OBSTÁCULOS COGNITIVOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Ana Cecilia Medina Mariño, Clara Emilse Rojas Morales
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Colombia)
ana.medina@uptc.edu.co, clara.rojas@uptc.edu.co

Palabras clave: Obstáculos cognitivos, concepciones, concepto de límite
Keywords: Cognitive obstacles, conceptions, limit concept

RESUMEN

Este artículo presenta el proceso y algunos resultados de una investigación interpretativa y descriptiva en la que se analizan concepciones relativas al concepto de límite, manifestadas por estudiantes que se están formando para profesores de matemáticas, y se infieren factores que obstaculizan o favorecen su comprensión. Se desarrolló bajo un enfoque sistémico, mediante el cual se reconoce la complejidad de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite, desde las perspectivas epistemológica, didáctica y cognitiva. Se encontró que los estudiantes revelan concepciones espontáneas mezcladas con las inducidas por la enseñanza y modelos mentales no pertinentes, que causan diversos conflictos cognitivos. En los libros de texto predomina la concepción analítica- estática mientras que en los estudiantes y profesores prevalece la concepción algebraica finitista- estática.

ABSTRACT

This article presents the process and some results of an interpretative and descriptive research in which conceptions relative to concept of limit, expressed by mathematics teachers in training, are analyzed and also factors that obstruct or favor its comprehension are inferred. The research was carried out under a systemic approach, taking into account the complexity of the phenomena of teaching and learning the concept of limit, from the epistemological, didactic and cognitive perspectives. It was found that the students reveal spontaneous conceptions mixed with the induced ones by the inappropriate teaching and mental models which cause various cognitive conflicts. In the textbooks the analytic-static conception predominates, whereas in the students and teachers the finitist-static algebraic conception prevails.

■ Introducción

El trabajo que se presenta se desarrolló en el marco de la línea de investigación de "Formación de profesores de Matemáticas" del grupo de Investigación de Educación Matemática y Estadística, EDUMAES, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia- Sede Duitama. Se hace énfasis en la dimensión cognitiva de un proyecto de investigación más amplio titulado "Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios", en el que se analizan modelos dominantes y concepciones relativas al concepto de límite, manifestadas por estudiantes de tercer y cuarto semestre de Licenciatura en Matemáticas y Estadística.

Si se conocen las concepciones de los estudiantes, se puede inferir posibles factores que favorecen u obstaculizan el aprendizaje de los conceptos, y además proporciona elementos para diseñar secuencias didácticas que mejoren la comprensión; para lo cual, es fundamental reconocer los obstáculos cognitivos, pues ha de decidirse cuáles pueden o no pueden evitarse, cómo serán superados y cuáles ayudan a construir la significación del concepto.

Así, este artículo tiene una doble intencionalidad: por una parte, reconocer algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje de concepto de "límite" cuya fuente está en la naturaleza del concepto; y por otra, aportar algunos elementos de reflexión para su enseñanza y aprendizaje.

A pesar de que el concepto de límite tiene una posición central en el Cálculo, su enseñanza y aprendizaje se hacen difíciles por las múltiples dificultades y obstáculos que surgen de la complejidad del concepto, de los tratamientos didácticos y de los modos de pensamiento o concepciones que desarrollan los estudiantes, los cuales se imbrican y afectan mutuamente (Medina, 2001). Investigadores como Sierpinska (1985) y Cornu (1982) desde la teoría de obstáculo epistemológico plantean la hipótesis de que estas dificultades se encuentran a la vez en el desarrollo histórico del concepto y en el aprendizaje actual a pesar de las diferencias cognitivas y culturales evidentes, como si fuesen constitutivas de la génesis del concepto

Surge entonces la necesidad de afrontar el problema desde una perspectiva sistémica que lleva a formular preguntas como: ¿Cuáles son las concepciones epistemológicas asociadas a la noción de límite?, ¿Qué concepciones relativas a la noción de límite se forman y expresan los alumnos universitarios? y ¿cuáles son los factores que inciden en esas concepciones? El estudio y análisis didáctico de estas concepciones, se convirtió en el objetivo principal del trabajo investigativo.

■ Metodología

La investigación está enmarcada en el enfoque sistémico, mediante el cual se reconoce la complejidad de los fenómenos de la enseñanza, aprendizaje y transposición didáctica del concepto de límite (Chevallard, 1991). Como se trataba de un estudio de concepciones propias según Cornu (1991), o inducidas por la enseñanza convencional y no provocadas intencionalmente, la población objeto de estudio estuvo constituida por 22 estudiantes que habían cursado Cálculo Diferencial e Integral, seleccionados mediante un muestreo intencional teóricamente informado.

El proceso investigativo de tipo cualitativo se llevó a cabo en tres fases. La primera – fase teórica- de elaboración del marco referencial teórico desde las perspectivas epistemológica, cognitiva y didáctica en torno al concepto de límite. En la segunda - fase interpretativa – se analizaron los datos recogidos a través de un cuestionario conformado por diez ítems teniendo en cuenta categorías de análisis establecidas con base en el estudio histórico-epistemológico. El modelo de análisis se apoyó en la teoría de Concepciones de Vergnaud (1982, citado por Ruiz, 1993), los obstáculos epistemológicos de la noción de límite de Sierpinska (1985, 1987) y Cornu (1982, 1991), y el proceso de institucionalización de las nociones matemáticas de Chevallard (1991) y Sfard (1991). Y en la tercera - fase descriptiva- se hace la contratación de resultados de los análisis epistemológico, didáctico y cognitivo, generando reflexiones acerca del tratamiento didáctico del concepto de límite.

■ Marco teórico

El concepto de límite de una función en Educación Superior generalmente se introduce a través de la definición formal (?-δ) o de las técnicas algorítmicas para su cálculo. Investigaciones en Educación Matemática han evidenciado que la definición de un concepto no garantiza la comprensión del concepto; una cosa es la imagen del concepto y otra la imagen de la definición que se forman los estudiantes (Tall y Vinner, 1981). La definición formal da precisión y rigor matemático, pero, encapsula las situaciones y procesos que le dan sentido al concepto, ocultando su significación y complejidad. Este hecho ha llamado la atención a numerosos investigadores de Educación Matemática que desde la teoría de obstáculo epistemológico lo han abordado.

Siguiendo la línea de Bachelard quien introduce la expresión de “obstáculo epistemológico”, en Didáctica de las Matemáticas Brousseau (1983, citado por Cornu, 1991) señala que el conocimiento tanto a nivel cultural como personal, no se desarrolla en un proceso continuo, implica una constante interacción con los conocimientos anteriores, los cuales son movilizados para ser modificados, completados, reorganizados o rechazados. Al respecto, El Bouazzaoui (1988) indica que hay concepciones que se transforman en obstáculos o dificultades tanto a nivel cognitivo como epistemológico. La dificultad se vence cuando el problema se resuelve solo haciendo una reorganización de la teoría, en cambio para superar un obstáculo se requiere de una nueva teoría y un cambio importante en el punto de vista. El obstáculo es más substancial que una dificultad y se manifiesta en los errores. Pero estos errores no son en ningún caso debidos al azar, ni a la ignorancia, sino son reproducibles y persistentes durante largo tiempo. Cuando esto ocurre en la génesis de una noción, o a través de concepciones colectivas transmitidas en los programas y libros de texto el obstáculo es epistemológico, pero si sucede en el proceso de aprendizaje, se habla de obstáculo cognitivo.

Brousseau (1983, p.173, citado por Ruiz, 1993) menciona que los obstáculos cognitivos pueden ser generados por diferentes causas: de origen ontogénico, debido a las limitaciones del sujeto en un momento de su desarrollo; de origen didáctico, ligados al sistema de enseñanza en que se encuentran los alumnos y de origen epistemológico, debido a la naturaleza del conocimiento matemático en sí mismo o a la transposición didáctica del saber científico al saber escolar. Un obstáculo cognitivo de origen epistemológico, tiene las siguientes características: se trata siempre de un conocimiento y no de una ausencia de conocimiento; este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados problemas o dominio de problemas; este mismo conocimiento engendra respuestas erróneas para ciertos problemas o dominio de problemas; los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes y este tipo de errores son muy resistentes a la corrección.

Para este estudio se tomaron como referentes los siguientes obstáculos epistemológicos identificados en la génesis y evolución de la noción de límite por Sierpinska (1985), Cornú (1982) y otros descritos históricamente en Medina (2001):

O_i - "Horror al infinito". Expresión acuñada por Cantor para referirse a la no aceptación del "infinito actual" y la influencia del infinito potencial en matemáticas. Surge del problema entre lo discreto y lo continuo en la matemática griega y perduró durante aproximadamente 25 siglos (Sierpinska, 1985).

$O_{g\,v\,n}$ - Separación de lo geométrico (continuo) y lo numérico (discreto). Ligado al descubrimiento de los inconmensurables; la interpretación geométrica y su éxito en la solución de ciertos problemas, causa un obstáculo que impide el paso a la noción de límite numérico (Cornu, 1991).

O_g - Obstáculo geométrico-Paradigma euclídeo. El modelo de razonamiento geométrico Euclídeo era el perfecto, solo se logra superar con el programa de la Aritmetización del Análisis en el siglo XIX.

$O_{f\,a\,i}$ -Transferencia de lo finito a lo infinito. Sucede cuando tratan de aplicar propiedades y algoritmos de los casos finitos a las series infinitas encontrando inconsistencias como en el caso de la serie de Grandi : 1-1+1-1+1.... .

O_c - Principio de continuidad de Leibniz. Transferir la propiedad de una sucesión convergente a su límite. Por ejemplo, cuando se cree que el límite de 0.9, 0.99, 0.999,... tiene la misma propiedad de sus términos y por consiguiente debe ser menor que 1.

$O_{f(x)}$ - Obstáculo relativo a funciones. Se genera de la concepción que tiene Euler de función como expresión analítica $y = f(x)$, en donde no se mira la naturaleza de los *x* y los *y* (Sierpinska, 1985).Se supera cuando se precisa el concepto de función real de variable real.

O_L - El límite se alcanza o nó? Es un debate que ha permanecido a través de la historia. Surge por el uso de expresiones dinámicas en las primeras definiciones de límite de Jurín, Robins, D'Alembert, Lhuilier y Cauchy afectadas por el infinito potencial (Cornu, 1991).

O_s - Obstáculo de simbología. Es producido por el uso de la simbología propia de las matemáticas y la inserción de cuantificadores de la lógica. (Sierpinska, 1985).

Desde esta perspectiva han surgido diversas investigaciones que dan cuenta del interés por indagar en torno al concepto de límite, uno de los conceptos básicos del Pensamiento Matemático Avanzado. Actualmente se identifican varias categorías de trabajos que van desde el estudio de concepciones, errores y dificultades en el aprendizaje, análisis del concepto en los libros de texto, hasta propuestas didácticas, centradas en un concepto de límite específico (de sucesión, serie o función), que desde diferentes perspectivas teóricas pretenden superar en los alumnos las limitaciones identificadas y mejorar su comprensión (Claros, Sánchez y Coriat, 2009). Generalmente se caracterizan por plantear definiciones alternativas, el uso y conversión entre distintos sistemas de representación, y el empleo de las TIC en Educación Matemática (Pantoja, López, Ortega y Hernández, 2014; Codes, 2009; Fernández-Plaza, 2011; Claros, 2010). Últimamente, existe la tendencia a proponer cambios en el currículo escolar en el que se plantea la necesidad de considerar el infinito como objeto de enseñanza y aprendizaje (Hitt, 2013; Arrigo; D`Amore y Sbaragli, 2011).

■ Resultados

Este estudio confirma que el análisis histórico epistemológico de la noción de límite permite conocer las condiciones históricas dentro de las cuales un obstáculo ha sido reconocido y luego franqueado y ayuda a comprender los orígenes y la naturaleza de los obstáculos y dificultades descubiertos en los alumnos (Sierpinska, 1985, p. 9) y también corrobora la presencia de algunos de los obstáculos cognitivos ya identificados por investigadores como Sierpinska (1987), Cornu (1982) cuya fuente está en los obstáculos epistemológicos asociados al concepto de límite.

Los obstáculos más persistentes, en las respuestas de los estudiantes son I_p- concepción de infinito potencial, $O_{g\,v\,n}$ - Separación entre lo geométrico y lo numérico, $O_{f\,a\,i}$ -Transferencia de lo finito a lo infinito, $O_{f(x)}$ - relacionados con función y O_s - los obstáculos de Simbología.

En el contexto geométrico se revela el obstáculo del infinito potencial, acentuado por la intuición geométrica y el factor visual y el obstáculo separación entre lo geométrico y lo numérico. Por ejemplo, cuando se les presentó una secuencia de cuadrados de tal forma que en cada paso se va tomando (pintando) la mitad del área restante del cuadrado y se les preguntó si ¿el proceso tiene fin? Y sí ¿se puede encontrar el resultado con un procedimiento aritmético? , la mayoría responde que el proceso no tiene resultado o no es posible encontrarlo con procedimientos aritméticos, por tratarse de un proceso infinito, lo cual se evidencia en respuestas como:

"*Puede que el proceso llegue a un resultado, pero es difícil, ya que se tardaría, por lo que es infinito"*

La transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito – $O_{f\,a\,i}$- predominante durante los siglos XVII y XVIII por la influencia de la posición finitista del álgebra de Vietá, en los trabajos de Newton , Leibniz, los Bernoulli y Euler, se encuentra en las respuestas dadas a la pregunta ¿ Puede calcular la siguiente suma 1-1+1-1+1-...?, cuando los estudiantes responden que la suma es cero , o puede tener más de un resultado al aplicar las propiedades asociativa y clausurativa de la suma finita al caso infinito. En ninguna respuesta se argumenta que por tratarse de un proceso infinito requiere tratamientos diferentes y mucho menos se deja ver la posibilidad de estudiar la convergencia o divergencia de la serie.

Otro obstáculo presente es la concepción estática de función (Ruiz, 1993). Se manifiesta, cuando al solicitarles un ejemplo de límite de una función, privilegian la representación de función como "expresión analítica", con las variables de tipo estático; la evalúan en un número finito de valores y desconocen la naturaleza de los elementos (números reales) del dominio e imagen de la función.

Por último, los obstáculos relativos a la simbología formal ε-δ se detecta en el intento de escribir la definición del límite de una función, en cuyas expresiones, los estudiantes no tienen en cuenta el uso y el orden de los cuantificadores, lo que los lleva a imprecisiones acerca de su significado, como en la siguiente definición informal dada por un estudiante:

"El límite de una función f(x) cuando x tiende a a es L, significa que: si x se acerca a a *, entonces f(x) se acerca a* L*"*

En muchos casos el concepto imagen individual difiere de la teoría formal (Tall y Vinner, 1981) y el mismo uso de expresiones dinámicas cotidianas como "tender", "aproximarse", "acercarse" que llevan implícito el infinito potencial se convierte en obstáculo para acercarse al verdadero significado de límite que requiere considerar el proceso infinito de aproximación y el infinito actual para reconocer el objeto creado por el proceso.

■ Reflexiones finales

En el estudio de concepciones relativas al concepto de límite manifestadas por estudiantes universitarios , que se están formando para profesores de matemáticas, se revelan imágenes individuales o modelos mentales no pertinentes, que difieren del significado real del concepto y causan dificultades y conflictos cognitivos para su comprensión, como los mencionados anteriormente, cuya fuente está en obstáculos epistemológicos.

Pero, también se revelan otras fuentes que pueden originar dichos obstáculos, el modelo didáctico convencional y los libros de texto, en los cuales predomina la concepción analítica- estática, centrada en el estudio axiomático de los números reales sin profundizar en su naturaleza (continuo numérico) y en la dimensión formal o estructural del concepto de límite (ε-δ), en la cual se encapsulan las situaciones y procesos que le dan sentido, como los fenómenos de variación continua, de aproximación infinita y el infinito actual, llevando a una pérdida de significación y a relegar la dimensión procedimental (Sfard, 1991); sin embargo, en los estudiantes y profesores prevalece la concepción algebraica, finitista-estática, es decir, el límite queda determinado por la aplicación de teoremas, fórmulas y algoritmos algebraicos, lo que lleva implícita una forma de pensamiento que difiere del pensamiento variacional y por lo tanto hace ver el cálculo como extensión del álgebra.

De lo anterior surgen cuestionamientos como: ¿Cuál es el énfasis que se debe dar en la enseñanza y aprendizaje del cálculo para acercar a la comprensión y dar sentido a los conceptos? y por otra parte, debido a que el concepto de límite está fuertemente ligado a la noción de infinito y para su comprensión se requiere sobrepasar obstáculos de tipo epistemológico, nos conduce a preguntarnos: ¿Es necesario considerar el "infinito" como objeto de estudio y como objeto de enseñanza y aprendizaje en Matemáticas?. Reflexiones al respecto, nos inducirán a la búsqueda de estrategias para superar los obstáculos cognitivos y didácticos y mejorar la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

Referencias bibliográficas

Arrigo, G., D`Amore, B, y Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Chevallard, I. (1991). *La Transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Claros, F.J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.

Claros, F.J., Sánchez, M.T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 197-209). Santander: SEIEM.

Codes, M. (2009). *Análisis de la compresión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Salamanca. España.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-165), New York: Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (1982). Quelques obstacles a L'aprprentissage de la notion de límite. *Seminaire de Didactique et Pedagogie des Mathematiques 34*, 1-15.

El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une function.* Tesis de Doctorado no publicada, Université Laval. Québec, Canadá.

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.

Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *El Cálculo y su enseñanza 4,*103-122.

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Revista Tecne, Episteme y Didaxis 9*, 44-59.

Pantoja, R., López, A., Ortega, M. y Hernández, J. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 37,* 91-110.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.

Ruiz, L. (2005). Aprendizaje y Matemáticas. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp.31-68), Madrid: Pearson Prentice Hall.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathematiques 6(1)*, 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics 18,* 371-397.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image y Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151–169.