COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Valeria Randolph, Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
valerandolphveas@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Palabras Clave: modos de pensamiento, números complejos
Key words: modes of thought, complex numbers

RESUMEN

La investigación evidencia diferentes formas de pensar que estudiantes de enseñanza media (16-18 años) y superior (19 años en adelante) muestran en relación al concepto de Números Complejos, e indaga en las articulaciones entre estas distintas maneras de comprender el concepto. Se utiliza como marco teórico los Modos de Pensamiento que sitúa tres modos de pensar: Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE). A partir de un estudio histórico epistemológico, se levantan los tres modos de comprender el Sistema de los Números Complejos: como el plano complejo (SG), como expresión algebraica de la forma a+bi, con a y b números reales (AA) y como estructura algebraica de cuerpo, tal que $i^2 = -1$ (AE). Bajo el estudio de casos como diseño metodológico, se aplica un cuestionario de actividades que da cuenta de elementos matemáticos que facilitan el tránsito de un modo de pensamiento a otro para la comprensión profunda del concepto.

ABSTRACT

The research evidences different ways of thinking that secondary (16-18 years) and university (19 years and older) students show in relation to the concept of Complex Numbers, and explores the articulation between these different ways of understanding the concept. It is used as theoretical framework the Modes of Thought that proposes three modes of thinking: Synthetic-Geometric (SG), Analytic-Arithmetic (AA) and Analytic-Structural (AE). From an epistemological study, the three ways of understanding the Complex Numbers are proposed: as the complex plane (SG), as algebraic expression of the form a + bi with a and b real numbers (AA) and as algebraic structures of field such $i^2 = -1$ (AE). Under the case study as methodological design, activities questionnaire is applied that reports mathematical element that facilitate the transition from one Mode of Thought to another, for deep understanding of the concept.

Antecedentes de la investigación

La preocupación por estudiar la comprensión del Sistema de los Números Complejos surge a partir de algunos antecedentes que presenta el currículum chileno y desde lo que reportan algunas investigaciones de matemática educativa a nivel latinoamericano.

Los Números complejos en la matemática escolar

El concepto de Números Complejos ha sido integrado recientemente el año 2013 al currículum escolar chileno, convirtiéndose en un contenido obligatorio para los estudiantes del nivel secundario (16-18 años). Desde lo que presenta el Ministerio de Educación (2009), la forma en que se propone trabajar el Sistema de los Números Complejos favorece un enfoque analítico, dejando de lado características geométricas y estructurales, que frenan la posibilidad de lograr mayores niveles de abstracción y de entenderlo como un sistema numérico. En el libro de texto de matemática para el nivel tercer año medio, que entrega gratuitamente el Ministerio de Educación a los estudiantes (Saiz y Blumenthal, 2013), se evidencian algunas inconsistencias como que $i = \sqrt{-1}$ signifique que $i^2 = -1$, y que no se exprese que los Números Complejos ya no se pueden ordenar como los Números Reales. Incluso en una de las páginas finales de la unidad, se propone un ejercicio que induce a pensar en el sucesor de un número complejo.

Los números complejos desde la matemática educativa

Por otro lado, la preocupación por la enseñanza y aprendizaje del concepto no es local. Otras investigaciones a nivel latinoamericano (Bagni, 2001; Martínez-Sierra y Antonio, 2009) han dedicado esfuerzos al diseño de situaciones para que los estudiantes acepten los Números Complejos. Martínez-Sierra y Antonio (2009) dan evidencia que estudiantes del primer grado del nivel medio superior, pudieron operar con los Números Complejos, a pesar de haber insistido en que las raíces cuadradas de números negativos no existían. Mientras que Bagni (2001) reporta un estudio en el que examina la efectividad de la introducción de los números imaginarios mediante un ejemplo histórico, en estudiantes de 16 y 18 años. En dichas investigaciones los estudiantes, en su mayoría, aceptaron la aparición de los números imaginarios en la resolución de una ecuación cúbica y no así en la ecuación cuadrática, en la que las cantidades imaginarias son parte de la solución.

En base a esto, y considerando que la definición del nuevo sistema contrapone ideas arraigadas en los aprendices como aceptar que ahora sí se puede obtener un número al cuadrado cuyo resultado es un número negativo, y que presenta la necesidad de alcanzar niveles superiores de abstracción, nos preguntamos: *¿Cómo están comprendiendo los estudiantes de enseñanza media y superior el concepto de Números Complejos?* y *¿Cómo es posible que los estudiantes de enseñanza media logren una comprensión profunda del Sistema Numérico?*

Antecedentes históricos epistemológicos del sistema de los números complejos

En relación a la búsqueda de la comprensión profunda del Sistema de los Números Complejos, surge la necesidad de describir su epistemología.

Según Artigue y Deledicq (1992) hay cuatro momentos cruciales en la epistemología de los Números Complejos: (a) la aparición de las cantidades imaginarias en algoritmos operatorios; (b) el funcionamiento como herramienta y el encuentro con los logaritmos; (c) las representaciones geométricas; y (d) la construcción algebraica.

Momento 1: *Aparición de raíces cuadradas de números negativos en el estudio de ecuaciones*. Desde el primer siglo después de Cristo se pueden encontrar vestigios de la aparición de raíces cuadradas de números negativos. Sin embargo, éstas comenzaron a ser utilizadas recién en los siglos XVI y XVII, en trabajos de algebristas italianos (Ferrari, Cardano y Bombelli), sobre técnicas de resolución de ecuaciones de tercer grado, que consistían en reducir la ecuación, con un cambio de variable, a una ecuación de segundo grado (que se sabía resolver). Esta técnica, llamada técnica de Cardano, se utilizó en situaciones donde se obtenían soluciones reales para la ecuación de grado dos y luego se extendió a las ecuaciones que tenían como soluciones raíces cuadradas de números negativos (se transitaba por el dominio complejo en la ecuación de grado dos, pero se obtenía una solución real para la ecuación de tercer grado). Bombelli en su tratado "Álgebra" de 1572 introdujo una notación para las raíces negativas: "*piu di meno*" y "*meno di meno*", que sirvió para comenzar a operar con ellas (Artigue y Deledicq, 1992).

Momento 2: *Las raíces cuadradas de números negativos y su encuentro con integrales y logaritmos en el inicio de la variable compleja.* Las expresiones anteriores, no consideradas como números, permanecieron por mucho tiempo como objetos sintácticos sin ningún significado. Sin embargo algunos matemáticos comenzaron a utilizarlas generando un gran avance en el desarrollo del cálculo y el álgebra. Las cantidades "imaginarias" fueron más allá del contexto único de las ecuaciones a otros campos como la trigonometría (Moivre en 1722). También comenzaron a verse como variables autónomas en expresiones funcionales y en los logaritmos, simplificando cálculos. Así, las cantidades imaginarias se convirtieron en instrumentos necesarios para la formulación de resultados importantes del siglo XVIII, tal como el Teorema Fundamental del Álgebra (Artigue y Deledicq, 1992).

Momento 3: *representación geométrica de las raíces cuadradas de números negativos.*

Fue en el siglo XIX que las cantidades imaginarias adquirieron su condición actual de objetos matemáticos legítimos. Esto se logró a través de la interpretación geométrica propuesta por Wessel, Argand, Gauss, y mediante las construcciones algebraicas de Cauchy y Hamilton, que tuvieron un alcance importante para cambiar su estatus a Números (Complejos) y para el surgimiento de una teoría de funciones de variable compleja (Kline, 1972). La representación geométrica de los Números Complejos como puntos del Plano Complejo tiene sus primeras citas en los trabajos de 1797 de C. Wessel y de 1806 de J. Argand. Se introdujo el eje de los imaginarios, asociando la raíz de -1 como una unidad perpendicular a 1. Argand entendió a los complejos como líneas dirigidas (Artigue y Deledicq, 1992), idea que antecede a los vectores.

Momento 4: *consideración como el Sistema de los Números Complejos y su construcción algebraica.* Hamilton, en 1833 realizó la primera definición algebraica rigurosa para los Números Complejos, entendiéndolos como pares ordenados de Números Reales. Al respecto Hamilton escribe: "In the theory of single numbers, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a posible extraction, or a real couple (-1,0) namely (…) the principal square root of the couple (-1,0).

Therefore (…) for any couple (a_1, a_2) whatever; $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$" (Hamilton, 1937 citado en Martínez-Sierra y Benoit Poirier, 2008). Más tarde, Cauchy en 1847 realiza una definición algebraica abstracta, en términos de las clases de congruencia de polinomios reales.

Todos los aspectos mencionados de manera resumida ponen de relieve distintas formas de pensar los Números Complejos en el transcurso de su conceptualización: por un lado el pensamiento analítico y algebraico (en los momentos 1, 2 y 4) y, por otro, un pensamiento geométrico (en el momento 3). En base a estos antecedentes y a la búsqueda de la comprensión profunda del Sistema Números Complejos, se considera entonces Los Modos de Pensamiento como marco teórico para esta investigación.

Los modos de pensamiento

Los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000; Parraguez, 2012) es un marco teórico de corte cognitivo, que propone explicitar los modos de pensar teóricamente un objeto matemático. Se caracteriza por dar elementos para comprender lo que es un concepto. Se origina en el seno del Álgebra Lineal y su razón de ser es la superación del obstáculo epistemológico producido al confrontar el aspecto geométrico (pensamiento práctico) con el aspecto teórico (pensamiento teórico). Esto da origen a tres modos de pensamiento:

- Modo Sintético-Geométrico (SG): la mente trata de describir directamente el objeto. Utiliza la representación gráfica, teniendo visualmente puntos, líneas, planos, figuras y cuerpos geométricos.
- Modo Analítico-Aritmético (AA): los objetos se dan mediante relaciones numéricas o fórmulas. Por ejemplo el vector pasa a ser un par ordenado, las rectas ecuaciones lineales.
- Modo Analítico-Estructural (AE): se comprende por sus propiedades. Los objetos son representados por las propiedades que poseen o los axiomas que permiten explicarlos.

Así, la teoría caracteriza estos tres modos de pensamiento esperando una articulación entre ellos, lo que permitirá la *comprensión profunda* de objetos matemáticos por parte de los aprendices. La problemática fundamental, en la cual se enmarca esta teoría, es alcanzar niveles superiores de abstracción para enriquecer el aprendizaje del Álgebra, a través de la conexión entre los distintos Modos de Pensamiento (Parraguez, 2012).

A partir del estudio histórico epistemológico de los Números Complejos, levantamos tres formas de comprenderlos: (i) modo Sintético-Geométrico (SG) como el Plano Complejo, donde $i = (0,1)$, (ii) modo Analítico-Aritmético (AA) como expresión de la forma $a + bi$ y (iii) modo Analítico-Estructural (AE) como la estructura algebraica de cuerpo tal que $i^2 = -1$.

Considerar al Sistema de los Números Complejos como una expresión algebraica en el contexto en que surge, es relevante para aceptar su existencia como objeto matemático (AA), tal como los algebristas en la resolución de las ecuaciones cúbicas. Pero también se considera importante entender a los Números Complejos como un Sistema con estructura de cuerpo (AE), donde se cumplen propiedades y axiomas que nos permiten entenderlos y trabajar con ellos, tal como $i^2 = -1$. Además, considerar al Sistema en su carácter geométrico, vale decir, como el Plano Complejo (SG), es relevante para poder transitar entre los modos AA y AE, y para comprender sus propiedades e incluso sus operaciones.

Figura 1: Modos de pensar el Sistema de los Números Complejos.

Metodología

Se trata de una investigación del tipo cualitativa, con una postura epistemológica hermenéutica centrada en el objeto matemático. Se utiliza el Estudio de Casos Múltiple (Stake, 2010) como método de investigación. A partir de éste, se definen 5 Casos de estudio, según criterios teóricos y en relación a los objetivos (*Tabla 1)*.

Para los casos de estudio se construyen dos cuestionarios que consideran en su diseño los Modos de Pensar el Sistema de los Números Complejos (SG-AA-AE) y algunos elementos matemáticos a priori del tránsito entre dichos modos, sugeridos desde la epistemología. La necesidad de realizar cuestionarios diferentes se justifica en los distintos niveles de conocimiento matemático que poseen los informantes, que varían desde enseñanza media a estudiantes de magíster y doctorado en matemáticas.

Los cuestionarios están construidos por 2 preguntas abiertas iniciales y 10 actividades, comunes. Cada una de las actividades planteadas guarda relación con evidenciar: **(a)** el(los) modo(s) de pensamiento que es (son) privilegiado(s) por los informantes; y/o **(b)** los elementos matemáticos que utilizan, dichos informantes, para transitar de un modo de pensamiento a otro. Esto con el fin de dar cuenta acerca de la articulación de los modos SG, AA y AE para la comprensión profunda del objeto matemático en estudio. La validación de los cuestionarios se realizó a través de la consulta a expertos. El panel estuvo constituido por una doctora y un magíster en Didáctica de la Matemática, dos magísteres en matemáticas y dos profesores de matemática de enseñanza media, del Grupo Cognitivo del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Tabla 1: Casos de estudio de la investigación.

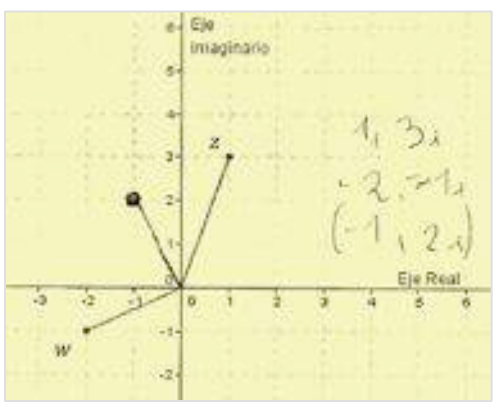
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
5 estudiantes 3° Enseñanza Media. I1,I2,I3,I4,I5	6 estudiantes 4° Enseñanza Media. I6,I7,I8,I9,I10,I11	4 estudiantes de 4° año de Pedagogía en Matemáticas. I12,I13,I14,I15	2 estudiantes de 4° año de Licenciatura en Matemáticas. I16,I17	1 estudiante de Doctorado y 2 de Magíster en Matemáticas. I18, I19,I20
Cuestionario A		Cuestionario B		

Análisis y resultados

El análisis de los cuestionarios fueron realizado desde los Modos de Pensamiento propuestos y poniendo especial interés en las conexiones que se realizan entre los modos. Aquí presentamos los principales hallazgos para los estudiantes de Enseñanza media (Casos 1 y 2) y para los de Enseñanza Superior (Casos 3,4 y 5).

Los informantes de los Casos 1 y 2 se sitúan en un modo de pensar AA. Entienden a los Números Complejos como una "*fórmula*". Los operan como binomios algebraicos y replican errores del álgebra. Además, desconocen el modo AE, por lo que sólo tienen la idea de conjunto numérico. En cuanto a SG, no suman ni multiplican Números Complejos en el Plano Complejo. Creemos que esto se debe en gran medida a que no conocen las coordenadas polares que posibilitan el paso al plano. En la *Figura 2*, se muestra cómo el informante 11 (I11) privilegia AA y no SG, cuando se le pregunta por la suma de z y w en el plano complejo (SG). Además tiene confusión con las notaciones.

Figura 2: Respuesta de I11 a la actividad 3 del cuestionario.



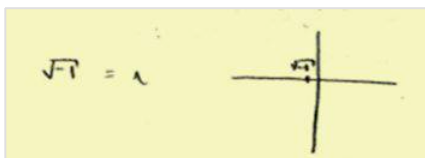
La *Figura 3*, también da cuenta de que los estudiantes no logran situarse en SG y sólo lo hacen desde AA, no logrando resolver con éxito el problema. En este caso el enunciado decía: "*Sea* $z \in \mathbf{C}$*, ¿qué números cumplen con* $|z| = 5$*?*". 10 de los 11 informantes (de los casos 1 y 2) no lograron resolver y sólo mostraron casos particulares.

Figura 3: Respuesta de I1 a la actividad 2 del cuestionario.

$$5,0 = \sqrt{5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$0,5 = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$4,3 = \sqrt{\underset{16+9}{4^2+3^2}} = \sqrt{25} = 5.$$
$$3,4 = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Un resultado aún más relevante para los Casos 1 y 2, es que al resolver actividades con Números Complejos, los estudiantes piensan *desde los Números Reales*. En la *Figura 4* vemos cómo ante la pregunta "*¿qué representan geométricamente las potencias de i?*" el informante 3 sitúa a $i = \sqrt{-1}$ en el eje real.

Figura 4: Respuesta de I3 a la actividad 6 del cuestionario.



También en la actividad 7, cuando se preguntó: "*¿qué figura esperarías si se grafican ahora las raíces de $z^4 = -1$?*" fue posible evidenciar la idea arraigada en los estudiantes de que cualquier número elevado al cuadrado (o potencia par) es siempre positivo.

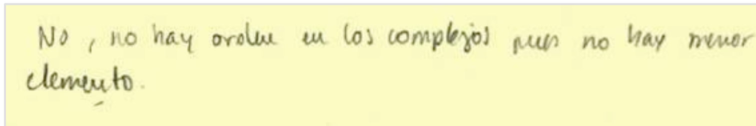
Figura 5: Respuesta de I3 a la actividad 7 del cuestionario.

todo número elevado a un número par es igual a un número positivo, independiente de su signo.

Para los estudiantes de Enseñanza Superior, en los Casos 3 y 4, fue privilegiado el modo AA para resolver la mayoría de las actividades. Si bien estos informantes logran realizar algunas conexiones como SG-AA y

AA-AE, no logran alcanzar los modos SG y AE. En particular, los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas mostraron justificaciones que no obedecen a su nivel, como se muestra en la *Figura 6.*

Figura 6: Respuesta de I16 a la pregunta 5: "*¿se pueden ordenar los números complejos?*"



No, no hay orden en los complejos pues no hay menor elemento.

Por su parte, los futuros docentes de matemática, no alcanzan SG. E incluso no recordaron como realizar la división $(1-i):(2+i)$. Lo que es preocupante dado que enseñarán prontamente el concepto.

En cuanto al Caso 5, los estudiantes de postgrado, alcanzan los tres modos de pensar. Privilegian el modo SG en varias actividades para responder y muestran tránsitos como AA-AE-SG, en el cálculo de las raíces quintas de -1. Principalmente para lograr los tránsitos, utilizan la notación $re^{i\theta}$, que en principio no consideramos. Los informantes evidenciaron que con esta notación es más natural transitar hacia SG y ver la dinámica de las operaciones de los Números Complejos en el plano.

Conclusiones

A la luz de los resultados, se evidencia que los estudiantes de enseñanza media no están comprendiendo profundamente el Sistema de los Números Complejos. Más aún, sólo están trabajando el modo analítico-aritmético. Para lograr mayores niveles de abstracción e ir en vías de una comprensión cabal, se necesitan realizar actividades que promuevan el tránsito en primer lugar AA-SG, pero también el tránsito AA-AE. Así no sólo se estará trabajando las operaciones entre números, sino las propiedades, y teoremas que explican la razón de ser del sistema numérico. Según lo que mostraron los informantes del Caso 5, es necesario que los estudiantes conozcan las coordenadas polares. Éste es un elemento matemático que permitirá articular los modos de pensamiento, tal como ellos lo hacían.

Con lo obtenido de esta investigación esperamos realizar una situación de aprendizaje para los estudiantes de secundaria. Y también dar continuación a la investigación desde la formación de profesores. Por último, las evidencias con sustento teórico que se proporcionaron en esta investigación, contribuyen al desarrollo de la teoría de los Modos de Pensamiento en otros ámbitos distintos al Álgebra Lineal, como lo es el estudio de los Sistemas Numéricos, sin descuidar por su puesto, los elementos principales de la teoría.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. & Deledicq, A. (1992). Quatre etapes dans l'histoire des nombres complexes: quelques commentaires epistemologiques et didactiques, *Cahier DIDIREM 15*, IREM Paris 7.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *(4)1*, 45-61.

Kline, M. (1972).*El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Martínez-Sierra, G., & Antonio, R. (2009). Una construcción del significado de número complejo y su operatividad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 22*. (1033-1039). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez-Sierra, G., & Benoit Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education*, *2(2)*, 16. (201-208).

Ministerio de Educación, (2009). Formación General. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media (pp. 145 -194), Chile.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento*. Didáctica de la Matemática. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica

Saiz, O., & Blumenthal, V. (2013). *Matemática 3° medio, texto para el Estudiante*. Editorial Cal y Canto, Edición especial para el Ministerio de Educación de Chile.

Sierpinska, A. (2000). One some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra. En Dorier, J. L. (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.