EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD DE MODELAR EN MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL: UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Juan Antonio Manzueta Concepción, Ramón Blanco Sánchez, Olga Pérez González
Universidad Autónoma de Santo Domingo. (República Dominicana)
Universidad de Camagüey. (Cuba)
jmanzueta2004@gmail.com, ramón.blanco@gmail.com, olguitapg@gmail.com

Palabras clave: solución óptima, programación lineal, representación semiótica
Key words: optimal solution, lineal programming, semiotic representation

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es caracterizar las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería respecto al uso del lenguaje matemático para el desarrollo de la habilidad de modelación matemática. Para los fundamentos teóricos se basan en la modelación matemática (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo, 2009) y en la definición de concepciones y creencias de los profesores (Moreno, Azcárate, 2003).
La investigación se encuentra en su fase inicial, en la cual se ha estudiado el uso del lenguaje matemático de los profesores de ingeniería de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

ABSTRACT

The present paper goal is the characterization of difficulties that the engineering students have with the use of mathematics language in order to development their ability in mathematics modeling. The theoretical foundations are established in the mathematics modeling, (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo, 2009) and the definition of the teacher conception and belief, (Moreno, Azcárate, 2003).
The investigation is at its initial phase, in which the mathematics teachers language have been studied, the teachers studied were the ones, that teach mathematics for engineering career in the Santo Domingo Autonomous University.

Introducción

El objetivo del presente trabajo es poder identificar las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería con el desarrollo de la habilidad de modelar matemáticamente cuando resuelven problemas de la Programación Lineal. Para ello se analizaron los pensum (programas de las asignaturas) de estas carreras, de la asignatura Investigación de Operaciones, dentro de la cual están los contenidos de la Programación Lineal y se incluyeron además, análisis de las asignaturas que son prerrequisitos.

Para lo cual se realizó un análisis de las evaluaciones de los últimos dos cursos, así como entrevistas con estudiantes y profesores de estas asignaturas en las Universidades Autónoma de Santo Domingo y la Universidad Tecnológica de Santiago, como grupos experimentales. Mediante lo cual se pudo apreciar que los estudiantes de las carreras de Ing. industrial e informática presentan dificultades en el planteamiento de los modelos matemáticos que se requieren para la solución de los problemas de Programación Lineal.

Además se estudiaron evaluaciones aplicadas en los niveles precedentes, lo que permitió incluir como causas de peso en esta problemática el hecho de que a la modelación matemática no se le da la importancia que reviste tanto en dichos niveles precedentes como en el ámbito de la matemática aplicada en algunas carreras.

Por otra parte el carácter no ostensivo de objetos matemáticos y el pobre dominio del lenguaje matemático que presentan los estudiantes, limita notoriamente las posibilidades de estos para poder construir modelos matemáticos, como plantean Kanashiro A. M., Oviedo L. M. entre otros. (Kanashiro y Oviedo 2012).

Desarrollo

Resolución de problemas y modelación

Como es conocido, la resolución de problemas es una actividad inherente a la actividad matemática, pero en muchos casos, y en particular en problemas reales, la solución del problema pasa por la modelación del mismo. Como todo profesor sabe, muchos estudiantes que no pueden resolver un problema, son capaces de resolverlo si se les da el modelo matemático de dicho problema.

Por lo que se puede asegurar que formar y desarrollar en el estudiante la habilidad de modelar, es una meta importante, que se debe proponer cada profesor de Matemática, en particular en la Matemática para ingeniería, dado que esta ciencia en manos del ingeniero, es la herramienta que hace posible construir un modelo numérico o cualitativo cuyo análisis permitirá tomar decisiones, diseñar artefactos y controlar procesos de manera eficaz y fiable.

Una de las ramas de la Matemática con gran aplicación en la solución a problemas de las organizaciones, donde se aplica para la solución de problemas relacionados con: la producción, distribución (Transporte y Asignación), tratamiento de enfermedades, dieta, mercadeo y otros, es la Investigación de Operaciones, en específico dentro de esta rama La Programación Lineal, y aunque los modelos usados en esta especialidad tienes características comunes, los estudiantes presentan frecuentemente dificultades para arribar correctamente al modelo adecuado al problema que se quiere resolver.

Se ha podido constatar en los estudios preliminares realizados, que independientemente de las medidas que deben tomar los profesores de Programación Lineal, en las carreras técnicas donde se imparte dicho contenido, existen prerrequisitos que deben ser alcanzados por los estudiantes antes de cursar la mencionada asignatura.

Los prerrequisitos básicos que los alumnos deben poseer son de tres tipos:
1. Poder Modelar problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales.
2. Expresarse correctamente en el lenguaje matemático.
3. Poder expresar un objeto matemático en diferentes registros de representación semiótica.

Los prerrequisitos señalados tienen una raíz común que se encuentra en la formación conceptual del estudiante, pero además los dos últimos están en una interrelación dialéctica con la formación conceptual, pues son acciones que requieren de cierta formación conceptual para poder ejecutarlas, pero a su vez la ejecución de las mismas contribuye a la formación conceptual de los estudiantes. (Radford, Schubring y Seeger, 2011).

Prácticamente desde que se le plantea el primer problema a los estudiantes, se les está pidiendo de manera implícita la construcción de un modelo, a través del cual se representa el problema inicial, pero en una semiótica que responde a las reglas y leyes con que opera la Matemática, por lo que una vez construido dicho modelo, si el alumno conoce las reglas matemáticas implicadas en el modelo planteado, puede resolver el problema sin mayores dificultades.

Pero en la actualidad, con la “buena intención” de evitar que los alumnos se alejen y separen de la institución escolar, se tiende a eliminar aquellos aspectos disciplinares (en nuestro caso, los aspectos de la disciplina matemática) más exigentes y, supuestamente, difíciles de soportar por los alumnos. Este principio “proteccionista” ha provocado sucesivamente en la Enseñanza Primaria, en la Secundaria y ahora ya en la Universitaria, una tendencia a excluir algunas de las principales dimensiones de la actividad matemática genuina, dígase resolución de problemas a través de un modelo elaborado por el propio estudiante, lo que tiene consecuencias imprevistas, espontáneas y contrarias, paradójicamente a las buenas intenciones, que motivaron tales acciones. (Barquero, Bosch y Gascón, 2013; Garcíay Ruiz, 2006).

■ Lenguaje matemático, semiótica y modelo

El estudio realizado sobre las evaluaciones de los estudiantes, tanto en los niveles precedentes, como en las carrearas de ingeniería que nos ocupa, muestra la debilidad que presentan los estudiantes, en los aspectos referidos en el subtítulo y que además se destacan en la bibliografía especializada. (Radford, 2002).

Aunque cada uno de estos tres elementos necesita de los otros dos para que el estudiante pueda hacer un trabajo matemático adecuado, se puede abstraer cada uno de ellos para una mejor explicación, tanto de cada uno de ellos, como de la interrelación entre los mismos.

Realmente el lenguaje matemático es una herramienta semiótica a través de la cual materializar los objetos matemáticos, materialización que muchas veces se manifiesta en un modelo matemático, esta interacción conduce a la apropiación conceptual de los objetos matemáticos. (Kanashiro y Oviedo, 2012).

Lo señalado en el párrafo anterior es un proceso en el cual el alumno debe ser involucrado desde mucho antes de que tenga que enfrentar los modelos propios de la Programación Lineal. Este proceso se puede iniciar formalmente desde que el alumno trabaja con las ecuaciones lineales, dado que se le pueden plantear problemas que se resuelven mediante estas ecuaciones, ya aquí se manifiesta el cambio de registro semiótico, cuando el alumno transfiere la semiótica literal del enunciado del problema a la semiótica algebraica expresada en la ecuación, la cual representa el modelo matemático, para lo cual tiene que hacer uso del lenguaje matemático adecuado. (Radford, 2002).

Este proceso continúa cuando el alumno trabaja con los sistemas de ecuaciones lineales, pero para lograr la correcta formación del alumno, es necesario que se enfrente a la resolución de problemas que se modelan a través de estos sistemas, pues aquí intervienen los elementos descritos en el párrafo anterior, y además se puede incorporar el registro geométrico, lo cual resulta fundamental para crear la base cognoscitiva para la comprensión de los problemas de Programación Lineal. (Barquero, Bosch y Gascón, 2011)

Cuando el alumno puede materializar la solución de los sistemas, en el caso de dos ecuaciones con dos variables y tres ecuaciones con tres variables, con el significado geométrico que se manifiesta en la intersección de las rectas en el primer caso, y la intersección de los planos en el segundo, el hecho de poder representar el objeto matemático en diferentes registros de representación semiótica, esto es, literal, algebraico y gráfico, le permite afianzar su lenguaje matemático y su formación conceptual. (Radford, 2002).

Además de lo referido a los sistemas de ecuaciones lineales, para que el alumno esté en condiciones de trabajar con los problemas de programación lineal, también debe trabajar con la solución gráfica de las desigualdades, (Mariotti, 2009; Radford y Schubring, Seeger, 2011), dado que la representación de la solución de la desigualdad en diferentes registros de representación semiótica, le dará al estudiante una comprensión más completa de lo que significa la solución de una desigualdad.

A continuación se ilustraran los planteamientos realizados mediante un ejemplo sencillo de manufactura para obtener una ganancia máxima: Un pequeño fabricante de zapatos produce dos estilos de zapatos: zapatos de agujetas y mocasines. Utiliza dos máquinas en el proceso: una máquina cortadora y una máquina de coser. Cada tipo de zapato requiere 15 min por cada par en la cortadora. Los zapatos de agujetas requieren 10 min de costura por par y los mocasines requieren 20 min de costura por par. Como el fabricante sólo quiere contratar un operador por máquina, cada proceso está disponible sólo por 8 h al día. Si la ganancia es de 15 dólares por cada par de zapatos de agujetas y 20 dólares por cada par de mocasines. ¿Cuántos pares de cada tipo debe producir por día para tener una ganancia máxima?

Resolución

Es oportuno organizar los datos en una tabla, expresando el tiempo en la misma unidad, en este caso en horas, como se ilustra en la figura 1:

Figura 1.

	Zapatos de Agujeta	Mocasines	Tiempo Disponible
Tiempo en la Cortadora(Horas)	¼	¼	8
Tiempo en la Máquina de coser(Horas)	1/6	1/3	8
Ganancia	$ 15	$20	

En el tránsito de la semiótica literal a la algebraica, se le asigna x a la cantidad de zapatos de agujeta fabricados por día y se le asigna y a la cantidad de mocasines fabricados por día, siguiendo el proceso de obtener la semiótica algebraica, se requiere expresar el objetivo del problema en esta semiótica, como cada par de zapatos de agujeta generan 15 dólares de ganancia y cada par de mocasines 20 dólares, la ganancia total se materializa algebraicamente como: $P = 15x + 20y$, función que en el lenguaje de la Programación Lineal se denomina función objetivo.

No es difícil para el estudiante comprender en el lenguaje literal que existen restricciones de tiempo que limitan la cantidad de zapatos a producir, pero aunque para el maestro puede resultar evidente, el cambio de registro nunca resulta evidente para el alumno que no tiene un entrenamiento adecuado en esta actividad.

En el presente caso el hecho de que solo hay 8 horas disponible tanto en la cortadora como en la cosedora y que por supuesto no tiene sentido hablar de una cantidad negativa de zapatos producidos, la semiótica algebraica que representa las restricciones del problema se representa como:

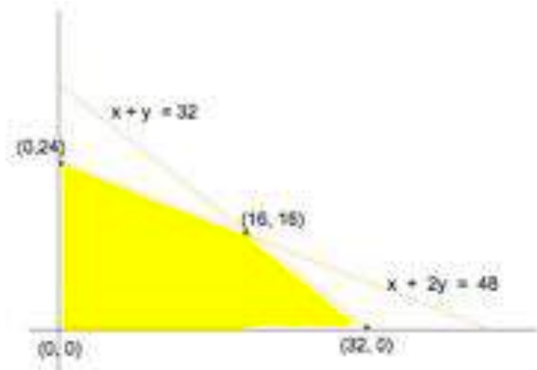
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \le 8 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Donde para quitar los denominadores se multiplica la primera desigualdad por 4 y la segunda por 6, obteniendo:

$$\begin{cases} x + y \le 32 \\ x + 2y \le 48 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La solución gráfica de este modelo se presenta en la figura 2, donde los puntos que satisfacen todas las restricciones planteadas son los que están en la región sombreada.

Figura 2.



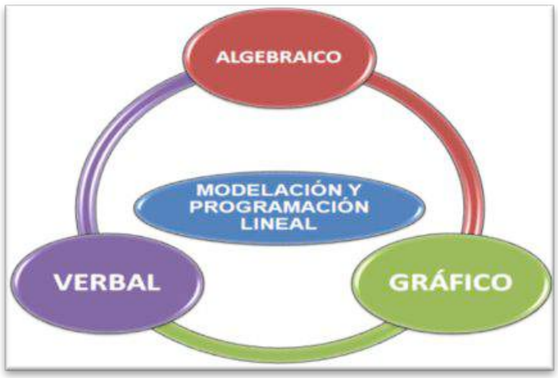
Como se puede apreciar la figura 2 materializa, mediante una semiótica gráfica, la solución del sistema de restricciones planteado, donde se tiene que el valor que da el máximo a $P = 15x + 20y$, y a la vez satisface las restricciones planteadas, está en uno de los vértices, por lo que evaluando P en cada uno de los vértices se obtiene para (16, 16) el mayor valor de $P = 560$.

Si el alumno comprendió el cambio del registro literal en que aparece el problema original, al registro algebraico, no debe tener problema en poder interpretar que al obtener el máximo de la función que representa las ganancias en el punto (16, 16) la respuesta al problema es que se deben fabricar la misma cantidad de cada tipo de zapato para obtener la mayor ganancia posible bajo las restricciones planteadas.

El alumno que no comprende con claridad por qué los puntos que satisfacen, por ejemplo la desigualdad: $x + y \leq 32$ son los puntos que están a la izquierda de $x + y = 32$, indudablemente tendrá dificultades para comprender el método de trabajo para resolver el problema de la Programación Lineal.

Como se puede apreciar en el ejemplo mostrado, los cambios de registro semiótico y el manejo del lenguaje matemático juegan un papel fundamental para llegar al modelo que representa el problema, que en definitiva no es más que el propio problema presentado en una semiótica analítica. La figura 3 ilustra los cambios de registro que han sido efectuados.

Figura 3.



En los estudios realizados hasta el momento se ha podido constatar que las mayores dificultades que presentan los estudiantes en la modelación de los problemas de la Programación Lineal, se presentan en los cambios de registros semióticos, en particular del literal a otro tipo de registro, lo que confirma además que los estudiantes tienen dificultades con el manejo del lenguaje matemático.

Conclusiones

Dado que la Matemática es medio y objeto en sí misma, y que se aprende Matemática realizando las actividades a través de la cual esta ciencia se desarrolla, la formación del estudiante en el trabajo matemático se complejiza considerablemente si no se logra que los estudiantes se apropien de los contenidos que enfrenta en las diferentes etapas de su tránsito por el sistema escolar.

No obstante, conocer cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en un momento dado, posibilita remediar la situación desfavorable que se presente en un momento dado, cosa que es necesario hacer, ya que no es posible que el estudiante regrese a los niveles precedentes para completar la formación requerida en un nivel superior.

Referencias bibliográficas

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq., São Paulo*, 15(1), 1-28.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales, *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352.

García, B. Ruiz G. (2006). La modelización matemática y el problema de La articulación de la matemática escolar. *Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. Educación Matemática*, 18(2), 52-61,

Kanashiro A. M., Oviedo L. M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education journal*, 41, 427– 440.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265-280.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (2011). Signifying and Meaning-Making in Mathematics Thinking, Teaching and Learning: Semiotic Perspectives. *Educational Studies in Mathematics, Special Issue,* 77(2-3), 149-397.

Villa-Ochoa, J., Bustamante, A., Berrio, M., Osorio, J., & Ocampo, D. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159-180.