EL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE LA TEORÍA LOS MODOS DE PENSAMIENTO, SUSTENTADA EN LA EPISTEMOLOGÍA DE CAUCHY

Irma Pinto Rojas, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte. (Chile)
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Palabras clave: Modos de Pensamiento, comprensión, derivada
Keywords: Modes of Thinking, understanding, derivative

RESUMEN

Esta investigación presenta las formas de comprender el concepto de derivada desde una variación del marco teórico, -Los Modos de Pensamiento-, perspectiva que muestra los niveles de abstracción en conceptos del álgebra lineal. Sin embargo, este trabajo propone extender el estudio a otra área de las matemáticas, el cálculo diferencial. Desde un análisis, en las dimensiones, histórica-epistemológica, cognitiva y didáctica del concepto de derivada, se plantea, el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), el modo Analítico-Operacional (AO) y el modo Analítico-Estructural (AE), también emergen los elementos articuladores entre estos modos y se establece la línea de investigación desde la epistemología de Cauchy. La información y datos significativos obtenidos en estudiantes de nivel universitario, permiten dar cuenta de los modos de pensar el concepto, en la perspectiva de que el estudiante que logra transitar entre estos tres modos, obtiene una comprensión plena del concepto de derivada.

ABSTRACT

This research presents ways to understand the concept of derivative, from a variation of the theoretical framework of The Modes of Thinking, a perspective which shows the levels of abstraction in the concepts of linear algebra. However, this paper proposes to extend the study into other areas of mathematics, differential calculus. Analysis encompassing historical-epistemological, cognitive and teaching of the concept of derivative, purposes that among the Geometric-Graphic-Convergent mode (GGC), Analytic Operations mode (AO) and the Analytic Structural mode (AE), articulating elements emerge. The significant information and data obtained from university-level students, accounts for the way students think about the concept of derivative. The student, who achieves movement between these modes, attains a full understanding of the concept of derivative. The line of research is established from the epistemology of Cauchy.

Introducción

Desde la experiencia docente, se ha podido detectar que el concepto de derivada presenta dificultades en su comprensión. Se puede observar a estudiantes realizar de forma más o menos satisfactoria cálculos con derivadas y resolver algunos problemas estándar, sin embargo se presentan serias dificultades para lograr que desarrollen una comprensión de su significado, este hecho fue presentado también en (Sierpinska, 2000). Una consecuencia de lo expuesto, se muestra en la alta tasa de reprobación y deserción por parte de estudiantes de primeros años de nivel universitario en los cursos de cálculo.

Desde una perspectiva histórica-epistemológica, los problemas que dieron origen al concepto de derivada, comenzaron a plantearse en la época clásica de la antigua Grecia, (siglo III a.C.), pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta fines del siglo XVII por obra de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716). Este hecho da cuenta de la complejidad que presenta el concepto, hasta lograr el estatus función derivada.

El problema de determinar la recta tangente a una curva cualquiera, dio origen al concepto geométrico de derivada, que junto a la noción de límite, concepción dinámica, formulada por Cauchy en 1821, fueron conformando el objeto matemático, derivada (Bourbaki, 1972).

Con el fin de levantar una interpretación del concepto de derivada a partir del marco teórico, los Modos de Pensamiento, (Sierpinska, 2000), se hace necesario replantear el modo Sintético-Geométrico, para resolver la problemática de la visualización instantánea del concepto de derivada; por ello es preciso mirar el entorno científico y la motivación que la historia de la matemática muestra respecto al concepto, esto es ¿cómo trazar una recta tangente a una curva cualquiera dada en un punto de ella?, esta fue una pregunta matemática que se generó por la necesidad de explicar matemáticamente a la comunidad científica de la época, los movimientos planetarios. Hecho que permite conformar el pensamiento práctico del concepto.

Los matemáticos griegos (320-265 a.C.) ya tenían conocimiento de cómo encontrar la tangente en un buen número de situaciones, pero de forma específica, como por ejemplo en una circunferencia, problema bastante simple de resolver con los elementos geométricos existentes, posteriormente Apolonio (262-190 a.C.) desarrolla métodos geométricos para la construcción de rectas tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas, métodos que han quedado como muestra de curiosidades históricas después de la segunda mitad del siglo XVII. La historia de la matemática nos muestra que tuvieron que pasar muchos siglos para dar respuestas al problema de la búsqueda de la tangente, debido a que el tratamiento del infinito representó para los griegos uno de los mayores problemas, no sólo por las implicancias matemáticas sino por la relación que tenía el concepto con las concepciones ideológicas de la época. La noción de tangencia ahora estaba ligada a situaciones con un enfoque dinámico. Durante la revolución científica en los siglos XVI al XVII nacen nuevas ideas, como por ejemplo, la aplicación del álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones en un sistema coordenado. Los primeros matemáticos que abordan el enfoque dinámico de estas problemáticas fueron Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) quienes plantean un método para calcular la recta tangente a una curva en un punto dado, sin embargo no fue hasta fines del siglo XVII y principios del siglo XVIII con Newton y Leibniz que se desarrollaron los procedimientos para resolver el trazado de la recta tangente a una curva, la velocidad instantánea de los cuerpos en movimiento, el cálculo de máximos y mínimos en una curva, etc., dando origen a lo que actualmente conocemos como el cálculo diferencial e integral (Steward, 2007).

■ Antecedentes

La epistemología y la historia del concepto de derivada como objeto del cálculo diferencial, (Steward, 2007) dan cuenta de lo complejo y sinuoso del trabajo realizado por cientos de científicos apasionados por el estudio del cálculo, en distintas épocas y culturas, durante siglos los conceptos asociados a la noción de derivada se fueron refinando y conformando hasta convertirlo en un objeto potente, que resuelve problemas de la propia matemática, de las ciencias naturales, sociales, humanas y consecuentemente como concepto a enseñar.

El concepto de derivada como objeto de enseñanza, está presente en los programas de estudio a nivel de enseñanza media y en nivel de pregrado de enseñanza universitaria. Se ha observado en estos dos niveles que la comprensión del concepto de derivada presenta dificultades para los estudiantes, manifestándose esta situación en los deficientes resultados de aprendizaje de la matemática en donde está considerado el concepto en cuestión, en general, es evidencia, el alto índice de fracasos por parte de los estudiantes en los primeros cursos de primer año universitario, este hecho se presume viene generado por la falta de comprensión de los conceptos del cálculo. La relevancia del estudio del concepto de derivada tiene evidencia en las distintas investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, que aportan las diferentes maneras de mirar el desarrollo de la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes. Así, Sierpinska (2005) concluye que los estudiantes son capaces de aplicar correctamente las reglas de derivación, sin embargo presentan dificultades cuando necesitan manejar el significado de la derivada en la resolución de problemas. Otras investigaciones, Cantoral (2004) muestra desde la socioepistemología, estudios relacionados con la enseñanza del lenguaje variacional, considerando el concepto de derivada, como un conjunto complejo de prácticas de naturaleza social que le dan sentido y significado. En el marco de la teoría APOE, Sánchez-Matamoros (2004) presenta la comprensión esquema del concepto de derivada a través de las fases, intra, inter y trans. Estos estudios dan cuenta de las complejidades que este concepto presenta y la relevancia que tiene la investigación en el contexto de la didáctica de la matemática.

El texto de estudio en nivel superior Larson, Hostetler y Edwards (1997), presenta el concepto de derivada, como una herramienta para la resolución de problemas en forma prioritariamente algorítmica, situación que se plantea como una dificultad en la comprensión plena del concepto de derivada, según la teoría de modos de pensamiento. El texto Apostol (1978), si bien tiene un enfoque más analítico, primero presenta la integración, después presenta el concepto de derivada, situación que dificulta su enseñanza, pues no está dispuesto generalmente de esa forma en los programas de estudio.

Problemática de investigación

El tratamiento mecanizado del concepto de derivada, como concepto fundamental del cálculo diferencial, no beneficia a los estudiantes que cursan cálculo I y cálculo diferencial en los primeros años de las carreras de Licenciatura, Pedagogía en matemáticas, así como a estudiantes de Ingeniería. Se observa un alto índice de fracasos y deserción en estos primeros cursos de cálculo.

El concepto de derivada es un obstáculo epistemológico en didáctica de la matemática y en consecuencia un concepto relevante de estudio, en el proceso de su enseñanza y aprendizaje (Serpinska, 2005).

Los textos de estudio presentan un enfoque prioritariamente algorítmico, promoviendo la resolución de problemas en forma mecánica.

Marco teórico: la teoría modos de pensamiento

Los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska, es un marco teórico de corte cognitivo de la didáctica de la matemática, teoría que emerge desde el Algebra Lineal. Este campo de la matemática se caracteriza por la observación de dos grandes procesos, cuando se desarrolla analíticamente el espacio geométrico, el proceso de aritmetización del espacio (la incorporación de la geometría analítica) y la desaritmetización del espacio (la estructura aporta las propiedades o axiomas). Concebida también como dos posiciones dogmáticas opuestas, una que rechaza la intuición en geometría y otra que rechaza la incorporación de los números en la geometría. De esta forma Sierpinska desarrolla esta teoría para indagar sobre el modo de pensamiento que privilegian los estudiantes para abordar un determinado concepto del Álgebra Lineal. Estos tres modos de pensamiento son presentados por Sierpinska (2000) de la siguiente forma:

a) Sintético–Geométrico (SG): Utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, puntos, líneas y planos, así como sus representaciones gráficas convencionales.

b) Analítico–Aritmético (AA): El estudiante recurre a la búsqueda algebraica para la representación del objeto, por ejemplo, los objetos son dados a través de relaciones numéricas, las figuras geométricas son vistas como conjuntos de n-uplas de números que cumplen ciertas condiciones.

c) Analítico–Estructural (AE): Donde los objetos son vistos como un todo estructural que pueden ser identificados a partir de un conjunto de propiedades.

Cada uno de estos modos permite una mirada diferente del objeto en estudio, hecho que la teoría plantea como esencial, para procurar que los estudiantes logren alcanzar niveles superiores de abstracción y fortalecer así el aprendizaje de los conceptos matemáticos, por lo que estos modos no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento sino que deben ser entendidos como modos distintos y ventajosos cuando interactúan en una tarea específica, (Parraguez, 2012).

Variación del marco teórico. Los modos de pensamiento:

Construcción del modo geométrico gráfico convergente del concepto de derivada (GGC)

El análisis histórico pone en evidencia la diversidad de puntos de vista sobre la noción de recta tangente, como elemento fundamental para conseguir la imagen directa, observable del concepto de derivada, en esta perspectiva, se considera el punto de vista desarrollado por D´Alembert (1717-1783), fundamental para el logro de tal propuesta. Así la noción de tangencia, considera la siguiente definición: *La recta tangente a una curva en un punto P, es el límite de las secantes (PQ) a la curva, cuando el punto Q, se desplaza en la curva tendiendo hacia P*. Así definida la recta tangente, se observa que contiene nociones que le subyacen. La tangencia es un concepto relacionado con la idea de aproximaciones sucesivas, que indican movimiento, la noción de límite, que a su vez está relacionado con la noción de convergencia localmente hablando. Estas nociones, no forman parte del pensamiento práctico propuesto por Sierpinska, Nnadozier y Oktaç (2002). Se hace necesario entonces realizar una variación del modo SG, incorporando al pensamiento práctico elementos como la idea de aproximación, razón de cambio, pendiente, es así que el modo SG, será llamado en adelante el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC) en relación a la comprensión del concepto derivada.

Para la propuesta, de darle al concepto de derivada una visión (GGC), se considera una curva continua C y un punto dado P de ella, que al girar una recta alrededor de P es posible trazar una recta tangente a la curva en ese punto, esa recta que gira en P no es otra que la secante a la curva. Ahora si se considera *una función f definida en su propio dominio y un punto P sobre su gráfica, es posible determinar una recta secante desde P a cualquier otro punto de ésta que se llamará Q, a medida que el punto Q se desplaza a lo largo de su gráfica acercándose a P, se llegará a una posición límite que será representada por la recta PT y que se llamará la recta tangente*, el tránsito de la recta secante PQ llegando a esta posición límite, que es cuando Q está próximo a P será representada por la pendiente de la recta tangente en P que en adelante se llamará derivada de f en P o f' , notación presentada por Lagrange.

■ Construcción del modo analítico operacional del concepto de derivada (AO)

Para definir el concepto de derivada en su forma (AO) se considera, la definición dinámica de límite presentada por Cauchy, por tal razón el modo AA pierde su carácter aritmético, por lo que se presenta como el modo AO. La idea de aproximar la recta tangente con múltiples rectas secantes que tienen distancias progresivamente más pequeñas entre los dos puntos que cruzan la curva, considera la recta tangente como la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto, es decir, cuando se toma el límite de las pendientes de las rectas secantes de esta progresión, se consigue la pendiente de la recta tangente. Se define entonces el concepto de derivada como el límite de las pendientes de las rectas secantes al aproximarlas a la recta tangente.

Con esta idea se define: *Derivada de una función f definida en su dominio y continua, como la pendiente de la recta tangente de f en el punto P: $(x_0, f(x_0))$.*

Con este propósito elegiremos un número h relativamente pequeño que representará un cambio también pequeño en x, que puede ser positivo o negativo, la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P: (x_0, f(x_0))$ y $Q: (x_0 + h, f(x_0 + h))$ es:

$$m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivada de f en el punto P es el límite del valor del cociente diferencial, en la medida que las rectas secantes se aproximan a la recta tangente, esto es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

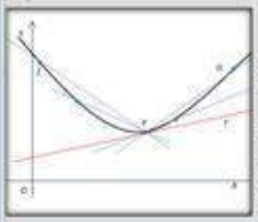
Si este límite existe, entonces se dice que la derivada de f en el punto P es $f'(x_0)$. Se observa que visto que el mismo tipo de límite nace de la búsqueda de la pendiente de una recta tangente o la velocidad de un objeto y surgen cada vez que se calcula una tasa de cambio en cualquiera de las ciencias o de la ingeniería. Nace la necesidad, dado el hecho que este límite se produce considerablemente, asignar un nombre especial y notación especial a éste. Así se tiene f'(notación debido a Lagrange) y otras notaciones, tales como: $\frac{dy}{dx}$ (dada por Leibniz), $\dot{x}$ (dada por Newton), $D_x f$ y $\partial_x f$ entendidos como operadores diferenciales propuestos por Euler y Jacobi respectivamente. La noción de límite es un concepto relacionado con la concepción de lo infinitamente pequeño y el infinitesimal, definido por Cauchy (1789-1857) en 1821.

■ Construcción del modo analítico estructural del concepto de derivada (AE)

Para definir el concepto de derivada en su forma (AE), es necesario mirar desde el modo AO, como se ha desarrollado el concepto de derivada de una función real de una sola variable, y desde esa perspectiva seguir los elementos estructurales que permiten la generalización de este concepto, sin embargo, se debe considerar que el concepto de derivada presenta varias formas de generalización, a modo de ejemplo: para funciones de varias variables (derivadas parciales, derivadas direccionales), para el análisis complejo (funciones holomorfas), en el análisis funcional (derivada funcional, derivada fraccional, en el sentido de las distribuciones), la diferenciación en el sentido de Fréchet que generaliza el concepto de función diferenciable a espacios de Banach de dimensión infinita etc., estas múltiples formas de conocimiento del concepto de derivada, muestra que su dimensión epistemológica no es suficiente para definir el modo AE, se debe complementar con una dimensión didáctica del concepto. Se plantea entonces, el estudio en el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales Ordinarias, por tal razón se considera la función derivada, $f´(x)$, como el elemento matemático que articula el modo AO y AE y que a su vez, permite definir el operador derivada, es este concepto matemático que permite junto con sus propiedades la representación de derivada en el modo AE. Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. La estructura que se debe estudiar en este contexto será: El espacio vectorial de las funciones diferenciables y el operador derivada como transformación lineal.

La variación del marco teórico, (Fig.1) queda entonces conformada:

Figura 1: Presenta la comprensión de los modos, desde un análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico del concepto de derivada.

GGC	AO	AE
La recta PQ aproximándose a T 	$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ La derivada de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ Existe el límite. El límite como mejor aproximación.	E.V. de las funciones diferenciables Operador derivada Operador derivada como T.L.

Validación de los modos de pensar el concepto de derivada

Las formas de comprender el concepto de derivada, presentadas en este trabajo: GGC, AO y AE, se han sustentado desde el análisis de tres dimensiones para el concepto de derivada, una dimensión histórica-epistemológica que permite observar desde la historia la evolución del concepto de derivada y su génesis en el cálculo diferencial, hecho fundamental para constituir el modo GGC, una dimensión cognitiva que proporciona la consistencia que tiene el marco teórico elegido y la dimensión didáctica del concepto de derivada, que como objeto de enseñanza permite establecer especialmente el modo AE.

A modo de conclusiones

Desde el estudio de las dimensiones histórica-epistemológica y didáctica del concepto de derivada, emergen dos perspectivas distintas de enseñanza, la de Cauchy y la de Lagrange, aunque comparten un origen común, reconocer las dificultades matemáticas presentes en $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, (cociente que representa la razón de cambio), muestran caminos distintos para resolver la problemática. Es la diferencia de respuesta a "Lo infinitesimalmente pequeño", que configura estos dos caminos. En la perspectiva de Cauchy, el concepto de derivada se entenderá como el límite del cociente incremental, mientras en la perspectiva de Lagrange el concepto de derivada será entendido como el coeficiente lineal de un desarrollo en serie de potencias de una función, en un punto dado. La elección de estudiar la comprensión del concepto de derivada desde la epistemología de Cauchy, tiene fundamento en la conformación de los modos de comprender el concepto, vía (GGC, AO, AE), junto a la orientación presentada en el contexto educacional de nivel universitario en Chile, respecto al estudio del cálculo diferencial. Los programas primero plantean el desarrollo de derivadas, definida a través del límite y en un curso posterior el estudio de series. Los libros de textos recomendados, en general, también presentan el concepto de derivada a través del límite.

El concepto de derivada es un objeto matemático relevante en el sistema educacional chileno y se considera la interpretación en los Modos de pensar GGC, AO y AE, de gran importancia, que faculta a enseñantes y aprendices del cálculo diferencial e integral, a lograr una comprensión plena de dicho concepto a través de la articulación de estos modos.El hecho de levantar desde la epistemología del cálculo el modo de pensar GGC del concepto de derivada, permite adquirir un significado práctico, básico para la comprensión del modo analítico del concepto y sustentar las situaciones de aula que aportan los elementos que completan su significado.

■ Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1978). *Calculus*. *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Barcelona. Madrid: Reverté S.A.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas.* España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 1-9

Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1997). *Cálculo y geometría analítica*. España: McGraw Hill.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento*. *Didáctica de la Matemática. Valparaíso*: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Sevilla, España.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra*.* En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education. *In Activity and Sign* (pp. 117-135). Springer US.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra.* Concordia University: Montreal.

Steward, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*. España: Drakontos.