar que:

$$n + \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{(n+1)\,n}{2}$$

El cálculo algebraico es relativamente fácil, pero lo más importante de este tipo de modelos es que ayudan a los estudiantes en el reconocimiento de patrones, a la vez que, aportan significativamente a la construcción del sentido de las fórmulas usadas en matemáticas.

- ***Modelo 4*** (conteo multiplicativo)

Existen algunos modelos matemáticos que pueden emergen de consideraciones netas sobre el contexto de la situación-problema, pero que demandan en los estudiantes, un conocimiento matemático de base, que les permita encontrar y plantear aspectos generalizables, los cuales podrían no ser evidentes en un nivel de comprensión situacional.

Con esto último tiene que ver este modelo, el cual pretende organizar el cálculo de la cantidad de apretones de mano con el siguiente razonamiento:

*Supongamos que **n** personas asisten a la reunión y que cada persona se da la mano con todos los invitados, menos con el mismo. Esto significa que cada persona se despide **n-1** veces y como hay **n** invitados se realizarían **n (n-1)** apretones de mano. Sin embargo, dos personas determinan un único apretón y en el cálculo anterior se estarían contando dos veces. Por lo tanto, el modelo correcto de esta situación es:* $\frac{n(n-1)}{2}$

De igual manera, puede considerarse la construcción de un modelo que agrega elementos a la situación-problema, con el objeto de facilitar los cálculos del conteo y poner en evidencia algunas regularidades asociadas con la forma en cómo se construye el término enésimo.

▪ ***Modelo 5*** (razonamiento general)

En una reunión hay ***n*** cantidad de personas, ahora bien, si todos se dan la mano con todos se obtiene n^2 apretones de mano; a esto hay que descontarle los apretones de mano consigo mismo y luego dividir por dos, ya que se están contando los apretones de mano de cada pareja dos veces. Si se expresa dicho razonamiento en términos matemáticos se obtiene la expresión: $\frac{n^2-n}{2}$

En efecto, la expresión anterior es equivalente a la que se obtiene en el ***modelo 4***, lo cual demuestra que el contexto inmerso en esta situación-problema, es sumamente potente para que los estudiantes construyan sus propios modelos, los justifiquen y cuestionen las diferentes alternativas que se producen.

Es importante rescatar de este análisis predictivo, que los modelos anticipados ponen de manifiesto la manera en que el contexto permite que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización en base a sus posibilidades. Además, las diferentes soluciones permiten visualizar estrategias variadas que promueven procesos de reflexión e interacción entre los participantes; procesos que pueden llevar a los estudiantes a niveles de comprensión más elevados. (Bressan, 2011).

Otro asunto sobre el cual es importante reflexionar en el margen de estas actividades, tiene relación con la manera en que los ejercicios de producción de formulas son presentados en el ámbito escolar, donde generalmente se "muestran" dos o tres términos de la secuencia y se pregunta por el siguiente, para que eventualmente los estudiantes propongan la fórmula del lugar enésimo, como si el modelo fuera único. Contraria a esta visión, el contexto en el cual se desarrolla la situación-problema, toma en consideración que los modelos deben ser construidos a partir de los aspectos informales de los estudiantes y del vínculo que ellos mismos logren hacer entre esos elementos y la matemática que subyace al contexto.

En este orden de ideas, el contexto de esta segunda tarea pretende invitar a los estudiantes a encontrar y validar la matemática que esta inmersa en la situación-problema, pero que puede tomar varias caras dependiendo de las concepciones y significados que ellos le atribuyan.

3.8.3. Tarea 3. *Configuraciones navideñas*

Es importante recordar que las producciones de los estudiantes representan un punto de partida en los procesos de esquematización y formulación progresiva. Además, es claro que al escuchar y observar lo que nuestros estudiantes han desarrollado, permite tomar en consideración algunas de sus ideas para mejorar naturalmente sus estrategias. (Santamaría, 2006).

Dichas estrategias son innegablemente variadas dependiendo del camino que adopten para hacer frente a la situación-problema y por supuesto del *nivel de comprensión* que puedan alcanzar durante el desarrollo de la tarea. Es así como se pone a discusión, algunos posibles modelos asociados a niveles de matematización horizontal y vertical.

❖ ***Modelos anticipados asociados a niveles de matematización horizontal***

El modelo que se presenta a continuación puede surgir como un intento por parte de los estudiantes de comprender la manera en que se relaciona el número de la conexión con la longitud de alambre requerido, a través de la construcción de conexiones posteriores a las presentadas en el marco de actividades de la tarea. En otras palabras, se espera que los estudiantes intenten dibujar las conexiones número 4, número 5, número 6, entre otras.

- ***Modelo 1*** (representación gráfica)

La consideración de este modelo radica en la posibilidad de uso para resolver casos particulares, pero lo más relevante de estas representaciones es que aportan datos verídicos para validar el reconocimiento por parte de los estudiantes de un patrón geométrico, a través del cual, se pueden construir otras conexiones.

Además, este "simple" modelo puede resultar muy potente, si es bien utilizado por los estudiantes, dado que podría ayudarles a encontrar algunas regularidades que apuntan a la construcción de modelos más avanzados. Por ejemplo; algunos estudiantes podrían enunciar confiadamente que el número de triángulos pequeños es igual al cuadrado del número de la conexión, pero necesitarían niveles de matematización más generales que validen ese razonamiento y la manera en que puede usarse para construir una expresión de tipo funcional.

Por otra parte, el intento por desarrollar métodos específicos de solución, puede conducir a los estudiantes a la creación de un modelo que posibilite la organización de la información relevante de la situación-problema y de otros casos particulares, con el objeto de buscar regularidades numéricas observables. En este sentido, se considera la construcción de una tabla de valores (ver tabla 7.) análoga a la presentada en la tarea 2.

- ***Modelo 2*** (Tabla de valores)

Número de la conexión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	***n***
Longitud total del alambre	**3**	**9**	**18**	**30**	**45**	**63**	**84**	**?**

Tabla 7. Tabla de valores de la tarea 3.

A partir de este modelo, es muy probable que los estudiantes encuentren una relación de dependencia que les ayude a encontrar la longitud total del alambre para una conexión cualquiera, si se conocen los términos anteriores. Por ejemplo; algunos estudiantes podrían notar que los valores obtenidos en la segunda fila de tabla siempre son múltiplos de 3. Más aún, puede que aparezcan conjeturas del siguiente tipo:

"*La cantidad de alambre requerido para una conexión es igual al número de la conexión por tres, más la longitud requerida para la conexión inmediatamente anterior*".

El planteamiento de conjeturas, generalizaciones y formulaciones matemáticas, son elementos característicos de niveles de matematización verticales, donde los estudiantes empiezan a trabajar en la obtención de expresiones simbólicas que inician como modelos de la situación específica, pero que pueden ser útiles para *organizar* otro tipo de situaciones relacionadas.

❖ ***Modelos anticipados asociados a niveles de matematización vertical.***

- ***Modelo 3*** (Fórmula de recurrencia)

Lo interesante de este modelo es que puede construirse a partir de las regularidades encontradas en una tabla de valores y enunciarse en términos de una conjetura como la que se ilustró en los párrafos anteriores. En términos matemáticos es probable que los estudiantes expresen dicha relación de la siguiente manera:

"*Siendo* $\boldsymbol{n}$ *el número de la conexión enésimo y* $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{n})$ *la cantidad total de alambre requerido para esa conexión. Se tiene que* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}+1)=3(\boldsymbol{n}+1)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$"

No obstante, otra alternativa importante para construir este modelo es simplemente apoyarse en las figuras que la situación-problema presenta. Un análisis detallado a estas figuras permite reconocer un patrón geométrico en la construcción de la figura siguiente en base a la inmediatamente anterior. Por ejemplo; para hacer la conexión 3, es necesario realizar una base con tres triángulos pequeños (iguales al de la primera conexión) y ubicar arriba de la misma la configuración anterior (la número 2). Veamos esto gráficamente (ver figura 15).

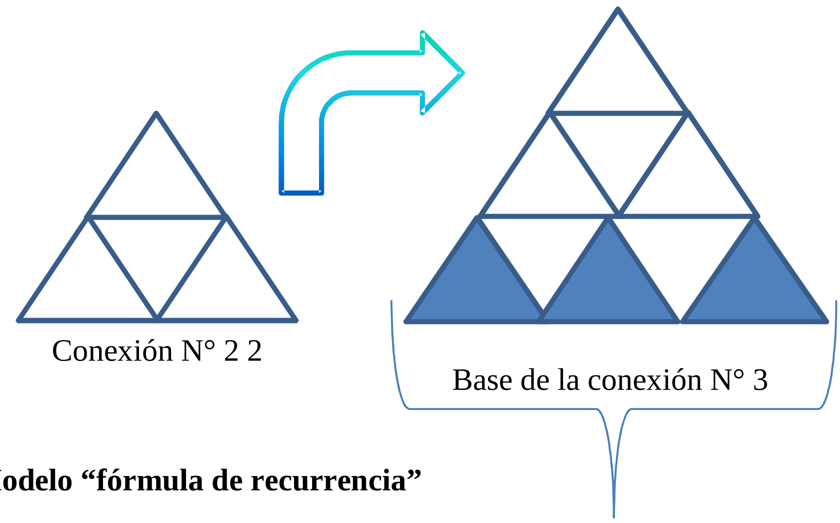


Figura 15. Modelo "fórmula de recurrencia"

Pues bien, el número de la conexión se corresponde con el número de triángulos pequeños de la base y dado que el número de triángulos que tienen esta posición, determinan la longitud total del alambre, sólo resta multiplicar el número de la conexión por tres (porque un triangulo tiene tres lados) y sumarle el total de alambre requerido en la conexión anterior, el cual representa la cantidad de alambre en la parte superior de la configuración.

Para el ejemplo anterior, esto implicaría que la cantidad de alambre requerido para la conexión N° 3 se obtiene al realizar 3×3 = 9 y sumar este resultado con la cantidad de alambre requerido para la conexión N° 2, es decir, 9+9 = 18. En efecto, la manera en la que se encontró el modelo, garantiza su validez para otros casos. Sin embargo, es posible demostrar matemáticamente que este modelo funciona, siempre y cuando se conozca una relacional funcional como la que se ilustra a continuación (ver tabla 8.).

Número de la conexión	1	2	3	4	***N***	***n*+*1***
Longitud total del alambre	3	9	18	30	$f(n) = 3\ \frac{n(n+1)}{2}$	$f(n+1) = 3\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Tabla 8. Generalización del modelo "fórmula de recurrencia"

La obtención de esta relación funcional se discutirá en los modelos posteriores, así que asumiendo esto, habría que probar que las expresiones obtenidas para los términos ***n*+*1*** son equivalentes para ambos modelos. Del modelo 3 se sabe que:

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}+1) = 3(\boldsymbol{n}+1) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ Remplazando $f(n) = 3\ \frac{n(n+1)}{2}$ en esta expresión se obtiene:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}+1) = 3(\boldsymbol{n}+1) + 3\ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6n+6+3n^2+3n}{2} = \frac{3n^2+9n+6}{2} = \frac{3(n^2+3n+2)}{2} = \frac{3(n+1)(n+2)}{2}$$

De este modo queda demostrada la validez del modelo 3, que pese a considerarse dentro de niveles de matematización avanzados, presenta dificultades cuando se pretende que a partir de los primeros hechos se hagan inferencias sobre los números grandes, incluso sobre hechos aún particulares, pero no consecutivos. (Valoyes & Malagón, 2006).

El siguiente modelo soluciona esta cuestión y a diferencia del modelo anterior hace explícito un tipo de relación funcional entre el número de la conexión y la longitud total del alambre.

- ***Modelo 4*** (conteo de triángulos)

El presente modelo esta relacionado con el uso de una estrategia poco convencional que agrega un elemento adicional a la situación-problema, con el objeto de facilitar la búsqueda de patrones y regularidades. La idea consiste en pintar los triángulos pequeños que determinan el perímetro de la figura (ver figura 16).

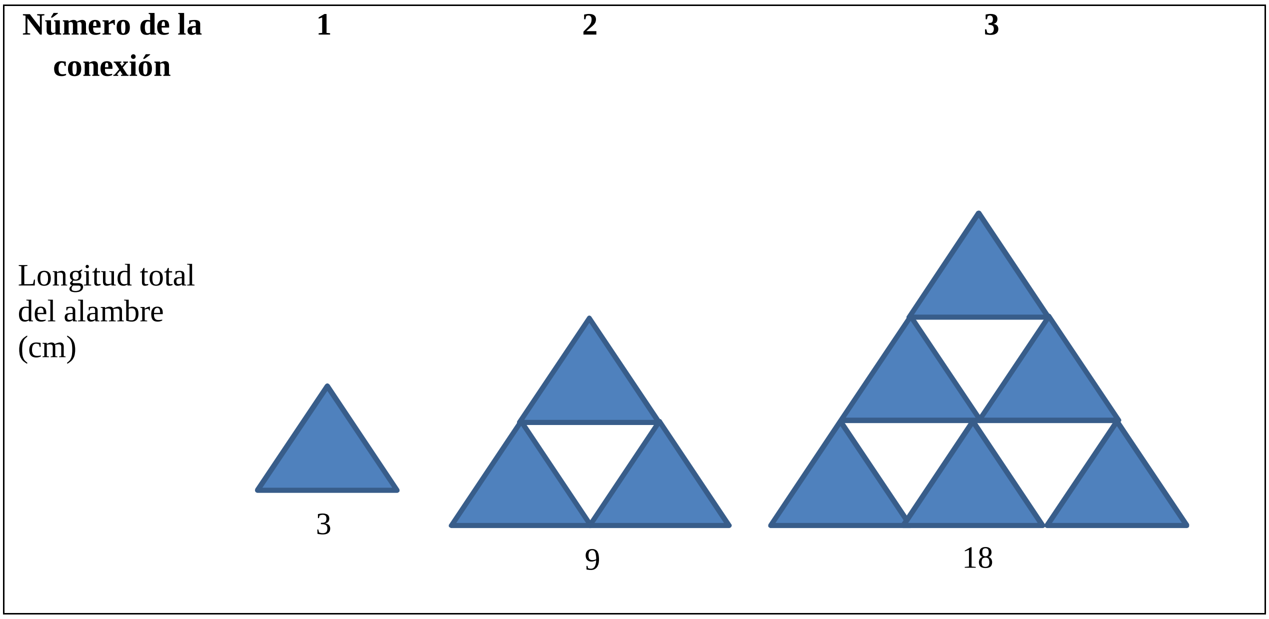


Figura 16. Modelo “conteo de triángulos”

A partir de aquí, los estudiantes pueden inferir una particularidad en cada figura. De la base a la punta, los triángulos pintados van decreciendo de uno en uno, es decir, por ejemplo en la conexión N°3, en la base existen tres triángulos, luego dos triángulos y finalmente un solo triángulo en la punta.

A continuación se pone de manifiesto una relación de dependencia entre el número de la conexión con el número de triángulos pintados y este a su vez con la longitud total del alambre requerido. El razonamiento podría ser expresado de la siguiente manera:

“*Los triángulos que determinan el perímetro de la conexión decrecen de uno en uno, iniciando en un solo triángulo en la punta y terminando en el número de triángulos de la base, los cuales se corresponden con el número de la conexión*”.

Este patrón se puede determinar con una sumatoria lo cual va desde uno hasta el número de triángulos de la base y luego el resultado de esta sumatoria se debería multiplicar por tres, obteniéndose una expresión del tipo:

$$f(n) = 3\ \sum_1^n a_n$$

Donde “*n*” es el número de la conexión. Por definición de sumatoria, la relación funcional entre el número de la conexión con la cantidad de alambre requerido es:

$$f(n) = 3\ \frac{n(n+1)}{2}$$

Sin embargo, consideramos que los estudiantes tendrán mucha dificultad en construir este modelo, pues se requiere la utilización de métodos matemáticos que ellos todavía no comprenden. En este sentido, lo más probable es que los estudiantes expresen la relación funcional del siguiente modo:

*“Sea **n** el número de la conexión, entonces la longitud total del alambre requerido es:* $f(n) = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$*”*

3.9. IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS PREDICTIVO

Los modelos anticipados en cada una de las tareas anteriores, son producto de la actividad matematizadora de algunos estudiantes de educación media y de los procesos de reflexión y modelación matemática de los investigadores del presente trabajo. Las producciones que pueden emerger durante el desarrollo de dichas tareas, dejan entrever el potencial de los contextos escogidos para generar procesos de modelación y simbolización matemática. En principio modelos muy ligados a consideraciones netas del contexto, pero después aparecen algunos aspectos de la situación contextual con un carácter más general.

Así pues, las tareas y los modelos anticipados ponen de manifiesto la manera en que los contextos gradualmente adquieren una denominación de modelos y como tales terminan convirtiéndose en soportes para resolver problemas relacionados. (Santamaría, 2006).

De igual manera, se destaca la forma en que los modelos son conectados, considerando que este aspecto desempeñan el papel de columna vertebral del progreso en los procesos de matematización. La conexión entre los distintos modelos anticipados se ilustra en el paso de modelos asociados a estrategias informales, como dibujos, diagramas y gráficos de casos particulares, con modelos generales y formales comúnmente expresados en base a una notación simbólica.

Capítulo 4

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capitulo se presentan los resultados obtenidos durante la fase intervención con los estudiantes, donde fue posible reconocer la aparición de algunos modelos vinculados a lo cuadrático. Para el análisis se ha privilegiado aquella información que consideramos es relevante en función de las categorías de análisis establecidas [ver anexo 2]. Estas se consideran apropiadas para dar cuenta de ciertas características del proceso de modelación matemática de los estudiantes cuando trabajan en la dinámica de producción y uso de modelos cuadráticos.

Cada una de las tareas se vinculan a una serie de modelos *reinventados* por los estudiantes, y se analiza en relación con los supuestos iniciales discutidos en el *análisis predictivo*, la puesta en escena y el lugar que pueden ocupar los estudiantes dentro de los *niveles de comprensión* referenciados en las categorías de análisis. Es importante anotar que más que aportar elementos para la enseñanza y aprendizaje de lo cuadrático, lo que se intenta a partir de esta investigación, es comprender aspectos relacionados con el proceso de modelación matemática cuando los estudiantes "hacen" matemáticas (en el sentido de Freudenthal).

Este análisis problematiza lo que Freudenthal (1991) señalaba algunos años atrás, cuando se refería a la diferencia entre *matematización horizontal* y *vertical*. Además amplía el campo de conocimiento sobre las fronteras que delimitan estos procesos, a partir del estudio de los *niveles de comprensión*, como punto de partida para rastrear los procesos de matematización individual de los estudiantes.

4.2. ANÁLISIS PROSPECTIVO DE LAS TAREAS

4.2.1. Tarea 1. *A que no adivinas cuántos hay*

Esta tarea se desarrollo en la segunda sección de la aplicación. Inicialmente los estudiantes conformaron los grupos de trabajo tal como lo sugirieron los investigadores (basados en la información suministrada por cada uno de los cuestionarios), lo que permitió la organización de los integrantes en grupos con diferentes niveles de habilidad.

La conformación de los equipos de trabajo se desarrollo eficientemente favoreciendo la interacción de los integrantes en cada grupo, así como un interés creciente por desarrollar las actividades propuestas dentro de la tarea.

Una vez organizados los grupos de trabajo, se hizo evidente la necesidad de intervenir a través de discurso que motivara a los estudiantes a enfrentarse a la situación problema. Básicamente, se apuntó a que reconocieran porque la tarea podría ser significativa para ellos y como el material concreto (en este caso, los palillos)[19] podía ser un insumo importante para comprender y posteriormente encontrar diversas soluciones a las cuestiones planteadas.

Seguidamente, los integrantes de cada grupo asumieron un rol más activo y se involucraron en las actividades propuestas. Se evidenció un trabajo cooperativo y una preocupación evidente por dar respuesta a los casos particulares haciendo uso del material manipulativo. La Figura 17 recoge el momento en que los estudiantes se inician en el desarrollo de la tarea.

Figura 17. Puesta en escena de la tarea 1.

[19] Es importante aclarar que los fósforos fueron cambiados por los palillos.

En general, los participantes descubrieron que existía una relación matemática entre el número total de fósforos de un lado y la cantidad total de fósforos requerida para cada una de las figuras, apoyándose para ello en los palillos de madera, pero fueron incapaces de describir esta relación en términos formales (mediante notaciones y símbolos de la matemática).

Iniciemos con un hecho importante que ocurrió al interior del grupo 3, donde se puso de manifiesto, algunas creencias que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a una actividad matemática, en particular las que se relacionan con su propio papel en el proceso de resolución: "hay que resolver el problema con conocimientos de la escuela". Así por ejemplo, se reconocen conocimientos previos y estrategias de los estudiantes que intentan usarse en la búsqueda de soluciones de la tarea propuesta. Esta puede hacerse evidente a través de una discusión, donde los integrantes del grupo asocian la variación entre el número de fósforos de lado y la cantidad de fósforos totales en la figura, con un fenómeno que es modelado por la ecuación de una recta.

E1: profe, yo creo que la relación esta dada por la ecuación de una recta, pero las pendientes no me dan iguales.

P: entonces que pueden concluir de ahí (*Mira a su compañera de trabajo)*

P: ¿una recta puede tener diferentes pendientes?

E2: no

E1: ah… entonces no puede ser la ecuación de una recta…

P: recuerden evaluar los modelos que encuentren verificando con los casos particulares.

E1: bu*eno, gracias profe.*

Es claro que los estudiantes intentan vincular sus conocimientos previos a la búsqueda de soluciones de la tarea. Así, es importante notar como "lo lineal" es utilizado por los estudiantes como herramienta para modelar fenómenos que varían, principalmente debido a las concepciones y conocimientos que traen acerca del propio concepto.

❖ **Matematización horizontal**

Modelo 1. (Uso de materiales físicos)

Es importante resaltar el papel que desempeño el material manipulativo (palillos) y el contexto de lápiz y papel en la representación de casos particulares donde el número de palillos por lado no era muy grande, ya que ayudó a los estudiantes a comprender el procedimiento de construcción de las configuraciones. Se visualizó de esta manera, un primer acercamiento a un modelo asociado con un nivel de *matematización horizontal* (figura 18) donde el conocimiento informal de los estudiantes logró constituirse en un elemento dinamizador, para adquirir comprensión sobre la manera en que podrían relacionarse las magnitudes de interés.

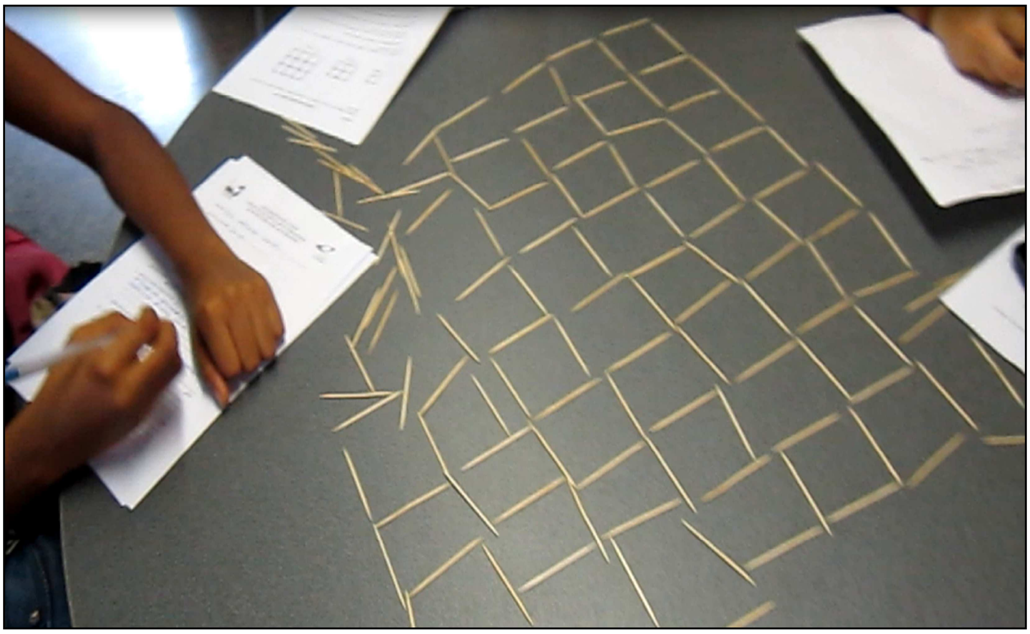


Figura 18. Estudiantes empleando los palillos para representar la tarea 1.

Por otra parte, el reconocimiento de que el número de palillos seria insuficiente para realizar todos los arreglos requeridos, obligaron a los estudiantes a la búsqueda de nuevas representaciones. Así, cada grupo decidió realizar dibujos de otras configuraciones, para intentar resolver las preguntas asociadas a ciertos casos particulares (ver figura 19)

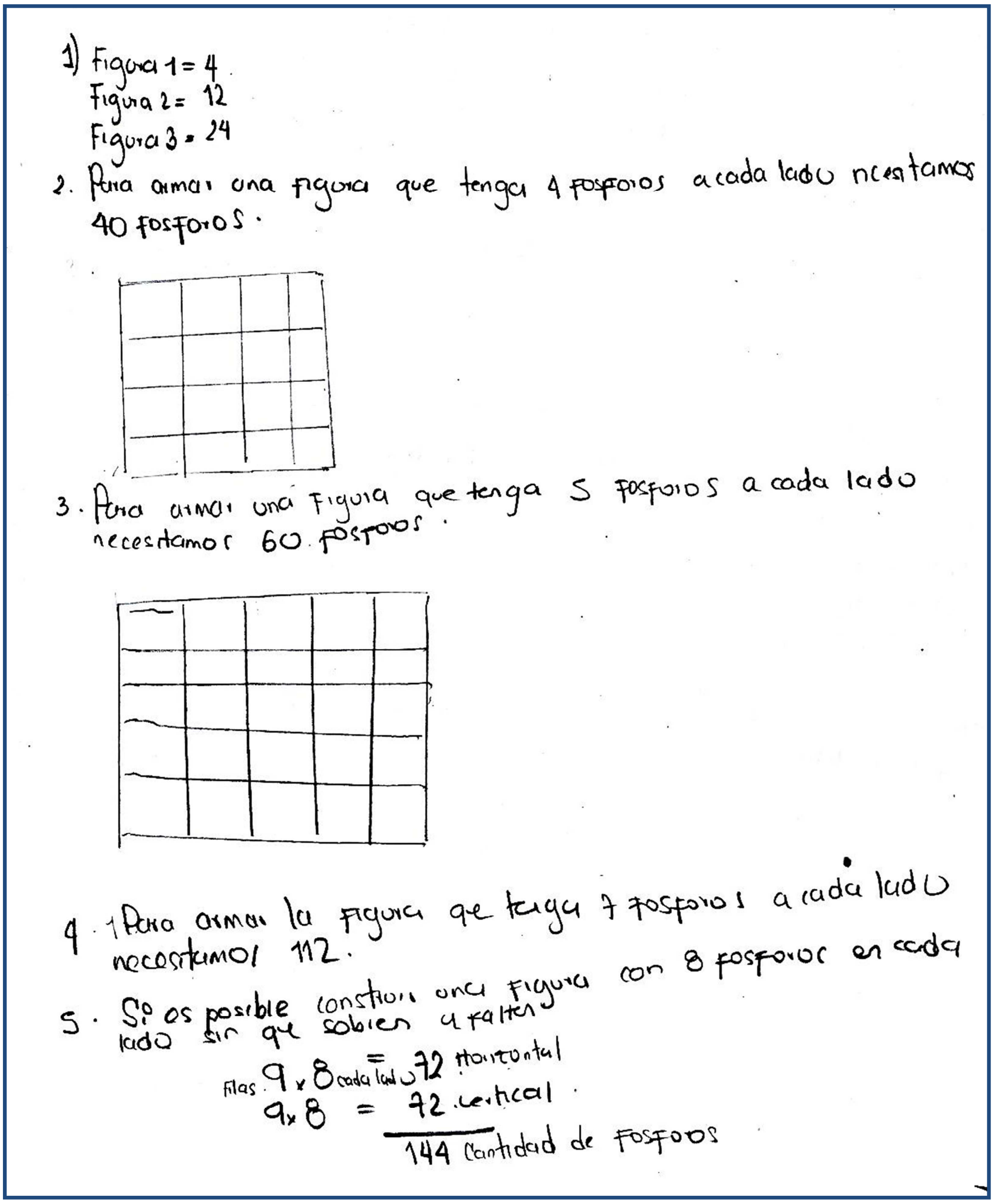


Figura 19. Dibujos de algunos arreglos de la tarea 1.

Este tipo de producciones y acciones por parte de los estudiantes se corresponde con un *nivel de compresión situacional*, en tanto que los modelos intentan consolidarse como un puente que lleva al conocimiento de la situación-problema y donde los conocimientos no matemáticos representan el camino, para que emerjan modelos que expliciten una relación funcional entre las dos magnitudes importantes.

En este sentido, es claro que los modelos emergentes en este nivel de matematización podrían hallarse en la propia situación que les dio origen, situación en la que precisamente los objetos abstractos de la matemática no aparecen de manera explícita.

En lo que sigue, se intentará poner en evidencia cómo los modelos construidos por los mismos estudiantes van evolucionando progresivamente, pasando por el estatus de *organizadores* de la situación, hasta llegar a concebirse como nuevos objetos en un *nivel de comprensión* más avanzado. En otras palabras, se quiere significar que los estudiantes iniciaron un proceso de matematización progresiva, pues inicialmente sus modelos ostentaban por el reconocimiento de datos relevantes, esquematizaciones, dibujos y otro tipo de aproximaciones empíricas, pero poco a poco los modelos fueron adquiriendo una perspectiva de crecimiento que incluía un proceso simbólico dentro del sistema matemático.

❖ ***Matematización vertical***

Modelo 2. (Diagrama de correspondencias y razonamiento inductivo)

El proceso de modelación rastreado en el grupo 2 representa un verdadero ejemplo de *matematización progresiva*. En primera instancia, cada uno de los arreglos dibujados para dar respuesta a los casos particulares, sirvió como base para la creación de un nuevo modelo, el cual fue anticipado en el *análisis predictivo* y que se denominó diagrama de correspondencias. Para los integrantes de este equipo, dicho modelo fue usado probablemente para llevar un registro sistemático de la información relevante y de la manera en que esos datos se relacionaban, lo que posibilitó un lugar a la búsqueda de regularidades y patrones que en este caso llevaron a los participantes a la utilización de métodos matemáticos inductivos, próximos a la construcción de fórmulas de recurrencia (ver figura 20 y 21).

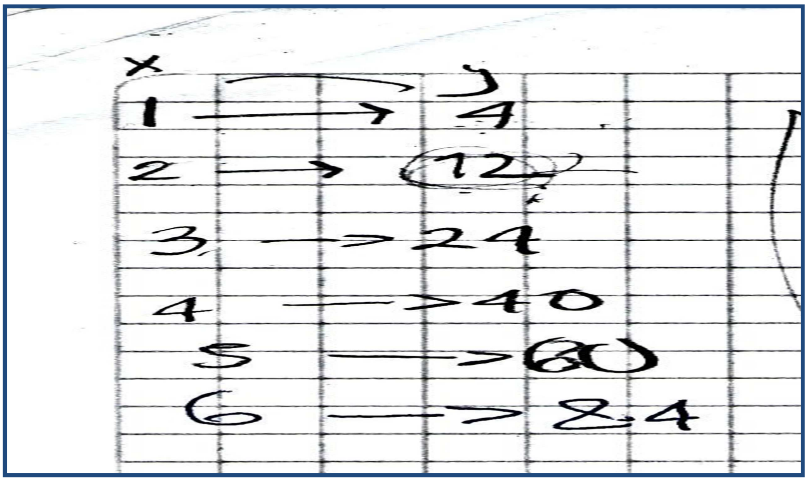


Figura 20. Diagrama de correspondencias del grupo 2 en la tarea 1.

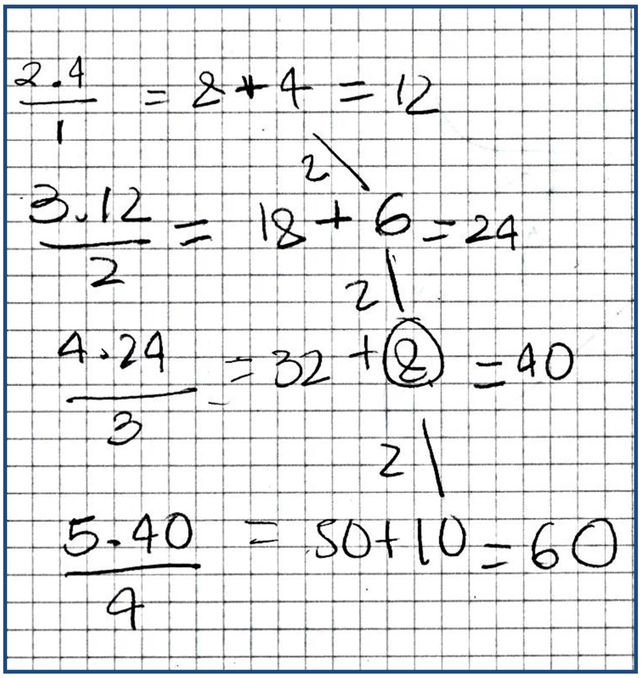


Figura 21. Aproximación a una fórmula de recurrencia

La manera en que los estudiantes construyen y utilizan estos modelos para avanzar en sus procesos de matematización puede ser interpretada a partir del marco teórico adoptado. Así, se reconoce un primer nivel dentro de la matematización vertical, relacionado con la construcción de un *modelo de* la situación.

En efecto, la figura 21 pone de manifiesto el reconocimiento por parte de los estudiantes de ciertas regularidades y relaciones numéricas entre los datos obtenidos, pero no existe un mecanismo de validación matemático que de cuenta de la viabilidad y funcionalidad del modelo para valores grandes de la variable independiente x (en este caso, el número de fósforos de lado). Además, la manera en que los estudiantes encuentran otros valores de la variable dependiente y, no es equivalente al procedimiento anticipado en el *análisis predictivo* de la tarea, pues la aproximación que hacen los integrantes del grupo tiene en cuenta un patrón numérico constante (sumar 2).

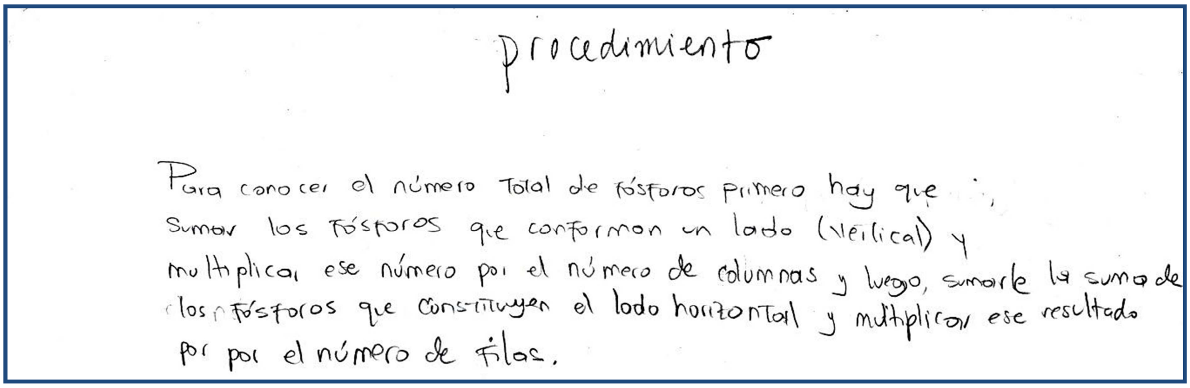
Es ostensible que este modelo puede vincularse con cierto tipo de comportamientos arbitrarios de los términos en juego y que resulta útil para trabajar los casos concretos solicitados. Sin embargo, las limitaciones de este se asocian precisamente con el hecho de no poseer un carácter general, que ayude a determinar la cantidad de fósforos totales en un arreglo donde la variable independiente sea demasiado grande, sin necesidad de conocer los resultados anteriores. También es claro que se requeriría un esfuerzo adicional para resolver el problema inverso (por ejemplo, si se conoce que un arreglo hay 60 fósforos de lado, determine el total de fósforos necesarios para su construcción)

Este tipo de acciones y modelos permiten caracterizar una parte importante del proceso de matematización vertical, que en concordancia con las categorías establecidas previamente, ubica parcialmente a los integrantes del grupo en un *nivel de comprensión referencial*.

De otra parte, es importante detenerse en aquellos modelos que están caracterizados por la vinculación del lenguaje natural y que surgen como un intento de hacer explícita la relación de dependencia entre las dos magnitudes variables. En esto, consiste el siguiente modelo, que no fue tenido en cuenta en el *análisis predictivo*, pero que representa un hecho notable para esta investigación porque emerge otro *modelo de* la situación.

Modelo 3. (Lenguaje natural)

El presente modelo construido por los integrantes del grupo 1, permite evidenciar la manera en que el lenguaje natural se inscribe dentro de los procesos de matematización, dando cuenta de la identificación de una relación de tipo funcional entre las magnitudes de interés (ver figura 22).



Procedimiento

Para conocer el número total de fósforos primero hay que sumar los fósforos que conforman un lado (vertical) y multiplicar ese número por el número de columnas y luego, sumarle la suma de los fósforos que constituyen el lado horizontal y multiplicar ese resultado por el número de filas

Figura 22. Acercamiento a la relación general del fenómeno estudiado.

La limitación de este modelo probablemente resida en que el razonamiento se hace sobre el arreglo mismo, que siempre será un arreglo particular lo que imposibilita trabajar en el plano de lo general para un arreglo cualquiera. Aun así, es importante anotar que pese a que la limitación tal vez sea producto de la ausencia de alejamiento del contexto de la tarea, en la medida en que los estudiantes doten de significado matemático las estrategias de solución (trabajen con notaciones y símbolos de la matemática), es posible que la reflexión los lleve a construir expresiones algebraicas que modelen la situación.

En este sentido, poco a poco a través del reconocimiento de los elementos que varían de un arreglo a otro, los estudiantes lograron establecer regularidades con notaciones y símbolos de la matemática, favoreciendo la subida de nivel.

Modelo 4. (Planteamiento de regularidades entre la cantidad de fósforos de lado, las columnas y las filas que conforman la figura)

El grupo 4 puso de manifiesto varios aspectos generales, que se consolidan en la producción de un modelo algebraico, que expresa la relación de dependencia entre las dos variables en términos matemáticos (ver figura 23).

n = cantidad de fosforos por lado.

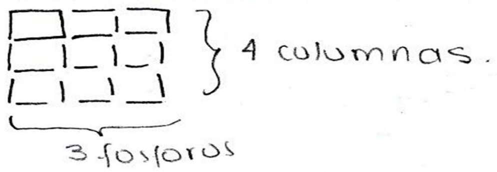
x = cantidad de fosforos requerido totalmente.

$x = (n)(n+1)(2)$

→ Cada cuadrado que se realize va a tener 2 lados a llenar, uno vertical y otro horizontal, cada uno de estos va a estar compuesto por la cantidad de fosforos inicial (n) y cada lado esta compuesto por una columna/ fila extra (n+1); para obtener la cantidad final de fosforos se debe multiplicar estas cantidades entre si y por dos, ya que se debe obtener ambos sentidos.

$x = 2(n)(n+1)$

Ejemplo =



$(3 \times 4)(2) =$

$(12)(2) =$

24,,

n = cantidad de fósforos por lado

x = cantidad de fósforos requerido totalmente

$x = (n)(n+1)(2)$

Cada cuadrado que se realice va a tener 2 lados a llenar, uno vertical y otro horizontal, cada uno de estos va a estar compuesto por la cantidad de fósforos inicial (n) y cada lado esta compuesto por una columna, fila extra (n + 1); para obtener la cantidad final de fósforos se debe multiplicar estas cantidades entre si y por dos, ya que se debe obtener ambos sentidos.

$x = 2(n)(n+1)$

Figura 23. Modelo algebraico de la tarea 1.

Este modelo ya había sido anticipado en el *análisis predictivo,* incluso es interesante observar la semejanza presentada entre ambos modelos, en lo que concierne a la notación escogida, pues esto implica posiblemente cierta comprensión adicional acerca del dominio de la variable independiente (el conjunto de los números naturales).

Otro aspecto importante en la construcción de este modelo, es la manera en que los conocimientos informales de los integrantes lograron entrelazarse y evolucionar hacia la consideración de aspectos generalizables. Además, la simple asignación simbólica de las variables (en este caso, ***n*** y ***x***) muestra un alto nivel de comprensión sobre lo que se hace, que también se evidencia por ejemplo, en la explicación escrita del modelo, demostrando con ello, claridad en la forma de comunicar a otros lo que saben.

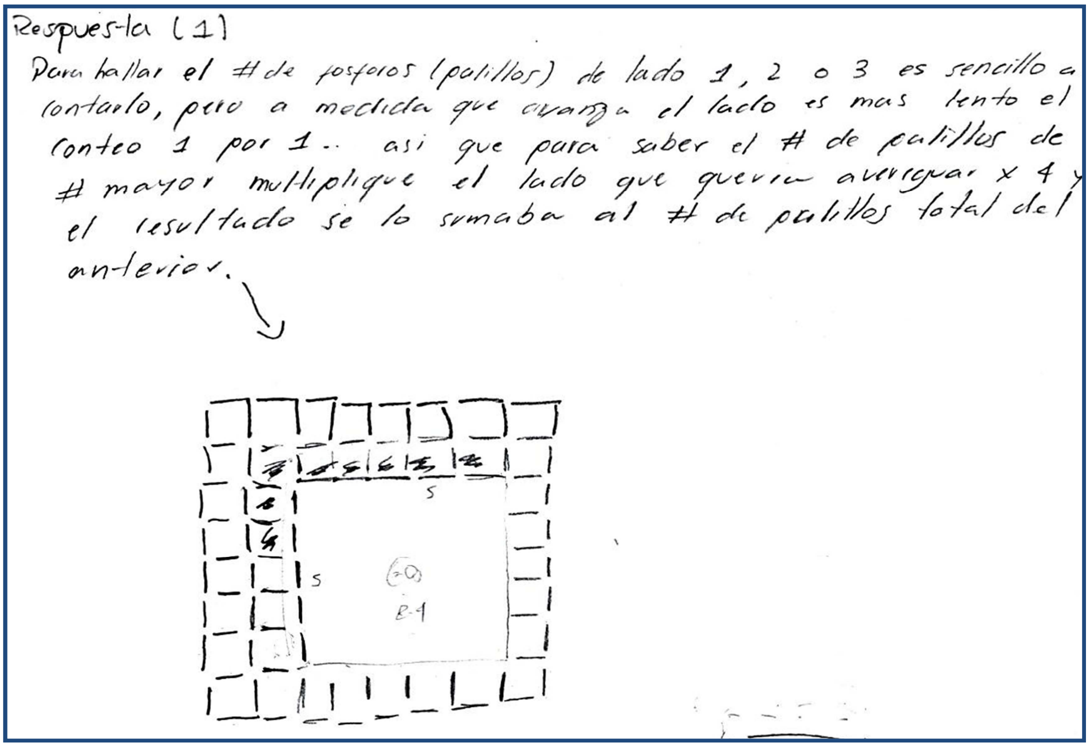
De esta manera, se constituye un *modelo para* abordar otras situaciones similares y en concordancia con las categorías de análisis propuestas, los integrantes de este grupo pueden asociarse con un *nivel de comprensión general*. De hecho, esta producción no fue la única que permitió caracterizar la actividad matemática de los estudiantes dentro de este nivel, puesto que el grupo 3 también logró construir un modelo potente con claros nexos con lo matemático y un alejamiento del contexto inicial de la tarea.

Precisamente, este modelo construido por el grupo 3, representa un buen ejemplo de lo que significa la *matematización progresiva*, básicamente porque los integrantes del grupo construyen su modelo a partir de consideraciones netas del contexto, identificando algunos aspectos claves de la situación y de la manera en que estos se relacionan, pero paulatinamente logran transformarlos con las herramientas matemáticas que conocen, hasta encontrar una expresión cuadrática que encaja perfectamente como modelo general la situación propuesta (ver figura 24).

Es importante señalar que en este grupo, aún no hay una compresión total de los conceptos matemáticos involucrados en la situación, razón por la cual los integrantes del mismo, continúan asociados a un *nivel de comprensión general* y no, a un *nivel de comprensión formal* que además, se diferencia del nivel anterior porque los estudiantes son capaces de combinar diferentes modelos y rescribir la expresión encontrada como una función cuadrática.

Seguidamente, se presenta el mencionado modelo y otros aspectos relevantes relacionados con su interpretación a la luz de las categorías de análisis.

Modelo 5. (Expresión cuadrática)



Para hallar el # de fósforos (palillos) de lado 1, 2, o 3 es sencillo a contarlo, pero a medida que avanza el lado es más lento el conteo 1 por 1. Así que para saber el # de palillos de # mayor multiplique el lado que quería averiguar × 4 y el resultado se lo sumaba al # de palillos total del anterior.

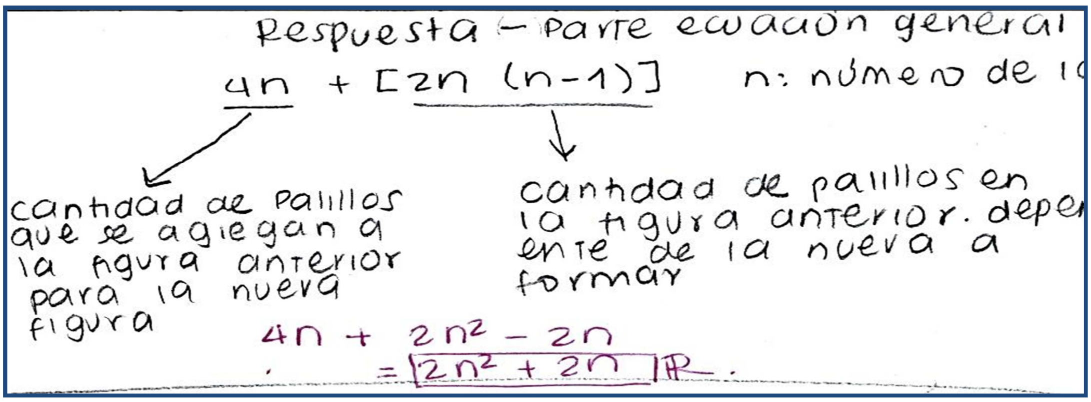


Figura 24. Modelo cuadrático

La manera en que se ha construido el modelo, permite inferir que existe un progreso en el proceso de matematización, el cual comportó la movilización por diferentes *niveles de comprensión*. Esto se pone de relieve cuando, inicialmente estos estudiantes pasan por un *nivel situacional* donde hacen uso de las gráficas para llevar el contexto a un primer plano matemático. Seguidamente, los estudiantes atraviesan por un *nivel referencial* característico por el reconocimiento de regularidades entre un arreglo y el siguiente, que fue alcanzado mediante la identificación de un patrón (de construcción) que les ayudó a resolver cualquier caso particular en términos de los resultados anteriores.

Este planteamiento queda ilustrado en la siguiente explicación del grupo, el cual es posible leer de la figura N° 24. "*multiplique el lado que quería averiguar × 4 y el resultado se lo sumaba al # de palillos total del anterior*"

Sin embargo, lo más notorio de esta producción es la forma en que los estudiantes toman distancia del contexto inicial de la tarea, para dar paso a los conceptos matemáticos inmersos en la situación. Así pues, lograron visualizar el patrón de construcción desde el contexto matemático, favoreciendo el establecimiento de reglas generales hasta llegar a construir un modelo relacionado con una expresión cuadrática y que se asocia con un *nivel general.*

Por otro lado, es importante anotar el papel que desempeñó, en este caso, el modelo gráfico asociado a un *nivel situacional,* esto es, los dibujos construidos por los mismos estudiantes, pues al servir como herramienta en el desarrollo del proceso de modelación, favoreció la búsqueda e identificación de regularidades que a su vez, provocaron la necesidad de trabajar en un contexto matemático, y como consecuencia se logró desencadenar un avance en los niveles de habilidad de los integrantes del grupo.

4.2.2. Tarea 2. *Apretones de manos*

En un primer momento, se solicitó a los estudiantes que conformarán los equipos de trabajo previamente organizados en la sección anterior, con el propósito de promover los procesos de interacción y reflexión; indispensables para el estudio de los procesos de matematización en relación con la producción y uso de modelos en diferentes niveles de complejidad.

Una vez conformados los grupos de trabajo, se dedicó un espacio para la motivación inicial, la cual consistió en mostrar que las matemáticas están inmersas en muchas de las actividades que se hacemos diariamente, incluso cuando se deja caer un objeto. De este modo, se invitó a los estudiantes a reflexionar sobre ¿qué aspectos matemáticos pueden vincularse con la cantidad de personas que asisten a una reunión y los apretones de mano como gesto de despedida?

Seguidamente, los estudiantes recibieron la tarea 2 para dar inicio al momento de la configuración de los modelos (ver figura 25). Es importante anotar que el contexto escogido para esta situación resultó ampliamente significativo para los estudiantes, favoreció el interés y abrió el camino para la utilización de estrategias informales ligadas al contexto.

Figura 25. Puesta en escena de la tarea 2.

❖ ***Matematización horizontal***

Modelo 1. (Elaboración de un esquema)

Este modelo fue construido por dos grupos (grupo 1 y grupo 3) cuyas producciones no presentan diferencia alguna, pues en ambos casos, los estudiantes representaron la situación de manera análoga a la anticipada en el *análisis predictivo* (ver figura 26).

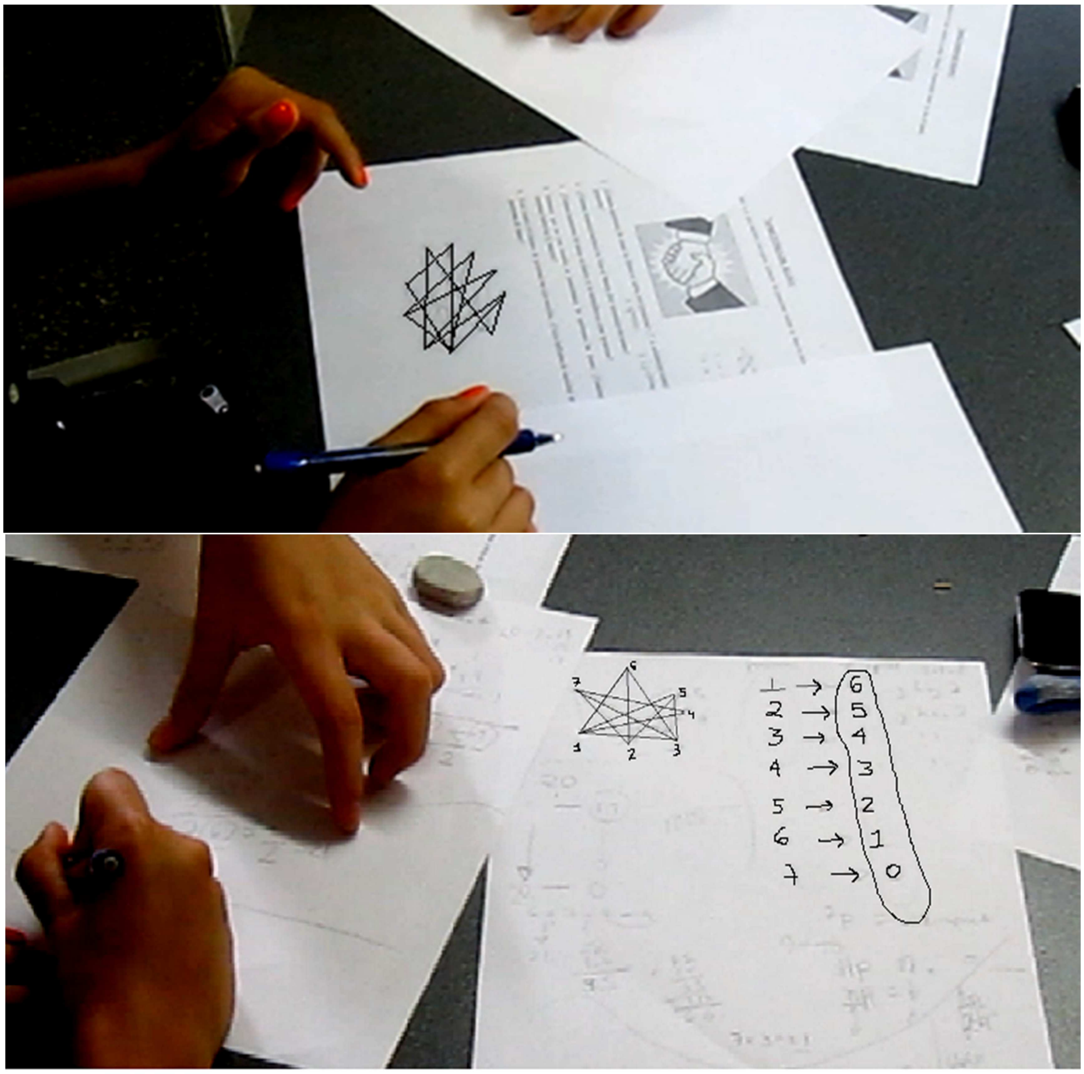


Figura 26. Esquemas poligonales construidos por los grupos 1 y 3.

Ambos modelos constituyen un acercamiento a la interpretación de la situación, pues el diagrama aparece como intento de los estudiantes por organizar los elementos que son relevantes, para encontrar la matemática que yace en el contexto. De esta manera, los estudiantes de estos grupos pueden asociarse parcialmente a un *nivel situacional*, aunque el carácter flexible del modelo permitió promover el avance en los niveles de comprensión y la construcción de otros modelos con perspectivas verticales.

❖ ***Matematización vertical***

Modelo 2. (Patrón de construcción)

El grupo 1 le dio continuidad al proceso de matematización, tomando como referente el diagrama poligonal. La figura 27 y la conversación ejemplifican este planteamiento.

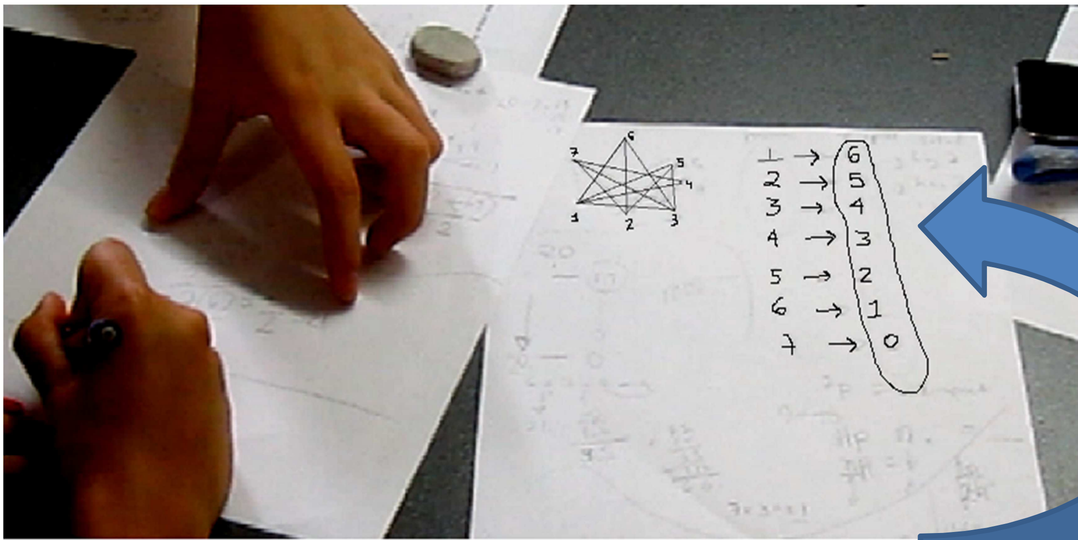


Figura 27. Patrón de construcción encontrado por el grupo 1

E_1. Hagámoslos con uno más chiquito, uno de siete

E_2. Seria bueno con colores, porque…

E_1. Seria rebueno [Le contesta mientras hace el esquema correspondiente]

Una vez realizado el esquema para siete asistentes, los integrantes del grupo reconocieron un patrón numérico que los ayudaría a llegar intuitivamente a fórmulas y relaciones entre las magnitudes variables.

E_1. Entonces, aquí seria 1, 2, 3, 4, 5, 6 [refiriéndose a los apretones de mano de la primera persona]

E_2. Entonces, persona 1, 6 apretones y hay 7 personas

E_1. La persona 2, da 1, 2, 3, 4, 5 apretones y hay 7 personas, entonces esta ya.

Continúan con el procedimiento hasta inferir que la última persona (persona 7 en este caso) no le corresponde ningún apretón, pues ya se han despedido de él todos los asistentes.

E_1. La persona 6 tendría 1 y la persona 7 ya, queda sólo…no tendría a quien.

E_2. Exacto porque ya llegamos.

E_1. Entonces ya sé, digamos si hay 20 personas va a tener la primera persona 19 y de ahí para abajo se va reduciendo.

Lo importante en esta discusión es que pone de relieve, la manera en que los modelos adquieren gradualmente un carácter más general. Por ejemplo, es claro que a partir de un único diagrama, emerge una conjetura muy razonable que puede ser enunciada de la siguiente manera: El número de apretones de mano es igual a la suma de los primeros *n*-1 números naturales.

No obstante, los estudiantes no lograron escribirlos en estos términos, razón por la cual esta producción puede considerarse como un *modelo de* la situación, que no fue previsto en el *análisis predictivo*. Así pues, este modelo carente de notación y simbolismo matemático esta limitado a casos particulares, pero la relación encontrada permite inferir que los integrantes interpretaron adecuadamente la situación hasta identificar las regularidades en un patrón de crecimiento, pese a que no avanzaron a un *nivel general*, donde la conjetura propuesta podía expresarse matemáticamente:

$$f(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-n)$$

La dificultad de los estudiantes en la construcción de un modelo de este calibre, se relaciona con los obstáculos que se presentan en la traducción de problemas de lenguaje común al lenguaje algebraico. Así, a pesar de que este grupo logro encontrar una ley simple que relacionaba las dos variables del problema fueron incapaces de formular la ley en un sistema de símbolos matemáticos.

Modelo 3 (diagrama de correspondencia)

Al igual que el grupo 1, el grupo 3 se apoyó en el diagrama poligonal para construir un nuevo modelo que les ayudará a sistematizar la información relevante y a encontrar regularidades entre los términos de las variables. Tal modelo, se refiere a la producción de un diagrama de correspondencia análogo al que se anticipó en el *análisis predictivo* de la primera tarea (ver figura 28), pero que relaciona el número de personas con el número total de apretones de mano.

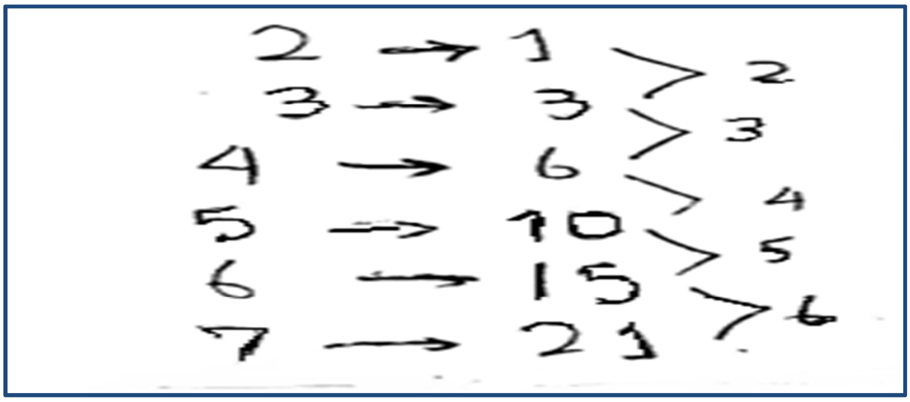


Figura 28. Diagrama de correspondencia construido por el grupo 3

Es importante ilustrar que este modelo no se limita únicamente a la reorganización de los datos, sino que además posibilita en los estudiantes, el reconocimiento de regularidades entre un término y el siguiente, que bien podía conducir a una fórmula de recurrencia como la que elaboró el grupo 2

Modelo 4 (Fórmula de recurrencia)

La producción de este modelo se había anticipado en el *análisis predictivo*, pero en este caso la identificación de regularidades y de un patrón numérico creciente, fueron abordados desde una perspectiva diferente, puesto que el modelo surgió de la correspondencia entre los valores designados en un diagrama y no, de una tabla de valores como había sido previamente anticipado. En este sentido, nuevamente la construcción de un diagrama de correspondencias, posibilitó en los estudiantes la visualización de un patrón recurrente para casos muy puntuales, ya que resultaba poco funcional cuando la cantidad de asistentes era muy elevada.

Esta característica del modelo, muestra como los integrantes de este grupo se encuentran arraigados al comportamiento de la situación, así como una dificultad presente para generalizar matemáticamente la relación encontrada (ver figura 29).

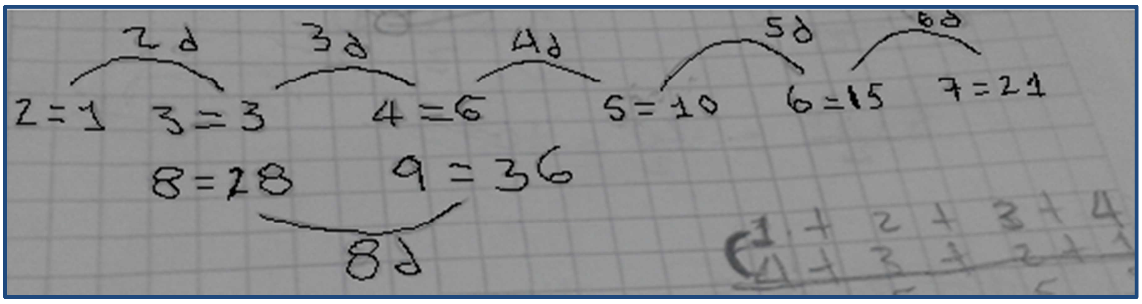


Figura 29. Regularidades encontradas por el grupo 2

Estos estudiantes centraron su modelo en los valores correspondientes a los apretones de manos, pues encontraron que la diferencia entre un valor y el siguiente era exactamente una unidad. Lo cual, les permitió responder fácilmente, las preguntas asociadas a los casos particulares y entender, que a medida que aumentaba el número de personas, también se aumentaba el número de apretones con cierta regularidad. Sin embargo, los intentos por encontrar una regla de formación general tuvieron un alto grado de dificultad y no fue posible encontrar un modelo matemático que relacionará algebraicamente, es decir con símbolos y notaciones matemáticas, los aspectos relevantes de la situación.

Es en este sentido, que los modelos 2, 3 y 4 se asumen como *modelos de* la situación, ubicando los estudiantes en un *nivel referencial*. Por otra parte, el grupo 4 alcanzó una perspectiva más general, partiendo de esquemas de la situación y finalizando con la producción y uso de una ecuación cuadrática.

Modelo 5 (expresión algebraica)

Inicialmente, la elaboración de esquemas (ver figura 30) sirvió de base al grupo (N° 4) para trabajar en la resolución de casos particulares, pero posteriormente este mismo modelo ayudó a los estudiantes a identificar un patrón numérico entre lo valores asignados a la cantidad de apretones de mano.

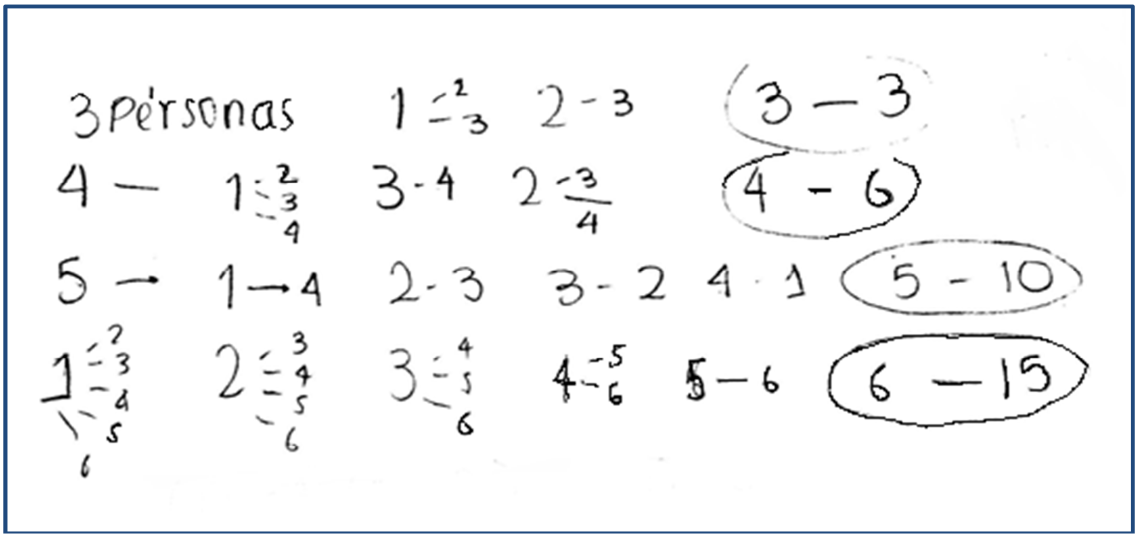


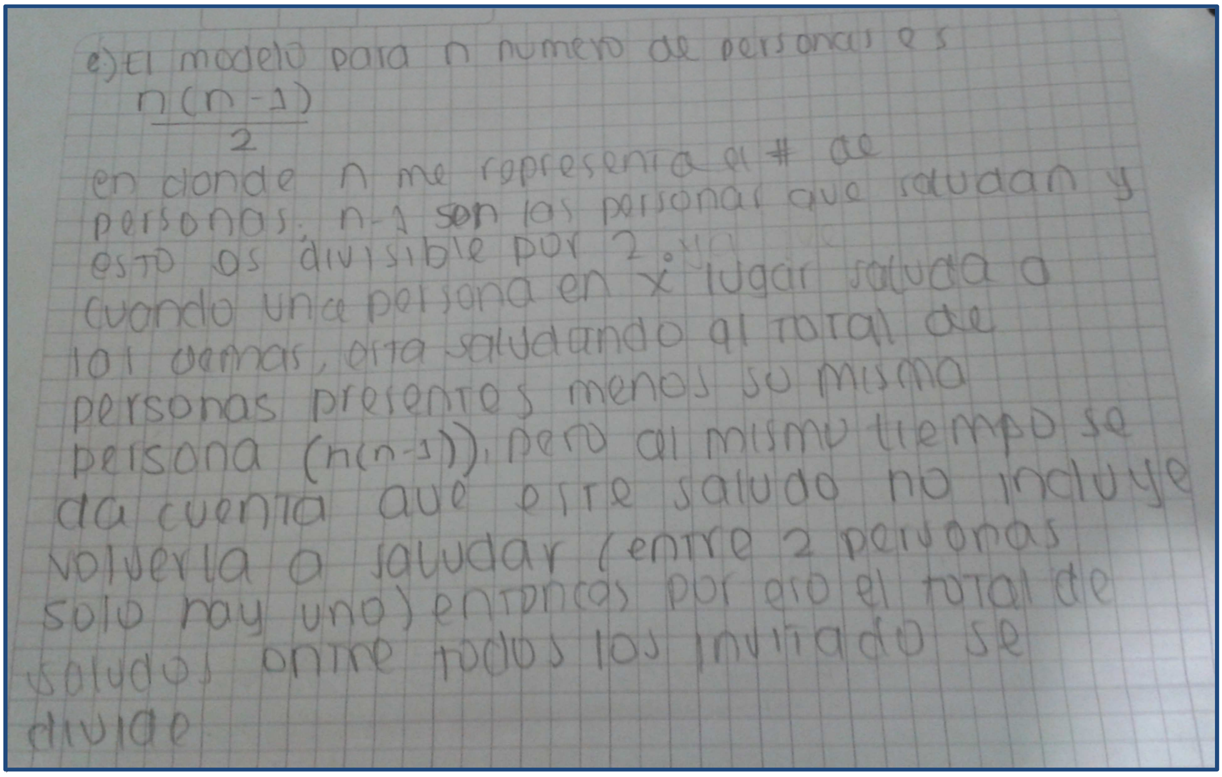
Figura 30. Modelo inicial del grupo 4

Así, a partir de los esquemas ilustrados en la figura 30, los integrantes del grupo comprendieron que cada persona se da la mano con todos menos con él mismo y que además no se pueden saludar más de una vez. Los estudiantes enunciaron su razonamiento de la siguiente manera:

"*cuando una persona en x lugar saluda a las demás, esta saludando al total de personas presentes menos su misma persona* $((n(n-1))$, *pero al mismo tiempo se da cuenta que este saludo no incluye volver a saludar (entre dos personas solo hay uno) entonces por eso el total de saludos entre todos los invitados se divide*"

De esta manera, los estudiantes construyeron una expresión general como modelo de la situación, generalizando propiedades numéricas e identificando la relación de dependencia entre las magnitudes variables. Así pues, este grupo logró superar las dificultades latentes en los otros grupos, en relación con el uso de símbolos y notaciones de la matemática, por lo que es apropiado ubicarlos parcialmente en un *nivel general* gracias a que logran abstraer los elementos relevantes de la situación problema y trabajarlos en un contexto eminentemente matemático.

A continuación se ilustra el modelo elaborado por este grupo (ver figura 31)


e) El modelo para n numero de personas es
$\frac{n(n-1)}{2}$
en donde n me representa el # de personas. n-1 son las personas que saludan y esto es divisible por 2.
Cuando una persona en x lugar saluda a los demas, esta saludando al total de personas presentes menos su misma persona (n(n-1)), pero al mismo tiempo se da cuenta que este saludo no incluye volverla a saludar (entre 2 personas solo hay uno) entonces por eso el total de saludos entre todos los invitados se divide

El modelo para *n* números de personas es

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

En donde *n* me representa el # de personas *n-1* son las personas que saludan y esto es divisible por 2.

Cuando una persona en *x* lugar saluda a los demás, esta saludando al total de personas presentes menos su misma persona ($n(n$-1)), pero al mismo tiempo se da cuenta que este saludo no incluye volverla a saludar (entre 2 personas solo hay uno) entonces por eso el total de saludos entre todos los invitados se divide.

Figura 31. Expresión algebraica encontrada por el grupo 4

Un hecho notable dentro de la actividad matemática de este grupo, lo constituye el uso del modelo propio y el reconocimiento de “lo cuadrático” para dar solución a preguntas de la tarea. Esto se puso de relieve, cuando los estudiantes probaban “su modelo” verificando los resultados obtenidos en los casos particulares y específicamente, cuando trataban de dar solución al problema inverso (ver pregunta 4) que demandaba resolver la ecuación de segundo grado correspondiente.

De esta manera, el grupo logro avanzar a un nivel de *compresión formal* caracterizado por los procesos efectuados al validar los resultados obtenidos previamente y por el reconocimiento y/o empleo de lo cuadrático en la resolución de problemas.

Seguidamente, se ilustra el proceso de transformación del modelo y el adecuado tratamiento de los integrantes (ver figura 32), el cual permite considerar la posibilidad de una buena comprensión de los conceptos matemáticos asociados a "lo cuadrático" y de su uso como modelo para solucionar situaciones similares.

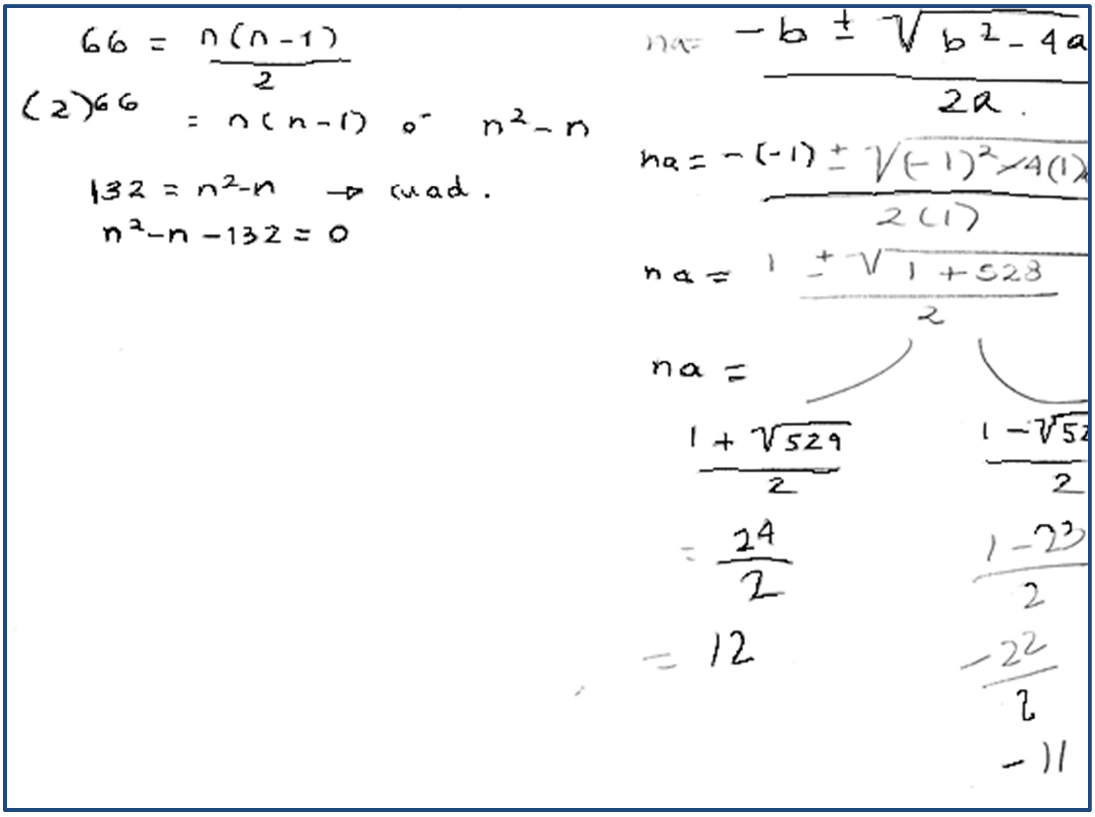


Figura 32. Uso de la fórmula cuadrática en el grupo 4

Es importante reiterar la manera en que los estudiantes logran avanzar en sus *niveles de comprensión* a través del carácter evolutivo de sus producciones y de la reflexión sucinta de los integrantes del grupo, producto de la gestión de los docentes, el valor que tiene para ellos el contexto donde se presenta la situación y la progresiva vinculación de los objetos matemáticos.

4.2.3. Tarea 3. *Configuraciones navideñas*

Al iniciar esta sesión los orientadores solicitaron nuevamente a los estudiantes que conformaran los grupos de trabajo. Ellos ya sabían que los equipos no podían exceder los tres integrantes y que era más eficiente el trabajo si la tarea se desarrollaba con los mismos compañeros de las tareas anteriores. Es importante resaltar que la conformación de estas pequeñas clases tiene como propósito generar un ambiente interactivo, en cual, los estudiantes discutan, realicen argumentos, expongan sus ideas alrededor de la situación y conjeturen relaciones que progresivamente se conviertan en modelos de la situación problema.

Una vez conformados los grupos de trabajo se insistió en la importancia que tiene la matemática en la vida y cómo a través de las tareas anteriores se podía evidenciar que las matemáticas están presentes en acciones que hacemos constantemente, pero que somos incapaces de verlas porque no nos detenemos a pensar la manera en que ellas se vinculan. De este modo, invitamos a los estudiantes a descubrir la matemática inmersa en unos sencillos arreglos navideños como los que se abordan en la tarea 3.

Luego de la motivación inicial, cada grupo empezó a desarrollar las actividades (ver figura 33) y pese a que la situación problemática se mostraba de mayor dificultad para ellos, el tiempo requerido para solucionarla completamente disminuyó en comparación con las otras.

Figura 33. Puesta en escena de la tarea 3.

Antes de discutir los diferentes modelos construidos por los estudiantes, es importante destacar algunas discusiones generadas al interior del grupo 3; ya que pone de relieve la problemática enunciada en la contextualización del problema de investigación, en relación con el tratamiento que hacen los estudiantes del contexto como si se tratara de un “ruido” que es necesario eliminar. Veamos:

$E_{1:}$ profe intentamos con la fórmula $n \times n$ y nada

$E_{1:}$ luego con $n(n+1)$ y nada [Mira a su compañera]

E_2: también con $(n-1)n$ y nada, $(n \times n) - 1$ y no da [risas]

P: Tengan en cuenta que no van a encontrar una fórmula que funcione si intentan adivinarla, es mucho mejor si primero imaginan la situación y utilizan métodos que no necesariamente son matemáticos para comprender que es lo que sucede en cada uno de los arreglos.

Este fragmento de diálogo ilustra como los estudiantes tienden a omitir el contexto y centrar su trabajo en una reacción mecánica, como si se aferraran al juego del leguaje de la matemática escolar. Estos estudiantes se empeñaban en adivinar o descifrar cuál operación había que realizar, considerando únicamente las respuestas exactas, sin poner en juego su sentido común y sus conocimientos extraescolares, elementos que podían haberlos conducido a una mejor comprensión del problema.

De otra parte, el diálogo también ilustra el papel del docente en la generación de espacios de reflexión que conllevan a los estudiantes a considerar el contexto especifico en el cual se inscribe la situación-problema.

- **Matematización horizontal**

Modelo 1. (Primeras regularidades en los arreglos)

El grupo 1 escucho la conversación entre el docente y el grupo 3 y presentó los siguientes argumentos.

$E_{1:}$ mira que yo lo hice en términos de los lados y mira que aquí hay uno, dos y tres, hay un lado pa arriba y pues también cada lado de triángulo, si me entendes este triangulito [muestra los arreglos dados en la situación] aquí también uno, dos y tres y pues por lo tanto aquí también uno, dos y tres, aquí uno, dos y tres.

P: contando los triángulos que están paraditos

$E_{1:}$ los que están dentro… se van sumando, aquí ya hay 6

P: ah…o sea que este se suma acá, me dices

$E_{2:}$ yo encontré que los que se agregan son equivalentes éste más éste se agregan cinco a la que está acá no a la inicial

P: y, ¿cómo podrían utilizar este hecho para encontrar una relación más general?

Aunque en el diálogo no es claro que quieren decir los estudiantes, el acompañamiento del docente permitió una buena interpretación de lo sucedido, pues lo que el grupo encontró es que el segundo arreglo contiene al primero, y a su vez, el tercero contiene al segundo, lo que los lleva a pensar que determinado arreglo contiene al arreglo anterior.

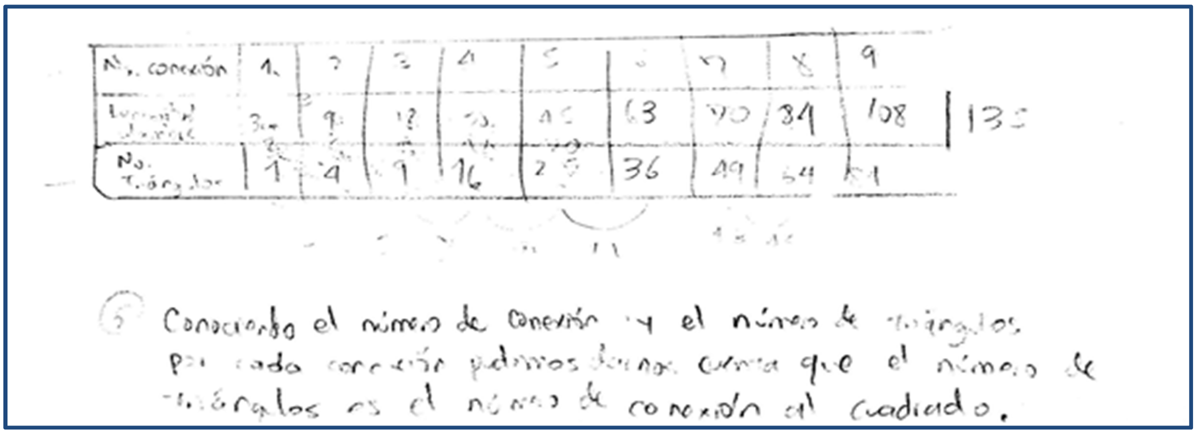
Este argumento no es un modelo formalizado de la situación, pero acerca a los estudiantes a un patrón que puede finalizar en la consolidación de un modelo, que muestre la relación entre el número de la conexión y la cantidad de alambre requerido para dicha conexión. De este modo, se observa el papel central de los gráficos en la comprensión de la situación y en la determinación de relaciones para hallar modelos. Aspecto que debe tenerse en cuenta para enriquecer el diseño de situaciones que orienten a los estudiantes a la actividad matemática de modelación.

Además, es importante resaltar el papel que ocupa la interacción entre los estudiantes en el proceso de matematización, pues queda claro a través del fragmento anterior, que las ideas no se derivan de un sólo integrante, sino que emergen de un razonamiento conjunto entre los pares y la debida orientación del docente.

❖ ***Matematización vertical***

Modelo 2. (Relación entre la conexión y la cantidad de triángulos)

Uno de los grupos encontró que existía una relación entre la conexión y el total de triángulos que se formaba en la figura (ver figura 34).



N° conexión	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud del alambre	3	9	18	30	45	63	84	108	135
N° de triángulos	1	4	9	16	25	36	49	64	81

5) Conociendo el número de la conexión y el número de triángulos por cada conexión pudimos darnos cuenta que el número de triángulos es el numero de conexión al cuadrado.

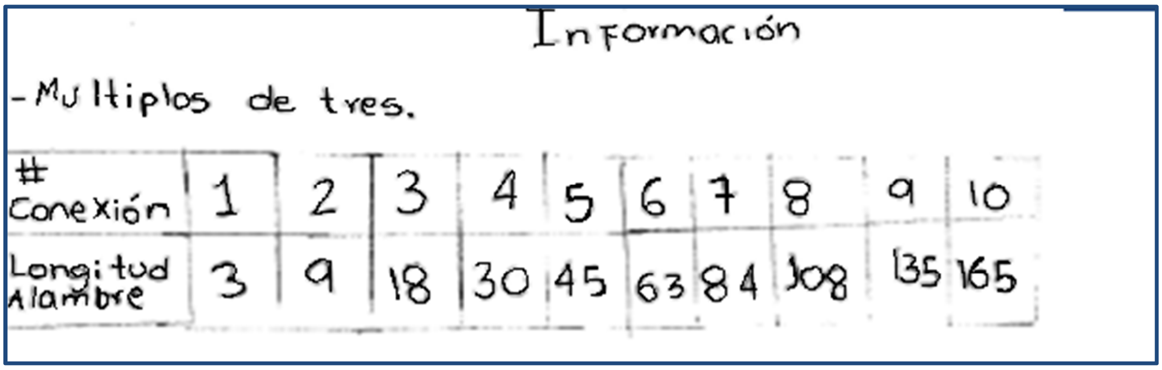
Figura 34. Modelo construido por el grupo 2

En esta producción se muestra como se vincula la conexión con la cantidad de triángulos en la grafica, sin embargo no logran a partir de ella hallar la relación para la cantidad de alambre requerido para cierta conexión, por lo tanto los integrantes de este grupo aún se encuentran en un nivel de *comprensión referencial*, en donde no existe una relación matemática que se asocie con la situación presentada.

Modelo 3. (Elaboración de tablas y esquemas)

Luego de que los grupos exploraron la situación mediante diversas actividades como: ensayo y error, la creación de hipótesis a través de la observación de las gráficas, procedieron a organizar la información encontrada hasta ese momento en esquemas de correspondencia y tablas.

Uno de los grupos (grupo 1) construyó la siguiente tabla (ver figura35)



Información

-Multiplos de tres.

# Conexión	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Longitud Alambre	3	9	18	30	45	63	84	108	135	165

Figura 35. Modelo de tabla construido por el grupo 1

La figura 35 muestra diversos casos de la situación planteada, en ella es posible identificar que los integrantes de este grupo fueron conscientes de que la longitud del alambre siempre era múltiplo de 3, ya que ellos en la parte superior escriben "múltiplos de tres". Esta primera aproximación a la relación entre el número de la conexión y la longitud de alambre, mediante la construcción de una tabla, permitió a los estudiantes encontrar nuevas relaciones matemáticas, que ubica a los integrantes de este grupo en un *nivel referencial*, puesto que han construido un *modelo de* la situación para desarrollar casos particulares apoyándose en el reconocimiento de un patrón numérico constante (3).

La figura 36 hace parte de la continuación del trabajo de este grupo y sustenta el argumento de que el ejercicio de elaborar una tabla permite encontrar nuevas relaciones.

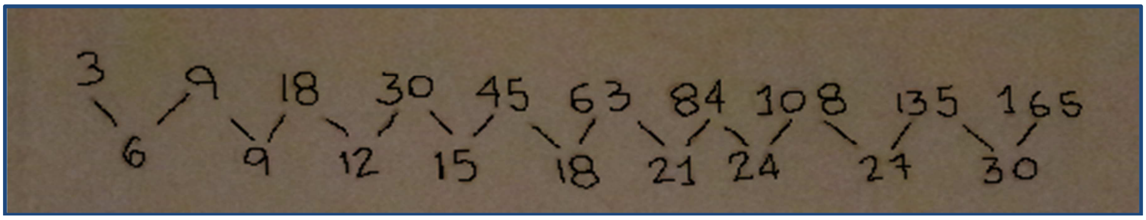
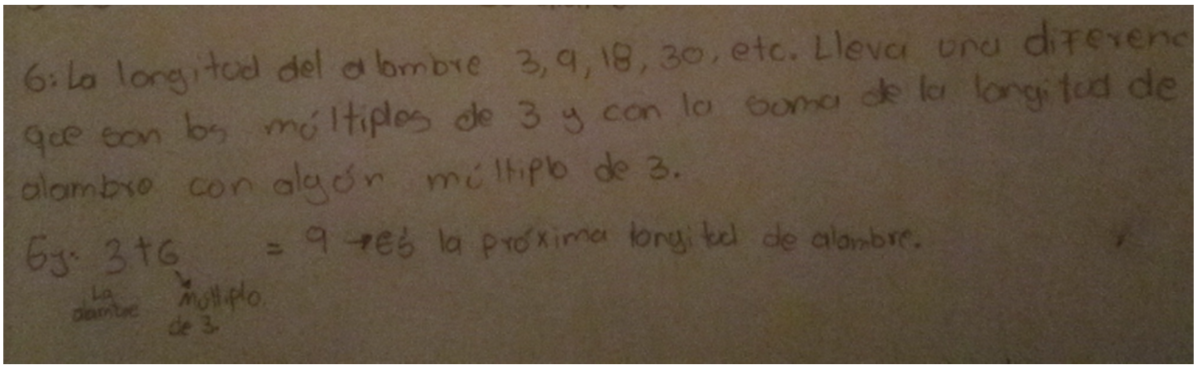


Figura 36. Esquema construido por el grupo 1

Luego de realizar este esquema los estudiantes desarrollaron el siguiente argumento, en donde se identifica una relación matemática entre las dos magnitudes de interés y que se caracteriza porque hay un primer acercamiento importante a la matemática relevante de la situación (ver figura 37).



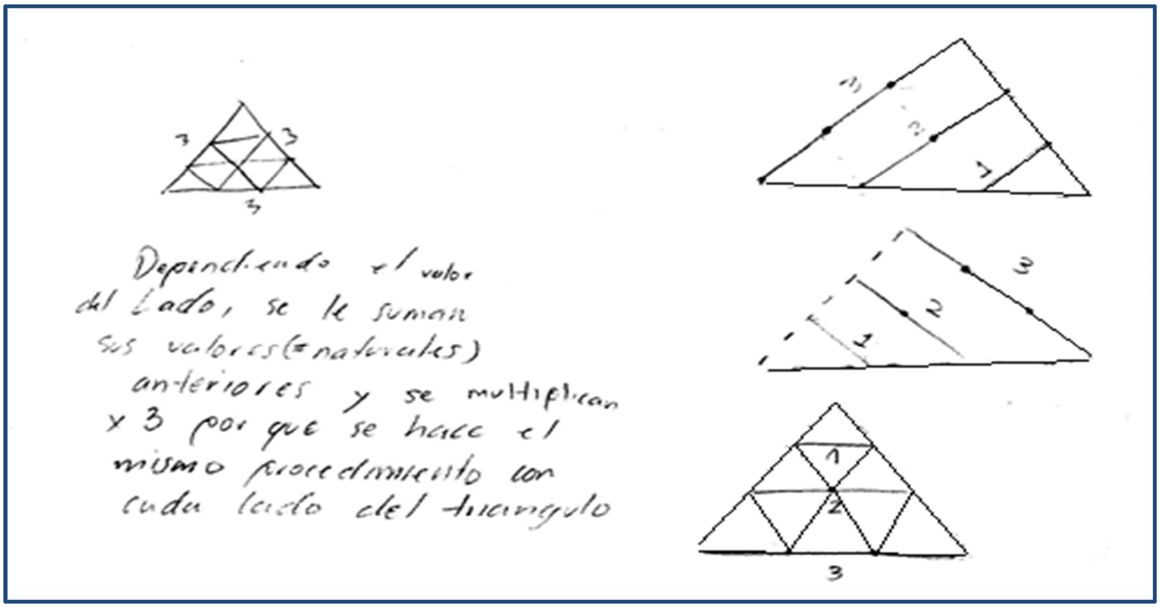
La longitud del alambre 3, 9, 18, 30, etc. Lleva una diferencia que son los multiplos de 3 y con la suma de la longitud de alambre con algún múltiplo de 3.

Ej: 3+6 = 9 → es la próxima longitud de alambre.

Figura 37. Razonamiento del grupo 1

El trabajo realizado por este grupo permite concluir, que tanto los esquemas como las tablas cumplen un papel importante en el proceso de matematización, en la medida en que acercan a los estudiantes a relaciones que más adelante pueden constituirse en modelos matemáticos de la situación.

Finalmente, el grupo 4 haciendo uso de las gráficas dadas en la tarea, lograron transformar los dibujos y observar nuevas relaciones que los condujeron a la creación de un modelo cuadrático de la situación (ver figura 38).

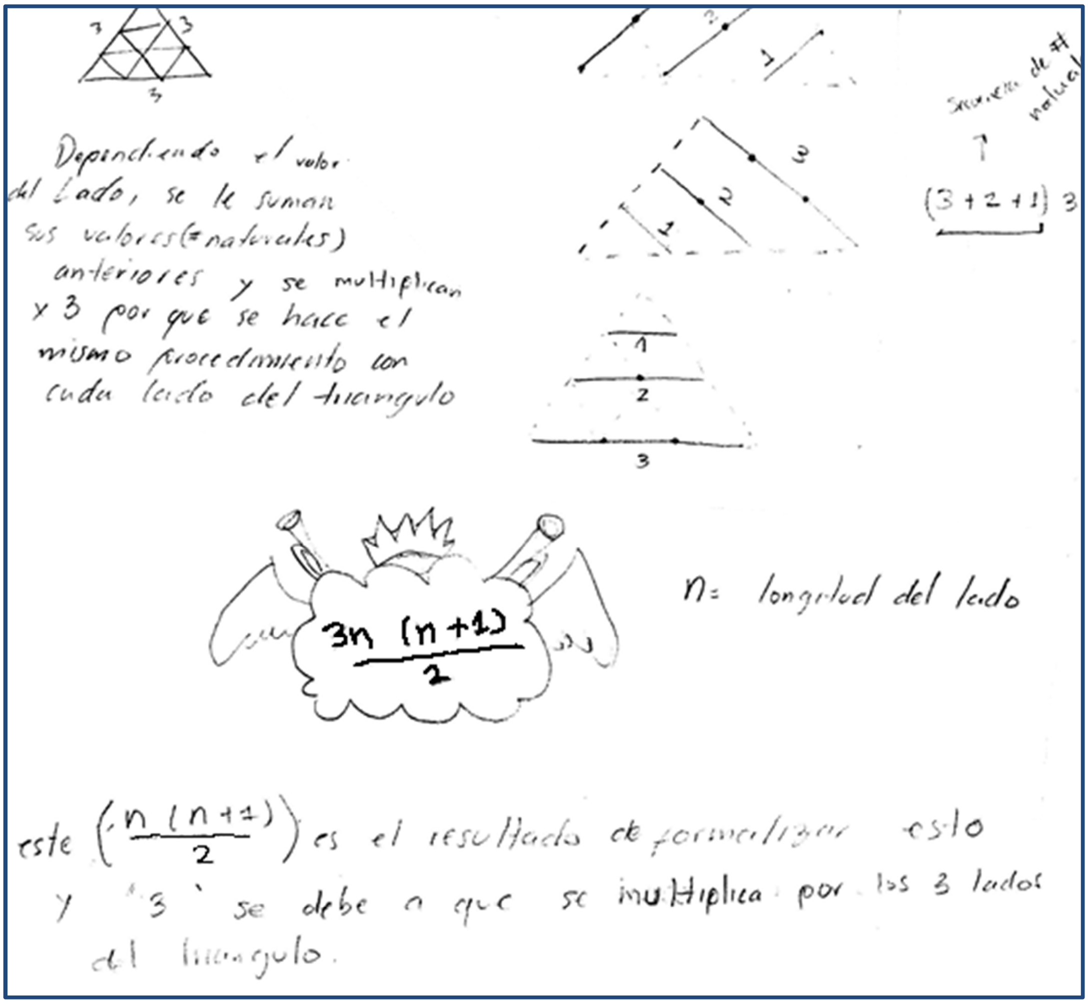


Dependiendo el valor del lado, se le suman sus valores (# naturales) anteriores y se multiplican × 3 porque se hace el mismo procedimiento con cada lado del triángulo.

Figura 38. Modelo inicial construido por el grupo 4

Esta producción muestra que a partir de realizar una trasformación en un dibujo, se pueden encontrar relaciones que hasta el momento no eran evidentes. Este grupo se percató de tener en cuenta las líneas paralelas en cada arreglo, hecho que los llevó a considerar el modelo desarrollado en la tarea 2, pues requerían la suma de los primeros *n* números y simplemente multiplicarlo por tres.

De esta manera, los estudiantes utilizaron el modelo que ellos mismos habían construido en la tarea anterior, y lograron vincularlo a la situación para dar origen al nuevo modelo matemático (ver figura 39).



Este $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ es el resultado de formalizar esto y "3" se debe a que se multiplica por los 3 lados del triángulo.

Figura 39. Modelo final construido por el grupo 4

Este modelo pone de manifiesto un avance en los niveles de comprensión de los integrantes del grupo, donde se evidencia el paso de un *modelo de* la situación (dibujos, gráficas y diagramas) a un *modelo para* donde lo simbólico se destaca ampliamente. Además, es interesante ver como los integrantes del grupo, logran restructurar sus conocimientos, de tal forma que los modelos que organizaban otras situaciones funcionan como nuevos objetos que modelan una situación diferente, aunque con características similares. Es precisamente este carácter general del modelo y su vinculación con otros lo que permite que los estudiantes del grupo se ubiquen en un *nivel formal*.

Así pues, los avances más significativos alcanzados por el grupo 4, se basan sobre la comprensión que pudieron adquirir de la situación, mediante la elaboración de esquemas, tablas y dibujos que finalmente, sirvieron para conectar el camino entre los conocimientos informales de los estudiantes y la matemática inherente a la situación, afianzando el proceso de matematización progresiva, donde el grupo se ubicó en un *nivel de comprensión formal* particularmente, por el vínculo que establecieron entre la situación y los modelos construidos para la organización de otra situación.

4.3. CONSIDERACIONES FINALES DEL ANÁLISIS PROSPECTIVO

Los niveles de matematización se configuran cuando los estudiantes trabajan en la creación y uso de modelos. En particular, se encontró que los estudiantes hacen uso de diferentes conceptos matemáticos, procesos intuitivos y estrategias heurísticas para encontrar modelos que les permitan conectar el mundo de las matemáticas con fenómenos cercanos a su cotidianidad y en consecuencia, avanzar en sus niveles de comprensión.

En otras palabras, los estudiantes emplean representaciones, procedimientos y conceptos matemáticos para interpretar la situación planteada, pero lo hacen, en un primer nivel mediante los elementos que les puedan ofrecer el contexto, de tal manera que poco a poco van comprendiendo las ideas matemáticas inmersas en el problema.

Los planteamientos expuestos en el análisis prospectivo, también permiten rescatar la manera en que las tareas diseñadas, lograron cumplir con el propósito destinado en los objetivos de la investigación, aspecto que se visualiza claramente en la multitud de modelos construidos por los mismos estudiantes en diferentes niveles de complejidad.

De hecho, dentro de la gestión de las tareas fue posible apreciar que a medida que se desarrollaban las actividades, el interés de los estudiantes era mayor, en lo concerniente a la producción de modelos y, aunque existieron ciertas dificultades para trabajar con símbolos de las matemáticas se preocupaban por generar diferentes representaciones gráficas, como la descripción verbal y la tabla de valores de la situación para interpretar la situación-problema planteada.

De esta manera, los estudiantes ocuparon un lugar activo en el proceso constructivo, debido a que ellos mismos construían sus propios modelos sin tener que limitarse a la generación de un modelo general, sino que además intentaban comprender porque una estrategia podría ser útil o no, para la resolución de la situación problemática.

Al respecto, una limitación importante detectada en los estudiantes durante este trabajo con modelos, esta relacionada con la compleja tarea que demanda para ellos construirlos, particularmente cuando se requiere el uso de símbolos y notaciones de la matemática. No obstante, el mismo desarrollo de la práctica mostró que paulatinamente los estudiantes pueden ir adquiriendo mejor comprensión sobre lo que hacen, así como un trabajo más potente en el contexto formal de las matemáticas, hasta llegar a *organizar* tanto, la matemática inmersa en la situación, como la matemática misma.

Es importante anotar que este análisis prospectivo, ilustra ostensiblemente que los estudiantes se dan cuenta de la necesidad de emplear herramientas matemáticas para el análisis de las situaciones no matemáticas. Aspecto que se evidenció en sus producciones escritas, a través del progreso en los modelos elaborados dentro de ciertos grupos de trabajo, modelos que inicialmente emergían de una exploración informal, donde los dibujos, los gráficos y los esquemas actuaban como representaciones para encontrar regularidades entre las variables implicadas y, que posteriormente apoyaban la construcción de fórmulas de recurrencia o expresiones algebraicas.

Por otra parte, cabe destacar que la fundamentación teórica de las tareas diseñadas, ocupó un papel esencial para poder dar cuenta de los procesos de matematización de los estudiantes del caso, puesto que fueron los criterios definidos en ese apartado, los que posibilitaron la visualización de las características encontradas en el proceso de modelación, dejando en un segundo plano la conceptualización de lo cuadrático que a futuro podría ser objeto de otra investigación.

4.4. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

La investigación, tenía como propósito caracterizar el proceso de modelación matemática (matematización horizontal y vertical) desde los principios teóricos y metodológicos de la EMR, en un grupo de estudiantes de los últimos grados de educación media (10° y 11) cuando se involucran en el trabajo con modelos cuadráticos.

En este sentido, siendo critico con lo que sugiere el modelo de la EMR, el mayor logro de esta investigación es haber encontrado que los estudiantes atraviesan por diferentes etapas o fases de matematización; horizontal y vertical, que pueden especificarse aún más, a través de los *niveles de compresión*.

Como consecuencia, se encontró que los estudiantes pueden situarse dentro de uno de estos niveles, pero debido a que sus modelos poco a poco van evolucionando, hasta adquirir un carácter más general, dicho posicionamiento tiene necesariamente un valor relativo.

De esta manera, se pudo dar cumplimiento al propósito general de esta investigación, enmarcado en describir cómo son los procesos horizontales y verticales de matematización, aunque una proyección importante que se puede derivar de esta experiencia, es poder estudiar el impacto que tiene esta descripción en lo concerniente a los procesos de conceptualización y/o comprensión de los objetos matemáticos, particularmente de lo cuadrático.

Por otro lado, los contextos y los modelos abordados, demostraron ocupar un lugar protagónico en la integración de la modelación matemática para el trabajo matemático, esto se refleja inicialmente, en la fundamentación teórica de las tareas diseñadas, pero transciende al plano de lo práctico al mostrar que este tipo de tareas logran:

a) Dar un lugar central a los estudiantes, no como receptores pasivos, sino más bien sujetos activos que construyen la matemática mediante herramientas que se basan en consideraciones propias, que paulatinamente se desarrollan y evolucionan.

b) Promover la interacción y reflexión entre los estudiantes, dando lugar a la creación de diversos modelos con niveles de abstracción diferentes

c) Crear la necesidad, por parte de los estudiantes, de construir modelos que les permitan comprender la situación y en algunos casos resolverla.

Por otro lado, esta investigación permite sentar bases para proponer un “modelo de trabajo” donde se especifican cuales deben ser los aspectos a tener en cuenta en el diseño y la gestión de las tareas, posibilitando de esta manera, una mejor integración de la modelación matemática en las aulas de clases y facilitando su implementación por parte de los docentes. En consecuencia, hemos identificado como podría ser el desarrollo de las actividades propuestas desde la EMR, en el aula.

En relación con el diseño de las tareas, el “modelo de trabajo” propuesto deja entrever algunos elementos teóricos implicados, como son: los requerimientos de los contextos, para que den lugar de modo más o menos natural a la matematización progresiva y, la necesidad de realizar un análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos implicados, con el objeto de reconocer situaciones problemáticas que puedan evocar procedimientos paradigmáticos como base para dicha matematización progresiva.

De otra parte, en lo concerniente a la gestión de las tareas, este “modelo de trabajo” podría aportar elementos que ayuden a constituir una estrategia didáctica basada en las directrices metodológicas de la EMR para el trabajo con modelos. De esta manera, los momentos de intervención expuestos en la investigación, pueden llegar a representar un camino propicio para abordar la gestión de cualquier diseño que se elabore en la EMR, independientemente del contenido matemático central que se quiera problematizar.

Así pues, a partir de esta investigación se crean ciertas condiciones que bien, podrían servir para desarrollar los momentos de la práctica en un escenario experimental como el Lab Mat UV, pero que podrían ser igualmente útiles para la gestión de tareas en el ámbito escolar. Es importante que los estudiantes pasen por momentos donde primero, conformen sus grupos de trabajo con base en diferentes niveles de habilidades, que seguidamente sientan interés y disposición por las actividades diseñadas, lo que eventualmente podría llevarlos a construir modelos con diferentes niveles de complejidad y, finalmente que discutan sus resultados, con el fin de verificar y validar lo que han obtenido.

Entonces, lo más relevante en esta investigación, es haber propuesto un "modelo de trabajo" que surgió a partir de la interpretación de los principios teóricos y metodológicos de la EMR, para abordar un contenido matemático sin precedentes en este enfoque (lo cuadrático). Además, dicha interpretación nos permitió reconocer que el modelo de trabajo no es neutro, sino que está influenciado por aquello que se va a problematizar. En este caso, el interés por estudiar las características del proceso de modelación le dio un matiz diferente a esta investigación, diferenciándola de aquellas investigaciones que buscan estudiar el papel de la modelación matemática en la construcción del conocimiento matemático y a su vez correspondiéndola con esas mismas, ya que a futuro podría ser usada para enriquecer el trabajo con modelos y eventualmente promover estrategias para estudiar la incidencia de los contextos en el aprendizaje de las nociones cuadráticas.

En síntesis, como fruto de esta investigación es posible afirmar:

1. Nuestra investigación dio lugar a un marco teórico y una aproximación metodológica que permitió establecer nexos e interrelaciones entre los procesos de matematización, el diseño de tareas y el trabajo con modelos cuadráticos en el contexto de la EMR. En este orden de ideas se identificaron elementos que posibilitaron la conceptualización de base para abordar el problema y la metodología. Estos elementos incluyen:

- La noción de modelación matemática
- La noción de modelo matemático
- La noción de matematización
- El saber, esto es, el conocimiento matemático de lo cuadrático
- La gestión en un escenario experimental, a saber, el Laboratorio de Matemáticas

2. El trabajo con la modelación matemática desde la perspectiva de la EMR exigirá estrategias de formación y cualificación de docentes que en el mediano plazo y largo plazo, permitan su asimilación. En este sentido la experiencia de trabajo con estudiantes permitió identificar una vía inicial en términos de los dispositivos y acciones a desarrollar.

Entre los elementos de este modelo se destacan la importancia de familiarizar a los estudiantes con un trabajo experimental a partir de situaciones que promuevan la exploración, el planteamiento de conjeturas, generalizaciones que permitan que se vayan avanzando por niveles de matematización cada vez más complejos. De igual manera, el trabajo en un escenario como un *laboratorio de matemáticas* fue central para crear un ambiente propicio para la motivación, el trabajo libre de los estudiantes, para promover el intercambio de ideas y el trabajo colaborativo, elementos que entran en consonancia con los principios de la EMR.

3. La Educación Matemática Realista, ofrece un marco teórico y metodológico que podría ser fructífero para promover un acercamiento particular a los procesos de modelación matemática en el aula y materializarse en estrategias de intervención en las aulas de matemáticas. En efecto, este trabajo de investigación en el contexto de la EMR puede extenderse a otros dominios matemáticos (lo exponencial, lo trigonométrico, lo logarítmico) y entrar en contacto con enfoques en *Didáctica de las Matemáticas* que también abordan desde lo teórico y metodológico la modelación matemática, a saber, la TAD, o entrar en contacto con enfoques de la modelación matemática que se realizan en el marco del trabajo con las tecnologías de la información y la comunicación en la escuela.

Acorde con los planteamientos anteriores, esta investigación deja abiertos los siguientes interrogantes:

- ¿Cómo diseñar y gestionar tareas de la EMR para promover el aprendizaje de las nociones cuadráticas?

- ¿De qué manera la propuesta de trabajo implementada en esta investigación podría contribuir al diseño de situaciones que involucren otros contenidos matemáticos, para su aprendizaje?

REFERENCIAS

- Arboleda, N. & Meneses, R. (1996). Función polinómica de segundo grado: modelo diseñado con hoja de cálculo. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-112709_archivo.pdf. Consultado el 13/11/2011.

- Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. Disponible en: www.sinewton.org/numeros/numeros/63/Articulo01.pdf. Consultado el 12/12/2012

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral publicada, Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

- Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid, España.

- Bassanezi, R & Biembengut, S. (1997). Modelación Matemática: Una antigua forma de investigación un nuevo método de enseñanza. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13-25.

- Berrio, M. (2011). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café*. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia). Disponible en: http://www.bdigital.unal.edu.co/5883/1/71277664.2012.pdf. Consultado en 10/10/2011.

- Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática,* 16(002), 105-125.

- Biembengut, M. & Hein, N. (s.f.) Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Disponible en: http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf. Consultado el 09/10/2011.

- Blomhoj, M. (2009). Different perspectives on mathematical modelling in educational research. En Blomhoj, et al. (eds.), *mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics*, ICMI, 1-18.

- Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In Clarke, et al. (eds.), *international perspectives on learning and teaching mathematics*, Göteborg: national center for mathematics education, 145-159.

- Borromeo, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *J Math Didakt,* 31, 99-118.

- Bosch, M., García, F., Gascón, J. & Higuera, L. (2006). La Modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una Propuesta desde la teoría Antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, 18 (002), 37-74.

- Bravo, J. (s.f.). la parábola. Disponible en: http://www.sectormatematica.cl/media/NM3/LA%20%20PARABOLA%20jaime.pdf. Consultado el 21/01/2012.

- Bressan, A. & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.

- Bressan, A., Zolkower, B. & Gallego, M. (2004). La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. Escuela de inverno en Didáctica de la Matemática.

- Bressan, A. & Zolkower B. (s.f.). Educación matemática Realista. Ideas y experiencias en torno a la capacitación de docentes. Disponible en: www.gpdmatematica.org.ar/.../conferencia_salto_uruguay.pdf. Consultado el 15/10/2011

- Bressan, A. (s.f.). Representaciones y modelos en la matemática realista. Disponible en: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/representaciones_ymodelos.pdf Consultado el 3/10/2011.

- Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. (tesis inédita de maestría). Instituto politécnico nacional: centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México.

- Font, V. (2008). Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas.. Disponible en http://www.slideshare.net/cartoni21/tendencias-actuales-en-la-enseanza-de-lamatematica. Consultado el 5/09/2011.

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Reidel.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht.

- Garzón, D. (2012). *Caracterización de los vínculos entre los Recursos Pedagógicos y el Conocimiento Matemático en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica*. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Documento de trabajo.

- Godino, J. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino, consultado el 01/10/2011.

- Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una educación matemática realista. En Gorgorió, Balachef y otros (comp.), *Matemática y Educación. Retos y cambios en una perspectiva internacional*, ICE, Universidad de Barcelona, Ed. Graó.

- Graveimejer, K. & Terwuel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J. Curriculum Studies*, 32(6), 777- 796

- Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129

- Guin, D., Joab, M. & Trouche, L. (2008). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFODEM (2000-2006), INRP et IREM (Université Montpellier 2)

- Guin, D. & Trouche, L. (eds.) (2002). Calculatrices symboliques: transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.

- Guin, D. & Trouche L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, The International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3 (3), pp. 195-227.

- Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (eds.) (2004). The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument (contributions of M. Artigue, P. Drijvers, P. Elbaz-Vincent, J.B. Lagrange, M. Kendal, R. Pierce & K. Stacey), Springer.

- Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education Examples and Experiences. *J Math Didakt*, 31, 51-76.

- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. (*ZDM*) *the international journal on Mathematics Education*, 38(3), 302-310.

- Lacasta, E. & Pascual, J. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid, España.

- Lagrange, J. (2000). L'intégration des instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. Ed. Stud. in Math. 6(2): 143-165.

- Lagrange, J. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4(1) pp. 51-81.

- Lesh, R. & Doerr, H. (eds.) (2003). *Beyond contructivism: models and modelling perpectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah:Lawrence Erlbaum.

- López, F. & Velázquez E. (2006). Un ejemplo de la utilidad de los contextos en la matemática realista: los algoritmos de suma y resta por columnas. Disponible en: www.box.com/shared/static/a2497an0iv.pdf. Consultado el 20/12/2011.

- Luna, J. & Bravo, M. (s.f.). Enseñanza de la función cuadrática interpretando su comportamiento al variar sus parámetros. Disponible en: http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at05/PRE1178753682.pdf. Consultado el 23/12/2011.

- Maab, K. & Mischo, C. (2011). Implementing Modelling into Day-to-Day Teaching Practice – The Project STRATUM and its Framework. *J Math Didakt*, 32, 103-131.

- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 20, 165-193.

- Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A. & Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma*, 22 (1), 59-94.

- Mesa, Y. & Villa, J. (2011). Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función Cuadrática. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

- Mesa, Y. & Villa, J. (2007). Elementos históricos epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. Disponible en: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/169. Consultado el 20/12/2011.

- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Magisterio.

- Morra, L. & Friedlander, A. (2001). Evaluaciones mediante estudios de caso. Disponible en: *www.worldbank.org/html/oed*. Consultado el 20/01/2012.

- Oaxaca J. & Valderrama M. (s.f) enseñanza de la función cuadrática interpretando su comportamiento al variar sus parámetros. Disponible en: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at05/PRE1178753682.pdf. Consultado el 21/01/2012.

- Pabón, O. & Arce, J. (2012). El Laboratorio de Matemáticas (LabMatUV) como estrategia de acompañamiento al diseño y uso de recursos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Documento de trabajo

- Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los países bajos: un recorrido guiado. *correo del maestro,* 149,23-54.

- Panhuizen, M. (2003). Didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 9–35.

- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. Cap III del libro: La educación matemática en la enseñanza secundaria. Rico L. (eds). ICE. Ed: Síntesis.

- Reeuwijk, M. (1997). En las matemáticas en el entorno. *Uno*. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 12, 9-16.

- Sanmartí, N., Burgoa, B. & Nuño, T. (2011). ¿por qué el alumnado tiene dificultad para utilizar sus conocimientos científicos escolares en situaciones cotidianas? *Alambique Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 67, 62-69.

- Santamaría, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda*. Disertación doctoral publicada, universidad Nacional del Conahue.

- Trigueros, G. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9 (46), 75-87.

- Triviño, J. (2011). ¿existe situaciones cotidianas cuyo modelo matemático corresponde a una función de proporcionalidad? Memorias 12 encuentro Matemática Educativa. Quindío, Colombia.

- Valero, P. (2006). ¿De carne y hueso? La vida social y política de las competencias matemáticas. In Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ed.), Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia – Competencias matemáticas. Bogotá.

- Valoyes, L. & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

- Villa, J & Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. Disponible en: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1942/194215432007.pdf. Consultado el 5/11/2011.

- Yacuzzi, E. (s.f.). El estudio de caso como metodología de investigación: Teoría, mecanismos causales, validación. Disponible en: http://www.automark.com.mx/MYRNA_estudiosdecaso.pdf. Consultado el 12/12/2011.

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta aplicada a los participantes de la investigación

Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA
CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES

instituto de educación y pedagogía

A. Nombre____
____

B. Nivel de escolaridad____________________________

C. Edad________________

D. Dirección de tu casa________________________________

E. ¿En que colegio estudias?____

F. ¿A que se dedica tu papá?____

G. ¿A que se dedica tu mamá?____

H. ¿Por qué estudias?____

I. ¿Piensas estudiar alguna carrera?_____________________________________ ¿Por qué?____
____
____
____

J. ¿Qué carrera quieres estudiar?____

K. ¿Te gustan las matemáticas?____ ¿Por qué?____
____
____

L. ¿Crees que son importantes las matemáticas?______________________________ ¿Por qué?____
____
____

M. ¿Para qué sirven las matemáticas?_______________________________________

N. ¿Qué importancia le das a estudiar matemáticas? (1 muy poca 10 muchísima) _____

O. ¿Qué importancia tienen las matemáticas en la vida cotidiana? (1 muy poca 10 muchísima) ____

P. ¿Qué es para ti lo cuadrático?_______________________________________

Q. ¿Qué entiendes por el término parábola?________________________________

R. ¿Qué conoces sobre ecuaciones de segundo grado?_________________________

S. ¿Qué conoces sobre la función cuadrática?______________________________

T. De estas actividades selecciona únicamente las tres que más te guste hacer:

a. Realizar ejercicios matemáticos
b. Resolver juegos como el sudoku, acertijos, crucigramas, etc.
c. Jugar con el tangram, el cubo de rugbi, torres de Hanói.
d. Resolver problemas matemáticos que involucran situaciones de tu vida diaria.

Anexo 2. CATEGORIAS DE ANÁLISIS

MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL (concreto)	MATEMATIZACIÓN VERTICAL (abstracto)		
Nivel situacional (contexto)	**Nivel referencial (modelo de)**	**Nivel general (modelo para)**	**Nivel formal (procedimientos y notaciones convencionales)**
• Uso del material concreto para representar la situación. • Aparecen las primeras representaciones gráficas no matemáticas, totalmente ligadas al contexto. • Se visualiza el problema desde diferentes puntos de vista. • Reconocimiento de la matemática relevante en la situación-problema.	• Se encuentran regularidades entre las magnitudes variables. • Las representaciones gráficas se enriquecen con objetos matemáticos. • Mediante el lenguaje natural se expresa, la relación entre las magnitudes relevantes de la situación planteada • Emergen diferentes modelos matemáticos particulares de la situación-problema, aunque se visualiza un vinculo con el contexto	• Trabajo con notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales. • Desprendimiento total del contexto. • Construcción de expresiones algebraicas • Verificación del modelo encontrado.	• Se reconocen los conceptos centrales implicados en la situación problema. • Validación del modelo matemático encontrado • Combinación de diversos modelos de la situación-problema.