PROBLEMAS CON PORCENTAJES... ¿O PORCENTAJES CON PROBLEMAS?

Susana Vecino, Guillermo Valdez, Carolina Vivera, Mercedes Astiz, María I. Oliver, María C. Rocerau.
Universidad Nacional de Mar del Plata. (Argentina)
susana@mdp.edu.ar, cvivera@mdp.edu.ar, mastiz@mdp.edu.ar. rocerau@gmail.com

Palabras clave: Porcentaje, recursos, errores
Keywords: Percentage, resources, errors

RESUMEN

El presente trabajo consiste en explorar de qué manera alumnos del penúltimo año de escolaridad obligatoria, alumnos aspirantes a ingresar a una Facultad de Ciencias Exactas y docentes en formación resuelven un problema cuya solución involucra el concepto de porcentaje. En trabajos anteriores hemos detectado dificultades en situaciones básicas en las que se utiliza dicho concepto y que al parecer persisten. Se analizan a la luz del Doble Enfoque los errores y recursos utilizados y se plantean algunos interrogantes que a nuestro entender merecen atención.

ABSTRACT

This paper shows how students in the penultimate year at secundary schools,aspiring students to University and teachers in training solve problems which include the percentage problems. In previous papers we have detected problems in basic situations in which that concept is used and that they still persist . The dual approach to the mistakes and the used sources are analized, and certain questions which should be considered are raised.

Introducción

Robert y Rogalsky (2004), mostraron a través de diversas investigaciones que gran parte del aprendizaje de los alumnos depende de las actividades que realizan en clase, condicionadas por lo que el docente propone, limitado por distintas sujeciones sociales, personales e institucionales. Mostraron también que las prácticas de los docentes se vuelven rápidamente estables y difíciles de cambiar, posiblemente debido a las sujeciones que pesan sobre ellos. Desde este enfoque teórico, en este trabajo, queremos transmitir la experiencia realizada con grupos de alumnos de distintos niveles del sistema educativo a partir de la resolución de una situación frecuente en distintos contextos. Si bien dicha situación puede ser para algunos "un problema", en el sentido que lo consideran autores como Schoenfeld (1999) y simplemente un "ejercicio de aplicación" para otros, su solución puede encontrarse de distintas maneras utilizando conceptos matemáticos elementales.

En diversos diseños curriculares encontramos al porcentaje entre "los conocimientos que resulta pertinente transmitir a los alumnos" (DGCyE 2012) con claras expectativas de logro desde los primeros años de escolaridad; como por ejemplo en la etapa 3-5 de NTCM (2000) "reconocer y generar formas equivalentes de las fracciones, decimales y porcentajes más comunes" o en la etapa 6-8 "trabajar flexiblemente con fracciones, decimales y porcentajes para resolver problemas".

Un motivo

Como integrantes del grupo Investigación Educativa y a partir de nuestra labor docente, hemos detectado en los últimos veinte años la permanencia de ciertas dificultades en torno de algunos conceptos básicos. Entre ellos, el de porcentaje, extremadamente útil por sus múltiples aplicaciones que van desde lo cotidiano hasta lo profesional pero que se manifiesta difícil de comprender y usar. Tanto desde el punto de vista matemático como desde su enseñanza, el porcentaje es un concepto estrechamente relacionado con otros conceptos de la aritmética básica tales como los de razón, fracción y operador multiplicativo y hereda o comparte dificultades. Algunas de estas ideas las hemos reflejado en trabajos anteriores como por ej. "La fracción como operador. Un complejo concepto elemental" o "¿Un problema en la oferta?... Por el segundo paga la mitad".

Por otro lado el departamento de Química de nuestra Facultad, expresamente ha requerido destacar el tratamiento en el curso de ingreso tanto del uso de las magnitudes como el de los porcentajes. Se dio respuesta a esto, incluyendo estos conceptos en las distintas actividades propuestas a lo largo de todo el material de trabajo para el Ingreso, por ej.

"Una persona gasta la sexta parte de su sueldo y, luego, el 75% del resto. Si aún le quedan $ 1050, ¿cuál es su sueldo?" dentro de ecuaciones, o en función exponencial, del estilo *"La masa de una muestra de polonio radiactivo disminuye con el tiempo según la fórmula* $m(t) = m_0 \, . \, 0,5^{\frac{t}{140}}$*, donde "*$m_0$ *"es la masa inicial y "t" es el tiempo expresado en días. Calcula el tiempo necesario para que la masa inicial se reduzca un 35%,".*

En particular, para el ingreso 2013 confeccionamos un problema que enunciado en lenguaje común representa una situación habitual en nuestros días. En este trabajo intentamos caracterizar los recursos utilizados en la resolución o intentos de resolución en distintos grupos de alumnos. Se administró a 41 estudiantes del penúltimo año de escolaridad obligatoria, a 8 profesores de Matemática en Formación y a 224 aspirantes como parte de una instancia de evaluación del Ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas.

El problema

"Cinco amigos viajaron a Barcelona y, después de una semana deciden ir todos juntos hasta Madrid en alguno de los trenes de alta velocidad. Buscando el precio del pasaje en internet, encuentran que si reservan en el tren AVE con una semana de anticipación, cada dos pasajeros que viajan juntos, el segundo paga el 60% del valor del pasaje. Resuelven aprovechar esta oportunidad que les termina costando 462 euros. ¿Cuál es el costo del pasaje en el tren AVE para una persona que viaja sola?"

En la Tabla 1 se sintetiza en números las soluciones correctas e incorrectas por grupo:

Tabla I

Grupo de	*BIEN*	*MAL*
Aspirantes a ingreso	48	176 (79%)
Estudiantes secundarios	27	14 (34%)
Docentes en formación	4	4 (50%)

Los grupos y sus resoluciones

Aspirantes a ingreso

Para comenzar a cursar las materias del plan de estudio de todas las carreras de esta Facultad, los ingresantes deben aprobar dos requisitos: "Introducción a la Matemática" y el taller "Leer y pensar la ciencia".

Uno de los 6 puntos que integraron el Primer parcial del curso "Introducción a la Matemática" del Ingreso 2013 fue el problema del tren AVE. Esta evaluación podía incluir ítems sobre los siguientes temas: Números reales. Ecuaciones e inecuaciones en IR. Magnitudes. Concepto de función. Función lineal-Función cuadrática. Polinomios.

¿Qué recursos usan los Aspirantes que resuelven bien?

Teniendo en cuenta los contenidos para esta evaluación, tal como esperábamos, la mayoría utilizó el planteo de ecuaciones, aunque encontramos algunos casos con regla de tres, como por ejemplo se muestra en la Fig. 1.

Figura 1.

$x + 60\%x = y \rightarrow y = \frac{8}{5}x$

$2y + x = 462 \rightarrow y = 231 - \frac{1}{2}x$

$\frac{8}{5}x = 231 - \frac{1}{2}x \ldots\ldots x = 110$

"y" valor del combo, "x" valor del pasaje

$\begin{cases} 2x + 3y = 462 \\ x = \frac{3}{5}y \end{cases}$

$5x - 2 \cdot 0{,}4x = 462$

$420\% \rightarrow 462\ euros \ldots$
$100\% \rightarrow 110\ euros$

$\mathbf{3x + 0,6 \cdot 2x = 462}$

En la Tabla II se muestra la cantidad de alumnos, según el tipo de planteo

Tabla II

Planteo a través de	*Número de alumnos*
Una ecuación	*41*
Un sistema de ecuaciones	*5*
Una regla de tres	*2*

¿Qué recursos usan los Aspirantes que resuelven mal?

En este grupo también encontramos el uso de una ecuación, de un sistema o de una regla de tres (Tabla III):

Tabla III

Planteo a través de	*Número de alumnos*
Una ecuación	*55*
Un Sistema de ecuaciones	*37*
Una Regla de Tres	*17*
No Registra intento de resolución	*67*

Si bien del análisis de las producciones, resultó difícil clasificar los errores por su amplia variedad, pudimos observar tres grandes grupos: los que *no registraron intento de solución,* los que *no ven al % como operador* y los que *traducen incorrectamente la situación.*

- *No registran intento de solución.* Es preocupante que el 30% (67) de alumnos que aspiran a ingresar a una Facultad de Ciencias Exactas no muestren un intento de resolución.
- *No ven al % como operador*. Lo vimos reflejado en 21 casos **(Fig. 2)**donde el 60%(40%), es directamente el número 60(40) ó el 0,6 (0,4), como por ejemplo:

Figura 2.

$$x+(x-40)+x+(x-40)+x=462$$
$$..Rta: x=108,4$$

$$(x+x)+(x-60)=462$$
$$Rta: x=174$$

$$5y=462-120$$
$$..Rta: y=68,4$$

$$y=462-60\%\cdot 2$$
$$y=462-120$$

$$2x+x-60\%=462$$
$$3x=462+0,6$$

- *Traducen incorrectamente la situación*. Este hecho lo vimos reflejado (Fig.3) tanto en los que plantean una regla de tres, como en los que utilizan un lenguaje algebraico para plantear una ecuación o un sistema.

Figura 3.

$$\begin{cases} 2x+3y=462 \\ 2x=60y \end{cases}$$

$$462=2a-0,6a$$
$$Rta.\quad a=330$$

$$x+\frac{1}{6}x=462$$
$$x=396$$

$$462 \rightarrow 100\%$$
$$x \rightarrow 60\%$$

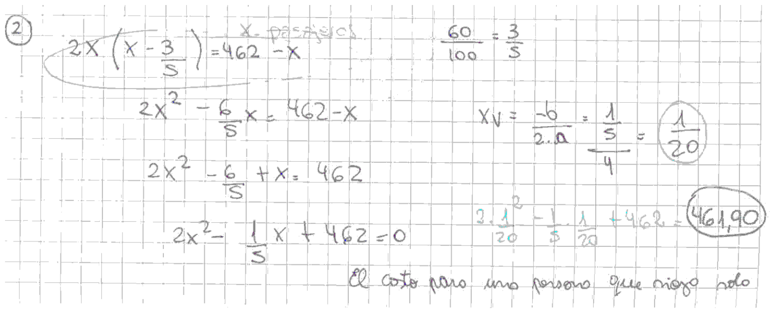
También en este grupo se registran casos de algunos alumnos que bajo "una posible especulación" fuerzan la resolución del problema a la utilización ya sea de la ecuación de la recta (Fig.4), o de una función cuadrática **(Fig.5),** contenidos que se podían evaluar en esta instancia:

Figura 4.

$$y=m.x+b \qquad m: cant\ de\ pasajeros \qquad b: descuento$$
$$x: \$\ de\ un\ pasaje \qquad y: valor\ a\ pagar$$

$$\begin{cases} 462=5.x-2\left(\dfrac{60}{100}x\right) \\ y=x \end{cases}$$

Figura 5.



Asombra que en este grupo de aspirantes 22 personas arriben a respuestas extremadamente absurdas que indican que el valor de un pasaje es superior a $ 200, aceptando que el pasaje para una persona pueda ser de : $ 589, $288, $770, $396, $385, $330 $913, $ 461, etc.

También encontramos casos que mas allá de la incorrecta traducción, se bloquean al momento de expresar el cálculo del %, y no pueden continuar**(**Fig.6), siendo su único registro , por ej.:

Figura 6.

462=(x+60%x).2+x
……………
462=3x+2.60%x

"x" pasaje de 2 personas y el pasaje de 1 es:
x+x+60%

Grupo de quinto año de una escuela secundaria de gestión privada

¿Qué recursos usan los alumnos que resuelven bien?

Los 27 que resuelven correctamente se agrupan, como se muestra en la Tabla IV y con pequeñas variantes encontramos registros del tipo a los de la Fig. 7

Tabla IV

Planteo a través de	*Número de alumnos*
Una ecuación	*13*
Un Sistema de ecuaciones	*0*
Una Regla de Tres	*14*

Figura 7.

$$x + 0{,}6x + x + 0{,}6x + x = 462$$
$$\ldots\ldots . x = 110$$

$$420\% \to 462$$
$$100\% \to x = 110$$

¿Qué recursos usan los alumnos que resuelven mal?

Las 14 resoluciones incorrectas se agrupan en 9 que recurren al planteo de ecuaciones y 5 a un "estilo regla de tres".

Tabla V

Planteo a través de	*Número de alumnos*
Una ecuación	*9*
Un Sistema de ecuaciones	*0*
Una Regla de Tres	*5*

En todos los intentos de resolución se observan dificultades en el uso del porcentaje como operador y en la traducción de la situación al lenguaje algebraico, como también se registra que aceptan respuestas absurdas.(Fig.8)

Figura 8.

$$(x \cdot 5) - \frac{60}{100} = 462$$
$$x \cdot 5 = \quad 462 + \left(\frac{60}{100}\right)$$
$$x = 92{,}52$$

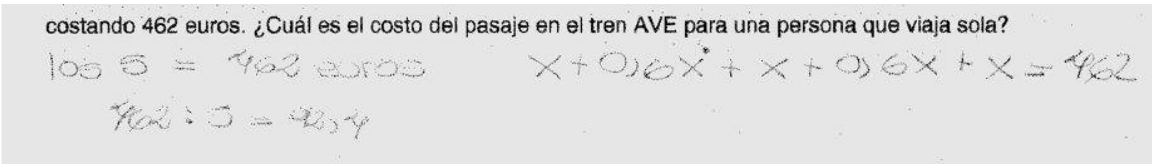
$$462\ euros = x + 60\%x + x + 60\%x + x$$
$$462 = 3x + 120\%x \quad \textit{esto es lo único que registra,}$$
no sabe continuar

$$El\ 40\%\ de\ 462 = \frac{462 - 40}{100} = 45{,}8$$
$$462 - 91{,}6 = 370{,}4$$
$$370{,}4 : 3 = 123{,}4\ euros$$

■ Grupo de Docentes en formación:

Este problema, junto a otros dos de Geometría los administramos a los 8 alumnos del profesorado en la primera clase de la asignatura Teoría de la Educación, que pueden cursarla si tienen como mínimo 7 materias aprobadas (con final). De los cuatro alumnos que respondieron correctamente uno lo hizo con planteo de regla de tres y los restantes a través de ecuaciones. Sorprende que 3 alumnos no registren intento de resolución y que uno (Fig.9) tenga, como único registro, el siguiente:

Figura 9.


costando 462 euros. ¿Cuál es el costo del pasaje en el tren AVE para una persona que viaja sola?

los 5 = 462 euros $\quad x+0{,}6x+x+0{,}6x+x=462$

$462:5=92{,}4$

Consideraciones finales

Del estudio de los errores surgen como características generales que: las ecuaciones utilizadas no traducen la situación del problema, se considera al porcentaje como una cantidad y no como un operador, se aceptan soluciones absurdas.

Analizar las causas de estas cuestiones es complejo. Desde el punto de vista del doble enfoque deberíamos analizarlas desde distintas dimensiones. En este trabajo nos centraremos en dos: la cognitiva, relacionada con los recursos y estrategias matemáticas de los participantes, y la personal, vinculada a las propias sujeciones de los alumnos.

Respecto a la dimensión cognitiva de análisis, es posible que la percepción del problema y los errores cometidos tengan su origen en representaciones rígidas de los contenidos escolares, desconectadas de las redes de significados que deberían haber sido construidas por los alumnos. Esto los lleva a realizar esfuerzos para recordar y repetir conjuntos de procedimientos relacionados con conceptos matemáticos, en general aislados entre sí, y vacíos de significado. Desde la dimensión personal, las causas de los errores pueden estar vinculadas a creencias comunes sobre la matemática escolar, que funcionan como ataduras o sujeciones: la matemática tiene poco o nada que ver con el mundo real, la respuesta a un problema es el resultado de cálculos que normalmente propone el enunciado, etc.

Sin embargo, las respuestas de estos alumnos de distintos niveles son, a nuestro entender, fundamentalmente el resultado de la enseñanza de la matemática. “Los saberes no existen sino como emergentes de prácticas situadas institucionalmente, que crean sistemas de valores y normas en relación a los saberes” Chevallard(1999). También, Robert(2005) y Rogalsky(2002, 2003) mostraron que gran parte del aprendizaje de los alumnos depende de las actividades que realizan en clase, que a su vez están condicionadas por lo que el docente organiza y propone, limitado por distintas sujeciones sociales, personales e institucionales. De esta manera y desde el punto de vista del aprendizaje que pueden promover en los alumnos, no podemos excluir del análisis a las prácticas docentes, lo cual forma parte de la siguiente etapa de esta investigación.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G.(2012). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas.* http://cmapspublic.ihmc.us/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1HNNDHQKN-1ZK8RDK-14R7

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Bs. As (2012).. http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston VA,.National Council of Teachers of Mathematics.

Robert, A. y Rogalski, M. (2004). Problemes d'introduction et autres problemas de recherce au lycee,. REPERES-IREM , 54 , 77-103.

Robert, A.; Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros en matemáticas de educación media: ¿por qué y cómo? Educación Matemática, 17, 35-38.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Rocerau, María C.; Vilanova, Silvia; Valdez, Guillermo; Oliver, Maria I; Vecino, María Susana; Vivera, Carolina (2011) .*La fracción como operador. Un complejo concepto elemental.* Revista de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. 26, 1-12.

Rocerau, María C.; Astiz, Mercedes; Oliver, María I; Valdez, G; Vecino, María S.; Vivera, C. (2012) ¿Un problema en la oferta?... Por el segundo paga la mitad. *Actas del 4to. Congreso Uruguayo de Educación Matemática,* Uruguay.4, 156-164