instituto de educación y pedagogía

Universidad del Valle

APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL TRABAJO EXPERIMENTAL EN MATEMÁTICAS EN EL GRADO DÉCIMO

GUSTAVO ADOLFO RUEDA UPEGUI

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2012

APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL TRABAJO EXPERIMENTAL EN MATEMÁTICAS EN EL GRADO DÉCIMO

GUSTAVO ADOLFO RUEDA UPEGUÍ

CÓDIGO: 0533475

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO:

OCTAVIO AUGUSTO PABÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Aproximación a la enseñanza de las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas en el grado décimo						
Se trata de:	Proyecto [ ]			Informe Final [✓]			
Director:	Octavio Augusto Pabón						
1er Evaluador:	Diego Garzón Castro.						
2do Evaluador:	María Fernanda Mejía Palomino.						
Fecha y Hora	Año:		Mes:		Día:		Hora:

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Gustavo Adolfo Rueda U	0533475	3487

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:	2012	Mes:	10	Día:	25	Hora:	4:10 p.m

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

[firma]	DIEGO GARZON C	M. Fda. Mejía P
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones:		**Recomendaciones:**		**Razón del Desacuerdo – Alternativas:**	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales) Sugerencias de María F.

(v) Se sugiere hacer una revisión de las citas y su relación con las referencias bibliográficas. Algunas palabras no tienen en tilde como: círculo y títulos en mayúsculas.

(v) Revisar la pregunta y objetivos, en el desarrollo del trabajo, específicamente en el análisis de los resultados, no se da cuenta de la elaboración. También es necesario revisar los objetivos específicos, no existe relación con algunos desarrollos del trabajo (resolución de problemas, docentes en formación).

(v) En el trabajo no se ve profundidad en el análisis de textos escolar. Se sugiere eliminarlo, no es necesario para el desarrollo del trabajo.

(v) En la página 36 aparece Tabla 1 y en la p. 54 también. Se debe hacer lista de tablas.

(v) Algunas ilustraciones no están bien diseñadas.

(v) Existen tablas sin nombre y sin numeración

(v) En las conclusiones revisar el párrafo 3 (p. 58) y párrafo 4 (p. 59)

(v) Si en los anexos aparece un cuestionario I, aplicado a los estudiantes de décimo, no se usa en el análisis de los resultados. Hace falta el cuestionario aplicado a los docentes en formación.

NO V 1 atrás

	DIEGO CARLON C.	Ma Fda. Pérez P.
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

sugerencias de Diego.

- ✓ Revisar lo de recursos manipulativo. y material manipulativo.
- ✓ La organización del marco teórico no da cuenta de la importancia de lo experimental. (aparece como un subtítulo).
- ✓ En el análisis histórico epistemológico determina un obstáculo epistemológico sin hacer un llamado a una cita. El obstáculo mencionado aparece en el problema, no se encuentra documentado.
- ✓ La dimensión matemática se ve fragmentada.
- ✓ Cuales son las razones de selección del estudio de caso? Se sugiere revisar las técnicas e instrumentos de recolección de datos no es coherente con el desarrollo.
- ✓ Fue difícil la confrontación del diseño metodológico y el análisis de los resultados Revisar en profundidad, detallar la coherencia.
- ✓ No presenta la encuesta, ésta requiere de una elaboración profesional. No determine una muestra.

Síntesis del trabajo

Título:	Aproximación a la Enseñanza de las Razones Trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas en el grado Décimo.
Investigadores:	Gustavo Adolfo Rueda Upeguí
Director trabajo de grado:	Octavio Augusto Pabón Ramírez
Evaluadores:	Diego Garzón Castro María Fernanda Mejía Palomino
Palabras claves:	Razones trigonométricas, matemáticas experimentales, manipulativos, didáctica de las matemáticas, trabajo experimental.
Objetivos:	**General** Elaborar una serie de tareas para la enseñanza de las razones trigonométrica dirigida a estudiantes de grado décimo y docente de matemáticas en formación que involucre el uso de *manipulativos*. **Específicos** • Identificar algunos aspectos didácticos en relación con la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, en particular de las razones trigonométricas. • Elaborar una serie de tareas, relativa a las razones trigonométricas dirigidas a docente de matemáticas en formación al igual que a estudiantes de grado décimo. • Analizar el rol de *manipulativos* en algunos aspectos de la resolución de problemas y la comprensión de las razones trigonométricas.
Metodología:	La metodología adoptada para analizar el proceso de resolución de problemas es de tipo cualitativo de corte descriptivo – interpretativo.

Resumen:

El presente proyecto se inscribe en la Línea de Investigación ***Didáctica de las Matemáticas*** del Programa Licenciatura en Matemáticas y Física del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Se plantea como una estrategia didáctica dirigida a aportar al aprendizaje de las razones trigonométricas y promover la formación de pensamiento matemático de los estudiantes del grado décimo.

El problema identificado para el trabajo, resulta de un análisis de las investigaciones recientes en didáctica de las matemáticas en relación con la enseñanza de la trigonometría en la educación media. De esta manera, propone una estrategia de elaboración de actividades y tareas para la enseñanza de las razones trigonométricas a partir del uso de *manipulativos*, bajo el supuesto que los *manipulativos* ofrecen la posibilidad de contextualizar las abstracciones matemáticas y facilitar el aprendizaje.

El proceso experimental se concibe a partir del estudio de las algunas de las conductas y desempeños matemáticos de los estudiantes participantes, apoyado en estrategias de recolección y sistematización de información que incluyen encuestas y cuestionarios que permiten un comprehender algunas creencias alrededor de las razones trigonométricas.

AGRADECIMIENTOS

El desarrollo de este trabajo de grado solo ha sido posible gracias a la colaboración, a la compresión y a las palabras oportunas de muchas personas a las que debo gratitud.

En primer lugar quisiera agradecer a Octavio Augusto Pabón, por la oportunidad que me ha brindado para realizar este proyecto y aprender de él, también al Instituto de Educación y Pedagogía que me permitieron realizarlo.

A mis padres y a mi hermana pues cuando tuve dificultades ellos supieron como orientarme y sus consejos siempre me han ayudado. Y por su puesto al resto de mi familia por depositar su confianza en mí.

A todos mis profesores, desde el colegio hasta la universidad, a Miriam Vega, Teresa Pontón, al Profesor Diego Garzón, a la Profesora Ligia Amparo Torres, a la profesora María Fernanda., muchas gracias por su ayuda. Y en especial a mi profesor Harold Murillo por todo lo que aprendí de él.

A todos mis compañeros y amigos de la universidad, sobre todo a Mónica, porque sin ella, vuestros consejos, vuestros resúmenes, y vuestra ayuda no estuviera escribiendo estas líneas.

A toda mi familia que han sabido soportar con estoicismo mi larga ausencia. *¡Mil gracias los quiero mucho!*

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTADO DE TABLAS.

TABLA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se inscribe en la *Línea de Investigación Didáctica de las Matemática*s del Programa Licenciatura en Matemáticas y Física, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle.

Se propone estudiar condiciones y posibilidades involucradas en la elaboración y uso de *manipulativos* para la enseñanza de las *razones trigonométricas* en el grado décimo. Para tal propósito se realizaron actividades que incluyeron entre otras: revisión de bibliografía especializada en didáctica de las matemáticas sobre las razones trigonométricas y el uso de *manipulativos* (Geoplano circular trigonométrico), diseño de actividades y tareas, la recolección y sistematización de las producciones de los estudiantes.

En importante señalar que la enseñanza de la trigonometría en la Educación Secundaria es un asunto de permanente interés a nivel de la investigación en didáctica de las matemáticas y del trabajo en las clases de matemáticas (Pineiro, Ibanez, & Ortega, 1998). En efecto, se considera un campo matemático estrechamente relacionado con tipos de pensamientos matemáticos tales como el geométrico, algebraico y variacional, por citar algunos; con procesos matemáticos (como el planteamiento y la resolución de problemas y la modelación matemática) y con contextos matemáticos y de otras disciplinas (como la física y la topografía)

Además en este documento se otorga especial significación al trabajo experimental en matemáticas.

En relación estrecha con lo anterior se encuentra el interés por ofrecer puntos de vista fundamentados sobre el uso de *manipulativos* en la enseñanza de las matemáticas e igualmente promover a futuro un espacio de debate crítico y comunicación de profesores de matemáticas en formación y en ejercicio, que promueva estrategias efectivas para la formación de pensamiento matemático de los estudiantes en los distintos niveles de escolaridad.

CAPITULO 1. EL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA

La trigonometría es uno de los temas en investigación en educación matemática que no ha recibido suficiente atención. Como se ha señalado por (Rojano, 2003) gran parte de la literatura sobre la trigonometría se ha enfocado en las funciones trigonométricas. (Even, 1989; Even, 1990; Bolte, 1993; Howald, 1998). Otros estudios se centran en el aprendizaje y la enseñanza de la trigonometría y de las funciones trigonométricas cuando se las trabaja en ambientes informáticos y computacionales (Blacket & Tall 1991; Wenzelbur, 1992, Silva, 1994; Lobo da Costa & Magina, 1998) Unos pocos investigadores estudiaron cuestiones más específicas en trigonometría, tales como la simplificación de expresiones trigonométricas (Delice 2002) y la relación entre la trigonometría y las fuerzas de la física (Doerr y Confrey 1994).

Tampoco existen muchas referencias significativas en cuanto concierne al estudio didáctico de temáticas de la trigonometría, como las razones trigonométricas, que parecen ser temáticas preliminares de carácter procedimental y de iniciación a las funciones trigonométricas. Más aun, no existen muchas propuestas de trabajo de estas temáticas apoyadas en recursos pedagógicos, a excepción de trabajos realizados en la última década con ambientes de geometría dinámica y CAS.

Por este motivo, se exhorta a la investigación permanente en búsqueda de autores y teoría que problematicen el aprendizaje de las razones trigonométricas en grados superiores involucrando el uso de *manipulativos*, en este trabajo se realizaran unas consideraciones con algunos autores como Montiel (2005), Pritchard y Simpson (1999) los cuales plantean secuencias de aprendizajes usuales en la enseñanza de la trigonometría que de alguna manera han excluido el uso de *manipulativos* y que ayudaran a entender la importancia del uso de *manipulativos* en el aprendizaje de la trigonometría.

Este último asunto es de gran importancia, dado que en algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas desarrolladas en los últimos años se reconoce un interés creciente por precisar el impacto de los *manipulativos*[1] en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, discutir las limitaciones de su uso y estudiar las posibilidades de la integración en la clase de matemáticas, debe hacerse la aclaración no que es la intención de este trabajo no es la de construir una nueva categoría de manipulativo, se considerara este término en sus sentido más básico desde una concepción experimental donde existe una

[1] En el presente trabajo cuando se habla de *manipulativos* se hace referencia a lo que tradicionalmente se conoce como *manipulative*, que son de naturaleza tangible y que incluyen entre otros a impresos, geoplanos, tangram, fichas y guías de trabajo elaboradas con diversos tipos de materiales y que tradicionalmente se usan para el estudio de conceptos matemáticos.

mediación cuando se usa el manipulativo de manera experimental. (Post, T., 1981; Godino, 1998 Thompson, 1990).

De esta manera, se considera que el uso de *manipulativos* permite contextualizar las abstracciones matemáticas y facilitar el aprendizaje. Igualmente se señala que el uso de estos recursos, que incluyen también los simbolismos gráficos y textuales, puede asimismo crear obstáculos para la comprensión de las matemáticas. De igual manera, desde hace algunas décadas atrás se ha establecido una relación substancial entre el uso de *manipulativos* y el desempeño de los estudiantes (Post, T., 1981). Este es un asunto complejo, pues también se señalaba que existían relativamente pocos programas curriculares. Sin embargo, en algunas comunidades autónomas españolas, y en otros países, se sugiere el uso demanipulativos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. Estas propuestas vienen apoyadas por instituciones prestigiosas como el NCTM 2000, que ha dedicado varias publicaciones a este tema. Se suele aducir que "los materiales *manipulativos* ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real" (Kennedy, 1986, p. 6).

A pesar de ser un tema de preocupación constante en las diversas propuestas de reforma de la enseñanza de las matemáticas y la abundancia de publicaciones sobre el tema. Autores como Godino (1998). Señalan que es necesario profundizar sobre el sentido, fundamento y problemática que plantea a los profesores y a los investigadores en didáctica de las matemáticas el uso de *manipulativos*, en el estudio de las matemáticas que incorporaran un *componente experimental* significativo y la mayoría se concentraba en el trabajo con textos y guías escolares. (Post, T., 1981).

Las nuevas aproximaciones teóricas en didáctica de las matemáticas han revitalizado la idea del *trabajo experimental* soportados en la integración de *manipulativos* de diversa índole. Se considera que estos recursos constituyen un soporte que podría contribuir a mejorar el desempeño del estudiante en la realización de actividades cognitivas de nivel superior permitiéndole resolver problemas que exigen poner en juego habilidades relacionadas con el razonamiento matemático.

Esto es justamente uno de los aspectos centrales de los fundamentos de las evaluaciones internacionales (PISA, 2007 & TIMSS, 2007) pues se considera que tales habilidades son las que le van a permitir al individuo enfrentar exitosamente los retos de un mundo globalizado y tecnificado. Más aun, esta discusión llama la atención sobre la necesidad de replantear los programas curriculares, de manera que estos tengan una doble orientación: disciplinar y formativa, como lo sugieren los estándares internacionales.

De esta manera, se vislumbra la posibilidad de realizar investigaciones relativas a los aprendizajes con trabajo experimental que podrían clarificar en qué medida, estrategias de aprendizaje basadas en ambientes experimentales que involucran la integración de recursos pedagógicos, incluyendo las TIC’s repercuten en la disminución de bajos desempeños académicos en las pruebas estandarizadas.

En Colombia los estudiantes tienen un rendimiento más bajo que el promedio internacional Ver Ilustración 1.

Ilustración 1.Pruebas TIMSS 2007.

En este orden de ideas, se hace evidente la necesidad de problematizar desde la didáctica de las matemáticas la naturaleza, alcances e implicaciones de las llamadas matemáticas experimentales y su conexión con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar, que en nuestro caso se refiere al estudio de las razones trigonométricas. Esta serie de consideraciones, nos permiten plantear el siguiente interrogante de investigación:

¿Qué posibilidades y limitaciones están involucradas en el uso de actividades y tareas que involucra un recurso manipulativo para la enseñanza de las razones trigonométricas en el grado décimo?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 GENERAL

- Elaborar una serie de tareas para la enseñanza de las razones trigonométrica dirigida a estudiantes de grado décimo y docente de matemáticas en formación que involucre el uso de *manipulativos*.

1.2.2 ESPECÍFICOS

- Identificar algunos aspectos didácticos en relación con la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, en particular de las razones trigonométricas.

- Elaborar una serie de tareas, relativa a las razones trigonométricas dirigidas a docente de matemáticas en formación al igual que a estudiantes de grado décimo.

- Analizar el rol de manipulativos en algunos aspectos de la resolución de problemas y la comprensión de las razones trigonométricas

2 CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este trabajo tomamos en consideración algunos referentes teóricos que se revelan como centrales para la elaboración de una serie de tareas dirigida a la enseñanza de las razones trigonométricas en el grado décimo que involucre el uso de *manipulativos*.

En este punto, adoptamos más que como un enfoque, como un principio, la consideración de Filloy (1999). según la cual algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas responden a las condiciones particulares de una institución educativa donde se lleve a cabo y que eventualmente sus resultados podrían ser utilizados o considerados como referentes para el estudio. Este principio en nuestro caso entra en correspondencia con la idea de la integración del trabajo experimental para el trabajo con conceptos y/o procesos matemáticos. De igual manera, Filloy plantea que para organizar una investigación se deben tener en cuenta dos partes principales relacionadas: una teórica y otra empírica.

El desarrollo de la parte teórica, involucra modelos teóricos que tienen que ver con la didáctica de las matemáticas, el uso de *manipulativos* y el estudio de las dimensiones h histórica epistemológica, matemática y curricular.

3.1 ASPECTO HISTÓRICOS Y MATEMATICOS

Un análisis histórico epistemológico de una determinada noción se usa en algunos enfoques de la Didáctica de la Matemáticas, no necesariamente para reintroducir el método histórico - cronológico en la enseñanza, sino entre otras cosas, para realizar un análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el caso de las razones trigonométricas, puede señalarse que históricamente ha existido una dicotomía en la enseñanza de la trigonometría que representa un obstáculo para los estudiantes pues por un lado, tenemos una aproximación con el triángulo rectángulo donde los ángulos se medien en grados y se definen funciones trigonométricas como proporciones de los lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, nos encontramos con el círculo donde los ángulos se miden en radianes y las funciones trigonométricas se expresan en términos de coordenadas cartesianas de un círculo unitario ubicado en el origen, frente a estos dos enfoques conceptuales de la trigonometría no se deben sorprender los maestros porque sus estudiantes se confundan. A continuación se mostrara brevemente como se han construido estos dos enfoques en la historia de la trigonometría y desde la dimensión matemática y didáctica se hará evidente su protagonismo en la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas.

3.1.1.1 ORIGEN DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS

La trigonometría tuvo su origen con el círculo trigonométrico en la observación de los cielos en Grecia y se tardó más de un siglo de desarrollo inicial por Hiparco antes del segundo siglo D.C para tomar fuerza con el triángulo rectángulo, pero esto no fue totalmente desarrollado hasta el exhaustivo trabajo desarrollado por Al-Biruni, en las sombras 1021, aun así las importancia de las aplicaciones de la trigonometría con el triángulo rectángulo y la interpretación de las funciones como proporciones de los lados de un triángulo rectángulo no tuvo relevancia hasta mediados del siglo XVI. Este panorama histórico sustenta el comienzo del estudio de la trigonometría con el círculo trigonométrico, la definición de las funciones trigonométricas y ángulos.

La mayoría de los estudiantes ignora cuál es la relación trigonométrica entre una cuerda y un arco subtendido en un círculo de radio R. (Ver Ilustración 2). Esto dificultad la comprensión de las razones trigonométricas. Puede que esto no sea evidente, pero si rotáramos el círculo de tal manera que la cuerda tomara una posición vertical e insertáramos unas cuantas líneas radiales vemos como mitad de la longitud del arco, no es más que la función seno θ de, como se muestra en la Ilustración 3.

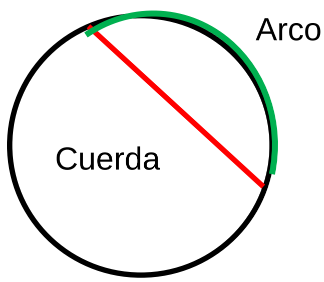


Ilustración 2. Circulo de radio L con una cuerda que mide igual al arco subtendido sobre el círculo.

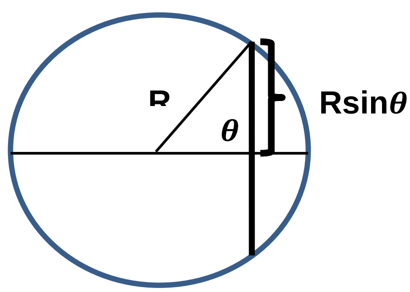


Ilustración 3.Cuando la cuerda se intercepta con un arco de 2θ, entonces su longitud es 2Rsinθ, donde R es el radio.

Este cálculo proporciona el nombre de la razón trigonométrica seno, en tanto, fuente de este nombre reside en la denominación sanscrita para el cordón, y la condición de seno la llamaron Ardha-jya, que significa “Medio Acorde”. Con el tiempo, los astrónomos preferían trabajar con la mitad de la cuerda, lo que hizo que el prefijo se cayera y quedo únicamente Jya como media cuerda o sinusoidal. (Bressoud, D, 2010.)

Más adelante con Aristarco (310 – 230 A.C.) se tiene la primera muestra existente de la geometría pura utilizada con un objeto trigonométrico. Aristarco sostenía que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto (90º) formado por las líneas Sol- Luna y Luna-Tierra. Aristarco, como todos sus contemporáneos, suponía que la órbita de la Luna era un círculo en cuyo centro está la Tierra- Luna es recto, es decir, el lapso entre Cuarto Creciente-Luna Llena, Luna llena- Cuarto menguante, Cuarto menguante – Luna nueva y Luna nueva-Cuarto creciente, serian iguales. En cambio si el sol se encuentra a una distancia finita, sus rayos divergen formando un ángulo (Ilustración 2) El lapso entre la Luna nueva y el cuarto creciente es menor que el lapso entre este último y la luna llena. Por la misma razón el intervalo entre la luna llena y el cuarto menguante es mayor que el intervalo entre este y la siguiente luna nueva.

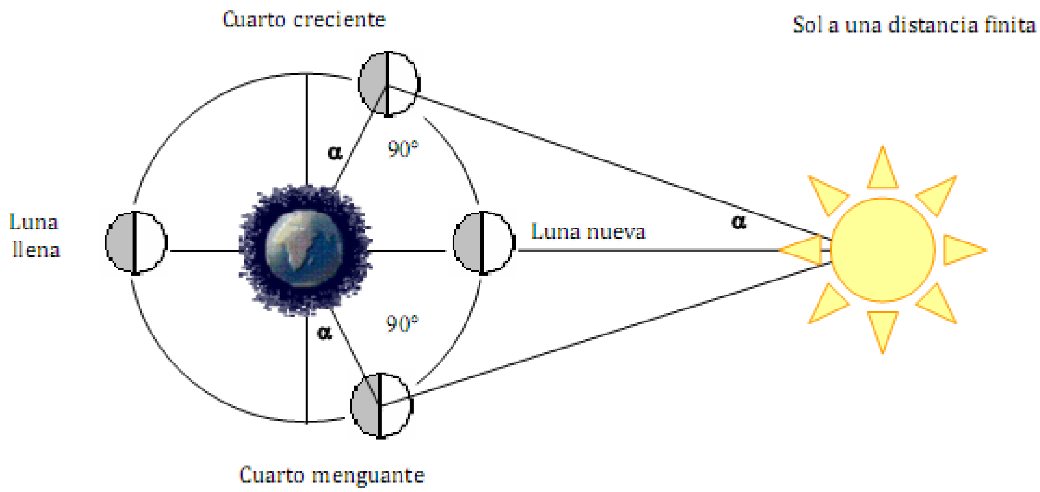


Fig. 1

Ilustración 4. Sol a una distancia Finita.

Aristarco encontró que el ángulo alpha, que forman los rayos del Sol que abarcan la órbita de la Luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la media luna. Si llamamos A la distancia de la tierra a la Luna B a la distancia de la Luna al Sol, resulta que hay una sencilla razón entre A, B y el ángulo alpha, que hoy conocemos como tangente: tan alpha = A /B

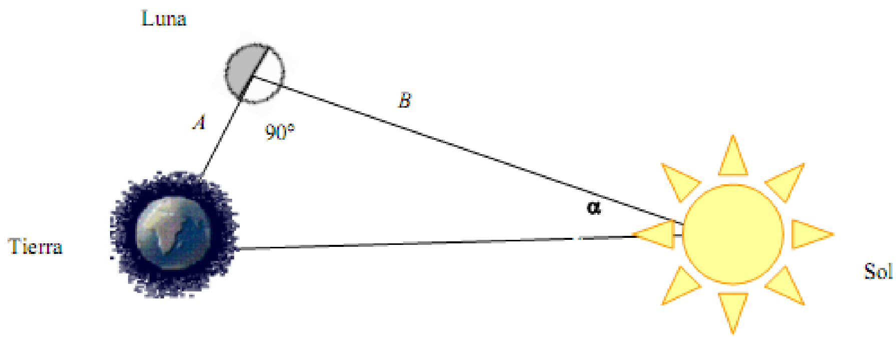


Fig. 2

Ilustración 5. Distancia de Tierra, Luna y Sol a una Distancia Finita

En otras palabras, determinado alpha se puede calcular que tanto más lejos está el Sol de la Luna de la Tierra. Si para Aristarco Luna se movía en una órbita circular y con velocidad constante alrededor de la tierra, debía medir cuánto tarda la luna en darle la vuelta completa a la Tierra, para lo cual bastaba con medir el tiempo que transcurre, por ejemplo, entre dos Lunas nuevas. Una vez determinado ese lapso, y su el sol estuviera a una

Una hipótesis de trabajo, en el análisis histórico epistemológico, es que los problemas identificados pueden guardar paralelismo con los que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en las matemáticas que se proponen en el currículo.

Se acepta que hay diferencias entre el desarrollo histórico de una noción y su aprendizaje escolar, pero se considera que identificar dificultades y concepciones en la historia permite diseñar estrategias didácticas para el diseño y gestión de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes.

De este modo, algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas reconocen la importancia del estudio de la historia de los conceptos matemáticos a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto. (Rojano, 1994, p. 46).

Al estudiar la *génesis histórica* se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados. Por su parte, la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas. (Rojano, 1994, p. 47).

En tal sentido, se puede señalar que las razones trigonométricas emergieron desde temprano asociadas a problemas prácticos de la antigüedad. En efecto, la trigonometría se desarrolló a partir de la necesidad de calcular distancias y medidas de ángulos especialmente para elaborar mapas. La palabra "trigonometría" se deriva de la palabra griega *trigonom*, la cual significa "triángulo" y *metrón*, la cual significa "medidas"[2].

Entre los grandes matemáticos de la antigüedad que aportaron al desarrollo de la trigonometría se destacan Aristarco de Samos (310–230 a.C.), Hiparco (180–125 a.C.), Menéalo de Alejandría (circa 100 a.C.), y Claudio Ptolomeo (85–165 a.C.). Las funciones trigonométricas actuales: seno, coseno, tangente y sus reciprocas fueron definidas y estudiadas mucho después, pero las semillas que sembraron los matemáticos griegos fueron claves para el desarrollo ulterior de este campo matemático

Las razones trigonométricas son un conocimiento matemático de aplicación en diferentes campos esto implica el dominio de muchas demostraciones. Para efectos expositivos se presentan algunas definiciones y principios relacionados con las razones trigonométricas (Piñeiro, M; Ibáñez Jalón, M. & Ortega del Rincón, 1998). También otros textos analizados son "On Sizes and Distance of the Sun and Moon" de Aristarco de Samos (310-230 aC) y Almagesto de Ptolomeo (90 dC – 168 dC)

Es importante reseñar que las razones trigonometrías están en una estrecha relación con las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, y se reconocen en el tratamiento de las identidades trigonométricas así como en otras aplicaciones a problemas en el campo de la geometría y otros campos disciplinarios como la topografía y la física. En este orden de ideas es posible definir, algunos elementos de la geometría euclidiana a los cuales se les darán uso en este trabajo.

3.1.2 **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS**

Se parte de un triángulo rectángulo OAB, como lo muestra la Ilustración 9, y nos fijamos en su ángulo agudo AOB, al que se denotara θ. Se definen las razones trigonométricas *seno, coseno, tangente*, respectivamente, por las relaciones:

---

[2] Hipparchus de Nicea (180 a.c. –125 a.c.) es llamado a veces, el padre de la trigonometría porque fue uno de los primeros que intento y organizó un conjunto de valores asociando arcos y cuerdas de un circulo. Este trabajo ayudo a quienes posteriormente desarrollaron las nociones modernas de la trigonometría

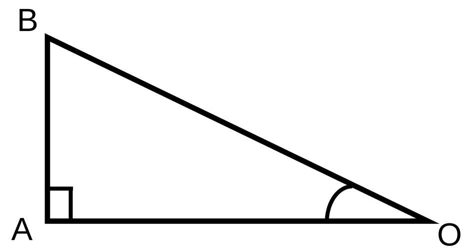


Ilustración 9.Razones Trigonométricas

$$Sen(\theta) = \frac{AB}{OB} = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}; Cos\ (\theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{Cateto\ Adyecente}{Hipotenusa}; Tan(\theta) = \frac{AB}{OA} = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$$

De esta manera se obtienen las razones trigonométricas para ángulos agudos, cuando se consideran cualquier ángulo o ángulos en posición normal, observamos la tendencia al introducir el círculo unitario para todos los ángulos, así como se muestra a continuación.

3.1.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS CUALESQUIERA

Se han definido las razones trigonométricas para ángulos agudos. Puesto que en la práctica surgen, en numerosas ocasiones, ángulos que nos son agudos, se hace necesario extender esas definiciones al caso general. Como ya se ha dicho, las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Por lo tanto, se partirá del caso más sencillo, considerando la circunferencia goniometría de radio la unidad.

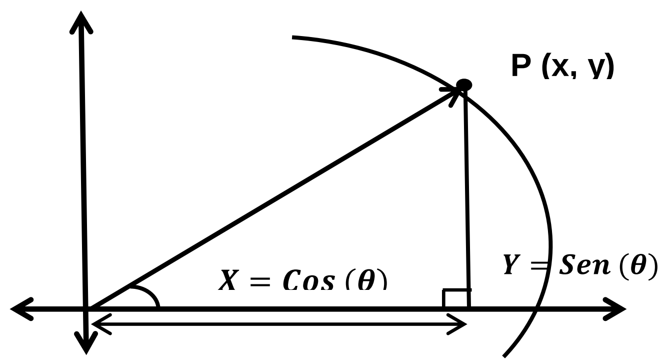


Ilustración 10. Coordenadas de los puntos de la circunferencia unidad en el primer cuadrante.

Se fija un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro, O, de la circunferencia unitaria, cualquier punto P(x, y) sobre la misma define un ángulo θ, de modo que, si este es agudo, las expresiones de las razones trigonométricas se pueden reescribir en función de las coordenadas de P mediante las relaciones:

$$Sen(\theta) = y\,; Cos\,(\theta) = x\,; Tan\,(\theta) = \frac{y}{x}$$

Con base a estas definiciones de las razones trigonométricas se puede aproximar al estudiante a aprenderlas rompiendo la tendencia de introducir las razones trigonométricas para ángulos agudos y finalizar con razones trigonométricas para cualquier ángulo (Triangulo Rectángulo o Círculo Unitario) o viceversa. ¿Cómo sería esto posible? La integración de *manipulativos*, posibilita la aproximación a las razones trigonométricas, en este caso básicamente se habla de utilizar un *Geoplano Circular Trigonométrico*. Que es un recurso manipulativo que integra dos maneras de introducir las razones trigonométricas al tiempo, por un lado el triángulo rectángulo utilizando una reglilla en el borde de la tabla con 6 marcas en total, y en cada marca un clavo, y por otro lado, el círculo unitario utilizando un círculo de longitud la unidad con marcas en cada 15 grados con clavos. Como lo muestra la ilustración 11.

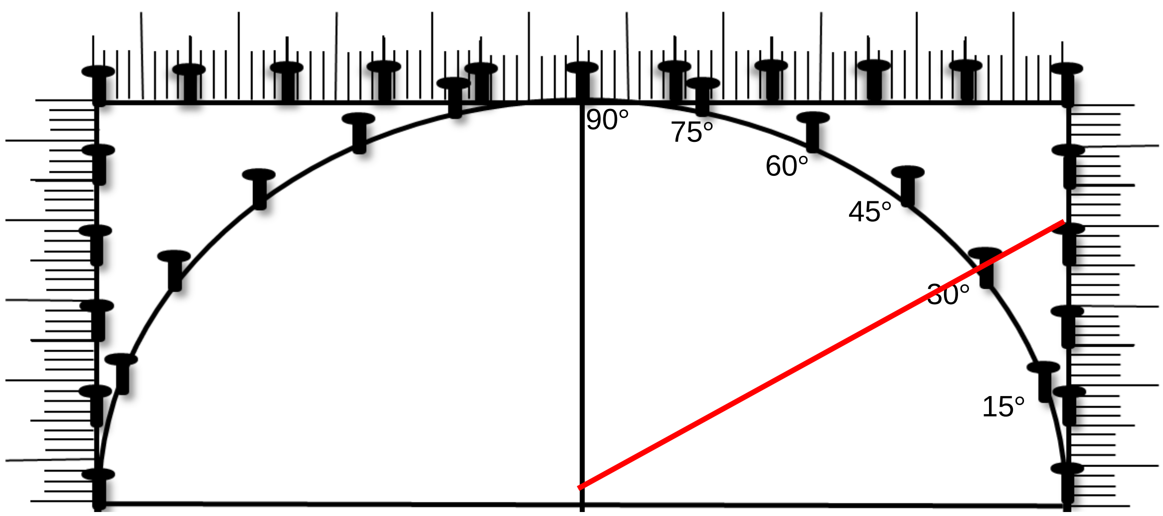


Figure 1. Primer y Segundo Cuadrante del Geoplano Circular Trigonométrico

La rejilla externa al círculo permite calcular con mayor precisión el valor del recorrido horizontal ($Cos\,(\theta) = x$) y del recorrido vertical ($Sen(\theta) = y$) de esta manera se puede calcular con facilidad el valor de la $Tan\,(\theta) = \frac{y}{x}$, en la figura se muestra tira elástica representad por la línea de color rojo que va desde el origen hasta los clavos 30 y 3 cm, de aquí tenemos que:

$$Tan\ (30°) = \frac{Sen(30)}{Cos(30)} \equiv \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$Tan\ (30°) \equiv 0{,}6$$

Esto cuando tengamos el valor del ángulo y se quiera calcular el valor de la tangente de ese ángulo o la pendiente de ese segmento o tira elástica por definición tenemos que la tangente y la pendiente se relacionan como:

$$Tan(\theta) = m \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dado que se quiere calcular el valor de la tangente en este caso debe definirse un rango para anglos entre -90º y 90º. La relación matemática (1) puede utilizarse para trabajar con el Geoplano circular trigonométrico en tanto, involucra conceptos geométricos y trigonométricos, la utilización de esta relación dentro de la resolución de problemas es indispensable cuando se quiere resolver problemas de resolución de triángulos típicos como los que se mostraran en el diseño de la elaboración de las tareas.

Por esta razón se analizara cuáles son las ventajas de utilizar *manipulativos* en las clases de matemáticas y especialmente en las de trigonometría, desde una perspectiva didáctica.

3.2 **DIMENSIÓN DIDÁCTICA**

Un análisis didáctico de una determinada noción, concepto o proceso matemático se usa en la Didáctica de las Matemáticas, entre otros propósitos para identificar y caracterizar una serie de fenómenos relativos a su aprendizaje y enseñanza en el contexto escolar.

El fenómeno didáctico que nos ocupa es aquel relacionado con la razón trigonométrica, en tanto su enseñanza juega un papel importante en el currículo escolar en nivel de secundaria, pues se convierte en la base de nociones importantes en los niveles medios y superior.

Algunos investigadores frente al interrogante de por qué la trigonometría resulta tan difícil, consideran que ésta inherentemente implica un gran tratamiento con detalles técnicos, que pueden llevar a oscurecer las ideas principales. Igualmente consideran que la trigonometría se enseña a menudo con el rigor analítico apropiado para un curso de pre cálculo, antes de que los estudiantes hayan adquirido las habilidades necesarias para trabajar con funciones. (Yoshiwara & Yoshiwara, 2007).

La trigonometría se presenta oficialmente en el grado decimo, apoyada en libros de texto tradicionales que se enfocan en partes o contenidos temáticos completos que incluyen los ángulos coterminales, de referencia, minutos y segundos, radianes, longitud del arco, la velocidad angular, dominio y rango, la simetría, las transformaciones, la composición, las funciones inversas. Como señalan Yoshiwara & Yoshiwara, (2007), no es extraño que los estudiantes ¡no pueden ver el bosque por causa de los árboles! En la actualidad algunos investigadores consideran que las ideas importantes en trigonometría son:

- Triángulos y razones trigonométricas
- Funciones trigonométricas de los ángulos
- Radianes
- Gráficas de funciones trigonométricas
- Resolución de ecuaciones trigonométricas
- Uso de identidades trigonométricas

De acuerdo con Yoshiwara & Yoshiwara, (2007), algunos de los contenidos temáticos que se convierten en verdaderos obstáculos para los estudiantes incluyen entre otros:

- La razón y la proporción
- Los números irracionales: valores exactos vs aproximaciones
- Múltiplos fraccionarios de π
- Función de notación
- Conexión entre gráficos y ecuaciones

El tratamiento habitual en la escuela de estos contenidos temáticos si bien puede ser efectivo podría ser complementado con otros modelos de enseñanza que amplíen las posibilidades de que los estudiantes vean y entiendan por qué es importante el aprendizaje de trigonometría. Yoshiwara & Yoshiwara, (2007) proponen algunas estrategias fundamentales para la enseñanza de la geometría, entre las que se destacan: Empezar con ideas concretas antes de introducir ideas abstractas, promover cálculos simples, introducir ideas por nivel de complejidad, no por temas; regresar a cada habilidad varias veces en diferentes contextos.

La idea de trabajar con ideas concretas es muy común en la educación matemática, sobre todo cuando se refiere al paso de lo concreto a lo abstracto. Este es un asunto importante para delimitar habida cuenta que aparece una particular visión de modelos matemáticos (como *manipulativos*). Adicionalmente, es importante señalar que en el campo de la didáctica de las matemáticas se considera que aprendizaje de los estudiantes comienza por la observación del mundo que los rodea, perciben objetos concretos, y el paso de lo concreto a lo abstracto les resulta más natural si lo pueden realizar, no sólo a través de la observación, sino también de las operaciones realizadas con los objetos, de su manipulación y de la comprobación de las propiedades que permanecen invariantes y de las que se modifican siguiendo una determinada ley. Así se considera que la utilización de *modelos matemáticos* en la enseñanza es útil para facilitar a los estudiantes el paso de lo concreto a lo abstracto y para que puedan desarrollar lo más posible su capacidad de razonamiento abstracto.

En algunos de estos investigadores definía los modelos matemáticos, en el contexto de la enseñanza, como "todo aquel material capaz de traducir o de sugerir ideas matemáticas".

Esto es, un material que permita particularizar una idea más o menos abstracta, una imagen que concrete una idea abstracta. El mayor valor de la utilización de los materiales en la enseñanza de las matemáticas consiste en que permite, al estudiante, hacer experiencias mentales a su medida y desarrollar, de este modo, su capacidad de razonamiento abstracto. (Brihuega, 2006)

La investigación en matemática educativa ha dado evidencia de las dificultades en el aprendizaje que muestran los estudiantes de distintos niveles escolares al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las relaciones trigonométricas. Por ejemplo, De Moura (2000) citado por Cortes, G & Espinosa, G (2007) reporta en su análisis didáctico incorrecciones en el uso de la notación y en la aplicación de leyes que no son válidas para las razones y funciones trigonométricas en la solución de algunas tareas; De Kee, Mura y Dionne (1996) citado por Cortes, G & Espinosa, G (2007) reportan que el estado de comprensión de las nociones del seno y coseno no están bien asentadas en los estudiantes, reportando que generalizan las propiedades de los triángulos rectángulos a cualquier tipo de triangulo, o aseguran un cambio de escala en el seno y el coseno al cambiar de escala un triángulo.

En esta dimensión se otorga especial atención al estudio de los errores y obstáculos de los estudiantes en la construcción y apropiación de estas nociones, conceptos y procesos matemáticos. Un marco de referencia de gran consistencia lo constituye el trabajo de Brousseau (1998) relativos a la conceptualización de errores y obstáculos. Así, se considera que el error no es solamente el efecto de la "ignorancia, de la incertitud, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado". De igual relevancia es la distinción de los orígenes de los obstáculos didácticos: éste será el sistema tal que, modificándolo, se podría evitar el obstáculo, mientras que ninguna modificación de los otros sistemas permitiría evitarlo. De esta manera, es posible encontrar obstáculos didácticos, de origen ontogenético, de origen didáctico, de origen epistemológico".

En particular, nos centramos en los obstáculos de origen didáctico y el rol que tienen en la aparición de los mismos el tratamiento de las razones trigonométricas. Para estudiarlos nos centraremos en el aprendizaje de las razones trigonométricas en las clases de trigonometría a través del trabajo experimental.

En este punto, es preciso subrayar que en la dimensión didáctica tanto como en la curricular, se reconoce la importancia del estudio de los textos escolares dado que se acepta es posible reconocer en ellos una serie de elementos que han de ponerse en juego para propiciar el aprendizaje de las matemáticas en situación escolar. La importancia de los textos escolares ha comenzado a incluirse en las investigaciones en educación matemática en los últimos veinte años, por su relevancia como manipulativo (Robert y Robinet, 1989; Sanz, 1994; Chandler y Brosnan, 1995; Batanero y Serrano, 1997) citados por Cortes, G & Espinosa, G (2007) y porque hacen parte de las concepciones institucionales, las cuales pueden ser origen de obstáculos didácticos en las concepciones de estudiantes y profesores.

Estas investigaciones han ampliado notoriamente el conocimiento de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, como por ejemplo, cuando se estudia el momento cuando se construye la cantidad trigonométrica. De Kee, Mura y Dionne (1996) y Maldonado (2005) Citados por Cortes, G & Espinosa, G (2007) han dado evidencia de las dificultades y concepciones más clásicas del estudiante en este tema, mientras que Montiel (2005) ha considerado la naturaleza de la noción matemática como parte fundamental del fenómeno didáctico. En este sentido, nuestra propuesta articula los elementos didácticos, cognitivos y socio epistemológicos de estas investigaciones para en un diseño posterior, proveer de evidencia empírica sobre la construcción de algunos de los significados asociados a la razón trigonométrica.

El que los investigadores otorguen especial importancia al estudio de los libros de texto, radica en el hecho que estos sirven en la mayoría de los casos como la fuente única para orientar la enseñanza y llevar a cabo una evaluación del rendimiento de los estudiantes. Se considera que los autores de libros de texto son profesionales expertos en el tema y, a través de su escritura, toman decisiones sobre qué y cómo se deben enseñar y evaluar las matemáticas. Una vez que el conocimiento matemático se imprime, tiende a institucionalizarse y a ser incuestionable. Según Herbel-Eisenmann 2007, citado por Byers, 2010. El libro de texto se convierte en una guía y una fuente de autoridad para la enseñanza pedagógica en todos los tipos de configuración de clases, apoyando de esta manera la enculturación de un estudiante en la práctica y el idioma de la comunidad matemática.

De hecho, muchos profesores se basan en los libros de texto como su principal recurso para la enseñanza de las matemáticas (Cirillo, Drake & Eisenmann, 2009). Esto se ilustra con un ejemplo en la investigación de Weber (2005) sobre el papel del libro de texto en la orientación de la enseñanza en clase. Al entrevistar a un profesor, éste informó que él enseñó las técnicas de demostración a través de las soluciones de los problemas de ejemplo en el libro de texto.

El estudio de los libros de texto ha permitió reconocer cambios significativos en el ámbito escolar y de manera particular en la percepción de las matemáticas que a su vez están acompañados de un cambio en la perspectiva del aprendizaje en general, y del aprendizaje de las matemáticas en particular, que va desde la consideración tradicional como una absorción pasiva y aislada de datos de información y procedimientos suministrados, a la perspectiva del aprendizaje como construcción activa de conocimiento y competencias en una comunidad matemática.

Estos cambios en la percepción de las matemáticas están acompañados de un cambio en la perspectiva del aprendizaje en general, y del aprendizaje de las matemáticas en particular, que va desde la consideración tradicional como una absorción pasiva y aislada de datos de información y procedimientos suministrados, a la perspectiva del aprendizaje como construcción activa de conocimiento y competencias en una comunidad matemática.

Es precisamente a partir de la revisión de la literatura relativa a la presencia de la trigonometría en los textos escolares de la educación media y preuniversitaria que se han podido analizar secuencias de aprendizaje de la trigonometría. (Byers, 2010). Entre los hechos significativos de esta aproximación se destacan:

1. En primer lugar, Montiel (2005) considera a la naturaleza de la noción en juego como pieza primordial del fenómeno didáctico, generando un modelo para la construcción social de la función trigonométrica. Dicho modelo está basado en actividades prácticas de referencia y prácticas sociales ligadas a dicha construcción. Así, observa a la función trigonométrica desde su origen en razones, su evolución en funciones y su conformación en series.

2. Finalmente en segundo lugar, Pritchard y Simpson (1999) sostienen que la secuencia de enseñanza tradicional - es decir, la enseñanza de la trigonometría utilizando las definiciones, luego trabajando en el desarrollo de conceptos - puede conducir a problemas a los estudiantes en relación con la construcción de imágenes trigonométricas. Según Pritchard y Simpson, una consecuencia es que los estudiantes tienen dificultades para transferir su conocimiento de las funciones algebraicas a las de las funciones trigonométricas. Estos hallazgos apoyan la investigación llevada a cabo por Tall (1992). Quien encontró que la enseñanza post-secundaria tiende a enseñar las definiciones y a continuación, aplicar el desarrollo de conceptos, aunque el estudiante universitario podría beneficiarse de un patrón inverso - el desarrollo de conceptos y luego el uso de definiciones (Tall, p. 508).

El estudio de estas investigaciones nos permite percibir su intencionalidad en torno a las razones trigonométricas, otorgándole una visión más amplia de la problemática a abordar.

Hacemos la consideración de que el origen de dichas dificultades puede situarse en las razones trigonométricas, específicamente en el momento donde se construye la cantidad trigonométrica. Observamos de De Kee, Mura y Dionne (1996) y Maldonado (2005) han dado evidencia de las dificultades y concepciones más clásicas del estudiante en este tema, mientras que Montiel (2005) ha considerado la naturaleza de la noción matemática como parte fundamental del fenómeno didáctico. En este sentido, nuestra propuesta articula los elementos didácticos, cognitivos y socio epistemológicos de estas investigaciones para en un diseño posterior, proveer de evidencia empírica sobre la construcción de significados alrededor de las razones trigonométricas a través del trabajo experimental con *manipulativos*.

En este orden de ideas, emerge como una alternativa plausible la enseñanza de las razones trigonométricas a partir de la integración de *manipulativos* en el contexto del trabajo experimental en el aula de matemáticas.

Estas aproximaciones a la dimensión experimental en los procesos de enseñanza y
Aprendizaje de las matemáticas parten del reconocimiento del aprendizaje de las matemáticas como un proceso constructivo, lo cual significa que los alumnos tienen, descubren y crean habilidades y conocimientos matemáticos, y que por lo regular lo hacen en el marco de las actividades sociales en que se proponen tal aprendizaje. A continuación se estudiara como estas aproximaciones están relacionadas con el uso de manipulativos

3.2.1 USO DE *MANIPULATIVOS* Y TRABAJO EXPERIMENTAL EN EL AULA DE MATEMÁTICAS.

En investigaciones en didáctica de las matemáticas (Arce, 2004) se otorga especial valor al trabajo experimental en matemáticas, dado que su importancia reside en la posibilidad de que los estudiantes puedan simular experiencias realizadas por los matemáticos que investigan. Se asume que el papel del estudiante en su trabajo intelectual se puede comparar por momentos con la actividad científica al considerar el aula de matemáticas como un laboratorio, pues allí se simularía la actividad del científico, dado que saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la oportunidad de utilizarlas y aplicarlas, sino que implica que los estudiantes desarrollen una disposición hacia el trabajo matemático y se ocupen de problemas. Este un aspecto de la mayor importancia pues en ocasiones se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles buenas soluciones.

Una muy aceptable reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura científica, que tome las que le son útiles. Ahora bien, más allá de la concepción del salón de clases como un laboratorio, la idea de un escenario específicamente diseñado para el trabajo experimental en matemáticas ha cobrado, hoy en día, una fuerza inusitada en el plano de la investigación en didáctica de las matemáticas.

En este orden de ideas, el trabajo experimental se puede asociar con un tipo de actividades en las cuales se señala la importancia de la manipulación, los modelos visuales, los esquemas y los diagramas, que pueden ser usados como elementos para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los alumnos y las estrategias informales, de un lado, y los conceptos y procedimiento de las matemáticas formales, del otro. Los alumnos mismos deben, tanto como sea posible, jugar un papel en el desarrollo y refinamiento de estos modelos y herramientas. De esta manera emerge la concepción según la cual la importancia del trabajo experimental en matemáticas reside en la posibilidad de que los estudiantes puedan simular experiencias realizadas por los matemáticos que investigan. Se considera que el papel del estudiante en su trabajo intelectual se puede comparar por momentos con la actividad científica al considerar el aula de matemáticas como un laboratorio, pues allí se simularía la actividad del científico, ya que saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas.

En consonancia con lo expuesto es posible señalar que la integración de *manipulativos* en la enseñanza de las matemáticas necesita sin duda una renovación de las prácticas profesionales. Esta renovación supone proporcionar a los profesores una asistencia específica. Esta asistencia comprende necesariamente una formación continua que es la clave del desarrollo de los ambientes computacionales de aprendizaje. Ahora bien, parece ser una tendencia generalizada e improductiva que esta formación continua esté organizada en general bajo la forma de una capacitación durante algunos días, sin relación directa con las clases, y sin repercusiones efectivas sobre sus prácticas profesionales. (Trouche, 2002).

La pertinencia de ahondar sobre las posibilidades que ofrecen algunos *manipulativos* para el tratamiento de las razones trigonométricas en grado décimo se justifica a partir de algunas consideraciones que aluden a dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas. Así por ejemplo, se señala que se presentan problemas al introducir casi siempre de manera inicial el círculo unitario y luego el triángulo rectángulo, lo cual tiene como consecuencia que los estudiantes no logren apropiarse de esta noción. En el análisis curricular estudiaremos detalladamente este fenómeno.

Por otro lado, se señala que se puede prevenir el fracaso de los alumnos para conectar el conocimiento informal y el conocimiento formal de los símbolos, los procedimientos y representaciones en imágenes partiendo de las actividades con *manipulativos*.

Los *manipulativos* pueden considerarse como elementos que facilitan el proceso de enseñanza y la construcción de los aprendizajes, porque estimulan la función de los sentidos y activan las experiencias y aprendizajes previos para acceder más fácilmente a la información, al desarrollo de habilidades y destrezas y a la formación de actitudes y valores.

Godino. 1998, señala que se puede considerar como manipulativo cualquier medio o recurso que se usa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta categoría se incluyen, por tanto, objetos muy diversos: desde manuales escolares -en su versión escrita, grabaciones en video, programas de ordenador, etc.- a los propios dedos de las manos, piedrecitas, calculadoras, etc. Con objeto de clarificar nuestras ideas vamos a proponer una clasificación propia de los *manipulativos* para añadir a las ya existentes:

- Ayudas al estudio: recursos que asumen parte de la función del profesor (organización del contenido de enseñanza, presentación de problemas, ejercicios, conceptos, pruebas de autoevaluación, programas tutoriales de ordenador, etc.). Básicamente se incluyen aquí los manuales escolares, en sus diversas versiones (presentaciones magistrales o de cualquier tipo).

instrumentos (semióticos) para el razonamiento matemático: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como materiales gráficos, textos, palabras, los cuales pueden funcionar como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático

La idea es implementar en la enseñanza concreta de las matemáticas *manipulativos*, dejando de lado, la enseñanza abstracta, que no incentiva la creatividad y la participación activa de los educandos. Esto no quiere decir, que se deben dejar de lado los conceptos; más bien, la idea que se plantea es que, mientras más variados sean los medios para el aprendizaje que emplee el profesor, mayores serán las posibilidades para que cada estudiante logre desarrollar las competencias necesarias para la adquisición de un contenido; además el uso de variados recursos de aprendizaje ayuda también al desarrollo de la memoria de los niños y niñas. Por esta razón, ellos deben ser motivados para utilizar otros materiales, como un medio de comprobar el nivel de abstracción logrado. ´(Cofré, M. (1981) citado por Caneo, M. (1987).

Según lo expresado por Galdámez, Riveros y Alliende (1999), se debe tener presente de donde provienen los materiales educativos y los propósitos por los cuales fueron creados. Algunos materiales educativos provienen de la vida diaria; otros son especialmente creados con fines educativos, como es el caso de los *manipulativos*, entre estos se pueden distinguir los creados con un fin específico y los que se crean con propósitos variados.

Los investigadores señalan que los *manipulativos* en las matemáticas, son recursos pedagógicos de gran importancia, debido a que a través de ellos se pueden lograr objetivos matemáticos en el proceso de enseñanza – aprendizaje. De esta forma, deben ser considerados dentro de las estrategias que permiten articular los contenidos que se trabajan en esta área, en especial los de mayor complejidad, los que manifiestan un desinterés por parte de los educandos evidenciándose en un bajo rendimiento, que se refleja en las calificaciones.

Finalmente, en cuanto se refiere a los *manipulativos* para la enseñanza de las razones trigonométricas, los investigadores reconocen la importancia de precisar la naturaleza de la experimentación en matemáticas. En tal sentido se señala que:

Experimento es una palabra que no es usual asociar con las Matemáticas, más comúnmente se suele hablar de los experimentos refiriéndose a las Ciencias Experimentales o al conocimiento del medio en la etapa de Educación Primaria. Estas consideraciones hacen que el carácter revelador o transformador que tienen los experimentos, no se aborden en el aprendizaje de las Matemáticas. (Arce 2004)

El experimento es un factor pedagógico en el aprendizaje, al tener gran fuerza en la primera toma de contacto del niño con algunas ideas matemáticas que están estrechamente ligadas a fenómenos físicos de la vida cotidiana. Experimentar con las Matemáticas representa, entre otras cosas, inventar, crear a partir de los propios medios para hallar caminos de solución a problemas que se han planteado, generando la opción de realizar descubrimientos (BATLLE, 1996 citado por Arce 2004).

En el nivel de inicio de la construcción del pensamiento matemático, esta toma de contacto no tiene que ver mucho con definiciones o reconocimientos de conceptos, sino más bien con la formación incipiente de ideas en las que, tal vez más que nunca, lo esencial es el significado.

Estas posibilidades implican aceptar, como constante didáctica, el error experimental, la intuición equivocada, la conjetura insuficientemente fundada. Convirtiéndose en momentos didácticos de importancia para generar proceso de aprendizaje.

Por todo ello, el contexto experimental es imprescindible en el aprendizaje de los conceptos y en el establecimiento de conexiones entre ellos. Es así como la actitud experimental; por ejemplo, al aceptar el error y la imprecisión, sin la intención de instalarse definitivamente en ellos, considera didácticamente valioso que quien aprende construya algunos materiales, porque los problemas que se le presentan durante la construcción servirán para dar significado a los conceptos que intervienen en la representación que existe en el material. (Arce, 2004)

En general, es posible señalar que las actividades con *manipulativos* se pueden ver como una *actividad humana* que puede potenciar ciertas capacidades humanas que podrían fortalecer y facilitar procesos de enseñanza; sin embargo es necesario aclarar que no todos los juegos son significativos desde el punto de vista matemático, ¿Qué los hace significativo? ¿Solamente el hecho de emplear consciente o inconscientemente un conocimiento matemático? Se considera que se debe ir más allá, pues dentro de una actividad significativa que propicie la apropiación de un conocimiento matemático, puede reconocerse factores que pueden a futuro facilitar la comprensión de un objeto matemático abstracto, por ejemplo el reconocer las normas, procedimientos estrategias modelos, etc.

En consonancia con esto, los manipulativos, en nuestro caso los *manipulativos* juegan un papel determinante en los procesos de construcción de pensamiento matemático. Las actividades creadas alrededor de los mismos, están pensadas para alcanzar una participación activa y creativa, en las distintas posibilidades de elaboración de conceptos matemáticos. De esta manera se promueve un espacio de carácter académico donde se puede hacer Matemáticas a través de una metodología experimental.

Estas consideraciones sobre el trabajo experimental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es de especial interés para el desarrollo de innovaciones curriculares, pues como se ha señalado previamente existen relativamente pocos programas curriculares, que incorporan un *componente experimental* significativo y la mayoría se concentra en el trabajo con textos y guías escolares. (Post, T., 1981).

Frente a esta problemáticas se señala que en primer lugar, los profesores necesitan saber cuándo, por qué y cómo utilizar objetos *manipulativos* de manera efectiva en el aula, así como la oportunidad de observar, de primera mano, los efectos de permitir el aprendizaje a través de la exploración con objetos concretos. Estas encuentran sus raíces en consideraciones se vinculan con el constructivismo que ha evolucionado de teóricos como Jean Piaget (1965) y Lev Vygotsky (1962)[3] Citado en XIII CIAEM-IACME. De otra parte, los investigadores consideran de la mayor importancia estudiar el impacto de las concepciones de los maestros en cuánto se refieren al potencial que se otorga a los *manipulativos* como herramientas para ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas de manera más eficiente y eficaz y no como juguetes. Si a estos *manipulativos* se les concibe como "juguetes", probablemente los estudiantes los estudiantes los vean como algo con que jugar y no como herramientas para trabajar y para entender mejor las matemáticas.

También suele reconocerse que los *manipulativos* deberían ser introducidos en un formato flexible y detallando un conjunto de expectativas de comportamiento, de manera que se desarrolle una postura firme y estable para que los estudiantes comiencen a desarrollar una relación respetuosa basada en el conocimiento sobre el uso de tales *manipulativos* para el aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, se suele señalar que los *manipulativos* deberían ser modelados a menudo y directamente por los docentes con el fin de ayudar a los estudiantes a ver su pertinencia y utilidad en la resolución de problemas y en la comunicación matemática. Estos *manipulativos* deberían ser continuamente incluidos como elementos de escenarios de trabajo donde se promueva la exploración libre, el trabajo orientado y exploraciones a mediano plazo. Mink, D. 2010 Citado en XIII CIAEM-IACME, Las investigaciones también revelaron que los maestros que de manera consistente y efectiva usan *manipulativos* como modelos, frente a sus estudiantes ayudan a promover entre ellos la creencia de que el uso de objetos concretos es aceptable y les ayuda a entender conceptos abstractos. Así, se señala que es importante animar a los estudiantes a desarrollar modelos mentales, utilizar diagramas de Venn, diagramas de flujo o matrices, pues esto ayuda a ampliar y mejorar el aprendizaje de matemáticas más complejas. Mink, D. 2010 Citado en XIII CIAEM-IACME.

Vinculado a este interés está el interrogante de *¿cómo introducir efectivamente los manipulativos en las clases de matemáticas desde el marco de la resolución de problemas?* Al respecto se suele señalar que al preparar a los estudiantes para utilizar objetos concretos en la exploración matemática y la resolución de problemas a menudo se pasa por alto, uno de los elementos esenciales de la implementación exitosa de un programa de matemáticas basado en *manipulativos*. Así en ciertas propuestas se presentan una serie de pasos esenciales para establecer un estándar de manipulación para el aula, en la dimensión

---

[3] Piaget (1965) se acercó a la construcción del conocimiento a través de preguntas y basándose en las respuestas de los niños mientras se construye el conocimiento, mientras que Vygotsky (1962) consideraba que los niños pueden ser guiados a desarrollar una fuerte comprensión matemática, ya sea a través del análisis de habilidades complejas por su propia cuenta, o en compañía de su maestro.

curricular se estudiara como son estas series de pasos desde el enfoque de resolución de problemas.

A continuación se presentan algunos elementos generales en relación con las propuestas curriculares recientes para el área de matemáticas en Colombia (MEN, 1998, 2006), que buscan contextualizar aspecto del diseño y gestión del trabajo experimental con *manipulativos* para el estudio de las razones trigonométricas.

3.3 DIMENSIÓN CURRICULAR

Este apartado tendrá como principal referente aspectos presentes en los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (M.E.N 2006), en particular los referidos al modelo curricular vigente y al Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas o NCTM 2000 por sus siglas en ingles. De igual manera, se intenta ubicar la presencia en estas propuestas de referencias y consideraciones relativas al uso de *manipulativos* para el aprendizaje de las matemáticas, en especial de las razones trigonométricas.

3.3.1 MODELO CURRICULAR

La conexión de la dimensión curricular con el trabajo experimental en las clases de matemáticas se encuentra en consonancia con las consideraciones del Ministerio de Educación Nacional (MEN 2006), según las cuales es necesario relacionar contenidos del aprendizaje con situaciones cotidianas de los alumnos, así como presentarlos en un contexto de situaciones problema. De esta manera, para organizar el currículo armónicamente se deben tener en cuenta tres grandes aspectos:

- *los procesos generales*, que tienen que ver con el aprendizaje,
- *los conocimientos básicos*, que tienen que ver con los conocimientos previos y específicos que desarrollen el pensamiento matemático y
- *el contexto*, referido a los ambientes que circundan al estudiante y dan sentido a las matemáticas que aprende. Este modelo se ilustra en la siguiente figura

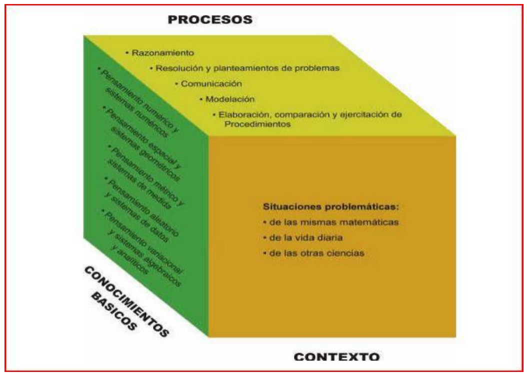


Ilustración 6. Modelo Cubico Curricular

También es considerado en los Lineamientos curriculares un segundo modelo que alude a los mismos componentes del modelo anterior pero como ejes de un espacio tridimensional. Este modelo se revela como funcional para realizar un análisis los elementos que deben tomarse en cuenta para el diseño y gestión de innovaciones didácticas como las que se proponen en este proyecto trabajo de grado. A continuación mostramos una ejemplificación de algunos aspectos relativos a las razones trigonométricas a partir de este modelo:

- En el eje de Conocimientos Básicos tomamos en consideración los relativos al pensamiento geométrico. Ahí se pueden ubicar las *Razones Trigonométricas* (R)

- En el eje de Procesos Generales se privilegian el planteamiento y resolución de problemas (R.P.P) y la modelación matemática (M)

- En el eje de Contexto se ubican el planteamiento de situaciones problemas y trabajo de modelación en contextos matemáticos y de otras disciplinas. Aquí se ubica el trabajo experimental en el marco de *Laboratorio de Matemáticas*, privilegiando el circuito exploración (E) ↔ conjeturación (C).

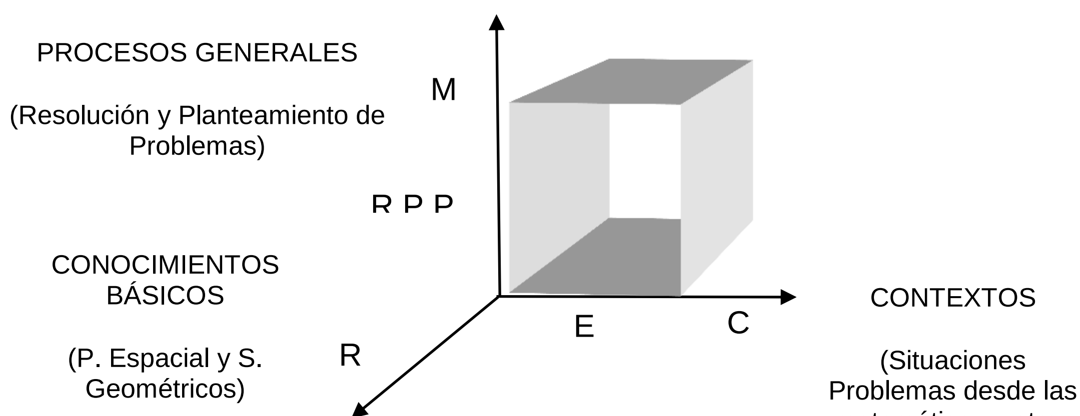


Ilustración 7. Cubo Curricular

3.3.2 PRESENCIA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN ALGUNAS PROPUESTAS CURRICULARES DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (M.E.N 2006).

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional de la Republica de Colombia, que es un programa de estudios nacional, en el cual se presentan los estándares curriculares que una guía para los currículos implementados en cada colegio de la nación sea privado o público, lo cual genera que la trigonometría se presentada en cada institución de una manera única, de acuerdo a las necesidades curriculares y pedagógicas de cada institución.

En esta publicación, se seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas a los cinco tipos de pensamiento matemático: Numérico, espacial, métrico, aleatorio y variación al. Por ello aparecen cinco columnas que corresponden a cada uno de dichos pensamientos y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él, aunque muchos están de esos estándares se refirieren también a otros tipos de pensamiento y a otros sistemas.

Se trata, entonces de comprender que la organización curricular de cada institución en coherencia con su PEI, debe buscar el desarrollo de un trabajo integrado en los distintos pensamientos, más que el progreso en cada uno de ellos independientemente de los demás. M.E.N (2006).

En este sentido rastrear contenidos que involucren razones trigonométricas no será posible, en tanto que la estructura de los estándares curriculares en base a lo anterior mente dicho, se trata de Procesos Generales ⇔ Conceptos y Procedimientos Matemáticos ⇔ Contextos, simultáneamente. Por este motivo identificaremos los pensamientos en los cuales están inmersas las razones trigonométricas y sus etapas escolares correspondientes.

A continuación, identificamos elementos trigonométricos esenciales en la construcción de las razones trigonométricas como lo son la medida de ángulos en los primeros grados de escolaridad, posteriormente se resaltan componente trigonométricos.

Nivel	4° a 5°	6° a 8°	10° a 11°
Pensamientos	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas	Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas
Estándar	Comparo y Clasifico figuras bidimensionales de acuerdo a sus	Diferencio y ordeno en objetos y eventos, propiedades o	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes,

	componentes (ángulos y vértices) y características	atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficie, dados volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes: pesos y masa de cuerpos solidos; duración de eventos o procesos amplitud de ángulos	áreas superficies, volúmenes y ángulos con de niveles de precisión apropiados.
	Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámica.		

Analizando detalladamente los Estándares Curriculares hemos caracterizado la presentación escolar de las razones trigonométricas en 4 etapas:

- **Etapa 1.** Sobre los ángulos: clasificación, unidad de medida, ángulos dirigidos
- **Etapa 2.** Sobre los triángulos: clasificación, propiedades, razones trigonométricas, solución de triángulos, las razones trigonométricas en el plano cartesiano.
- **Etapa 3.** Problemas de aplicación, leyes e identidades trigonométricas
- **Etapa 4 .**El círculo trigonométrico: círculo unitario, ángulos- arcos, conversión de unidades grado ⇔ radian ⇔ real, graficación de funciones trigonométricas.

Como señalamos en otro apartado, algunos aspectos de la dimensión curricular, particularmente relativos a la selección y organización de contenidos temáticos pueden identificarse a partir del análisis de textos escolares.

3.3.3 **LA INTEGRACION DE LOS *MANIPULATIVOS* EN ALGUNAS PROPUESTAS CURRICULARES (NCTM 2000)**

"*Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser Formulados en términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y Analizar los resultados utilizando los recursos apropiados*" (Junta de Andalucía, 2002).

Definiremos un problema como una situación dificultosa para la que debe darse una solución que no es evidente para el individuo que se encuentra ante ella. Para que la situación sea considerada como problema, el individuo no debe conocer a priori algoritmos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. Consideraremos como la resolución de un problema el proceso que comienza con la percepción del problema y finaliza con la solución del mismo. Los *manipulativos* y la resolución de problemas se relacionan en el currículo donde encontramos entre los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria "elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuera necesario" (Junta de Andalucía, 2002).

Preparar a los estudiantes para utilizar objetos concretos en la exploración matemática y resolución de problemas a menudo se pasa por alto, uno de los elementos esenciales de la implementación exitosa de un programa de matemáticas basado en *manipulativos*. Después de estos diez pasos esenciales ayudará a establecer un estándar de manipulación para el aula (Catherine A. Kelly, 2002):

1. *Establecer y mantener las normas de comportamiento para Manipuladores*

Los estudiantes necesitan tener un criterio claramente establecido para el manejo efectivo y el uso de *manipulativos* en el aula. Sin un conjunto claro de expectativas, los estudiantes pueden hacer un mal uso de los materiales y los profesores se sienten frustrados y desilusionados sobre el uso del manipulativo y, muy probablemente, interrumpen su uso en el aula. Reglas para actividades específicas que incorporen materiales manuales deben estar claramente articuladas por el profesor, expuestas en el aula, y re-afirmadas constantemente según sea necesario durante la clase con manipulables. En resumen, los estudiantes deben ser guiados para entender el propósito de los *manipulativos* en la tarea específica de matemáticas que se ha propuesto, y entonces, va a ganar relevancia para ellos como matemáticos.

2. *Indique claramente y establezca el propósito del manipulativo en las clases de matemáticas.*

Si los estudiantes saben por qué el maestro tiene cierta expectativa para una lección, él / ella será mucho más fácil entender la finalidad de la tarea y manejar la lección con el material manipulativo correctamente. Es importante recordar que la mayoría de los *manipulativos* son coloridos, atractivos, y se parecen mucho a lo que la mayoría de los estudiantes han conocido anteriormente como "juguetes". Dado que esta es una asociación natural, es de primordial importancia que los maestros conscientemente faciliten el entendimiento de la diferencia entre los *manipulativos* o herramienta y el juguete. Si esto se hace con cuidado y eficacia en el comienzo del año académico, los estudiantes serán mucho menos propensos al mal uso de los *manipulativos*.

3. *Facilitar el trabajo cooperativo con compañeros para mejorar el Desarrollo del Lenguaje Matemático.*

La naturaleza del uso manipulador fomenta la interacción no sólo con los objetos, sino también con la gente, ya que por lo general implica una acción sobre un objeto. Ser capaz de aprender y utilizar el lenguaje matemático efectivamente ayuda a establecer una base sólida para la conceptualización y el uso de habilidades abstractas matemáticas en la vida cotidiana. También ayuda a los estudiantes a desarrollar y sentir el poder de matemática, ya que se vuelven más capaces de articular, tanto verbalmente como por escrito, sus procesos de pensamientos matemáticos. Usar el trabajo asociado con *manipulativos* para construir el significado matemático también permite que el estudiante de matemáticas tenga una oportunidad de apoyo para explorar estrategias tanto del observador como de los puntos de vista de los participantes.

4. *Permitir a los estudiantes un tiempo desde el Marco de Exploración*

Una vez que el propósito y las expectativas de conducta se han establecido, los estudiantes deben tener la oportunidad de familiarizarse con el manipulativo, descubrir sus propiedades y limitaciones, y experimentar con él en una variedad de contextos. Esto también fomenta el trabajo cooperativo, el desarrollo del lenguaje y la toma de riesgos. La exploración libre ofrece a los estudiantes menos activos oportunidades individuales para construir su propio significado y desarrollar la confianza en el uso de la manipulación para consolidar y mejorar su comprensión matemática.

5. *Modelación con Manipulativos*.

La modelación puede hacerla el representante del grupo o cabeza en sesiones de grupos grandes o pequeños, esto ayudará a los estudiantes a ver cómo un determinado material manipulativo puede facilitar la comprensión. Por ejemplo, cuando los estudiantes comienzan a aprender acerca de la medición y las unidades no estándar o arbitrarias de medida, es esencial que tengan una gran variedad de *manipulativos* (bastones, cubos Reglas de Cuisenaire, enlaces, clips, lápices, etc.) con el que medir los elementos de uso común (escritorios, repisas tiza de mesa, marcos de las ventanas, etc.) De este modo, los alumnos estarán desarrollando el sentido numérico real acerca de la medición. Como un medio para desarrollar el sentido numérico, Marilyn Burns (1997) sugiere que los maestros incluyen la medición tanto como sea posible en sus matemáticas de enseñanza, ya que es la base sobre la cual se construye la comprensión matemática fuerte.

6. *Incorporar una variedad de formas de utilizar cada uno de los manipulativos*

Cada uno ofrece a los estudiantes a través de la manipulación diferentes maneras de ver el mismo problema lo cual asegura de que varios de los estudiantes van a obtener un conocimiento más profundo y más rico de las matemáticas. A su vez, seguirá desarrollando sus propios niveles de fluidez y flexibilidad con números según lo sugerido por los nuevos Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (2000). Y, que muestra a los estudiantes cómo utilizar el mismo manipulador en una variedad de formas que sólo tenderá a reforzar su uso diario y la comprensión de las matemáticas. Por ejemplo, los estudiantes pueden usar bloques de patrones inicialmente para aprender
Colores, formas o patrones y, finalmente, crear y descifrar fraccionarios partes iguales y desiguales.

7. Apoyar y respetar el uso de *manipulativos* por todos los alumnos

El principio de equidad (NCTM, 2000) establece claramente que las altas expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes deben ser evidentes para la excelencia en la educación matemática. Asegúrese de manera clara y positivamente "sentar las bases" en su salón de clases para la inclusión de todos los estudiantes en el uso de *manipulativos*. Sin *manipulativos* y modelos de uso, modelos mentales, y otros materiales tangibles para resolver problemas, los alumnos serán mucho más propensos a hacer lo mismo. A su vez, cuando los profesores abiertamente expresan menos sentimientos positivos acerca del uso de *manipulativos* para resolver los problemas, los que requieren objetos tangibles para alcanzar el éxito serán menos probable que los utilizan y, en consecuencia, menos posibilidades de obtener una sólida comprensión de la habilidad o concepto matemático en frente de ellos.

8. *Hacer que los Manipulativos estén disponibles y accesibles.*

En orden a facilitar el uso de materiales manipulativo, en cualquier grado, los elegidos y / o requerido *manipulativos* deben almacenarse de tal manera que sea físicamente accesible por todos los estudiantes, lo suficientemente abundante como (en número) para permitir a cada estudiante a tener acceso a un conjunto completo y correctamente etiquetados con instrucciones claras como sea necesario sobre la base de la finalidad prevista,

9. *Considerar la toma de riesgos y la inventiva en estudiantes y maestros.*

Los maestros que toman el riesgo de modelo y están abiertos a los errores y re-pensamiento mejorarán la capacidad del estudiante para entrar en territorio desconocido. Apoyo a la toma de riesgos y la creatividad en los estudiantes los lleva a explorar incógnitas y se esfuerzan por alcanzar preguntas sin respuesta, ya que facilita la apertura de espíritu y la creatividad. Los estudiantes deben contar con el apoyo en la búsqueda y el uso de sus propios procesos de resolución de problemas. Manipuladores son conductos naturales para el éxito interactivo de la construcción del conocimiento a través de la resolución de problemas.

10. Establecer un proceso de evaluación basado en los resultados

Dado que el uso manipulador se basa en la construcción o la realización de una acción con un objeto tangible o conjunto de objetos, descubriendo lo que los estudiantes saben también debe basarse en la observación del maestro activo y unos criterios de resultados esperados o, en general, una herramienta de evaluación rúbrica de estilo. La evaluación práctica en investigación puede ser una tarea difícil que implica un compromiso de tiempo y energía más allá de las medidas de lápiz y papel de los logros. Auténticamente teniendo en cuenta lo que un estudiante sabe y puede hacer (realizar) a raíz de una tarea de manipulación y basados en la indagación requiere aptitudes para la observación y la paciencia del profesor. Lo que el maestro realmente ve que el alumno haga en una tarea manipulativa basada es casi tan importante como el pensamiento matemático que el estudiante verbalmente puede organizar y comunicar de forma coherente y clara a los profesores, compañeros y padres de familia. En la evaluación de las manos-en consulta con manuales, las diez normas para la escuela matemáticas (NCTM, 2000) se actualizan a través de medios verbales y no verbales. El desarrollo rúbrica de estilo cuotas para manipuladores basados en actividades con estudiantes y colegas ayuda a asegurar que la evaluación mide realmente lo que se enseña y se practica, para traer inversión estudiante fuerte en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y desarrollar el aprendizaje matemático verdadero.

Desde esta perspectiva la integración de *manipulativos* requiere de una concienzuda revisión Bibliografica que permita conocer las distintas necesidades del grupo al cual se quiere impactar con la vinculación del trabajo experimental y los *manipulativos* para la enseñanza de las *razones trigonométricas* a los estudiantes de grado decimo.

A continuación se realizara una breve descripción de este grupo al que se le presentaron las actividades que integran el uso del geoplano circular trigonométrico.

Capítulo 3. DISEÑO METODOLÓGICO

“Intentar descubrir conceptos matemáticos en los manipulables puede ser un reto. El material puede ser concreto, pero la idea que se trata de mostrar a los alumnos no está en el material. Esa idea está en la forma en que el profesor entiende el material y sus acciones con él” (Thompson, Mayo 1994)

En este trabajo se observa cómo puede aproximarse al aprendizaje de las *Razones Trigonométricas* integrando *manipulativos* a través del diseño de las tareas que implique un trabajo experimental con la construcción de *manipulativos* y uso, al igual que la resolución de algunos problemas trigonométricos. Con base, en un gran número de estudios sobre la efectividad del uso de *manipulativos* y el trabajo experimental en las clases de matemáticas. Estas investigaciones revelan dificultades en el aprendizaje de la trigonometría y consideran como alternativa la integración de *manipulativos* en las clases de matemáticas especialmente en la enseñanza de las razones trigonométricas.

Baker, nos llama a reflexionar sobre la importancia de lo experimental, que en la mayoría de las ocasiones puede considerar como lo intuitivo lo manipulativo, es aquí donde la serie de tareas considera desde lo didáctico a los *manipulativos* como una herramienta propicia para promover el acercamiento a las *Razones Trigonométricas* en el contexto de trabajo experimental, este afirmación es válida, la idea de introducir artefactos, instrumentos y recursos en el trabajo matemático desarrollado por estudiantes y maestros en ambientes tradicionales como en ambientes que integran recursos informáticos y computacionales es muy beneficiosa en términos del aprendizaje significativo de las *Razones Trigonométricas* (Baker,2000)

La investigación indica que las lecciones utilizando *manipulativos* son más propensos a ayudar a los niños a desarrollar habilidades matemáticas en las clases (Sowell, 1989). Esto se debe a los estudiantes a menudo tienen dificultades para relacionarse con los conceptos y dar sentido a las ideas abstractas. El uso de *manipulativos* da a los estudiantes experiencias prácticas y apoya el aprendizaje mediante la creación de modelos físicos que se convierten en los modelos mentales de los conceptos y procesos (Kennedy, Tipps, & Johnson 2008).

Además, a largo plazo el uso de *manipulativos* en contextos de *trabajo experimental* se relaciona positivamente con el aumento de rendimiento de los estudiantes las matemáticas y la mejora de las actitudes hacia las matemáticas (Grouws & Cebulla 2000) citado por (Kennedy, Tipps, & Johnson 2008). Cuando los estudiantes se pueden relacionar directamente con un concepto mediante el uso de *manipulativos* y sentir el éxito, que no temen al fracaso y tienen mayores relaciones de éxito y ver las conexiones entre las áreas de las matemáticas. Uso de *manipulativos* también "ayuda a los estudiantes a comprender conceptos y procedimientos matemáticos, los ayuda a pensar con flexibilidad, proporciona herramientas para la resolución de problemas, y puede reducir la ansiedad ante las matemáticas para algunos estudiantes. En suma, estos elementos teóricos dan cuenta de la necesidad de elaborar una serie de tareas que permita a través de la integración de *manipulativos* en el contexto del trabajo experimental abordar el problema de enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, de tal manera que pueda deslumbrarse una aproximación al aprendizaje significativo de las razones trigonométricas. En esta medida, se construyó la serie de tareas y se aplicó de la siguiente manera.

Se aplicó en dos sesiones, preliminarmente se presentó a los docentes en formación, y en segundo momento se presentó a las estudiantes de grado decimo. En la Tabla 1, se muestra el conjunto de actividades que se realizaron en las sesiones y las actividades.

Tabla 1. Primera y Segunda Sesión de Docente de Matemáticas en Formación.

<table>
<tr><td colspan="3">Primera Sesión

Objetivos Generales:
Promover el uso del Geoplano Circular Trigonométrico
Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los docentes en formación como orientadores y facilitadores de trabajo.
Objetivo de las Actividades:

Que el Alumno:
Reconoce las Razones Trigonométricas (seno, coseno, tangente) con ángulos y pendientes.
Manifiesta coherencia al realizar cambios de registro en forma oral y escrita de las razones trigonométricas.
Que conjeturar y formular relaciones entre el ángulo y la pendiente.</td></tr>
<tr><td>Estrategia</td><td>Actividades</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Apertura: 10 a 15 minutos aproximadamente.</td></tr>
<tr><td>Introducción de manipulativos</td><td>Instrucciones de uso del Geoplano circular trigonométrico.</td><td>Ficha, Lápiz, Geoplano Circular Trigonométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desarrollo: 40 a 45 minutos aproximadamente</td></tr>
<tr><td>Estrategia</td><td>Actividades</td><td>Recursos</td></tr>
</table>

Introducción de *manipulativos*	• Cada estudiante completa las tablas presentadas en la guía, con la ayuda del Geoplano circular trigonométrico.	Pizarra, Geoplano Circular Trigonométrico.

Cierre: 10 minutos aproximadamente.

Estrategia	Actividades	Recursos
Introducción de *manipulativos*.	• Revisar el avance de cada equipo	Lápiz y Calculadora.

Segunda Sesión

Objetivos Generales:

- Promover el uso del Geoplano Circular Trigonométrico
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los docentes en formación como orientadores y facilitadores de trabajo.

Objetivo de las Actividades:

Que el Alumno:

- Reconoce las *Razones Trigonométricas* (seno, coseno, tangente) con ángulos y pendientes.
- Manifiesta coherencia al realizar cambios de registro en forma oral y escrita de las razones trigonométricas.
- Que conjeturar y formular relaciones entre el ángulo y la pendiente.

Estrategia	Actividades	Recursos
Apertura: 10 a 15 minutos aproximadamente.		
Introducción de *manipulativos*	• Instrucciones de uso del Geoplano circular trigonométrico.	Ficha Lápiz Geoplano Circular Trigonométrico.

Desarrollo: 40 a 45 minutos aproximadamente		
Estrategia	**Actividades**	**Recursos**
Introducción de *manipulativos*	• Cada estudiante completa las tablas presentadas en la guía, con la ayuda del Geoplano circular trigonométrico.	Geoplano Circular Trigonométrico.
Cierre: 10 minutos aproximadamente.		
Estrategia	**Actividades**	**Recursos**
Introducción de *manipulativos*	• Revisar el avance de cada grupo.	Lápiz Calculadora.

Las actividades que se llevaron en cada sesión, tienen como uno de sus objetivos la integración de un manipulable que se denomina Geoplano circular trigonométrico, este manipulable Se dice fue presentado por Gattegno en una publicación conjunta de la Comisión Internacional para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en 1961. El Geoplano original diseñado por Caleb Gattegno (1911-1988) consistía en una plancha de madera con pivotes o clavos formando una trama ortométrica. Con gomas elásticas se representan diferentes figuras geométricas. Se utilizaron preferentemente los de 5 x 5. Actualmente en el mercado están disponibles en material plástico de 5 x 5, 6 x 6,...

Posteriormente se empezaron a utilizar geoplanos circulares (de 12 o 24 pivotes) y geoplanos isométricos que permiten la representación de polígonos regulares. En primaria se recomienda el uso de tres tipos de geoplanos:

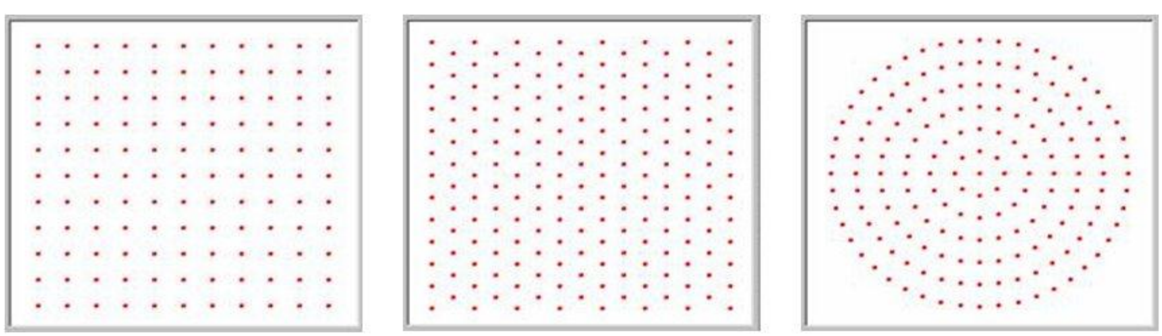


Ilustración 8. Geoplanos Ortométrico, Isométricos y Circulares

- ***Ortométrico de Trama Cuadriculada:*** Es un geoplano parecido al mostrado al lado izquierdo de la Ilustración 8. En un principio se construían en madera, se utilizaban redes cuadriculadas de 9, 16, 25, 36, 49 y 121 pivotes. Los más frecuentes en el mercado son los de 25 puntos y los de 36 puntos. En el segundo y tercer ciclo de primaria conviene disponer de geoplanos de 100 puntos.

- ***Isométrico de Trama Triangular:*** Es similar al mostrado en el centro de la Ilustración 8, con los pivotes situados en vértices de triángulos equiláteros, la distancia entre cada punto y todos los puntos contiguos a él es la misma.

- ***El Geoplano Circular*:** Como se muestra al lado derecho de la Ilustración 8. Es una colección de puntos de una circunferencia igualmente espaciados, que se colocan como sigue (en los modelos antiguos de madera): un pivote central, cuatro pivotes exteriores en las esquinas y el resto (12) formando una circunferencia. Permite construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8,12 y 24 lados. Sirve también para estudiar propiedades de los elementos de la circunferencia y de las figuras inscritas. Los actuales en plástico disponen de 24 pivotes.

Actualmente se comercializan en plástico a doble cara, por una en trama cuadrada de 25 o 36 pivotes y por la otra circular. Otros modelos presentan por una cara Geoplano isométrico y por la otra Ortométrico. Para trabajar con ellos se usan preferentemente gomas elásticas aunque también pueden utilizarse lanas, cordones e hilo de plástico.

Finalmente este material puede posibilitar la aproximación a las *Razones Trigonométricas* desde una reflexión de cómo se entiende el material y que acciones existirán sobre él, en un contexto de *trabajo experimental*. A continuación las actividades diseñadas con el Geoplano Circular Trigonométrico.

En este mismo sentido mismo sentido se aplicaron posteriormente las actividades a las estudiantes de grado decimo las sesiones se presentaron así:

Tabla 2. Primera Sesión y Segunda Sesión para Estudiantes de Grado Decimo.

Primera Sesión

Objetivos Generales:

- Promover el uso del Geoplano Circular Trigonométrico

- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los estudiantes y el rol del docente como orientador y facilitador de trabajo.

<table>
<tr><td colspan="3">Objetivo de las Actividades:

Que el Alumno:
Reconoce las Razones Trigonométricas (seno, coseno, tangente) con ángulos y pendientes.
Manifiesta coherencia al realizar cambios de registro en forma oral y escrita de las razones trigonométricas.
Que conjeturar y formular relaciones entre el ángulo y la pendiente.</td></tr>
<tr><td>Estrategia</td><td>Actividades</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Apertura: 10 a 15 minutos aproximadamente.</td></tr>
<tr><td>Introducción de manipulativos</td><td>Instrucciones de uso del Geoplano Circular Trigonométrico.</td><td>Ficha, Lápiz, Geoplano Circular Trigonométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desarrollo: 40 a 45 minutos aproximadamente</td></tr>
<tr><td>Estrategia</td><td>Actividades</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td>Introducción de manipulativos</td><td>Formar grupos para intercambiar ideas sobre la guía de tarea entregada.
Cada estudiante completa las tablas presentadas en la guía, con la ayuda del Geoplano Circular Trigonométrico.</td><td>Pizarra, Geoplano Circular Trigonométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cierre: 10 minutos aproximadamente.</td></tr>
<tr><td>Estrategia</td><td>Actividades</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td>Introducción de manipulativos.</td><td>Revisar el avance de cada equipo</td><td>Lápiz y Calculadora.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Segunda Sesión</td></tr>
</table>

Objetivos Generales:

- Promover el uso del Geoplano Circular Trigonométrico
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los estudiantes y el rol del docente como orientador y facilitador de trabajo.

Objetivo de las Actividades:

Que el Alumno:

- Reconoce las *Razones Trigonométricas* (seno, coseno, tangente) con ángulos y pendientes.
- Manifiesta coherencia al realizar cambios de registro en forma oral y escrita de las razones trigonométricas.
- Interprete y Resuelva situaciones Problemáticas.
- Conjeturar y formular relaciones entre el ángulo y la pendiente.

Estrategia	**Actividades**	**Recursos**
Apertura: 10 a 15 minutos aproximadamente.		
Introducción de *manipulativos*	• Repasar el uso del Geoplano Circular Trigonométrico.	Ficha con problemas, Lápiz, Geoplano Circular Trigonométrico.
Desarrollo: 40 a 45 minutos aproximadamente		
Estrategia	**Actividades**	**Recursos**
Introducción de *manipulativos*	• Formar Grupos para intercambias ideas sobre la guía de ejercicios entregada. • Cada grupo calcula el valor de la incógnita usando el Geoplano Circular Trigonométrico.	Geoplano Circular Trigonométrico.
Cierre: 10 minutos aproximadamente.		

Estrategia	**Actividades**	**Recursos**
Introducción de *manipulativos*	• Revisar el avance de cada grupo.	Lápiz y Calculadora.

Estas sesiones se llevaron a cabo en un Colegio de la ciudad de Santiago de Cali, en horas de la mañana, en grupos grados decimo uno y dos, las actividades que se aplicaron se muestran a continuación:

En cuanto concierne al impacto de la serie de tareas, se propone una metodología de tipo cualitativo de corte descriptivo - interpretativo de las producciones de los estudiantes de grado décimo de la ciudad de Cali, en relación con el aprendizaje de las *Razones Trigonométricas* en el contexto del trabajo de experimental que involucra el uso de *manipulativos*.

El análisis de las producciones de los estudiantes participantes se complementa con un cuestionario y /o entrevistas que buscan documentar su experiencia y creencias alrededor de las razones trigonométricas.

Tras elegir y adaptar algunas de las cuestiones a los objetivos de este trabajo de grado se configura un cuestionario. Con este se recolecto y sistematizo los datos obtenidos y se procedió a hacer un análisis de las respuestas obtenidas del cuestionario y / o entrevistas

Una vez terminada la revisión se hace una puesta en común, en una sesión conjunta con los profesores de la institución, quienes también serán objeto de indagación a través de entrevistas semi estructuradas sobre el conocimiento de las *Razones Trigonométricas* y los métodos de enseñanza relativos a ellas.

De otra parte, el análisis de estos elementos presto atención a los procedimientos empleados, estrategias de solución, y errores que se desprenden de sus respuestas en relación con las actividades propuestas en el conjunto de tareas diseñada.

El grupo al cual se le pidió realizar los laboratorios 1 y 2 respectivamente se caracterizan por ser docente en formación y en ejercicio en educación media diversificada, en cuanto a los estudiantes ser cursantes del segundo año de educación media, en total son 40 docentes y 80 alumnos cursantes del segundo año de educación media y seminario de práctica profesional a nivel universitario.

4.1 ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACION OBTENIDA EN LOS CUESTIONARIOS.

En el momento de proceder a obtener la información del presente trabajo fueron los pasos para tal fin:

a) Revisión Bibliográfica concerniente al tema

b) Consultar a los estudiantes por medio del Geoplano Circular Trigonométrico el aprendizaje matemático referente a las razones trigonométricas.

c) Consultar a los docentes de matemáticas por medio del Geoplano Circular Trigonométrico.

d) Detectar a través de una encuesta las estrategias y los recursos empleados por el docente en la enseñanza de la trigonometría.

Tabla 3. Cuestionario para indagar a las estudiantes de un Colegio de Santiago de Cal, a través del uso del Geoplano Circular Trigonométrico.

Cuestionario 1

Fecha: ___________________________

Institución Educativa: ____ Grado: ____________

1. En Clases de Matemáticas estudiaste el tema razones trigonométricas, ¿Cuáles de los siguientes temas asociados te generaron mayor dificultad? : Definición de razones trigonométricas, resolución de problemas, establecer las propiedades de semejanza de triángulos, resolver problemas de triángulos rectángulos, el círculo unitario. ¿Podrías justificar tu respuesta?

2. ¿Qué tipo de problemas puedes resolver utilizando las razones trigonométricas? ¿Consideras que las *Razones Trigonométricas* tienen una utilidad en la vida real? ¿Podrías justificar tu respuesta?

3. Como calificas tu experiencia con el Geoplano Circular Trigonométrico. ¿Qué fue lo más fácil y que fue lo más difícil de trabajar con él?

4. En las actividades propuestas usastes calculadora científica. ¿Qué relación puedes establecer con el uso de las misma y el Geoplano Circular Trigonométrico?

Los instrumentos aplicados se analizaran a la luz del marco teórico planteado en el trabajo, por este motivo se considerara desde la resolución de problemas las actividades planteadas incluyendo las encuestas. De esta manera las similitudes de la manera como operan los estudiantes a la hora de resolver un problema que involucre *Razones Trigonométricas* podemos analizarla a través de cada uno de los instrumentos. Iniciaremos con una revisión bibliográfica que permita dar luz frente a la importancia y uso de estos instrumentos manipulables.

4.1.1 **REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

El uso de manipulables ha sido siempre interesante. Los editores de un libro sobre métodos educativos, publicado a principio de siglo afirmaban:

"Los ejemplos concretos son mucho mejores para el alumno en esta etapa de su desarrollo ya que puede comprenderlos más fácilmente" (Faxon, 1918,47)

El uso de *manipulativos* en la escuela, ha posibilitado aproximación a la trigonometría desde diferentes modelos teóricos desde la resolución de problemas en cuanto al Geoplano circular trigonométrico históricamente se ha introducido en el aula para e l cálculo de áreas desde la topología, pero en clases de trigonometría no suele usarse como lo habíamos mencionado anteriormente para las *Razones Trigonométricas* en tanto, estas se introducen a través del círculo unitario y después el triángulo rectángulo o viceversa y en la mayoría de las situaciones sin utilizar manipulativo. Algunos investigadores como afirman que la enseñanza con Geoplano es atractiva para currículo que se preocupa por innovar en clases a través de diferentes estrategias didácticas.

De esta manera, se considera importante, que se posibilite el uso de estas estrategias didácticas en el currículo. En este sentido observaremos como se plantean estas estrategias didácticas en el currículo del colegio donde se realizó la aplicación de las tareas con el geoplano circular trigonométrico, para conseguir este objetivo analizaremos los libros guías que se utilizan en grado decimo, los cuales están estructurados en base a la propuesta curricular del colegio.

La cual considera importante a la hora de analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, la organización de los contenidos, al igual que la conceptualización, razonamiento, resolución de problemas, modelación, producción y comunicación del conocimiento matemático en los cuales están inmersos los estudiantes y los maestros. En estos procesos se pretende potencializar:

Identificar, esquematizar, formular y visualizar, descubrir, reconocer, transferir, representar, refinar y ajustar, combinar e integrar, probar, formular y generalizar.

Por esta y otras razones las guías son una herramienta indispensable para los docentes del Colegio escogido para realizar la aplicación de las tareas ubicado en la ciudad de Santiago de Cali, t en tanto responden a las necesidades de las estudiantes y a la concepción filosófica del colegio.

El objetivo de las guías pretenden que las estudiantes.

- Desarrolle una actitud favorable hacia las matemáticas y hacia su estudio, que le permita lograr una sólida compresión de los conceptos, procesos y estrategias básicas, e igualmente la capacidad de utilizar todo esto en la solución de problemas.

- Haga uso creativo de las matemáticas para expresar nuevas ideas y descubrimientos, así como para reconocer los elementos matemáticos presentes en otras actividades creativas.

Estas guías están organizadas por ciclos, cada uno tiene dos niveles manteniendo una coherencia vertical, a continuación se exponen los propósitos del cuarto y quinto ciclo que involucra grado octavo, noveno, decimo y once:

CICLO 4 (OCTAVO Y NOVENO)

- ❖ Promover en los estudiantes la comprensión y uso de las matemáticas en situaciones cotidianas, a través del desarrollo de procesos y habilidades del pensamiento algebraico y variacional.
- ❖ Proponer actividades que propicien la exploración, investigación y apropiación de los conceptos matemáticos relacionados con la solución de ecuaciones
- ❖ Desarrollar en las estudiantes procesos relacionados con la recopilación, análisis gráfico y conteo de datos a través de temas de estadística.
- ❖ Observar, analizar y clasificar objetos en figuras geométricas teniendo en cuenta su composición y ubicación en el plano cartesiano.
- ❖ Involucrar ejercicios de competencias ciudadanas en las cuales las estudiantes deben analizar y presentar la solución ante un problema.
- ❖ Desarrollar en las estudiantes procesos relacionados con el sistema numérico, tales como las relaciones, operaciones y solución de problemas entre los conjuntos de números.

CICLO 5 (DÉCIMO Y ONCE)

- ❖ Promover en los estudiantes la comprensión y uso de las matemáticas en situaciones cotidianas, a través del desarrollo de procesos y habilidades del pensamiento.
- ❖ Observar, analizar y clasificar objetos en figuras geométricas teniendo en cuenta su composición y ubicación en el plano cartesiano.
- ❖ Preparar las estudiantes en las competencias evaluadas en las pruebas ICFES.

- ❖ Involucrar ejercicios de competencias ciudadanas en las cuales las estudiantes deben analizar y presentar la solución ante un problema.
- ❖ Desarrollar en las estudiantes procesos relacionados con el sistema numérico, tales como las relaciones, operaciones y solución de problemas entre funciones y conjuntos.
- ❖ Promover parámetros de auto evaluación en lo referente a lo que se espera sean capaces de saber y hacer las estudiantes.

Estas guías para grados octavo, noveno, decimo y once, tienen múltiples propósitos para alcanzar variados y altos desempeños en el área de matemáticas, particularmente para trigonometrías y las *Razones Trigonométricas* observamos que las actividades propuestas están enmarcadas en las investigaciones de Stacey (1997), las cuales sugieren una secuencia específica de aprendizaje para la iniciación a la trigonometría a partir del triángulo rectángulo.

La gran mayoría de las actividades presentadas en la guía muestran el espíritu de hacer un uso creativo de las matemáticas como se mencionó anteriormente, sin embargo para el tema "Razones Trigonométricas" este objetivo no es cumplido a cabalidad en tanto, que las actividades expuestas son más de corte procedimental y no da lugar a la creatividad del estudiante para proponer distintas soluciones, o conjeturar frente a resolución de los problemas planteados.

En suma a esta problemática se indagaran a los estudiantes a través de una serie de tareas que contiene actividades que pueden mejorar la aproximación a las *Razones Trigonométricas* desde una perspectiva experimental. A continuación se presenta el análisis de los resultados obtenidos cuando se aplicó a las estudiantes y maestros.

CAPITULO 4. ANALISIS Y RESULTADOS

“No es fácil usar materiales correctamente y, sin embargo, es fácil utilizarlos mal. Algunos estudios sugieren que es más probable usarlos mal cuando el profesor tiene en mente que los alumnos aprendan a realizar alguna actividad con ellos”. (Boyd, 1992) (Resnick, 1987) (Thompsonx, 1994)

Los instrumentos aplicados se analizaran a la luz del marco teórico planteado en el trabajo, por este motivo se considerara desde la resolución de problemas las actividades planteadas incluyendo las encuestas. De esta manera las similitudes de la manera como operan los estudiantes a la hora de resolver un problema que involucre *Razones Trigonométricas* podemos analizarla a través de cada uno de los instrumentos. Iniciaremos con una revisión bibliográfica que permita dar luz frente a la importancia y uso de estos instrumentos manipulables.

5.1 DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS

“No es fácil usar materiales correctamente y, sin embargo, es fácil utilizarlos mal. Algunos estudios sugieren que es más probable usarlos mal cuando el profesor tiene en mente que los alumnos aprendan a realizar alguna actividad con ellos”. (Boyd, 1992) (Resnick, 1987) (Thompsonx, 1994)

Los instrumentos aplicados se analizaran a la luz del marco teórico planteado en el trabajo, por este motivo se considerara desde la resolución de problemas las actividades planteadas incluyendo las encuestas. De esta manera las similitudes de la manera como operan los estudiantes a la hora de resolver un problema que involucre razones trigonométricas podemos analizarla a través de cada uno de los instrumentos. Iniciaremos con una revisión bibliográfica que permita dar luz frente a la importancia y uso de estos instrumentos manipulable

5.1.1 **CONSULTA A LOS ESTUDIANTES A TRAVÉS DE "GEOPLANO CIRCULAR TRIGONOMÉTRICO"**

"Intentar descubrir conceptos matemáticos en los manipulables puede ser un reto. El material puede ser concreto, pero la idea que se trata de mostrar a los alumnos no está en el material. Esa idea está en la forma en que el profesor entiende el material y sus acciones con él" (Thompson, Mayo 1994)

Las actividades planteadas permitieron evidenciar diferentes procedimientos de resolución de actividades particularizados por las competencias planteadas en cada una de ellas, viéndose una evolución desde el uso inicial del Geoplano Circular Trigonométrico para la solución de los problemas planteados. Al solicitarse la ausencia de la calculadora para trabajar con *Razones Trigonométricas* debido a la presencia del Geoplano Circular Trigonométrico las estudiantes se mostraron incrédulas en la exactitud y veracidad de los cálculos.

Se detectaron tres estrategias para solución de las actividades propuestas, estas estrategias surgen de alguna manera por el tipo de actividad propuesta y según el momento de la sesión. Por ejemplo la estrategia usada al principio se basa en un análisis empírico acerca del uso del Geoplano Circular Trigonométrico lo cual obstaculiza inicialmente la solución de la tarea.

Sin embargo, a medida que utilizaban y se iban familiarizando con el recurso didáctico se mostraban mayor entusiasmo por completar la tabla. Veían en el Geoplano Circular Trigonométrico una herramienta sencilla y útil para el cálculo de pendientes y ángulos a través de la razón trigonométrica tangente.

Las dificultades en su mayoría fueron emergiendo en el transcurso de la actividad y algunos muy ligados a la actividad planteada. Sin embargo que fue constante en las dos sesiones fue relacionar los ángulos y las pendientes a través de la entre la pendiente y la tangente del ángulo con la horizontal, siempre se asumió la tarea para ángulos entre 0 y π.

Las mayores dificultades encontradas especialmente al principio de la experimentación fueron las de establecer las relaciones que daban entre los diferentes elementos o conceptos involucrados en el estudio de las *Razones Trigonométricas* y la incapacidad inicial de involucrar el recurso didáctico con la solución de la tarea.

En la primera actividad prevalecieron las soluciones empíricas con el uso del Geoplano Circular Trigonométrico, los valores que se debían completar en cada una de las tablas eran incorrectos, solo se calcularon valores de ángulos notables, lo cual muestra una interpretación del instrumento como un transportador, solo a través de la indagación las estudiantes reflexionan frente al instrumento y poco a poco se aproximan al cálculo de pendientes a partir de los ángulos dados y viceversa. Siempre hubo la necesidad de utilizar calculadora aun cuando no se conocía la relación entre los ángulos y las pendientes, pero lo más llamativo es cuando se pregunta por ángulos críticos por denotar de alguna manera a los ángulos de 90° y 0 para los cuales la pendiente es indefinida y cero respectivamente, puesto que la manipulación de los cauchos para determinar el ángulo de 90° implicaba poner un caucho del centro del Geoplano a un clavo colineal con este y formando un ángulo llano.

Es aquí cuando las estudiantes entienden por qué la pendiente es indefinida en tanto no tiene barrido y únicamente altura, y en el caso de 0 sucede lo contrario pues este tiene barrido pero no elevación. Esta reflexión fue muy llamativa y transcendental para las estudiantes en tanto se muestra con la manipulación una indeterminación lo cual es complejo en ocasiones mostrarlo en la tablero.

A continuación presentamos ejemplos de algunas soluciones más frecuentes analizadas en las actuaciones de las estudiantes de los dos grupos.

En la ***Actividad 1. Lab 11.1*** .Se pide completar la tabla dada la pendiente o el ángulo, a continuación se tienen dos soluciones de estudiante de un mismo grupo.

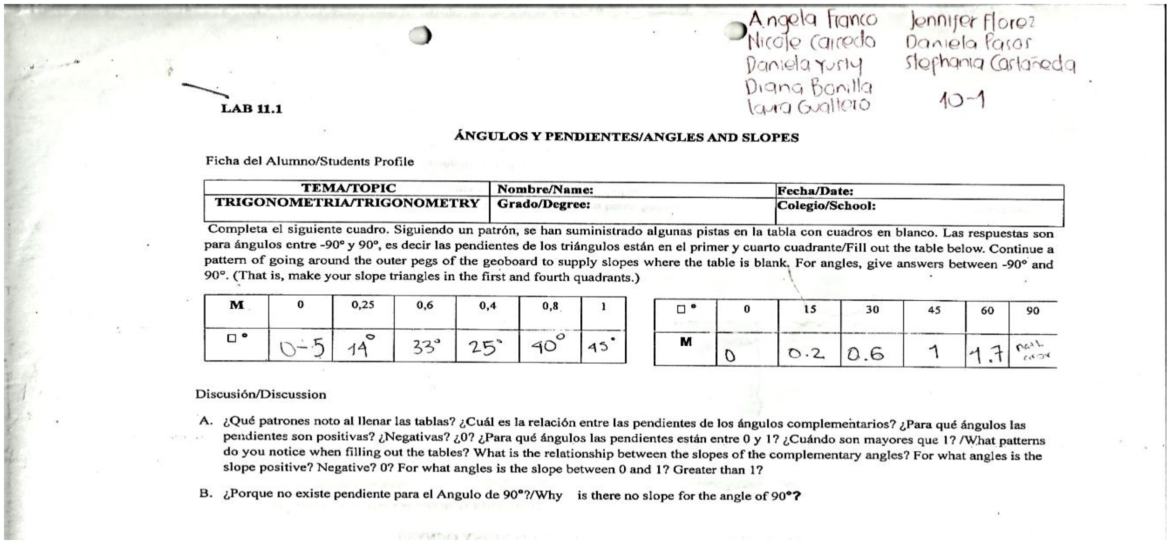
Enunciado

> Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blancos. Las respuestas son para ángulos entre -90° y 90°, es decir, las pendientes de los triángulos están en el primer cuadrante y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90° and 90°, That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants

Tabla 4.Actividad 1. Lab 11.1

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
θ	0-5	14°	33°	25°	40°	45°
M	0	0.2	0.6	1	1.7	Math Error

Estudiante 1 y 2:



Angela Franco
Nicole Caicedo
Daniela Yurly
Diana Bonilla
Laura Guallero

Jennifer Floroz
Daniela Pasos
Stephania Castañeda

10-1

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES/ANGLES AND SLOPES

Ficha del Alumno/Students Profile

TEMA/TOPIC	Nombre/Name:	Fecha/Date:
TRIGONOMETRIA/TRIGONOMETRY	Grado/Degree:	Colegio/School:

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90° y 90°, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs of the geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90° and 90°. (That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants.)

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
□ °	0-5	14°	33°	25°	40°	45°

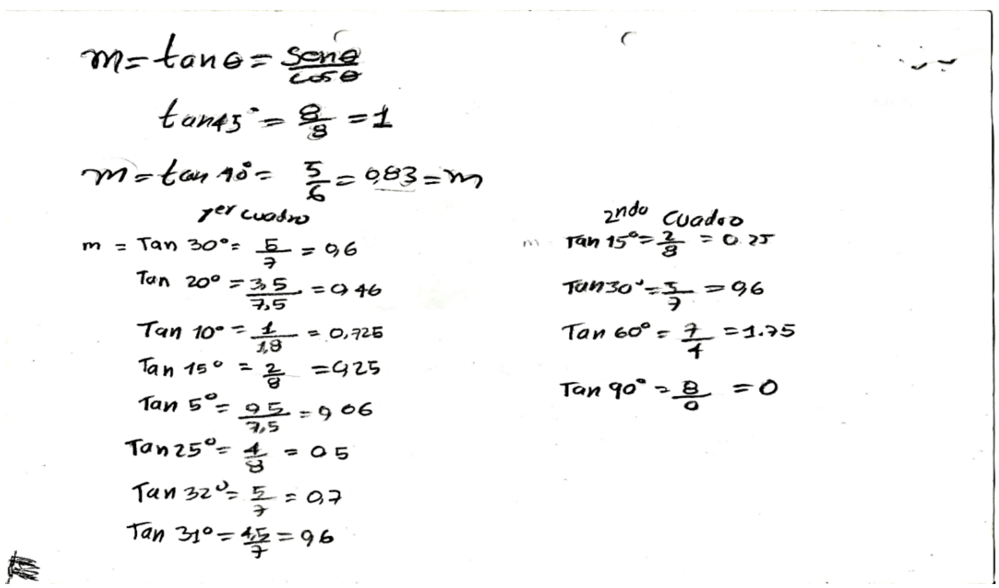
□ °	0	15	30	45	60	90
M	0	0.2	0.6	1	1.7	[illegible]

Discusión/Discussion

A. ¿Qué patrones noto al llenar las tablas? ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios? ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0? ¿Para qué ángulos las pendientes están entre 0 y 1? ¿Cuándo son mayores que 1? /What patterns do you notice when filling out the tables? What is the relationship between the slopes of the complementary angles? For what angles is the slope positive? Negative? 0? For what angles is the slope between 0 and 1? Greater than 1?

B. ¿Porque no existe pendiente para el Angulo de 90°?/Why is there no slope for the angle of 90°?

Ilustración 9. Estudiante 1. Actividad 1.Lab 11.1. Ver Anexo 1



$m = \tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$\tan 45° = \frac{8}{8} = 1$

$m = \tan 40° = \frac{5}{6} = 0.83 = m$

1er cuadro

$m = \tan 30° = \frac{5}{7} = 0.6$

$\tan 20° = \frac{3.5}{7.5} = 0.46$

$\tan 10° = \frac{1}{1.8} = 0.725$

$\tan 15° = \frac{2}{8} = 0.25$

$\tan 5° = \frac{0.5}{7.5} = 0.06$

$\tan 25° = \frac{4}{8} = 0.5$

$\tan 32° = \frac{5}{7} = 0.7$

$\tan 31° = \frac{4.5}{7} = 0.6$

2ndo Cuadro

$\tan 15° = \frac{2}{8} = 0.25$

$\tan 30° = \frac{5}{7} = 0.6$

$\tan 60° = \frac{7}{4} = 1.75$

$\tan 90° = \frac{8}{0} = 0$

Ilustración 10.Estudiante 2. Actividad 1. Lab 11.1. Ver Anexo 1

La Estudiante 1, reconoce el patrón que se estableció en la tabla con las pistas dadas previamente, y visualiza como puede relacionarse la pendiente con el ángulo, pues lograr calcular alguno de los valores de la tarea, sin embargo se nota que tiene dificultades cuando se le pregunta por ángulos notables como el 0, esto debido a que formula que cuando la pendiente vale 0 el valor del ángulo es un intervalo entre 0-5 al parecer no comprende la relación de entre elevación y desplazamiento en tanto que, considera que el diseño del tablero con cinco clavos del centro del círculo a uno de sus extremos, es el valor de la pendiente cuando el ángulo es cero. Por otro lado, la Estudiante 2. En contraste con el Estudiante 1, observamos una esquematización diferente con el cálculo de la tangente contando la cantidad de clavos verticales o de elevación y los horizontales o de barrido, Además, refina sus cálculos, utilizando la calculadora para comprobar que los valores hallados en el Geoplano Circular Trigonométrico.

Ahora bien, la ***Actividad 2. Lab 11.2***, revela comportamientos diferentes pero igualmente positivos.

Enunciado

1¿Qué altura tiene el asta de la bandera?

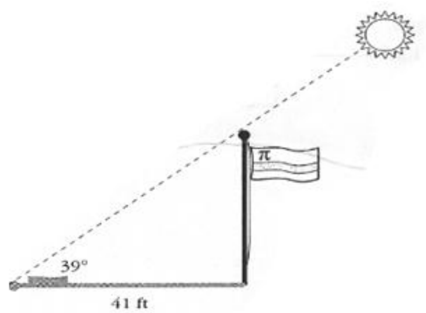


Ilustración 11. Ejercicio 1 de Actividad 2. Lab 11.2

2. ¿Qué tan lejos está el borde del bote del alcantilado?

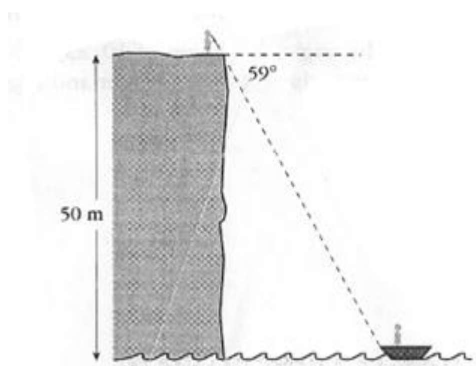
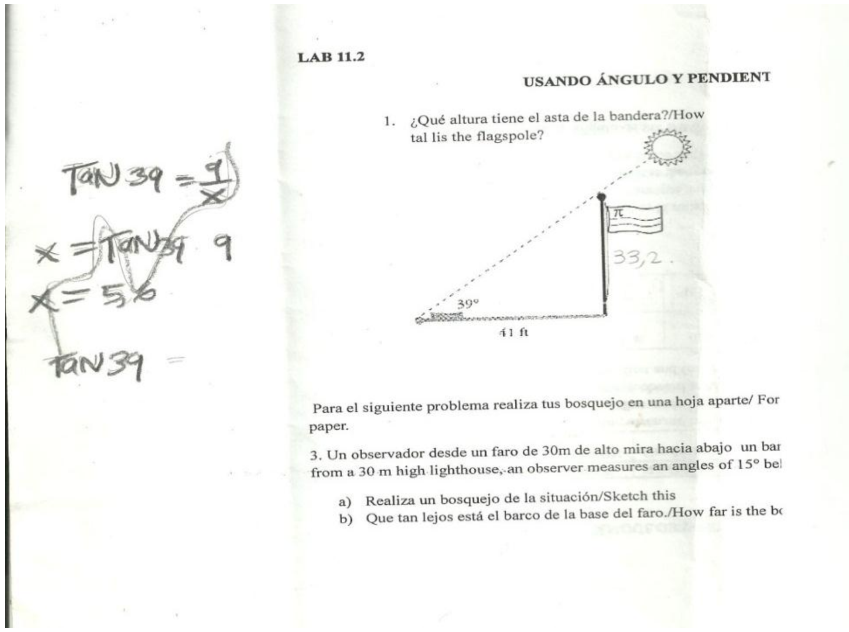


Ilustración 12. Ejercicio 2 de Actividad 2. Lab 11.2

Estudiantes 1 y 2


LAB 11.2

USANDO ÁNGULO Y PENDIENT

1. ¿Qué altura tiene el asta de la bandera?/How tal lis the flagspole?

$\tan 39 = \frac{9}{x}$

$x = \tan 39 \; 9$

$x = 56$

$\tan 39 =$

33,2

39°

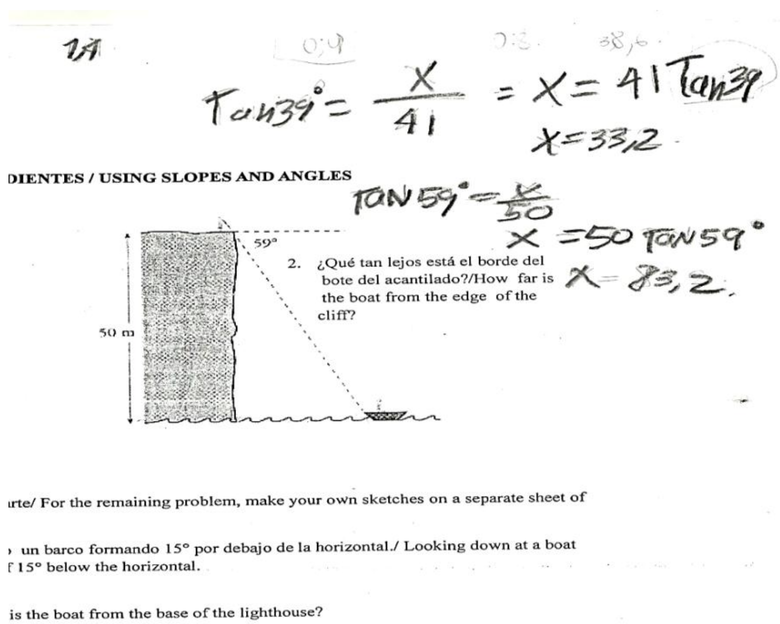
41 ft

Para el siguiente problema realiza tus bosquejo en una hoja aparte/ For paper.

3. Un observador desde un faro de 30m de alto mira hacia abajo un bar from a 30 m high lighthouse, an observer measures an angles of 15° bel

a) Realiza un bosquejo de la situación/Sketch this
b) Que tan lejos está el barco de la base del faro./How far is the bo

Ilustración 13. Estudiante 1. Actividad 2. Lab 11.2. Ver Anexo 1


1/1

$\tan 39° = \frac{x}{41} = x = 41 \tan 39$

$x = 33{,}2$

DIENTES / USING SLOPES AND ANGLES

$\tan 59° = \frac{x}{50}$

$x = 50 \tan 59°$

$x = 83{,}2.$

59°

50 m

2. ¿Qué tan lejos está el borde del bote del acantilado?/How far is the boat from the edge of the cliff?

ırte/ For the remaining problem, make your own sketches on a separate sheet of

un barco formando 15° por debajo de la horizontal./ Looking down at a boat
f 15° below the horizontal.

is the boat from the base of the lighthouse?

Ilustración 14.Estudiante 2.Actividad 2.Lab 11.2. Ver Anexo 1

La estudiante 1, Procede con una estrategia para calcular el valor de la incógnita, sin embargo cuando se utiliza las *Razones Trigonométricas* para calcular el valor de la variable, se notan algunas dificultades en tanto definen mal la $Tan\ (\theta)$, exactamente define la tangente como cotangente. Y no se usa el Geoplano Circular Trigonométrico para calcular el valor de tan 39. Mientras la Estudiante 2, utiliza una adecuada estrategia para encontrar el valor de la incógnita y utiliza el Geoplano Circular Trigonométrico para calcular el valor de la tan 59, mostrando un mayor nivel de compresión del problema y un mejor uso del Geoplano Circular Trigonométrico.

Finalmente, analicemos algunos discursos tomados de videograbaciones hechas durante el desarrollo de la Actividad 1. Lab 11.1 Discusión de la actividad presentada.

Respuesta grupo 1.

(1) P: ¿Qué patrones noto al llenar las tablas?

(2) E1: en algunos observamos que en la tabla que la pendiente es más exacta que la calculadora como en el ángulo de 15 en la calculadora da en tangente 0,267949 y en la tabla dio 0,25.

(3) P: ¿esto a que se debe?

(4) E2: en la primera tabla aumentan y disminuyen los grados, y la segunda tabla el valor de las pendientes aumenta proporcionalmente.

(5) P: si aumentan proporcionalmente entonces como se relacionan la tangente y la pendiente.

(6) E1: pues la relación es que cuando metemos en la calculadora tan^-1 de 1 nos da 45 y cuando hacemos lo contrario nos da 1.

(7) P: Entonces que relación de proporción habrá entonces entre la pendiente y el ángulo. Es directa o inversa.

(8) E2: pues directa. Porque cuando aumenta uno aumenta el otro.

(9) P: Uh. Será que si es directa. …………………………..

(10) P: ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios?

(11) E: que en otros datos como el de grado 20 en la calculadora da correcto y en la tabla se pasa 2 décimas ya que la tabla fue hecha a mano.

(12) P: eso que quiere decir, que no se puede hacer ese cálculo en la calculadora……………….

(13) P: ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0?

(14) E: para ningún ángulo las pendientes son negativas, y da cero cuando el ángulo es horizontal.

El grupo al que pertenece el E1, plantea una estrategia más concreta que el grupo al cual pertenece el E2, al principio de la actividad con la experimentación del instrumento se cometen muchos errores pues las estudiantes usan una y otra vez la calculadora para completar la tabla, pero algunos resultados expuestos en las tablas son incorrectos puesto que desconocen en su gran mayoría la relación entre la pendiente y los ángulos, por este motivo, es pertinente acercase a cada uno de los grupos y con un ejemplo que es calcular la tan 45, las estudiantes entienden cual es papel del Geoplano Circular Trigonométrico , es allí cuando avanza en la compresión de los patrones que se presentan en cada tabla con los ángulos notables, y su relación de proporcionalidad con las pendientes.

De esta manera se evidencia el aprovechamiento de esta herramienta en tanto, les permite acercarse a las *Razones Trigonométricas* de una manera diferente, pero sobre todo llamativa. Las estudiantes terminan la actividad con gran entusiasmo, y con una buena apropiación de lo trabajado y esto se ve plasmado en la discusión que se realiza unos minutos antes de terminar la actividad.

5.1.2 **CONSULTA A LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACION POR MEDIO DEL GEOPLANO CIRCULAR TRIGONOMÉTRICO.**

"La educación que prefigura las funciones del futuro deberá generar capacidad de abstracción/ desarrollo de un pensamiento sistémico complejo. E interrelacionado/ capacidad de experimentación de colaboración, trabajo de equipo e interacción con los pares. En suma, una educación fluida e interactiva que configura una mente escéptica, curiosa y creativa". Robert Reich (1991)

Según Guzmán (2000), ha llegado el momento de que las formas de enseñanza y los mismo contenidos deben experimentar cambios drásticos, para dar paso a la compresión por parte del estudiante de los procesos matemáticos, más que de las ejecuciones rutinarias, preparándolos en el dialogo con las herramientas ya existentes, con lo cual estará familiarizado con el uso de los *manipulativos*.

La influencia de los *manipulativos* ha sido considerable en el modo de orientar la enseñanza de las matemáticas a nivel de educación media, de tal modo es necesario aprovechar al máximo el uso de estas herramientas.

Este hecho brindara al alumno según Waldegg (2002), la capacidad de mejorar el desarrollo pensamiento matemático y de esto modo involucrar al estudiante en actividades de aprendizaje significativo.

El objetivo fundamental de esta actividad para los docentes en formación es evidenciar que estrategias de enseñanza se pueden considerar para el aprendizaje de las razones trigonométricas empleando *manipulativos*, dirigido a docentes de educación media.

El diseño de esta actividad se sustenta en el marco teórico del trabajo desde las diferentes tendencias que se plantea algunos investigadores como Kendal y Stacey 1997.

Este diseño se aplicó en dos sesiones en la universidad del valle, en el marco de seminario de trabajo de grado.

Los docentes en formación mostraron diferentes estrategias para abordar tarea planteada con el uso del Geoplano Circular Trigonométrico , se observó primero una resistencia a la instrumentación del recurso didáctico, sin embargo esto fue evolucionando en la medida que se presentaban diferentes indagaciones. Al igual que al principio con las estudiantes hubo ausencia de la calculadora, pero no presento mayor molestia para solución de la tarea.

Se detectaron múltiples estrategias, pero se destacaron dos, por ejemplo la estrategia usada al principio de la actividad consistía en establecer una relación numérica entre los grados y las medidas longitudinales del marco del Geoplano circular, cabe rescatar que este Geoplano no era manipulable sino que su presentación era de manera gráfica.

Por otro lado, la segunda estrategia, consistía en calcular con exactitud la cantidad de milímetros que existían entre cada grado en búsqueda de entender el funcionamiento del Geoplano Circular Trigonométrico , los docentes en formación formulaban diferentes hipótesis frente a la uso de la herramienta, sin embargo, la tarea que se les solicito no fue completada con éxito hasta la primera intervención donde se indaga sobre la relación entre los ángulos y las pendientes, en este momento comprenden la necesidad de utilizar las *Razones Trigonométricas* como puente para completar la tabla, y analizan la descomposición de la función trigonométrica tangente, donde el numerador seno indica elevación y el denominador cosa x indica desplazamiento comentaban los docentes.

Se muestran ejemplos a continuación de cómo se abordó la tarea, y cuáles fueron las estrategias abordadas.

En la ***Actividad Lab 11.1. Ángulos y Pendientes***

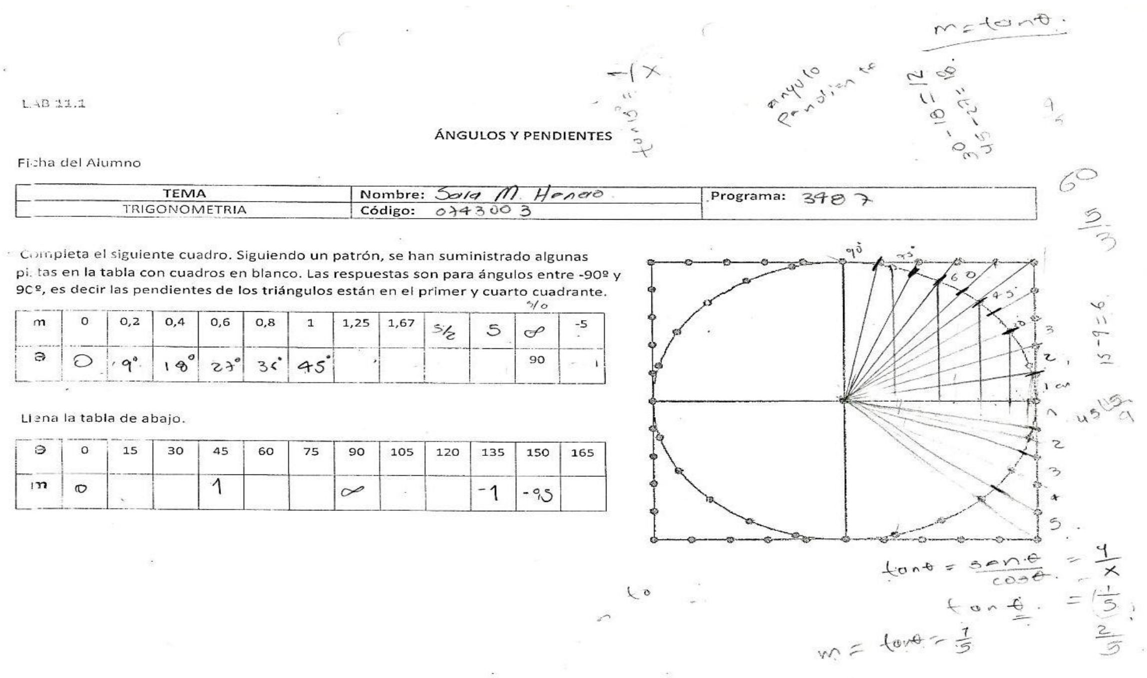


Ilustración 15.Docente 2.Actividad 1.Lab 11.1. Ver Anexo 2.

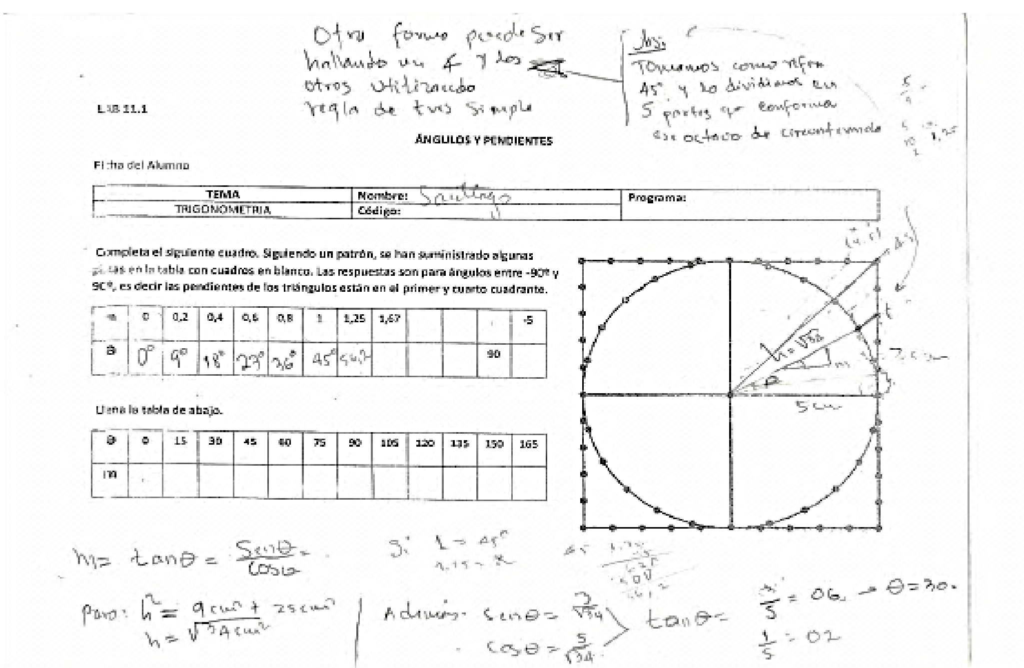


Ilustración 16.Docente 3. Actividad 1. Lab 11.1. Ver Anexo 2.

En la respuesta del Docente 1,Observamos que su estrategia consiste en dibujar una rejilla en la cual la reglilla exterior al círculo sirve como guía, luego traza segmentos radiales desde el centro del círculo, hasta un punto de la rejilla, estos puntos los obtienen racionalizando los valores dados para la pendiente de la tabla, con esta información toman nota de la intersección de estos segmentos radiales con el círculo interior, para los grados críticos, notamos que consideran correctamente, $0° \, y \, \infty$, cuando $\theta = 90°$. Aunque, presenta dificultades para decimales con dos cifras. A continuación otro docente nos muestra cómo puede resolverse la tarea con triángulos rectángulos.

En el caso del Docente 2, La estrategia utilizada consiste en trazar líneas paralelas al eje vertical, formando triángulos rectángulos con segmentos radiales desde el centro del círculo hasta la reglilla exterior al círculo se logra completar de la tabla, algunos valores para las pendientes dadas, sin embargo para los valores donde se requiere seguir el patrón no se logra deslumbrar cual es por tanto, no se completa la tarea, los valores para los valores típicos de la pendiente se registran correctamente, se nota que las líneas verticales ayudan a la precisión de los valores a calcular. Aunque no se expone la racionalización de los decimales de la tabla, se infiere que reconocen la relación entre la pendiente y los ángulos.

Finalmente observaremos un último caso que propone una estrategia muy particular. En este caso se propone calcular el valor de los ángulos reconociendo el patrón existente en la tabla, y calculando los valores con reglas de tres simple para un ángulo de referencia, utiliza el Geoplano Circular Trigonométrico , únicamente para encontrar la razón para el ángulo de referencia, y así, poder realizar la misma operación con los demás grados, además utiliza las *Razones Trigonométricas* para validar su método, esta estrategia es útil para resolutor con los valores dado de las pendientes, sin embargo no parece relacionar este patrón cuando no hay valores dados de las pendientes, lo cual se puede explicar que la estrategia utilizaba con considera un procedimiento inverso.

En general, este grupo de docentes, muestra variadas estrategias pertinentes para la solución de la tarea propuesta, algunas muy innovadoras con ajustes puede ser muy potente al momento de ser ensenadas. Las *Razones Trigonométricas* fueron un insumo necesario para resolver cada una de las tareas correspondientes, nótese que en los ejemplos no se consideró la tabla 2, debido a que en esta tabla se debía calcular los ángulos correspondiente a partir de unos Angulos dados, en este situación un pequeño porcentaje de los docentes dieron solución, una razón a esto, pareciese ser una mayor familiaridad, con el manipulativo, algunos de ellos lo manifestaron así.

5.1.3 DETECTAR A TRAVÉS DE UN CUESTIONARIO LAS ESTRATEGIAS Y LOS RECURSOS EMPLEADOS POR EL DOCENTE EN LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA.

El valor de un material manipulativo no es su costo, sino su uso. Robert Reich (1991) citado por Sánchez, R 2010.

El instrumento que se aplicó a los docentes en formación conformado por 4 ítems, se diseñó con la finalidad de obtener la opinión del docente en cuanto a las estrategias didácticas y los recursos empleados por él en el momento de impartir las clases de trigonometría, también busca como objetivo determinar si los estudiantes han aprendido significativamente las razones trigonométricas.

En este sentido con el propósito de realizar un análisis cuantitativo de los datos obtenidos en las encuestas realizadas a los maestros se consolidaron las categorías de análisis en forma lógica y ordenada. Estas categorías son, Usualmente, en ocasiones, nunca.

Tabla 5. Opinión de los docentes en formación del área de matemáticas sobre las dificultades en algunas temáticas.

Dificultad en temáticas	Categorías					
	Usualmente		En Ocasiones		Nunca	
	F	%	F	%	F	%
Definición de Razones Trigonométricas	5	62,5	2	25	1	12,5
Resolución de Problemas de triángulos rectángulos	3	37,5	4	50	1	12,5
Semejanza de Triángulos	1	12,5	2	25	5	62,5
El círculo unitario	1	12,5	5	62,5	2	25

Se observar que los docentes en formación opinan que la mayor dificultad en las temáticas ensenadas es la definición de razones trigonométricas con 62,5%, y en ocasiones en el círculo unitario con un 62,5%, mientras en la semejanza de triángulos nunca suelen presentarse dificultades con 62,5%, A diferencia de la resolución de Problemas de triángulos rectángulos en ocasiones con un 50%.

Estas dificultades en la definición de las razones trigonométricas y en la resolución de problemas en una consecuencia de una falta de conexión entre los conceptos algebraicos y geométricos para ayudar a los estudiantes a formular una representación trigonométrica, como lo plantea Calzada y Scariano (2006), quien menciona que la enseñanza de estas temáticas, debe abordarse a partir de conceptos familiares para el estudiante como objetos geométricos, semejanzas de triángulos, congruencia y áreas. Para finalmente terminar la conexión con el teorema de Pitágoras debido a su relación con las longitudes y los ángulos interiores de un triángulo rectángulo.

A continuación, en la tabla 2, se presentara la opinión de los docentes en formación sobre la evaluación del tema aprendido de las razones trigonométricas. Con un alto porcentaje de 87,5% los docentes opinan que determinan cuanto han aprendido sus estudiantes las razones trigonométricas a través de exámenes o evaluaciones cortas, y con este mismo porcentaje opinan que generalmente nunca a través de una exposición oral, y todos están de acuerdo en que nunca con una indagación guiada, y en algunas ocasiones con talleres.

Tabla 6.Opinion de docentes en formación en el área de Matemáticas sobre la Evaluación del Concepto de las Razones Trigonométricas.

Evaluación del concepto razones trigonométricas	Categorías					
	Usualmente		En Ocasiones		Nunca	
	F	%	F	%	F	%
Exposición Oral	0	0	1	12,5	7	87,5
Examen, Evaluación Corta	7	87,5	1	12,5	0	0
Talleres	0	0	5	62,5	3	37,5
Indagación Guiada	0	0	0	0	8	100
Interrogación y Discusión	2	25	2	25	4	50

Estas tendencias se deben al modelo tradicional donde no se hace una diferenciación de los estudiantes y por ende se pretende evaluar a todos de la misma manera, sin considerar que cada uno tiene competencias diferentes. Como lo plantea Montiel 2005.

Tabla 7.Opinion de Docentes en Formación del Área de Matemática acerca las aplicaciones que tienen las razones trigonométricas en la vida real.

Contextualización	Categorías					
	Usualmente		En Ocasiones		Nunca	
	F	%	F	%	F	%
En la Vida Diaria	1	12,5	6	75	1	12,5
En la Salud	1	12,5	5	62,5	2	25
En la Ingeniería	6	75	1	12,5	1	12,5
En la Ciencias.	7	87,5	1	12,5	0	0
Sin Contexto.	3	37,5	5	62,5	0	0

Los docentes consideran que las razones trigonométricas tienen una aplicación más usual en las ciencias y en ocasiones en la vida diaria como lo muestra el 87,5% vs 75%, algunos de ellos en ocasiones consideran que las razón trigonométricas carecen de contexto. Mientras un 50% considera que nunca tiene aplicación en la vida diaria o en la salud o en la ingeniería.

Existen diferentes contextos en los cuales se aplican las razones trigonométricas, como la astronomía y los viajes marítimos, sin embargo, se debe destacar la importancia del contextos experimentales los cuales son imprescindibles en el aprendizaje de los conceptos y en el establecimiento de conexiones entre ellos. Es así como la actitud experimental; por ejemplo, al aceptar el error y la imprecisión, sin la intención de instalarse definitivamente en ellos, considera didácticamente valioso que quien aprende construya algunos materiales, porque los problemas que se le presentan durante la construcción servirán para dar significado a los conceptos que intervienen en la representación que existe en el material. (Arce, 2004).

De esta manera, integrar los *manipulativos* en las clases de trigonometría, es significativo para la apropiación de este concepto, este tipo de materiales complementado con otros son esenciales en la comprensión de las matemáticas. En la en la tabla 4, los datos obtenidos muestran que un se observara la opinión de los docentes en formación sobre los recursos utilizados para impartir sus clases de trigonometría, especialmente de razones trigonométricas.

Tabla 8.Opinion de Docentes en Formación del Área de Matemática sobre los recursos pedagógicos utilizados al momento de impartir sus clases.

Recursos pedagógicos	Categorías					
	Usualmente		En Ocasiones		Nunca	
	F	%	F	%	F	%
Tablero	6	75	2	25	0	0
Libro Guía	4	50	3	37,5	1	12,5
Videos	3	37,5	3	37,5	2	25
Computadora-Internet	4	50	2	25	2	25
Manipulativos	2	25	3	37,5	3	37,5

Nótese que el tablero es considerado el recurso pedagógico más usado en las clases de trigonometría con un 75%, mientras que recursos como libros guías, videos son usados en algunas ocasiones igualando porcentaje de 37.5%, y lo más notorio en esta encuesta es que los *manipulativos* casi nunca son utilizados en las clases de trigonometrías, o en algunas ocasiones igualando el porcentaje anterior con 37,5%.

Si bien el mero hecho de usar *manipulativos* no es garantía de éxito. Estos resultados reafirman la idea de que las dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas pueden superarse con la integración de *manipulativos* que conecten los conceptos algebraicos con los geométricos.

Acunando esta idea en la tabla 5, los datos obtenidos de las encuestas realizadas a una pequeña muestra de estudiantes acerca de cómo calificarías la experiencia con el Geoplano circular trigonométrico, evidencia que el cálculo de pendientes, ángulos y la manipulación obtuvieron un porcentaje alto igual a 75%, y solo al 62,5% le pareció difícil resolver problemas con triángulos rectángulos. Lo cual muestra una calificación positiva de este recurso manipulativo.

Tabla 9. Calificación de las Estudiantes sobre la experiencia con el Geoplano circular trigonométrico. Ver anexo 3

Geoplano Circular Trigonométrico	Categorías					
	Fácil		Regular		Difícil	
	F	%	F	%	F	%
Resolver Problemas de Triángulos Rectángulos	0	0	3	37,5	5	62,5
Manipulación	7	75	1	12,5	0	0
Calculo de Pendientes	7	75	1	12,5	0	0
Calculo de Ángulos	7	75	1	12,5	0	0

Gran número de estudios sobre la efectividad del uso de materiales manipulables se han realizado desde las publicaciones de Dienes y Bruner, y los resultados han sido variados. (Fennema, 1972) Se manifiesta a favor de su uso con alumnos de niveles elementales no siendo beneficiosos en la misma forma para niveles superiores. Sin embargo, (Higgins & Suydam, 1997) informaron sobre un conjunto de consecuencias beneficiosas para todos los alumnos.

El uso de materiales concretos puede ser una ayuda efectiva para el desarrollo del pensamiento de los alumnos y para lograr el éxito en la enseñanza. Pero esa efectividad depende de lo uno trate conseguir. Para lograr el máximo beneficio del uso de estos materiales el profesor debe hacerse continuamente la pregunta ¿Qué quiero que mis alumnos comprendan? (W.Thompson, 1994).

La investigación de uso manipulador en la resolución de problemas dentro de un salón de clases a menudo revela los profesores que se invierten en satisfacer las diversas necesidades de todos los estudiantes (principio de equidad, Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares, NCTM, 2000), pero que son reacios a utilizar manipuladores para diversas razones.

En primer lugar, los profesores necesitan saber cuándo, por qué y cómo utilizar objetos manipulables de manera efectiva en el aula, así como la oportunidad de observar, de primera mano, los efectos de permitir el aprendizaje a través de la exploración con objetos concretos. El constructivismo ha evolucionado de teóricos como Jean Piaget.

(1965) y Lev Vygotsky (1962). Piaget (1965) se acercó a la construcción del conocimiento a través de preguntas y basándose en las respuestas de los niños mientras se construye el conocimiento, mientras que Vygotsky (1962) consideraron que los niños pueden ser guiados a fuertes comprensión matemática, ya que cada vez analizado habilidades complejas por su propia cuenta con el maestro cercano al andamio o Facilitar, según sea necesario. Antes de discutir las estrategias específicas, es importante precisar algunos de los puntos de referencia necesarios para el uso manipulador eficaz

En primer lugar, es esencial que los maestros den cuenta del impacto de referirse a objetos manipulables como herramientas para ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas de manera más eficiente y eficaz y no como juguetes o jugar cosas. Si *manipulativos* se les conoce como "juguetes", los estudiantes las ven como algo con que jugar y no como herramientas para trabajar para entender mejor las matemáticas.

En segundo lugar, manipuladores deben ser introducidos en un formato detallado con un conjunto de expectativas de comportamiento mantiene firmemente en su lugar para que los estudiantes comienzan a desarrollar una relación respetuosa basada en el conocimiento sobre el uso de *manipulativos* para el aprendizaje de las matemáticas. Tercero, los manipuladores deben ser modelados a menudo y directamente por los docentes con el fin de ayudar a los estudiantes a ver su pertinencia y Utilidad en la resolución de problemas y comunicación matemática

En esta medida las estudiantes al igual que los docentes en formación que experimentaron con el Geoplano circular trigonométrico, dan cuenta que fue a tractivo en el sentido que no suelen usarlos en clases en ambos casos, y aunque los estudiantes manifestaron a través de los cuestionarios que se dificulta al principio el uso de del Geoplano, no desmeritan la importancia de estos instrumentos en el momento que se quieren definir las razones trigonométricas, pues su mismo estado tangible permite comprender profundamente el significado. Los docentes en formación por su parte manifestaron en general una imposibilidad de que los estudiantes pudiesen utilizar efectivamente estos *manipulativos*, para orientar sus clases, sin embargo rescatan la atención y motivación que se percibe de los estudiantes.

En los dos puntos de vista, se entiende que los *manipulativos* no son garantía de éxito por sí solos, que deben integrarse de una manera efectividad como se mencionó antes y en suma con ellos si puede ayudarse a una profundad compresión de cualquier tema de matemáticas, en particular las razones trigonométricas.

Finalmente a manera de conclusión, no es fácil utilizar materiales *manipulativos* correctamente. Algunos estudios sugieren que es más probable usarlos mal cuando el profesor tiene en mente que los alumnos aprendan a realizar alguna actividad con ellos. (Boyd, 1992) (Resnick, 1987) (Thompsonx, 1994). Dado esto una pregunta primordial debe ser: ¿Qué quiero que mis alumnos hagan? Se produce un problema cuando los profesores tienen una actividad en mente e inconcientemente rechazan resolver problemas creativos que no se corresponde a las convenciones ni los modos de hacer tradicionales. Cuando las acciones no convencionales (pero legitimas) de los alumnos son rechazados por el profesor, ellos se dan cuenta de que ¿entender? Significa memorizar un modo de actuar.

CONCLUSIONES

En relación con las condiciones y restricciones que están involucradas en la sustentación de una serie de tareas que integra un recurso manipulativo para la enseñanza de las razones trigonométricas en el grado décimo, este trabajo permitió corroborar algunos hallazgos de la investigación reciente en didáctica de la matemáticas sobre este asunto e igualmente reconocer peculiaridades en función del escenario y los actores participantes en el estudio.

También es importante señalar que el aprendizaje de las *razones trigonométricas* establece una serie de restricciones desde lo didáctico y lo curricular, pues como muchos investigadores afirman siempre suele haber dificultades en la apropiación de este concepto, por diversos factores entre ellos uno es su tendencia a introducirlas desde el triángulo rectángulo y finalizar en el estudio del círculo unitario o viceversa, el hacer permanente esta tendencia en las clases de trigonometría, libros de textos y planes de estudio, promueve dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas, por este motivo debe promoverse en los estudiantes una profunda compresión de los cambios de registros y la integración de estos mismo, para evitar la concepción de que se encuentran aislados.

Esta tendencia de enseñanza es una restricción clave para el diseño y gestión de la secuencia pues debe romperse el paradigma de introducirse las *razones trigonométricas* con la misma tendencia , apoyados en la revisión bibliográfica que se realizó se pudo vislumbrar cuales serían los caminos para diseñar secuencias y cuál sería el elemento contundente con el cual podría aproximarse al aprendizaje de las *razones trigonométricas* a través del trabajo experimental, pero en este sentido el maestro debe considerar una gran cantidad de variables didácticas que den cuenta del trabajo experimental, una incorrecta introducción de *manipulativos* que apoyan el trabajo experimental puede no ser exitosa, por eso una variable importante que debe considerarse es el recurso manipulativo que se quiere utilizar, en esta medida, el Geoplano Circular Trigonométrico ofrece una serie de posibilidades para desarrollar el interés, la formulación, la indagación, la esquematización entre otras competencias propias de un trabajo experimental en matemáticas

Se debe considerar que la mera introducción del material no es garantía de éxito, en nuestro caso encontramos que el Geoplano Circular Trigonométrico, es un *recurso manipulativo* que ofrece muchas oportunidades al docente en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, promueve el interés y la transferencia de conocimientos a contextos propios de la resolución de problemas y a competencias propias de las matemáticas experimentales como lo son indagación y la formulación. Esto último debido a que este material permite al estudiante indagar sobre las diferentes relaciones de proporción en un triángulo rectángulo, a su vez, este *recurso manipulativo* brinda la oportunidad a las estudiantes de formular hipótesis desde el uso instrumental del recurso, hasta la resolución de problemas. Particularmente en el caso de la aproximación a las *razones trigonométricas* se puede decir que facilita la apropiación de este concepto como lo observamos en el análisis de resultados cuando las estudiantes comprendían la profunda relación entre la pendiente y el ángulo a través de la razón trigonométrica Tan θ.

El trabajo con Geoplano Circular Trigonométrico puede presentar dificultades en el diseño y gestión a nivel curricular, en tanto existe una ausencia considerable en los libros de textos y guías que trabajen con este tipo de recursos, sin embargo, Aunque en los libros de texto no prioricen el trabajo experimental con *manipulativos* y en particular con el Geoplano Circular Trigonométrico pueden diseñarse una gran variedad de situaciones y problemas en los cuales se requiera del uso de este recurso, considerando que las estudiantes desarrollan satisfactoriamente muchas competencias matemáticas. El Geoplano Circular Trigonométrico podría incluirse en un plan de estudios donde se dé prioridad al trabajo experimental con este tipo de *manipulativos* y con un método de evaluación eficiente, que permita estimar el nivel de las estudiantes gradualmente. De esta manera la sustentación de la serie de tareas para el trabajo con *recursos manipulativo* es un reto que los maestros deberían tomar pues su compleja elaboración permite un panorama más amplio en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular de las *razones trigonométricas*.

Aspectos que se emergen del estudio de los aspectos didácticos en relación con la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, en particular de las razones trigonométricas muestran la importancia que en el proceso de la integración de *manipulativos* se consideren dimensiones como la cognitiva, la matemática y el histórico epistemológico. En efecto, el uso de recursos físicos y *manipulativos* ha estado ligado al desarrollo histórico de este campo matemático. Estos diseños podría revisarte en propuestas en el aula, ya sea para recrear aspectos de la evolución de estas nociones o para explorar por una vía experimental las modernas visiones de los conceptos

En cuanto se relaciona con el diseño de una serie de tareas es evidente que la naturaleza particular del objeto matemático en juego, es un factor central para su estructuración. En el caso de las *razones trigonométricas*, el hecho de que históricamente la escuela haya discurrido por dos entradas diferentes para su enseñanza (vía círculo unitario – vía triangulo rectángulo) se presenta como una posibilidad para trabajos diferenciados o de integración de ambas, donde el material manipulativo es un catalizador de estos enfoques

Aunque la literatura ya ha señalado las ventajas de la integración de *manipulativos* en algunos aspectos de la resolución de problemas y la comprensión de las razones trigonométricas, esta investigación también ofreció argumentos a favor del rol de estos recursos en relación al trabajo experimenten al en matemáticas. Así por ejemplo, el Geoplano Circular Trigonométrico facilita la comprensión del problema fundamental de la trigonometría, es decir, en el trabajo se pudo observar como las estudiantes lograban una mejor comprensión de la relación entre las cuerdas que subyacen al ángulo y la medida de estas, un hallazgo que es complejo desde las miradas convencionales de la enseñanza en las clases de trigonometría.

De esta manera al momento de sustentar una serie de tarea que involucre la implementación de *manipulativos* en el contexto del trabajo experimental requiere tomar en cuenta aspectos centrales a las propias potencialidades y restricciones en el uso del recurso manipulativo. Deben considerar preguntas como: ¿Qué quiero que mis estudiantes aprendan? ¿Es el recurso adecuado? Todas estas preguntas son fundamentales para orientar el trabajo en las clases, El segundo aspecto está ligado propiamente a la gestión de la secuencia pues deben considerarse muchos factores, por ejemplo en el caso de Geoplano Circular Trigonométrico los grupos con los cuales se va trabajar no necesariamente deben tener conocimientos avanzados *de razones trigonométricas*, pues este recurso manipulativo bien podría ser utilizado para introducir este concepto a través del trabajo con pendientes y ángulos, lo cual resultaría a nuestra consideración exitoso en tanto, un tema central en el grado noveno son las funciones lineales y un tema necesario en grado décimo son los ángulos.

Este universo de posibilidades y restricciones son las que configuran al trabajo experimental con *manipulativos*, como el Geoplano Circular Trigonométrico el cual a través de las investigaciones que se realizaron apoyan la idea de que las secuencias didácticas con trabajo experimental son pertinentes, cuando se requiere romper la tendencia común de enseñanza de la trigonometría y se desea resaltar un aprendizaje por exploración o experimentación, donde se pone de manifiesto unas condiciones que involucran la participación activa de todos los estudiantes en búsqueda de una aproximación a las *razones trigonométricas*.

BIBLIOGRAFÍA

Arce, J. (2004). El Laboratorio de Matemáticas en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Universidad del Valle, Cali, Colombia

Baker, A. (2008). Experimental Mathematics. Erkenn 2008.

Birihuega, J. (2006). Espacio y Forma. Materiales para el aula. Recuperado En: www.galega.org/Espacio%20y%20forma.doc.

Bressoud, D, (2010). "Historical Reflections on Teaching Trigonometry". Copyright © 2010. The national Council of Teachers of Mathematics. Inc.www.nctm.org. All rights reserveds.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Byers Patricia (2010) Investigating Trigonometric Representations in the Transition to College Mathematics, College Quarterly, Spring 2010 - Volume 13 Number 2

Calzada, M.,& Scariano, S. (2006). A natural bridge from algebra and geometry to trigonometry. Mathematics Teacher, 99(6), 450-453.

Cirillo, M., Drake, C., & Herbel-Eisenmann, B. (2009).Curriculum vision and coherence: Adapting curriculum to focus on authentic mathematics. Mathematics Teacher, 103 (10), 70-75.

Cofré, M. (1981) citado por Caneo, M. (1987) En: "El juego y la enseñanza de la Matemáticas". Tesis para obtener un título de profesor. Universidad Católica de Temuco

Cortes, G & Espinosa, G (2007) "Construyendo la Noción de la Razón Trigonométrica. Una secuencia Basada en la Actividad". CICATA-IPN. Mexico.

De Kee, Mura & Dionne (1996) citado por Cortes, G & Espinosa, G (2007) En: "Estudio Socioepitemologicos de la Razón Trigonométricas. Elementos para la construcción de su Naturaleza Proporcional". CICATA-IPN. Mexico.

Delice, A. (2002). Recognising, recalling and doing in the 'simplification' of trigonometric expressions. Proc. 26th Conference. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, p. 274). Norwich, UK: PME

De Moura (2000) citado por Cortes, G & Espinosa, G (2007) En: "Construyendo la Noción de la Razón Trigonométrica. Una secuencia Basada en la Actividad" CICATA-IPN. Mexico.

De Moura, L. (2000) . Construindo os conceitos básicos da trigonometría no triângulo rectângulo: una proposta a partir da manipulaçao de modelos. Tesis de Maestria no Publicada. PUC-SP. Brasil.

Doerr, H. M. & Confrey, J. (1994). A modelling approach to understanding the Trigonometry of forces: a classroom study. Proc. 18th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 264 - 271). Lisbon, Portugal: PME.

Faxon, B. (1918,47). Justificaciones teóricas para el uso de manipulables. Estados Unidos: Mcgrawill.

Fennema, E (1972). The Arithmetic Teacher.Vol 20.Nº5 (Mayo de 1973) pp 350-352. Publicado por: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Filloy, (1999). Citado en "Sentido y Elaboración del Componente de Competencias de los modelos Teóricos Locales en la Investigación de la Enseñanza y Aprendizaje de Contenidos Matemáticos Específicos". Puig, L. Departament de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 27(2), 2-7.

Galdames, V; Riveros, M; Alliende, F. (1999). Materiales educativos en la sala de clases; Teleduc, Chile.

Godino, J., Batanero, C. & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. Educational Studies in Mathematics, Pág. 3-36.

Godino, Juan D. (1998) Uso de material tangible y grafico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. Asociación de Profesores de Matemáticas. Portugal.

Guzmán, M. (2000). Tendencias innovadoras en educación matemática. http://www.prof2000.pt/users/coimbracom/materiais/Tendenc_ens_mat_guzman.htm

Herbel-Eisenmann, B. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. Journal for Research in Mathematics Education, 38(4), 344-369.

Hoyles, C. & Newman, K. & Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 32(6), 829-845.

Piaget, J. (1965) & Vygotsky, L. (1962) Citado En: XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. “Laboratorio de Matemáticas: Una estrategia de producción y uso de *manipulativos* en las clases de matemáticas”

Joshua, S., & Dupin, J. J. (2005). Introducción a la Didáctica de las Ciencias y la Matemática. Buenos Aires: Nuevos Caminos.

Junta de Andalucía (2002). Decreto 148/2002, de 14 de mayo, por el que se modifica el Decreto 106/1992, de 9 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

Kendal, M, & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. Vinculum, 34(1), 4–8.

Kennedy, L., Tipps, S., & Johnson, Art (2008). Guiding children’s learning of mathematics (11th ed.). Belmont, CA: Thomson Wadsworth.

Lauren B. Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas.http://menweb.mineducacion.gov.co/lineamientos/matematicas/matematicas.pdf

Mariano, M. (2001). ¿Qué es la Ciencia? Argo Proyecto, 18- 28. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Vol. 1, Nº 2, 57-63 (2002)

Ministerio de Educación Nacional (M.E.N). (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. (pp. 46 - 94). Bogotá, Colombia.

Mink, D. 2010. Citado En: XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. “Laboratorio de Matemáticas: Una estrategia de producción y uso de *manipulativos* en las clases de matemáticas”

Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Moreno, V. & Restrepo, M. (2003). Alfa 10 con estándares. Serie de Matemáticas para educación secundaria y media. Editorial Norma. pp. 360. Bogotá, Colombia. 16, No. 9. (Dec., 1987), pp. 13-20+54.

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM

OCDE, 2007. El Programa PISA de la OCDE. Que es y para qué sirve. Disponible en: www.pisa.ocde.org.

Post, T., 1981; Godino, 1998 & Thompson, 1990. Citado en XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. “Laboratorio de Matemáticas: Una estrategia de producción y uso de *manipulativos* en las clases de matemáticas” Pág.2.

Post, T. (1981). The Role of Manipulative Materials in the Learning of Mathematical Concepts. In Selected Issues in Mathematics Education (pp. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation.

Popper, K. (1982). Las dos caras del sentido común: argumentos en pro del realismo del sentido común y en contra de la teoría del conocimiento del sentido. En K. Popper, Conocimiento Científico (págs. 41-105).

Pritchard, L., & Simpson, A. (1999). The role of pictorial images in trigonometry problems. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 81-88.

Ramírez, M., Castañeda, N., Joya, A., y Gómez, M. (2010). Hipertexto Matemáticas 10. Editorial Santillana. pp. 304. Bogotá, Colombia.

Restrepo, M., Moreno, Vladimir., López, H. (2009). Delta Matemáticas 10. Editorial Norma. pp. 304. Bogotá, Colombia.

Robert Reich (1991) Citado por SÁNCHEZ, A. A. (2009). En: «Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs»[artículo en línea]. Edutec--te, Revista Electrónica de Tecnología Educativa. Núm. 31 /Feberero 2010. http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec31/ ISSN 1135---9250.S

Rojano, T. F. (2003). Trigonometria. Argentina: grupo editorial ibero-americana.

Roseau, J., Erdman, W., Fawcett, G., Irvine, J., McCudden, B., Mehler, K., Miller, T., Perivolaris, L., & Saarimaki, P. (2001). Mathematics: Making financial decisions 11. Toronto, ON: McGraw-Hill Ryerson.

SÁNCHEZ, A. A. (2009). «Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs» [artículo en línea]. Edutec--te, Revista Electrónica de Tecnología Educativa. Núm. 31 /Feberero 2010. http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec31/ ISSN 1135--- 9250.

Sowell, E.J. (1989). “Effects of manipulative materials in mathematics instruction”, en Journal for research in mathematics education (Reston, VA), vol. 20, p. 498-505.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching andLearning (pp. 495-511). NY: Macmillan Publishing Co.

TIMSS, 2007. Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Disponibles en: www.icfes.gov.co.

Thompson, P. (Mayo de 1994). Influencia del uso de materiales en la Compresión de las matemáticas. Arithmetic Teacher, 41(9), 556-558.

Trouche 2002. Citado en XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. "Laboratorio de Matemáticas: Una estrategia de producción y uso de *manipulativos* en las clases de matemáticas" Pág.9.

Waldegg, G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje De las ciencias. [Artículo en línea] Revista Electrónica de la Investigación Educativa. Vol. 4 Núm. 1. [Fecha de consulta: 03/01/2006].http://redie.uabc.mx/vol4no1/contenido---waldegg.html

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 91-112.

Zambrano, A. (2000). Relación entre el conocimiento del estudiante y el conocimiento del maestro en las ciencias experimentales. Cali: Universidad del Valle.

Zeman, A. (2005). Uma seqüência de ensino para a construçã de uma tabela trigonométrica. Tesis de Maestria no publicada.PUC-SP.Brasil.

ANEXOS

ANEXO 1. LAB 11.1 Y 11.2-GRADO 10-1

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES/ANGLES AND SLOPES

Ficha del Alumno/Students Profile

TEMA/TOPIC	Nombre/Name:	Fecha/Date:
Trigometria/Trigonometry	Grado/Degree:	Colegio/School:

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blancos. Las respuestas son para ángulos entre -90º y 90º, es decir, las pendientes de los triángulos están en el primer cuadrante y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90º and 90º, That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
θ						

$\theta°$	0	15°	30°	45°	60°	90°
M						

Discusión/Discussion

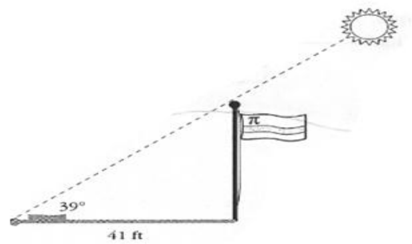
A. ¿Qué patrones noto al llenar las tablas? ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios? ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0? ¿Para qué ángulos las pendientes están entre 0 y 1? ¿Cuándo son mayores que 1? / What patterns do you notice when filling out tables? What is the relationship between the slopes of the complementary angles? For what angles is the slope positive? Negative? 0? For what angles is the slope between 0 and 1? Greater than 1?.

B. ¿Por qué no existe pendientes para el ángulo de 90°/ Why is there no slope for the angle of 90°?

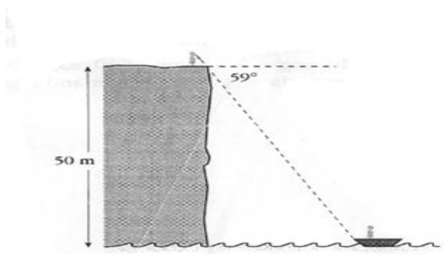
LAB 11.2

USANDO ÁNGULO Y PENDIENTE/USING SLOPES AND ANGLES

1¿Qué altura tiene el asta de la bandera?/How tall is the flagspole?



2. ¿Qué tan lejos está el borde del bote del alcantilado?/How far is the boat from the edge of the Cliff?



Para el siguiente problema realiza tus bosquejos en una hoja aparte/For the remaining problema, make you own sketches on a separate sheet of paper.

Un observador desde un faro de 30m de alto mira hacia abajo un barco formando 15 por debajo de la horizontal/Looking down at a boat from a 30m high lightthouse an obsever measures an angles of 15 below the horizontal.

a) Realiza un bosquejo de la situación/Make a Sketch of the situación

b) ¿Qué tan lejos está el barco de la base del faro?/How far is the boat from the base of the lightthouse?

0,21 $\frac{8}{4}$ 1A 0,4 7,3 38,6

$Tan39° = \frac{X}{41} = X = 41 Tan39$

$X = 33,2$

LAB 11.2

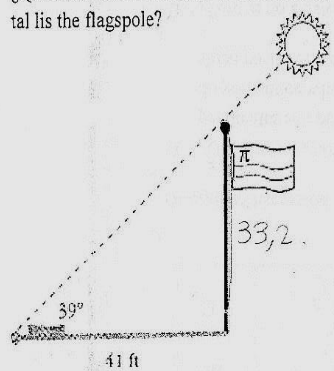
USANDO ÁNGULO Y PENDIENTES / USING SLOPES AND ANGLES

$TAN 59° = \frac{X}{50}$

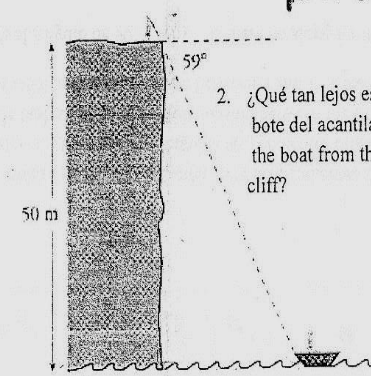
$X = 50 TAN 59°$

$X = 83,2$

1. ¿Qué altura tiene el asta de la bandera?/How tal lis the flagspole?



2. ¿Qué tan lejos está el borde del bote del acantilado?/How far is the boat from the edge of the cliff?



$TAN 39 = \frac{9}{X}$

$X = TAN39 \ 9$

$X = 5,6$

$TAN39 =$

Para el siguiente problema realiza tus bosquejo en una hoja aparte/ For the remaining problem, make your own sketches on a separate sheet of paper.

3. Un observador desde un faro de 30m de alto mira hacia abajo un barco formando 15° por debajo de la horizontal./ Looking down at a boat from a 30 m high lighthouse, an observer measures an angles of 15° below the horizontal.

a) Realiza un bosquejo de la situación/Sketch this
b) Que tan lejos está el barco de la base del faro./How far is the boat from the base of the lighthouse?

Diana bonilla
laura Guallero

10-1

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES/ANGLES AND SLOPES

Ficha del Alumno/Students Profile

TEMA/TOPIC	Nombre/Name:	Fecha/Date:
TRIGONOMETRIA/TRIGONOMETRY	Grado/Degree:	Colegio/School:

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90° y 90°, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs of the geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90° and 90°. (That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants.)

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
□ °	0-5	14°	33°	25°	40°	45°

□ °	0	15	30	45	60	90
M	0	0.2	0.6	1	1.7	[illegible]

Discusión/Discussion

A. ¿Qué patrones noto al llenar las tablas? ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios? ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0? ¿Para qué ángulos las pendientes están entre 0 y 1? ¿Cuándo son mayores que 1? /What patterns do you notice when filling out the tables? What is the relationship between the slopes of the complementary angles? For what angles is the slope positive? Negative? 0? For what angles is the slope between 0 and 1? Greater than 1?

B. ¿Porque no existe pendiente para el Angulo de 90°?/Why is there no slope for the angle of 90°**?**

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES/ANGLES AND SLOPES

Ficha del Alumno/Students Profile

TEMA/TOPIC	Nombre/Name: ALEJANDRA MUÑOZ, ALEJANDRA SARSABAL Y LUISA PADILLA	Fecha/Date: 30 DE NOVIEMBRE
TRIGONOMETRIA/TRIGONOMETRY	Grado/Degree: 10-2	Colegio/School: SAN JOSE CHAMPAGNAT.

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90° y 90°, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs of the geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90° and 90°. (That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants.)

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
□ °	0	14.0	30.9	21.8	38.6	45°

□ °	0	15	30	45	60	90
M	0	0.25	0,7	1	1.7	0

Discusión/Discussion

A. ¿Qué patrones noto al llenar las tablas? ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios? ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0? ¿Para qué ángulos las pendientes están entre 0 y 1? ¿Cuándo son mayores que 1? /What patterns do you notice when filling out the tables? What is the relationship between the slopes of the complementary angles? For what angles is the slope positive? Negative? 0? For what angles is the slope between 0 and 1? Greater than 1?

B. ¿Porque no existe pendiente para el Angulo de 90°?/Why is there no slope for the angle of 90°?

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES/ANGLES AND SLOPES

Ficha del Alumno/Students Profile

TEMA/TOPIC	Nombre/Name: Camila Chavérro, Victoria M, 2010	Fecha/Date: Noviembre 30/2011
TRIGONOMETRIA/TRIGONOMETRY	Grado/Degree: 10 2	Colegio/School: San Jose Champagnat

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90° y 90°, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs of the geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90° and 90°. (That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants.)

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
□°	0	14.0°	30.9°	21.8°	38.6°	45°

ceno

□°	0	15	30	45	60	90
M	0	0.25°	0.6°	0.7°	1.6°	indet

Discusión/Discussion

$m = \tan\theta$

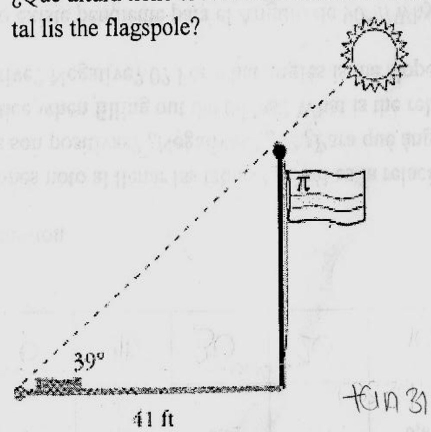
A. ¿Qué patrones noto al llenar las tablas? ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios? ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0? ¿Para qué ángulos las pendientes están entre 0 y 1? ¿Cuándo son mayores que 1? /What patterns do you notice when filling out the tables? What is the relationship between the slopes of the complementary angles? For what angles is the slope positive? Negative? 0? For what angles is the slope between 0 and 1? Greater than 1?

B. ¿Porque no existe pendiente para el Angulo de 90°?/Why is there no slope for the angle of 90°?

LAB 11.2

USANDO ÁNGULO Y PENDIENTES / USING SLOPES AND ANGLES

1. ¿Qué altura tiene el asta de la bandera?/How tal lis the flagspole?

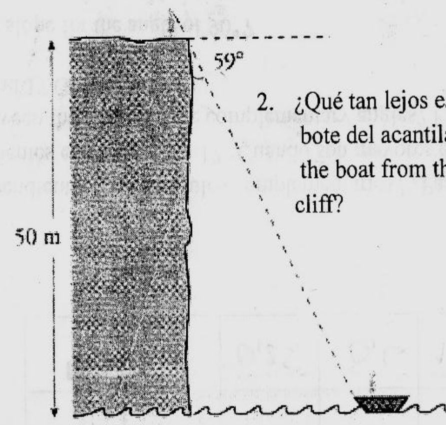


$\tan 31 = \frac{op}{41}$

$op = 41 \cdot \tan 37$

$op = 24{,}63$

2. ¿Qué tan lejos está el borde del bote del acantilado?/How far is the boat from the edge of the cliff?



$\tan 59 = \frac{op}{ady}$

$\tan 59 = \frac{op}{50}$

$op = 50 \cdot \tan 59$

$op = 83{,}21$

Para el siguiente problema realiza tus bosquejo en una hoja aparte/ For the remaining problem, make your own sketches on a separate sheet of paper.

3. Un observador desde un faro de 30m de alto mira hacia abajo un barco formando 15° por debajo de la horizontal./ Looking down at a boat from a 30 m high lighthouse, an observer measures an angles of 15° below the horizontal.

a) Realiza un bosquejo de la situación/Sketch this
b) Que tan lejos está el barco de la base del faro./How far is the boat from the base of the lighthouse?

LAB 11.1

Lina Rivera
Gabriela Benav

ÁNGULOS Y PENDIENTES/ANGLES AND SLOPES

Ficha del Alumno/Students Profile

TEMA/TOPIC	Nombre/Name:	Fecha/Date:
TRIGONOMETRIA/TRIGONOMETRY	Grądo/Degree: 10-1	Colegio/School:

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90° y 90°, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante/Fill out the table below. Continue a pattern of going around the outer pegs of the geoboard to supply slopes where the table is blank. For angles, give answers between -90° and 90°. (That is, make your slope triangles in the first and fourth quadrants.)

M	0	0,25	0,6	0,4	0,8	1
□ °	0	15	30°	20°	40°	45°

□ °	0	15	30	45	60	90
M	0	0,25	0,6	1,0	1,7	∄

Discusión/Discussion

A. ¿Qué patrones noto al llenar las tablas? ¿Cuál es la relación entre las pendientes de los ángulos complementarios? ¿Para qué ángulos las pendientes son positivas? ¿Negativas? ¿0? ¿Para qué ángulos las pendientes están entre 0 y 1? ¿Cuándo son mayores que 1? /What patterns do you notice when filling out the tables? What is the relationship between the slopes of the complementary angles? For what angles is the slope positive? Negative? 0? For what angles is the slope between 0 and 1? Greater than 1?

B. ¿Porque no existe pendiente para el Angulo de 90°?/Why is there no slope for the angle of 90°?

en algunos observamos que en la tabla que la pendiente es más exacta que la calculadora
como en el ángulo de 15 en la calculadora da en tangente 0,267949 y en la tabla dio 0,
que en otros datos como el grado 20 en la calculadora da correcto y en la tabla

ANEXO 2. LAB 11.1. SEMINARIO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES

Ficha del Alumno

TEMA	Nombre	Programa
Trigonometría	Código	

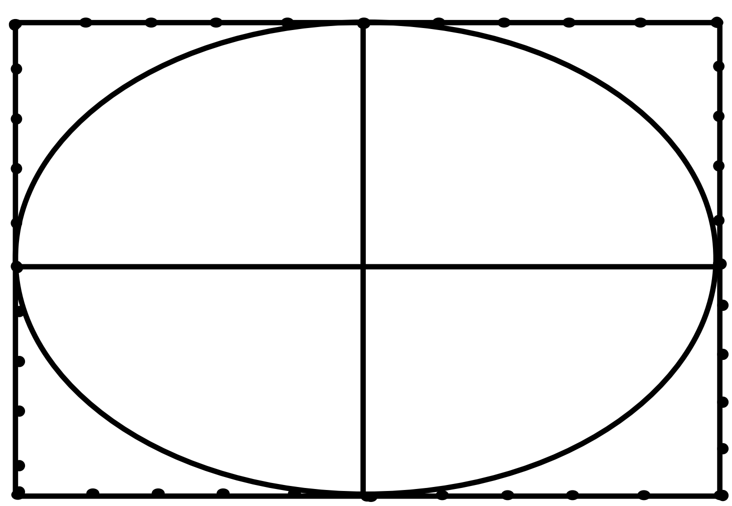
Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se ha suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre $-90°\ y\ 90°$, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante.

M	**0**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**		**1,25**	**1,67**				**-5**
θ (°)												

Llena la tabla de abajo

$\boldsymbol{\theta}$ (°)	**0**	**15**	**30**	**45**	**60**	**75**	**90**	**105**	**120**	**135**	**150**	**165**
M												

`



LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES

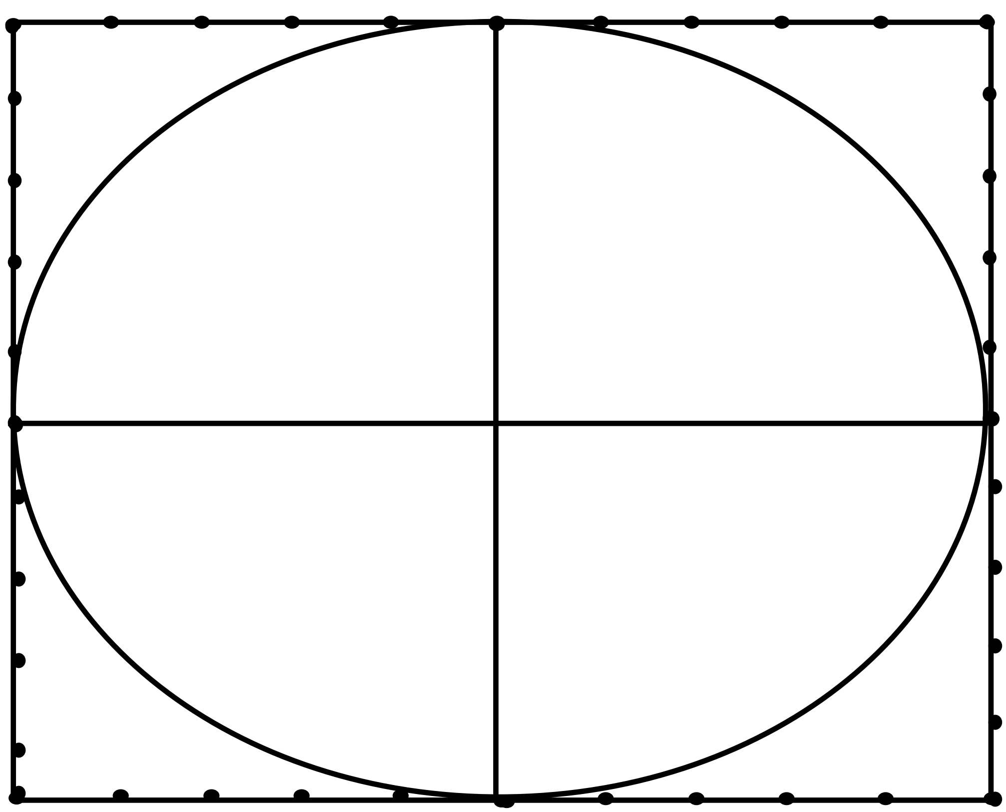
Ficha del Alumno

TEMA	Nombre	Progr ma
Trigometria	Código	

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se ha suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre $-90°\ y\ 90°$, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante.

M	**0**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**
θ (°)						

`



LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES

Ficha del Alumno

cristhiam Hernández 0537190

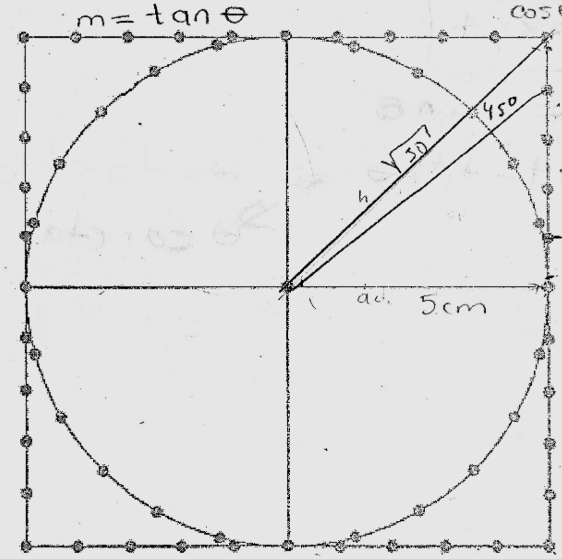
TEMA	Nombre: Liana Madroñero	Programa: 3487
TRIGONOMETRIA	Código: 0540155	Lic en matemáticas y Física

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90º y 90º, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante.

					4/5	5/5	5/4	5/3				1/0
m	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,25	1,67			N.E	-5
θ	0	11,3	21,8°	30,9°	38,6°	45°	51,3°	59,08			90	-78,6

m = tan θ



Llena la tabla de abajo.

θ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
m	0	0,26	0,57	1	1,73	3,73	N.E	-3,73	-1,73	-1	-0,57	-0,26

$0 = \tan\theta \Rightarrow \arctan(0)$

$m = \tan\theta$

$m = \tan 90$

$\tan\theta = \frac{\frac{5}{\sqrt{50}}}{\frac{5}{\sqrt{50}}} = 1$

$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1)$

$\operatorname{Sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{50}} =$ a

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}} =$

$h^2 = 5^2 +$

$h^2 = 25 +$

$h = \sqrt{50}$

Sen

LAB 11.1

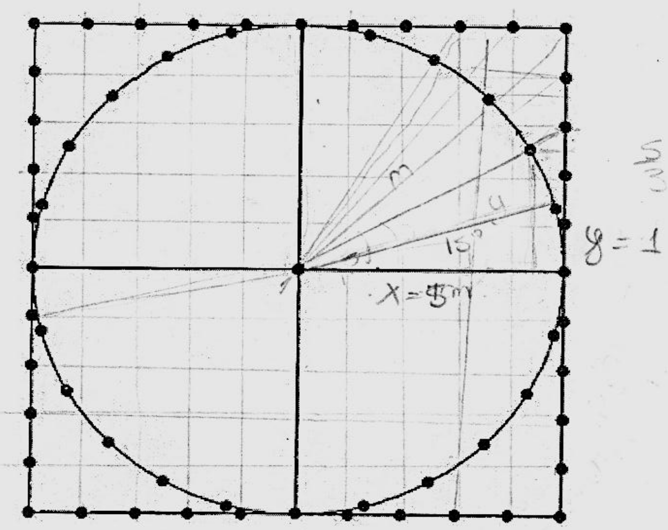
ÁNGULOS Y PENDIENTES

Ficha del Alumno

TEMA	Nombre: Laura Rodríguez	Programa:
TRIGONOMETRIA	Código: 66 35 175	Lic. Matemática y física

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90º y 90º, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante.

m	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,25	1,67				-5
θ	0	15		60		45		30			90	



Llena la tabla de abajo.

θ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
m	0	0,2	1,65	1	0,6		1					

m^2

$m = \frac{sen\theta}{cos\theta}$

$sen\theta = \frac{y}{xm}$

$cos\theta = \frac{x}{ym}$

$m = tan\theta$

$\theta = tan^{-1} m$

4

$tan\theta = 0$

$tan^{-1}0 = \theta$

$tan\theta = \frac{y}{x}$

Para $\theta = 0$ $m = \frac{1}{5} = 0,2$

$m = \frac{y}{x}$ $\frac{5}{3}$

hallando un ∡ y los otros utilizando regla de tres simple

Tomamos como referencia 45° y lo dividimos en 5 partes que conforma ese octavo de circunferencia

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES

Ficha del Alumno

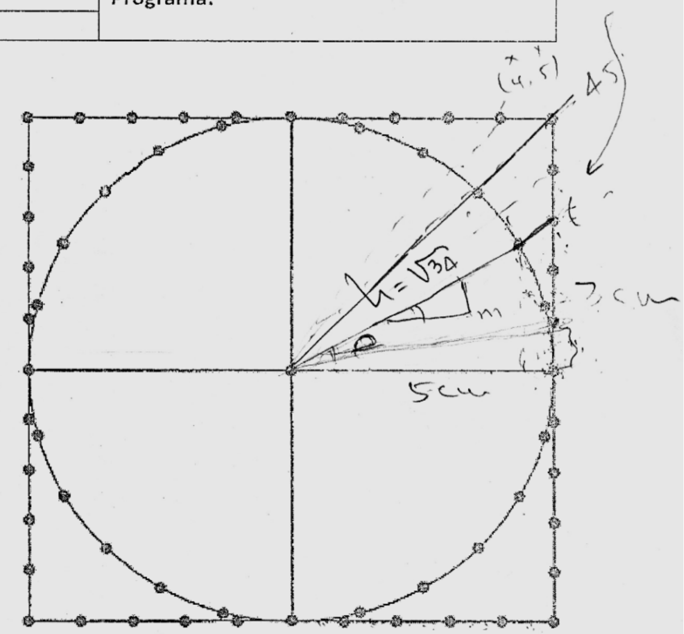
TEMA	Nombre: Santiago	Programa:
TRIGONOMETRIA	Código:	

Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90º y 90º, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante.

m	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,25	1,67				-5
θ	0°	9°	18°	27°	36°	45°	56,2				90	

Llena la tabla de abajo.

θ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
m												



$m = \tan\theta = \frac{\text{Sen}\theta}{\cos\theta} =$

Si $1 = 45°$
$1,25 = x$

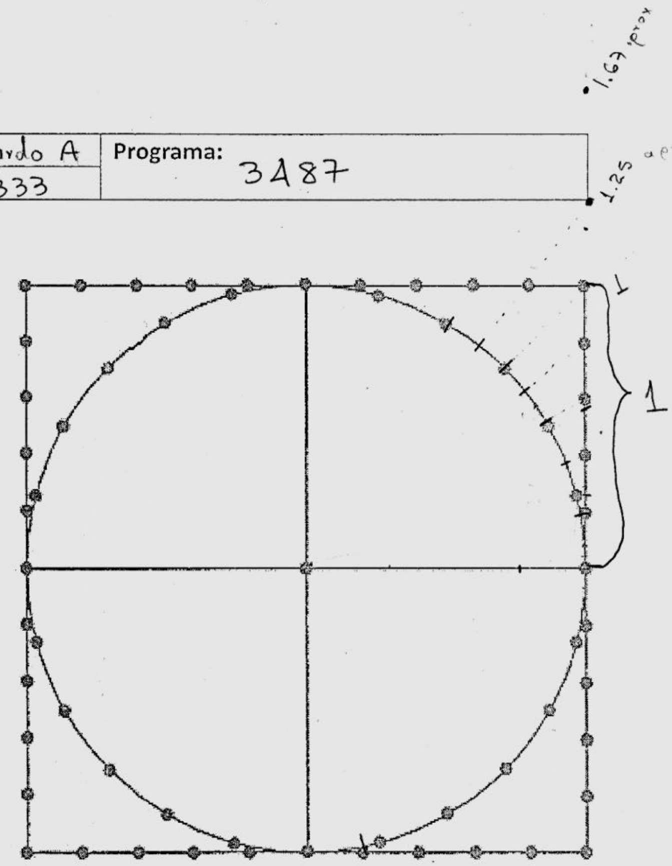
$\frac{5}{4} =$

LAB 11.1

ÁNGULOS Y PENDIENTES

Ficha del Alumno

TEMA	Nombre: Luz Naranjo y Bernardo A	Programa: 3487
TRIGONOMETRIA	Código: 0939816 y 0310333	



Completa el siguiente cuadro. Siguiendo un patrón, se han suministrado algunas pistas en la tabla con cuadros en blanco. Las respuestas son para ángulos entre -90º y 90º, es decir las pendientes de los triángulos están en el primer y cuarto cuadrante.

m	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,25	1,67			no está definida	-5
θ	0°	13°	19°	31°	41°	45°	50°	60°			90	-77°

aproximadamente

Llena la tabla de abajo.

θ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
m	0	0.23	0.58	1	1.67	4.8		-4.8	-1.67	-1	-0.58	-0.23

es como sabemos que la pendiente de 45° es 1

no los 5 cm del primer como 1, y al estar esta

ida en 5 partes iguales, pues cada pedacito valdría 0.2, entonces lo que hacemos es

ANEXO 3. CUESTIONARIO 1. ESTUDIANTES GRADO DECIMO

Cuestionario 1

Fecha: ________________________

Institución Educativa: ____________________________________

Grado: ____________

1. En Clases de Matemáticas estudiaste el tema razones trigonométricas, ¿Cuáles de los siguientes temas asociados te generaron mayor dificultad? : Definición de razones trigonométricas, resolución de problemas, establecer las propiedades de semejanza de triángulos, resolver problemas de triángulos rectángulos, el círculo unitario. ¿Podrías justificar tu respuesta?

2. ¿Qué tipo de problemas puedes resolver utilizando las razones trigonométricas? ¿Consideras que las *Razones Trigonométricas* tienen una utilidad en la vida real? ¿Podrías justificar tu respuesta?

3. Como calificas tu experiencia con el Geoplano Circular Trigonométrico. ¿Qué fue lo más fácil y que fue lo más difícil de trabajar con él?

4. En las actividades propuestas usastes calculadora científica. ¿Qué relación puedes establecer con el uso de las misma y el Geoplano Circular Trigonométrico?

Maria Alejandra Gomez

Cuestionario 1

Fecha: 13 de febrero 2012

Institución educativa: Colegio San Jose

Grado: 10

1. En la clase de matemáticas estudiaste el tema *razones trigonométricas*, ¿cuáles de los siguientes temas asociados te generaron mayor dificultad?: Definición de razones trigonométricas, resolución de problemas, establecer las propiedades de semejanza de triángulos, resolver problemas de triángulos rectángulos, el círculo unitario. ¿Podrías justificar tu respuesta?

   – Resolucion de problemas, porque plantear el problema se me dificulta.

2. ¿Qué tipos de problemas puedes resolver utilizando las razones trigonométricas? ¿Consideras que las razones trigonométricas tienen una utilidad en la vida real? ¿Podrías justificar tu respuesta? Como siempre las matematicas influencia mucho nuestras vidas, con las razones trigonometricas construimos edificios y son de gran ayuda para los topografos

3. Como calificarías tu experiencia con el *Geoplano Circular Trigonométrico*. ¿Qué fue lo más fácil y que fue lo más difícil de trabajar con él? de 1 a 10, 10; el geoplano circular fue muy interesante porque pude plasmar mis conocimiento de trigonometria en un objeto real; comenzando no sabia realmente por donde empezar, pero despues vi que era muy facil lo que me proponia para hacer.

4. En las actividades propuestas usaste la calculadora científica. ¿Qué relación puedes establecer con el uso de la misma y el *Geoplano Circular Trigonométrico*?

   La calculadora fue de gran ayuda para comprobar lo que habia hecho en el Geoplano Circular

Anexo 5.

Leslie Molina

Cuestionario 1

Fecha: Febrero-06-2012

Institución educativa: Colegio San Jose

Grado: 10-2

1. En la clase de matemáticas estudiaste el tema *razones trigonométricas*, ¿cuáles de los siguientes temas asociados te generaron mayor dificultad?: Definición de razones trigonométricas, resolución de problemas, establecer las propiedades de semejanza de triángulos, resolver problemas de triángulos rectángulos, el círculo unitario. ¿Podrías justificar tu respuesta?
   R/ la resolución de problemas, porque me falta analisis, siempre se me ha dificultado.

2. ¿Qué tipos de problemas puedes resolver utilizando las razones trigonométricas? ¿Consideras que las razones trigonométricas tienen una utilidad en la vida real? ¿Podrías justificar tu respuesta? R/ Los problemas de triangulos rectangulos y los de ley de senos y cosenos, -si sirven para los que estudian topografia.

3. Como calificarías tu experiencia con el *Geoplano Circular Trigonométrico*. ¿Qué fue lo más fácil y que fue lo más difícil de trabajar con él? R// Fue una experiencia chevere, no estuvo ni tan facil ni tan dificil, aunque la ubicación de los angulos a veces se nos dificultaba.

4. En las actividades propuestas usaste la calculadora científica. ¿Qué relación puedes establecer con el uso de la misma y el *Geoplano Circular Trigonométrico*? R/ si, la relación que le doy es el manejo de tan, sen y cos, con la calculadora pudimos saber que se uso para llegar a los resultados, nosot usamos la calculadora y llegamos a la conclusión de tan^{-1} no estoy muy segura si era -1 pero si de que era con tang

Alejandra Alzate

Cuestionario 1

Fecha: febrero 9 /2012.

Institución educativa: Colegio San José Champagnat.

Grado: 10-1

1. En la clase de matemáticas estudiaste el tema *razones trigonométricas*, ¿cuáles de los siguientes temas asociados te generaron mayor dificultad?: Definición de razones trigonométricas, resolución de problemas, establecer las propiedades de semejanza de triángulos, resolver problemas de triángulos rectángulos, el círculo unitario. ¿Podrías justificar tu respuesta?

- Resolución de problemas.

2. ¿Qué tipos de problemas puedes resolver utilizando las razones trigonométricas? ¿Consideras que las razones trigonométricas tienen una utilidad en la vida real? ¿Podrías justificar tu respuesta?

- Problemas con triangulos.
- Si, para estudiar en la universidad.

3. Como calificarías tu experiencia con el *Geoplano Circular Trigonométrico*. ¿Qué fue lo más fácil y que fue lo más difícil de trabajar con él?

- Lo más fácil fue trabajar con los cauchos y hacer la practica
- Lo más difícil fue hacer los calculos con las ecuaciones. porque no nos daba lo mismo.

4. En las actividades propuestas usaste la calculadora científica. ¿Qué relación puedes establecer con el uso de la misma y el *Geoplano Circular Trigonométrico*?

- Que los 2 se usan para hallar las propiedades del triangulo y tienen la misma funcionalidad.