PROCESO DE GENERALIZACIÓN: UNA MIRADA DE ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA

Ányela Xiomara Corredor Santos, Mónica Adriana Pineda Ballesteros y Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
xiomy_1121@hotmail.com, monypin23@gmail.com, roafuentes@gmail.com

Palabras clave: razonamiento algebraico, generalización, patrones, fases
Key words: algebraic reasoning, generalization, patterns, phases

RESUMEN

Con esta investigación buscamos analizar cómo estudiantes entre 9 y 12 años abordan el proceso de generalización a partir del estudio de patrones en diferentes representaciones. Para este trabajo hemos implementado las fases del proceso de generalización propuestas por el grupo Azarquiel (1993): Ver, Describir y Escribir. Los resultados muestran que después de un proceso de instrucción, los estudiantes identifican algunos patrones en secuencias numéricas y geométricas, ayudándose de estrategias que les permiten identificar el patrón, las más usadas fueron: Comparar, Representar e Invertir; sin embargo, logramos evidenciar que los estudiantes tienen grandes dificultades para pasar de una fase a otra; les resulta complejo llegar a una generalización ya sea de manera verbal o mediante una expresión general.

ABSTRACT

With this research we want to analyze how students between 9 and 12 years tackle the process of generalization from the study of situations on patterns in different representations. For this work we have implemented the phases of generalization proposed by the group Azarquiel (1993): View, describe and Write. The results show that after a training process, students identify some patterns in numerical and geometric sequences, helping strategies that allow them to identify the pattern, the most used were: Compare, Representing and Investing; however, have great difficulty in moving from one phase to another; find it challenging to reach a generalization either verbally or by a general expression.

Introducción

El estudio del álgebra escolar se ha asociado tradicionalmente al trabajo con "letras", expresiones algebraicas y en general con la manipulación de símbolos. Sin embargo se ha mostrado en Matemática Educativa que la introducción de los procesos que caracterizan el desarrollo del pensamiento algebraico, deben ser potenciados desde los primeros años escolares y que éstos no se asocian directamente con el trabajo de expresiones algebraicas. Al respecto Lannin (2005) muestra que documentos como el del Consejo Nacional de Australia (1994), el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (2000) de Estados Unidos, y el Departamento de Educación y Habilidades de Gran Bretaña (2001), recomienda el desarrollo de tareas en donde los estudiantes trabajen sobre la generalización de patrones. Dado que el estudio de lo que permanece y lo que varía en este tipo de situaciones puede motivar el desarrollo de estrategias que desencadenen el proceso de generalización desde edades tempranas. Diferentes autores muestran la importancia de este proceso en la construcción de las matemáticas (Deyfrus, 1991; Sessa, 2005)

Siguiendo esta línea de investigación buscamos analizar el desarrollo del razonamiento algebraico, centrándonos en el proceso de generalización a través del estudio de secuencias numéricas y geométricas, a partir de las siguientes preguntas:

¿Qué fases del proceso de generalización (ver, describir y escribir) desarrollan los estudiantes entre 9 y 12 años al abordar el estudio de patrones numéricos y geométricos?

¿Cuáles son las estrategias que pueden asociarse a cada fase?

Como analizaremos con detalle en la siguiente sección, el Grupo Azarquiel (1993) propone tres fases que caracterizan el proceso de generalización; estas fases se asocian con otras planteadas desde otras perspectivas teóricas. Por ejemplo Kaput (1999) hace referencia a las actividades que pueden desarrollarse en el proceso de generalización; Radford (2010) hace una distinción entre generalización algebraica y aritmética; Cañadas, Castro y Castro (2012) identificaron cuatro formas de expresar la generalización: aritmética, gráfica, verbal y algebraica.

Un referente importante en nuestra investigación es el planteamiento propuesto por los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM por sus siglas en inglés, 2000). Tal como allí se plantea, consideramos que el desarrollo del pensamiento algebraico debe iniciarse desde la etapa preescolar, puesto que ayuda a los estudiantes a "construir una base sólida de experiencia y aprendizaje como preparación para un trabajo más sofisticado en Álgebra para los grados medio y superior" (NCTM, 2000, p.37). Por tanto el Álgebra requiere una introducción temprana, donde se incentive en los estudiantes el desarrollo de las habilidades propias del razonamiento algebraico. Por otra parte, los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional en Colombia para matemáticas, también se refieren a la importancia de incluir el Álgebra en el currículo de educación primaria, esto debido a la disposición de los estudiantes en sus primeros niveles educativos para afrontar nuevos retos; este documento plantea que:

> Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. (p.50)

Por tanto, consideramos pertinente realizar esta investigación con un grupo de 79 estudiantes sin experiencia en la identificación de patrones, mediante una secuencia de tipo numérico o geométrico; con el fin de observar qué parte del proceso de generalización logran desarrollar.

En este documento mostramos los resultados obtenidos a partir de una serie de actividades desarrolladas en el aula. Estas actividades buscan identificar las estrategias usadas por los estudiantes para desarrollar el proceso de generalización. A continuación mostraremos parte de los elementos teóricos que fundamentan esta investigación, algunos de los resultados obtenidos y el respectivo análisis de algunos casos, asociados a las fases de generalización y a las principales estrategias que surgen a partir de su aplicación.

■ El razonamiento algebraico y el proceso de generalización

El razonamiento algebraico y el proceso de generalización son aspectos que se complementan; según Godino y Font (2003) "el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas" (p.8). Coincidimos con la anterior definición, debido a la importancia de iniciar un trabajo temprano con patrones numéricos y geométricos, que promueva en los estudiantes el desarrollo de habilidades propias del razonamiento algebraico, tales como generalizar, justificar y formalizar.Por otra parte, Castro y Godino (2011), consideran el razonamiento algebraico elemental como "…el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.)" (p.94).

Estas concepciones fueron tomadas debido a que nuestro interés se centra en estudiar la capacidad de los estudiantes de básica primaria para enfrentar actividades que requieran implementar procesos propios del razonamiento algebraico elemental.

■ Fases del proceso de generalización.

Azarquiel (1993) propone tres fases en el proceso de generalización:

> *Ver:* trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo, y lo que es común a todos ellos; lo que no varía. Se trata de encontrar lo que se mantiene en cada caso, los factores clave, y conseguir, mediante una combinación adecuada, una regla, una expresión que resumirá todas las situaciones, que permita <<contar en general>> sin referencia a los casos concretos. (Azarquiel, 1993, p.31)
>
> *Describir:* Esta descripción en el lenguaje natural es un paso que se da habitualmente al generalizar, y que permite posteriormente expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido. Con la expresión oral se trata de comunicar lo que se ha visto, la regularidad, el modelo detectado. (Azarquiel, 1993, p.37)

> *Escribir:* La expresión escrita, el registro de las palabras y de las ideas, es una fase avanzada del proceso de generalización, y de todas las formas de expresar una regla por escrito, la simbólica suele ser la más difícil. Por ello esta es la última fase, tanto en el proceso que lleva a generalizar como en su aprendizaje. (Azarquiel, 1993, p.39)

Estas fases dan cuenta del camino que un estudiante sigue para construir una "expresión" (verbal, gestual o simbólica) de una situación. Asociadas al proceso de generalización Lannin (2005) plantea cinco estrategias, estas son: estrategias de conteo no explícitas, estrategias recursivas, estrategías explícitas objeto-todo, estrategias relacionadas con la suposición y el control y estrategias contextuales. Estas estrategias las hemos asociado a las Fases propuestas por Azarquiel para determinar el trabajo de los estudiantes. Aunque las estrategias "…No son actividades exclusivas de las matemáticas, sin embargo, si son procesos relevantes en el hacer matemático" (Sánchez, García y Mora, 2011, p.2); por tanto sí es importante identificar qué tipo de estrategias se asocian a cada fase y cómo una u otra puede generar el desarrollo de una Fase del proceso a otra superior.

■ Elementos del método

Para esta investigación trabajamos con un grupo regular de estudiantes de básica primaria con edades entre 9 y 12 años. Implementamos una serie de actividades (Prueba diagnóstica, talleres y entrevista; con sus respectivos análisis A priori y A posteriori), donde consideramos las fases del proceso de generalización así como las estrategias que los estudiantes emplean en cada fase. A continuación describimos las Etapas en que se desarrolló el trabajo.

Etapa I. *Prueba diagnóstica*: el objetivo principal de esta etapa es hacer un acercamiento inicial a un grupo regular de estudiantes con el fin de identificar sus fortalezas y debilidades, al estudiar secuencias numéricas y geométricas.

Etapa II. *Diseño e Intervención*: con base en los resultados obtenidos en la etapa anterior, diseñamos cinco talleres en donde buscamos potenciar la comprensión de los estudiantes sobre el análisis de secuencias geométricas, numéricas y verbales que dieran lugar al proceso de generalización. El análisis a priori hace alusión a las estrategias que pueden caracterizar cada fase del proceso. El desarrollo de esta etapa estuvo además guiado por el trabajo en el aula durante doce semanas.

Etapa III. *Entrevista*:con la entrevista buscamos determinar de manera más específica las fases del proceso de generalización, así como el paso de una a otra. Para esto entrevistamos a cinco estudiantes escogidos por su buen desempeño en las etapas anteriores. Cada entrevista fue videograbada y transcrita para un mejor análisis de las producciones.

Las conclusiones que mostraremos en la sección final de este escrito, contemplan todos los elementos identificados y analizados en cada una de las etapas que guiaron la investigación. A continuación presentamos parte del análisis de dichas producciones haciendo énfasis en la identificación de las estrategias y cómo ellas pueden asociarse a cada fase del proceso de generalización.

■ Análisis de datos: Evidencias de las fases del proceso de generalización e identificación de estrategias

Los resultados muestran que después de un proceso de instrucción, los estudiantes logran identificar algunos patrones en secuencias numéricas y geométricas, ayudándose de estrategias que les permiten percibir de manera más clara el patrón. Sin embargo, existen grandes dificultades con el paso de una fase a otra, especialmente el tránsito de Describir a Escribir; a los estudiantes les resulta complejo llegar a una generalización de lo que logran observar (lo que varía y lo que mantiene constante) ya sea de manera verbal o mediante una expresión general (Corredor y Pineda, 2014).

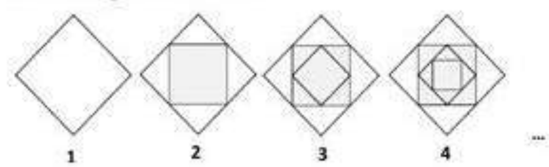
A continuación, mostraremos las estrategias más usadas por los estudiantes donde también se identifican las fases de generalización que logran desarrollar, teniendo las estrategias como facilitadoras de este proceso.

La primera fase de generalización es una de las más fáciles de desarrollar por los estudiantes, pues les resulta sencillo identificar las variaciones o similitudes que identifican una secuencia de una iteración a otra.En la primer situación (figura 1) estudiante *compara* cuando analiza las similitudes y diferencias de una iteración a otra, para encontrar con más detalle el cambio ocurrido en cada posición. Mediante esta estrategia, los estudiantes visualizan el patrón que describe cada secuencia.

Figura 1. Situación planteada en un taller.

Situación 1.

Consideremos la siguiente secuencia.

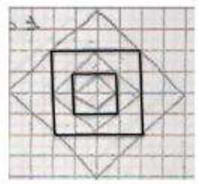


a. ¿Cuál seria la siguiente figura?
b. ¿Cuántos triángulos tendrá la figura en la décima posición?

Esta estrategia fue común en el trabajo de los cinco estudiantes, por ejemplo Andy al considerar la pregunta b, propone lo siguiente:

> Andy: La siguiente figura sería un rombo, luego viene un cuadrado, y luego otro rombo; después otro cuadrado, y otro rombo; yo lo descubrí, siguiendo la secuencia, de un rombo y un cuadrado, así sucesivamente.

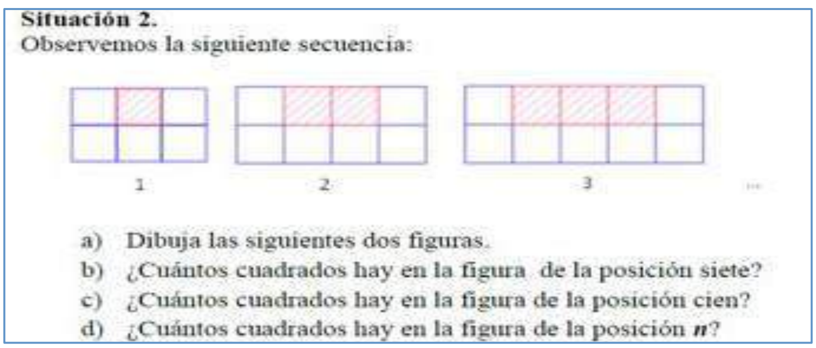
Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa



[Dibujo realizado por Andy para dar solución al problema]

La segunda fase del proceso de generalización conlleva un mayor esfuerzo, debido a que en este momento los estudiantes debe expresar los elementos identificados en la fase anterior. El estudiante *representa* cuando muestra mediante palabras, números o figuras, lo observado en una secuencia, es decir, identifica lo que varía y lo que permanece constante.

Figura 2. Situación planteada en la entrevista.



Situación 2.
Observemos la siguiente secuencia:

a) Dibuja las siguientes dos figuras.
b) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición siete?
c) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición cien?
d) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición n?

Por ejemplo Mary, al abordar la situación (ver figura 2), plantea la siguiente representación verbal y gráfica, para hallar la cantidad de cuadrados en la posición cien:

> Mary: Cien más cien, da doscientos; entonces, son doscientos cuatro cuadrados. Porque cien abajo más cien arriba y los dos que se encuentran a cada lado. [Mary indica la figura]

[Dibujo realizado por Mary para dar solución al problema]

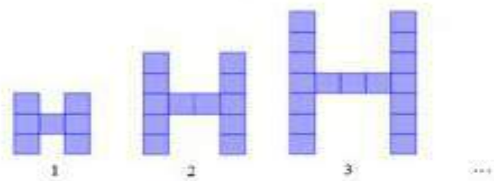
Por su parte Erick hace una representación verbal del patrón que identifica en la secuencia: "que coloreados en la figura hay 100 y 2 al lado 102, y tanto arriba como abajo son iguales y se suma y dan 204".

La tercera y última fase es quizá la más compleja de lograr, pues el estudiante en este momento debe llegar a una abstracción de las dos anteriores fases y representarla mediante una expresión que lo generalice. El estudiante *invierte* al hallar la relación entre la posición y la cantidad de elementos que componen la secuencia.

Figura 3. Situación planteada en la entrevista.

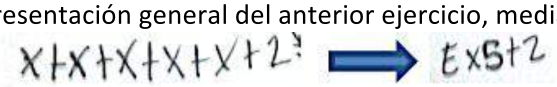
Situación 3.

Observa la siguiente secuencia de figuras:



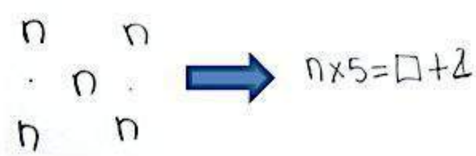
a. ¿Cuáles serían las dos siguientes figuras de la secuencia?
b. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura de la posición 10?
c. ¿Qué posición tendrá la figura que tiene 82 cuadrados?
d. Representa esta secuencia mediante una expresión.

Emily intenta hacer una representación general del anterior ejercicio, mediante la siguiente expresión.



[Dibujo realizado por Emily para dar solución al problema]

Por su parte Mary realiza el siguiente esquema del mismo ejercicio, e intenta abstraer esa información mediante una expresión.



[Proceso realizado por Mary para dar solución al problema]

En este caso se evidencia el paso que Emily intenta dar de Describir a Escribir para llegar a una expresión que le represente el patrón que logra evidenciar.

Comentarios finales

Esta experiencia nos permitió evidenciar que el uso de estrategias potencia el desarrollo del proceso de generalización, pues los resultados obtenidos dejan ver que a medida que se implementan, surge de manera, casi natural la descripción de la secuencia. Por tanto, hacer una introducción temprana del álgebra en el currículo escolar, resulta fundamental para potenciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico.

Con este trabajo buscamos que los resultados obtenidos por los estudiantes durante la investigación, sirvan de guía a los profesores para entender cómo afrontan los estudiantes este tipo de situaciones, y a su vez, estos resultados puedan propiciar en los profesores estrategias con las cuales puedan motivar en los estudiantes el razonamiento algebraico.

Referencias bibliográficas

Australian Education Council. (1994). *Mathematics: A curriculum profile for Australian schools.* Carlton, VIC: Curriculum Corporation.

Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta,* 15(2), 561- 573.

Castro, W., Godino J. Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un desafío para la formación de maestros. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 25, 73-88.

Corredor, X. y Pineda, M. (2014). Proceso de generalización: *Una perspectiva de estudiantes de básica primaria*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas no publicada, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Department for Education and Skills. (2001). *Frameworks for teaching mathematics: Years 7, 8, and 9.* London: DfES Publications.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking processes. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25 – 41), Netherlands: Kluwer.

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas*. Recuperado en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf)

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities, *PNA* 4(2), 37–62.

Sánchez, L., García, O. y Mora, L. (2011). Ver describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagogica Nacional. En G. Obando (Ed.), *10° Encuentro Colombiano Matemática Educativa*, Nariño, Colombia.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctica del Álgebra, Orígenes y perspectivas*. Argentina: Buenos Libros del Zorzal Aires.