ELEMENTOS PARA LAS CONSTRUCCIONES MENTALES DEL FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Ximena Gutiérrez, Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ximegf@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Palabras clave: APOE, totalidad, fractales, iteración, autosimilitud
Keywords: APOE, totality, fractals, iteration, self-similarity

RESUMEN

Los fractales no forman parte del currículum de Matemática obligatorio de la educación escolar en nuestro país. Estos objetos conllevan variados conceptos matemáticos, algunos de los cuales se inician en los niveles básicos de enseñanza y continúan hacia los cursos superiores. Este estudio se centra en las construcciones cognitivas que muestran estudiantes que no conocen del tema al responder un cuestionario elaborado con un mínimo de instrucciones sobre la regla geométrica por la cual emerge uno de sus más conocidos representantes. Los proceso de iteración y autosimilitud que se construyen, surgen de un estudio histórico-epistemológico y se relacionan con mecanismos de abstracción reflexiva mirados desde la teoría APOE, aportando una ruta para la planificación de la enseñanza. Los resultados esperados son la refinación de la hipótesis cognitiva, que para el objeto de estudio conformaría una Totalidad y, evidencias que sustenten una propuesta de incorporación de los fractales en el currículum.

ABSTRACT

Fractals are not part of the curriculum of Mathematics compulsory school education in our country. These objects involve various mathematical concepts, some of which start at the basic levels of education and continue to upper secondary. This study focuses on cognitive constructs that show students who do not know the topic to answer a questionnaire developed with minimal instructions about the geometric rule by which emerges one of its best-known representatives. The process of iteration and self-similarity that are constructed, arise from a historical-epistemological study and relate to reflective abstraction mechanisms from APOS, providing a route for instructional planning. The expected results are to refine the cognitive hypothesis that would constitute a Totality, for the object of study, and evidence supporting a proposed incorporation of fractals in the curriculum.

Introducción

Los objetos fractales quedan mejor definidos por sus características intrínsecas –naturaleza iterativa y autosimilitud de su estructura a distintas escalas–, estos permiten describir variados elementos de la naturaleza, que presentan estas cualidades, es decir, mantienen su estructura en cualquier escala que sean observadas (Mandelbrot, 1997). Este estudio responde a la necesidad de las investigadoras de indagar en un tema no contemplado en el currículum del plan común de Matemática en nuestro país, que sin embargo, y como señalan otros estudios sobre el tema, pretende relevar su potencial formativo por mostrar una matemática en desarrollo continuo, que aborda nuevos requerimientos y necesidades científicas (Turégano, 2001).

Basándonos en una de las teorías de la Didáctica de la Matemática denominada APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), la que fue creada por Dubinsky (1991) y desarrollada por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) y otros investigadores (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014), se diseñó una Descomposición Genética (DG) para describir las construcciones y mecanismos mentales que muestran estudiantes de educación media en relación a un fractal específico, llamado Triángulo de Sierpinski.

Esta propuesta hipotética de construcción cognitiva, DG, de dicho fractal en su versión geométrica, se basó en un estudio histórico-epistemológico siendo la Matemática misma parte crucial de esta formulación, que se enmarca dentro de la Didáctica de la Matemática.

Levantar desde el estudio teórico cuáles son las construcciones cognitivas y mecanismos de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1987) que conforman la DG y documentarlas, se convierten en los ejes que guían el trabajo, sin embargo siempre hubo una visión más amplia de la investigación: que es posible y relevante incorporar estas temáticas de estudio al currículum obligatorio de educación básica y media. Esto permitiría potenciar conceptos que se distinguen de los tradicionales (euclidianos) y que modelan objetos reales que llaman la atención por sus conexiones con la vida cotidiana y la naturaleza humana.

Considerando esta finalidad, se platearon las siguientes preguntas de investigación:

> ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales que muestran estudiantes de educación media que no conocen el tema, para el concepto fractal Triángulo de Sierpinski?
>
> ¿La Descomposición Genética diseñada, es adecuada para describir la construcción del fractal Triángulo de Sierpinski?

Objetivos

1. Diseñar una Descomposición Genética (DG) del fractal Triángulo de Sierpinski.
2. Elaborar un cuestionario en base a la DG y aplicarlo en estudiantes que no conocen los fractales.
3. Evidenciar las construcciones y mecanismos mentales que muestran estudiantes que no conocen los fractales.
4. Refinar la DG diseñada en caso necesario.

Antecedentes

Los fractales han sido incorporados en investigaciones que abordan distintas temáticas llamando la atención sobre sus insospechados potenciales de aplicación. Entre los que podemos señalar, se encuentran fractales relacionados con: Medicina, Geografía, Economía, Geología, Biología, Computación y Matemática. Llaman la atención algunas investigaciones como la de Quezada (2006), referida a explicar que ciertos comportamientos sociales tendrían características fractales.

En cuanto lo que nos atañe, respecto del abordaje de fractales en el aprendizaje y la enseñanza, por lo general se encuentran estudios que presentan estrategias didácticas para su desarrollo a nivel de educación secundaria y universitaria aportando actividades prácticas y teóricas en el aula, algunos como Moreno-Marín (2002), incluyen el uso de material concreto para su compresión plasmando fractales mediante figuras en dos y tres dimensiones. Sus resultados aluden a la posibilidad de reforzar conocimientos matemáticos y desarrollar el interés de los estudiantes por lo novedoso del tema además por caracterizar su desarrollo en distintos grados de complejidad por lo que se pueden adecuar a distintos niveles de enseñanza.

Otros estudios, recurren a los fractales, para tratar conceptos más abstractos como el infinito, límites, convergencia. Fractales y teoría del caos también salen a la luz en la búsqueda de coincidencias y divergencias respecto del presente trabajo como lo muestra Martin (2003), desarrollando un paralelismo entre lo determinista y lo aleatorio y cómo esta temática se relaciona con los avances más recientes en el desarrollo de las ciencias.

Un aporte desde la cognición lo hace Garbin (2007) quien partiendo de la representación y la visualización, estudió qué características de los fractales son percibidas por estudiantes universitarios y qué definición elaboran de tales objetos. Una de las conclusiones que destacamos, es que los conocimientos sobre cálculo de estos estudiantes no afectan significativamente en sus respuestas.

A diferencia de estos importantes aportes respecto del tema, que versan por lo general en secuencias de enseñanza y la posibilidad de su compresión en la educación secundaria, esta investigación se centra en elementos que componen la construcción cognitiva del fractal Triángulo de Sierpinski.

La teoría APOE-APTOE

El cómo pasar de un estado de conocimiento a otro más evolucionado llevó a Jean Piaget a formular un marco explicativo de los mecanismos de desarrollo del conocimiento. La abstracción reflexiva (Piaget y García, 1982) fue postulada como uno de los procesos que ayudan a superar los desequilibrios por la adaptación de nuevos conocimientos sobre estructuras ya equilibradas.

Estos estudios fueron la base para generar una de las teorías de la Didáctica de las Matemáticas actualmente en pleno desarrollo: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, -APOE-, son construcciones mentales que evolucionan por mecanismos como la Interiorización, Coordinación, Encapsulación y Tematización, conceptos derivados de la noción de abstracción reflexiva desarrollada por Piaget (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996).

En esta teoría un concepto primero se concibe como una Acción que es dirigida en forma externa por Objetos que han sido concebidos previamente por el sujeto. Esta acción se traduce en transformaciones que son realizadas paso a paso y donde cada uno de ellos es necesario para realizar el que sigue.

Por el mecanismo de Interiorización una acción se transforma en un Proceso. Esto significa que la reflexión sobre las Acciones produce un dominio sobre ellas y puede controlarlas de forma interna, esto se observa cuando el sujeto es capaz de saltarse pasos o invertir el Proceso. Otro mecanismo que produce este tipo de construcción es la coordinación de Procesos los que pueden provenir de la desencapsulación de Objetos ya construidos y la necesidad de reflexionar sobre estos para construir nuevos Procesos.

La construcción de Objetos, cognitivos, se produce por el mecanismo de Encapsulación observado cuando el individuo realiza Acciones sobre Procesos los que percibe ahora ya no como estructuras dinámicas sino como entidades estáticas o como una totalidad. El individuo puede construir transformaciones sobre dichos Objetos ya sea en forma explícita o en su mente incluso puede producir la desencapsulación volviendo al Proceso que le dio origen.

La actividad matemática promueve la interacción de las construcciones y mecanismos mencionados en este apartado configurando Esquemas que se reconstruyen continuamente a partir de dicha actividad. Este tipo de construcción se caracteriza por la coherencia determinada por la adecuación del esquema para solucionar una situación matemática específica.

Arnon et al. (2014), presentan la posible construcción de un nuevo estado sin embargo no hay investigaciones suficientes que avalen esta premisa. El concepto de Totalidad es concebido como una construcción intermedia entre Proceso y Objeto y se relacionaría principalmente con procesos infinitos o aquellos que involucran un gran número de pasos. Se relaciona con la incapacidad de concebir un proceso como un todo (Dubinsky, 1987).

En esta investigación se conjetura que posiblemente la construcción del objeto de estudio, el Triángulo de Sierpinski, queda a nivel de Totality, de ahí APTOE.

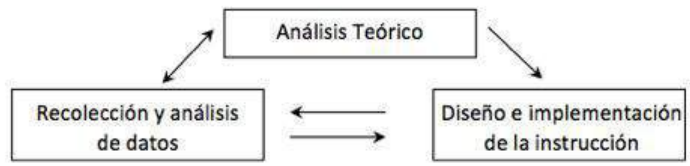
■ Metodología de investigación

Este trabajo de investigación tuvo la intención de adherirse fielmente a la concepción de la Didáctica de la Matemática como una disciplina experimental, provista de marcos teóricos explícitos, cuyos cimientos provienen de procesos reflexivos, de la observación y la experimentación a partir de la Matemática misma (Mena, 2010).

La investigación que realizamos es de corte cualitativo con un enfoque descriptivo-interpretativo, ha sido abordada a través de estudio de casos. Realizamos la contrastación de la hipótesis cognitiva DG, en un grupo de 9 estudiantes chilenos, de cuarto año de educación secundaria (17-18 años), 7 hombres y 2 mujeres. Estos estudiantes son los que optan por seguir el plan diferenciado de formación Matemática al finalizar la educación secundaria, podríamos decir que son individuos a los que les gusta la asignatura y tienen facilidades para ella.

Una investigación bajo la teoría APOE debe contemplar tres componentes fundamentales los que se sintetizan bajo el siguiente esquema:

Figura 1. Ciclo de investigación (Arnon et al. 2014, p. 94)



Componente de análisis teórico

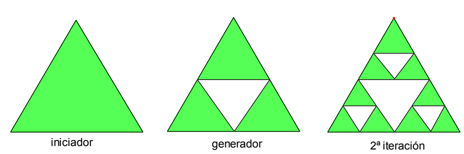
El estudio histórico-epistemológico revela, que la aparición de los fractales se remonta hacia el año 1856 frente a la aparición de entes extraños -funciones continuas sin derivada-. Esta aparición provoca un quiebre en el concierto de las Matemáticas, por la concepción aceptada hasta entonces, de que una función continua poseía una derivada, finita o no, excepto en un número finito de puntos. El camino analítico del concepto tuvo un punto destacado cuando en 1872, Weierstrass presenta una expresión de tal tipo de funciones.

$$W(x) = \sum b^n \cos(a^n \pi x) \text{ con } a \text{ entero impar, } 0 < b < 1, \text{ y } ab > 1 + 3\pi/2$$

Una versión geométrica de estos entes, fue dada por Sierpinski en el año 1916. Motivado por los trabajos de Cantor, profundizó en la teoría de conjuntos y dio a conocer la denominada Alfombra de Sierpsinski, a modo de ejemplo de una curva universal (Chabert, 1994). El Triángulo de Sierpinski se construye de manera análoga sobre la base de un triángulo equilátero.

En esta investigación definimos el objeto de estudio como un proceso iterativo de carácter infinito que consiste en aplicar el siguiente algoritmo:

2: A partir de un triángulo equilátero –iniciador–, la unión de los puntos medios de los lados, determina cuatro triángulos de los cuales se elimina el central –generador–, este algoritmo se repite en cada triángulo así determinado.



La revisión del currículum nacional detecta que en el plan común de estudios, los aprendizajes relacionados con Geometría se desarrollan en su totalidad en torno a la axiomática de Euclides, dejando para los cursos diferenciados –estudiantes que eligen profundizar en la asignatura– del último año de

Educación Media, algunas temáticas que aluden a fractales. El tema aparece fundamentado en su uso en relación a sucesiones geométricas, otorgando la posibilidad de introducir la idea de límite, y convergencia, entre otros (Ministerio de Educación, 2005).

Este análisis teórico, los conocimientos de las investigadoras sobre la Matemática, la teoría APOE y los antecedentes de otros estudios del objeto matemático, dieron origen al diseño de la DG.

Componente de diseño e implementación de la enseñanza

La hipótesis cognitiva, dio origen a tres instrumentos: cuestionario con plantilla triangular, cuestionario sin plantilla triangular y la plantilla triangular. La plantilla tenía como finalidad apoyar los procedimientos gráficos de los estudiantes. El cuestionario base fue dividido en dos partes considerando que desde determinada actividad, se daban señales para desarrollar las previas, variable no deseada en esta investigación. Además, a partir de una medición inicial se verificó que un estudiante ocupaba más tiempo de lo esperado en desarrollar las actividades propuestas.

Componente de recolección y análisis de datos

El acceso a los informantes presentó dificultades porque las investigadoras no tenían una relación directa con actividades de enseñanza en los grupos definidas. Finalmente el cuestionario fue aplicado a nueve estudiantes que no conocían el tema. La aplicación de cada parte del cuestionarios se realizó en día diferentes de la misma semana. Fue desarrollado en forma individual por cada uno de los informantes y el docente a cargo no intervino en su desarrollo.

Resultados

La tabla 1, que se presenta a continuación resume los resultados obtenidos, respeto de las construcciones mentales de los estudiantes.

Tabla 1: Construcciones mentales del Triángulo de Sierpinski que muestran los estudiantes

Construcción mental	[E1]	[E2]	[E3]	[E4]	[E5]	[E6]	[E7]	[E8]	[E9]
Procesos Iniciador Generador Iteración	Construye Proceso	Construye Acciones sobre Patrones geométricos	Construye Proceso	Construye Proceso	En vías de construcción Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso
Proceso Autosimilitud	Construye Proceso	Construye Acciones sobre conteo de triángulos	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso
Proceso Patrón de conteo	Construye Acciones sobre conteo de regiones triangulares	Construye Patrón de conteo de divisiones del lado	En vías de construcción Proceso	Construye Proceso	En vías de construcción Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso
Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso

Dibujar Imágenes fractales									
Proceso Medidas fractales	Construye Acciones sobre perímetros y áreas de triángulos	Construye Acciones sobre perímetros y áreas de triángulos	Construye Proceso	En vías de estado Proceso	Construye Acciones sobre las medidas de divisiones Generador	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso
Proceso Sucesión de medidas fractales	En vías de construcción Proceso	Construye Acciones sobre perímetros y áreas de triángulos	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Acciones sobre perímetros y áreas de triángulos	En vías de construcción Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	En vías de construcción Proceso
Proceso Sucesión de imágenes fractales	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	En vías de estado Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso	Construye Proceso
Proceso Conjunto **N**	En vías de desencapsular	Desencapsula Proceso	Desencapsula Proceso	Desencapsula Proceso	En vías de desencapsular	Desencapsula Proceso	Desencapsula Proceso	Desencapsula Proceso	Desencapsula Proceso
Totalidad	En vías de construcción	En vías de construcción	Construye Totalidad	Construye Totalidad	En vías de construcción	En vías de construcción	Construye Totalidad	Construye Totalidad	En vías de construcción

Conclusiones

- Las construcciones y mecanismos presentes en la DG están conformados por Elementos Geométricos y Analíticos, y algunas de las evidencias muestran que estos surgen en forma simultánea.
- Se ha constatado que los Procesos Mentales a saber: Iteración Autosimilitud, y Patrón de Conteo son construcciones elementales de base para conformar las demás estructuras del concepto desarrollado. En palabras de Piaget, son las estructuras donde se reflejan los nuevos conceptos en la secuencia de construcción de conocimiento descrita.
- Las actividades diseñadas en el cuestionario no solo constituyeron un instrumento para validar empíricamente el modelo, sino que se evidenció como una secuencia de enseñanza, más aún, una secuencia de autoaprendizaje toda vez que a partir de ella y de unas pocas instrucciones precisas iniciales, los nueve estudiantes construyeron las estructuras cognitivas elementales para la compresión de este objeto fractal, sin la ayuda de un instructor: el profesor.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory.* New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Chabert, J. (1994). Medio siglo de fractales: 1870–1920. *Contactos, 1*, 33-43. Recuperado de http://gauss.acatlan.unam.mx/pluginfile.php/32320/mod_resource/content/0/ MedioSiglo-Fractales-Jean Luc.pdf

Dubinsky, E. (1987). Anatomy of a question. *The Journal of Mathematical Behavior*, *6*, 363–365.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Garbin, S. (2007). La problemática fractal: un punto de vista cognitivo con interés didáctico. *Paradigma, 2,* 79-80. Recuperado de http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v28n2/art04.pdf

Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza* (2ª ed.). Barcelona: Tusquets Editores, S.A.

Martin, M. (2003). Caos y fractales. *ArsMédica. Revista de Humanidades 2003, 1,* 68-79. Recuperado de http://www.dendramedica.es/revista/v2n1/Caos_y_fractales.pdf

Mena, A. (2010). Acerca de la importancia de la didáctica de la matemática para nuestro país. *Coloquio de Didáctica de la Matemática.* Recuperado de http://158.251.72.52/sitio/moodle/file.php/1/Situaciones%20Didacticas/Didactica%20de%20la%20Matematica%20en%20Chile.pdf

Ministerio de Educación. (2005). *Currículum de la educación media. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios. Formación diferenciada humanista científica. Matemática. Actualización 2005.* Santiago, Chile.

Moreno-Marín, J. (2002). Experiencia didáctica en matemáticas: construir y estudiar fractales. *Suma, 40,* 91-104. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/40/091-104.pdf

Piaget, J., y García, R. (1987). *Psicogénesis e historia de la ciencia* (3ª ed.). México: Siglo XXI editores, S.A.

Quezada, A. (2006). *Fractales y opinión pública: una aplicación del exponente de Hurst al estudio de la dinámica de la identificación ideológica.* (Tesis doctoral). Recuperado de http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/42744/1/AQL_TESIS.pdf

Turégano, P. (2001). Los fractales: algo más que cosas bonitas. *La educación matemática en el 2000, 33.* Recuperado de http://books.google.cl/books?id=9gYKgWju6xwC&pg=PA61&lpg=PA61&dq=de+guzman+1993+estructuras+fractales+y+sus+aplicaciones&source=bl&ots=evIbwpmPj_&sig=Ye_nixokEr94-eomeFhzeg3 qQTg&hl=es-