REVISTA EMA
1998, VOL. 3, Nº 3, 221-240

EL MIC COMO HERRAMIENTA PARA EXPLORAR EL SIGNIFICADO Y SENTIDO DEL OPERADOR MULTIPLICATIVO[1]

ARIEL ARTETA

En este artículo se presentan algunas reflexiones sobre el tema de los sistemas de representación y su relevancia en la educación matemática. Con base en estas reflexiones, se describe en detalle el MIC[2] *como un sistema de representación que permite explorar las concepciones de los estudiantes sobre algunos aspectos del conocimiento matemático. Se identifica un problema en el área de las estructura multiplicativa y se presenta una experiencia que se realizó a través de la utilización del MIC con un grupo de niños. Aunque no es posible asegurar la validez de los resultados obtenidos en esta experiencia, consideramos que estos resultados muestran que es posible utilizar el MIC como herramienta de exploración de las concepciones de los estudiantes sobre las estructuras multiplicativas.*

INTRODUCCIÓN

La construcción de la comprensión en matemáticas tiene lugar cuando se da una interacción entre las experiencias matemáticas concretas que vive el individuo y la representación interna (estructuras cognitivas) que él tiene de su conocimiento matemático previo. El progreso en la construcción del conocimiento matemático es producto de la asimilación y acomodación de estas estructuras cognitivas a esas experiencias matemáticas concretas.

Para comprender esta interacción se hace necesaria una herramienta o soporte estructurado y organizado que relacione el mundo de las experiencias físicas de los niños en el contexto aritmético con el mundo de los constructos mentales.

Para el caso del sistema decimal, como objeto de estudio y como estructura numérica, es necesario abordar los procesos de conceptualización y

1. Este artículo fue editado por Cristina Carulla y Pedro Gómez investigadores de "una empresa docente".
2. Es el minicomputador de Papy. Ha sido utilizado en variadas y ricas experiencias en el Colegio Refous de Bogotá, Colombia. Estos trabajos han sido dirigidos por Roland Jeangros con el apoyo del Grupo Nicosuba y compartidos por docentes de escuelas normales en los encuentros septembrinos que organiza el colegio.

simbolización desde “un sistema de reglas” o desde un lenguaje que, a partir de un soporte material estructurado que el estudiante pueda manipular, devuelva a los objetos un carácter operatorio que permita ver la relación entre ellos. Este conjunto de reglas, generalmente explícitas, que determinan las operaciones con los objetos y relaciones entre ellos constituye un sistema de notación. Kaput (1992) introduce este concepto

> […] como un sistema de reglas (i) para identificar o crear caracteres; (ii) para operar sobre ellos; (iii) para determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia). De esta forma, los caracteres no tiene que ser sucesiones de letras o números y pueden incluir gráficas y diagramas o inclusive objetos físicos […] (p. 523).

En nuestro contexto escolar, además de los sistemas de notación utilizados tradicionalmente dentro del salón de clase, son conocidos el sistema de notación de los bloques multibase de Dienes y el de regletas Cussinaire. Estas últimas constituyen en su conjunto un modelo apropiado para representar el sistema decimal y su carácter operatorio (estructura aditiva y multiplicativa) mediante la referencia a la longitud y al color convencional de las mismas. En este artículo centramos nuestra atención en el sistema de notación que usa el MIC, como herramienta o soporte material para representar, mediante acciones, objetos del sistema decimal y situaciones problema que engloban estructuras multiplicativas.

El propósito central de este artículo es el de presentar el MIC como sistema de representación que permite explorar las concepciones de los estudiantes sobre la estructura multiplicativa. Para ello, presentamos inicialmente algunas ideas relacionadas con el tema de sistemas de representación, para luego describir el MIC con base en esas ideas. En seguida, se identifica una problemática relacionada con las concepciones de los estudiantes con respecto a la estructura multiplicativa. Finalmente, se describe una experiencia realizada con un grupo de estudiantes, en la que se utilizó el MIC para explorar estas concepciones.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Representaciones externas

El término *representación* tiene numerosos significados en el campo de la psicología cognitiva. Nuestra consideración se sitúa sobre dos de sus acepciones

> [el término representación] se usa para designar los artefactos, medios notacionales que se utilizan para simbolizar externamente hechos, fenómenos, lenguaje.
>
> [...] se usa para designar los esquemas, marcas, códigos, rasgos, imágenes [...] internos que usamos en la interacción con el mundo y con nosotros mismos. (Tolchinsky, 1993, p. 49)

Conjugando estas acepciones, abordamos el concepto de representación desde los aportes que ofrece el enfoque cognitivo de la educación matemática. Nos referimos a la capacidad que tienen las personas de usar herramientas para comprender (pensar y comunicar) las ideas matemáticas, a partir de la representación de su mundo de experiencias y de la interpretación de las mismas.

> Para pensar sobre las ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas tomando la forma de símbolos escritos, dibujos, u objetos físicos [...]
>
> Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente de manera que permita a la mente operar sobre ellas. (Hiebert y Carpenter, 1992)

En esta misma dirección, el concepto de representación supone: (a) una situación física externa, (b) un lenguaje, (c) constructos matemáticos formales y (d) representaciones cognitivas internas (Goldin, 1993).

Estas consideraciones del concepto de representación comprometen dos entidades: (a) un mundo de operaciones físicas observables y (b) un mundo de operaciones mentales, que es siempre hipotético (Kaput, 1992). La articulación de estos mundos representa una dualidad funcional y hablamos de dos entes relacionados: (i) el objeto representado (ii) y el objeto representante (la representación). En el caso de una representación particular deben explicitarse estos elementos: los objetos representados y los representantes, aspectos del mundo representado que se representan, aspectos del mundo representante que realizan la representación y correspondencia entre ambos mundos (Kaput, 1992).

Representaciones internas

Para Moreno y Sacristán (1996, pp. 83-84) las representaciones internas (o mentales) constituyen otra forma de representar el conocimiento (imágenes conceptuales) y de estados transitorios en los procesos de construcción de significado referido a un sistema conceptual.

> Estas representaciones internas difícilmente pueden ser comunicadas o desarrolladas sin un soporte externo (lenguaje, diagrama sobre el papel, imagen visual sobre el monitor de la computadora, etc). Es decir, se necesita el soporte semiótico que suministran las representaciones externas para que el proceso comunicativo, incluido el proceso social de negociación de significados, tenga lugar. (p. 84)

El soporte semiótico del MIC es de naturaleza sintáctica-semántica y está caracterizado por el uso de signos (símbolos, caracteres, registros) que vehiculizan las representaciones simbólicas. El soporte semiótico compromete tres elementos: un símbolo, su objeto (lo que simboliza) y un sujeto que interpreta la relación y le da sentido (Peirce, 1955, citado en Tolchinsky, 1993, p. 136).

Apoyado en este soporte, la representación de un objeto en MIC trata de mostrar una "similitud significativa" entre el referente y su representación para que el sujeto construya la comprensión y la dote de sentido y significado.

Transparencia de las representaciones externas

En el estudio sobre la configuración y búsqueda de solución a problemas aditivos mediante representaciones simbólicas manipulativas, Maza (1995) plantea que el uso de un modelo notacional particular, por ejemplo bloques multibase de Dienes o regletas Cuisinaire, permite al resolutor "hacer visible" el referente y su representación. Lo que se pretende, según el mismo autor, es que la representación manipulativa externa cualifique la "noción de parecido" con el referente o con sus elementos y actúe como filtro para que los objetos, propiedades y relaciones de los elementos referenciados se "hagan visibles".

La cualidad de "parecido" o "análogo" del referente con la representación misma y, al tiempo, la revelación de referentes específicos definen las transparencias de una representación externa (Maza, 1995, p. 132).

No obstante, esta cualidad de las representaciones externas no es suficiente para garantizar significado en las actividades e interacciones que promueven el aprendizaje aritmético. Esta se ve atravesada por elementos irrelevantes que comprometen las ideas previas que posee el niño, fruto de su experiencia escolar o extraescolar, del lenguaje y del contexto social (García y Rodríguez, 1988, pp. 161-166).

La noción de transparencia de una representación externa manipulativa y su transferencia hacia la configuración y búsqueda de solución de una *situación-problema*, está ligada a la creación de una metáfora o analogía entre la situación inicial planteada y la situación problema que representa el estudiante.

A la luz de estas consideraciones teóricas, y para el propósito de este artículo, vemos el MIC como un sistema de representación bajo una doble dimensión: (a) como herramienta o instrumento de actividades físicas estructuradas y (b) como signo o instrumento de la actividad mental. Ambas instancias se articulan a través de una función de mediación (en este caso analogía).

EL MIC COMO SISTEMA DE REPRESENTACIÓN EXTERNA

Para explicitar las ideas que potencian los sistemas de representación externa y ver su utilidad en el aprendizaje de las estructuras matemáticas, es necesario poder expresar los conceptos matemáticos a través de representaciones simbólicas. En general las representaciones matemáticas pueden ser externas e internas.

Las representaciones externas son las producciones que se colocan "en lugar de" los objetos de un sistema de notación o de los elementos de un problema para configurar la búsqueda de una solución (Maza, 1995). Generalmente un tipo de representación externa conlleva a un modelo manipulativo. Para nosotros el MIC es un tipo de representación externa ligado a un modelo manipulativo.

La forma o soporte concreto manipulativo que presentamos, es una adecuación de la propuesta original de Papy. Se trata de una placa cuadrada en madera o en cartón, dividida en cuatro regiones cuadradas y congruentes, cada una de las cuales tiene uno de los colores de las regletas Cuisinaire: blanco (b), rojo (r), carmín (c) y marrón (m) (ver Figura Nº 1). Los valores asociados son: 2^0 para el blanco, 2^1 para el rojo, 2^2 para el carmín y 2^3 para el marrón.

marrón $\mathbf{2^3}$	**carmín** $\mathbf{2^2}$
rojo $\mathbf{2^1}$	**blanco** $\mathbf{2^0}$

Figura Nº 1. Placa de MIC

El modelo facilita la representación externa del conjunto de objetos básicos del sistema decimal, {0, 1, 2, 3,..., 9}. Para ello se utilizan colores convencionales, la manipulación de objetos concretos, (fichas de parqués, tapas, etc.) y la composición aditiva de los números para configurar un sistema de signos o cuerpo simbólico. Por ejemplo, el número 3 se representa mediante dos fichas de las cuales una se coloca en (b) y la otra en (r) esto significa que el 3 se descompone en $2^0 + 2^1$ (ver Figura Nº 2).

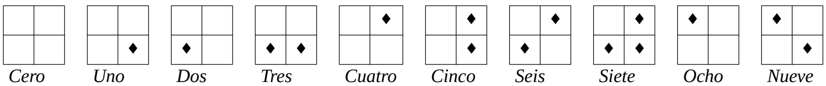


Figura Nº 2. Cuerpo simbólico en el MIC

Lenguaje MIC

La representación externa simbólica en MIC identifica una serie finita de caracteres o clases (Figura Nº 2). Cada clase excepto cero, asocia una marca, inscripción o registro con acciones físicas sobre la placa. La marca compuesta por una, dos o tres fichas colocadas sobre los colores de la placa produce un estímulo visual que genera una imagen. El sujeto debe identificar si alguna marca o inscripción pertenece o no al sistema de representación simbólica (por ejemplo en el sistema de representación simbólica del MIC para una clase no se acepta más de una ficha por color). Para ilustrar el concepto de clase en el MIC se puede ver en la Figura Nº 3 un registro de la clase del número 5. Para lograr un registro en el que se utilizan dos o tres fichas para su representación simbólica, los niños trabajan “a dos manos” con el objeto de comprometer una sola acción para cada clase (e. g. para la clase del 7 toma en la mano derecha dos fichas y en la izquierda una y las coloca en (b), (c) y (r) en la misma acción). De esta forma el intérprete o resolutor de una situación problema tiene la posibilidad de decidir la pertenencia de un registro a determinada clase. Esto conduce, como lo habíamos esbozado anteriormente, a la no ambigüedad entre los caracteres y a una “virtual” disyunción entre clases (ver Figura Nº 3).

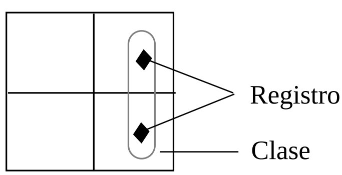


Figura Nº 3

Reglas de transformación

La representación simbólica externa que se muestra en la Figura Nº 4 utiliza dos registros iguales para la misma clase. Esta acción que podría interpretarse como “error notacional” o bien como la utilización de una “palabra” que no es propia del lenguaje MIC, produce una “ambigüedad” que, puede ser evitada o subsanada transformándola y designándole una representación equivalente. Esta situación y otras semejantes llevan a definir cuatro reglas de transformación: R_1, R_2, R_3 y R_4, con sus respectivas inversas: R'_1, R'_2, R'_3, R'_4 como se muestra en la Figura Nº 5.

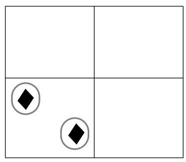


Figura Nº 4. Dos registros iguales para la clase 2

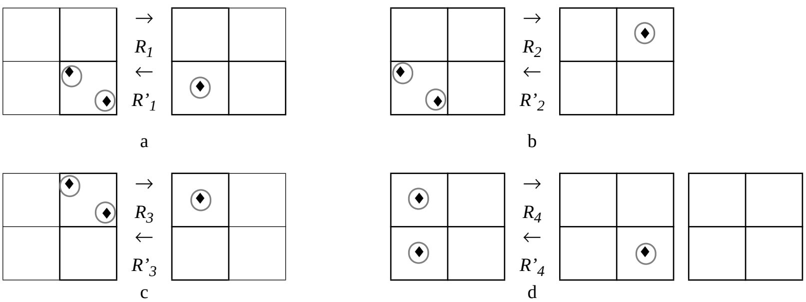


Figura Nº 5. Reglas de transformación

Si, por ejemplo, miramos R_3, dos registros iguales para la clase del 4 se pueden también representar con un solo registro en la casilla marrón. La regla R_4, de la Figura N^{o} 5-d utiliza “placa auxiliar” o placa de los “dieces” (la ficha en (b), de la placa del medio, representa el 10 es decir 2^0 x 10) que se utilizaría en el caso de representar números mayores o iguales a diez. En el estudio, del cual hablaremos más adelante, se trabajó solamente con la placa de las “unidades”.

Objeto y representación

En las representaciones simbólicas externas en MIC hay un símbolo que denomina a un objeto. Estas tratan de articular el objeto representado y el objeto representante (o representación). En lenguaje MIC el objeto representado es el referente —registro o estímulo visual— que identifica a ese objeto; mientras que su representante es la clase o imagen mental que corresponde a la representación (Figura Nº 6).

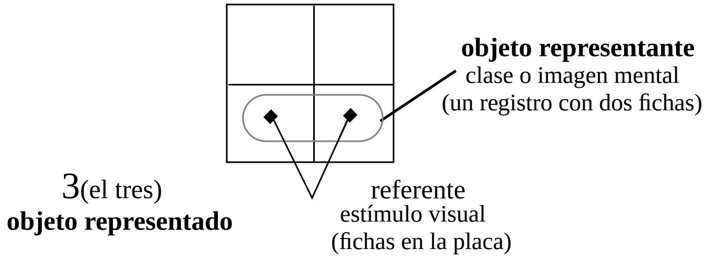


Figura Nº 6. Objeto y representación

En otros sistemas simbólicos de representación, como el caso de los diagramas, el objeto representado corresponde a los términos o elementos reales del referente. Así el objeto denominado “cinco” (5) se representa en éstos con un conjunto cuyo cardinal es cinco objetos (ejemplo, un conjunto de cinco carros).

En este sentido, cuando se utiliza el MIC como sistema simbólico de representación externa, el sujeto (productor-intérprete) se ve abocado a una situación conflictiva que se deriva de lo que el individuo vive con respecto al referente (estimulo visual), su representante (imagen mental) y su sistema o mundo notacional usual (el objeto representado).

Cuando el niño representa un objeto en MIC nos preguntamos: ¿qué imagen mental es la que maneja el niño cuando produce un símbolo para representar un concepto y acceder a su comprensión?

El punto de partida para acceder a la comprensión de un concepto radica en admitir que las personas manejan diferentes representaciones de su mundo (para el caso de un concepto o estructura matemática), influenciadas por la representación inicial que tengan de la nueva información y de la actividad externa o interna que se desarrolle al respecto (Carretero, 1993). Esta representación inicial se ve afectada por las concepciones o ideas previas que, en algunos casos, no permite que las personas integren nuevos elementos perceptuales y conceptuales a los esquemas ya existentes (Carretero, 1993, Wadsworth, 1989).

Basados en estas consideraciones adoptamos la siguiente concepción del término *comprensión*. Comprender algo es asimilarlo dentro de un esquema adecuado (Skemp, 1980).

> La comprensión de datos o hechos depende de la conexión que tengamos con las ideas previas y de la fuerza de las mismas.
>
> Una idea matemática, hecho o procedimiento se entiende completamente si está conectado con redes previas (Hiebert y Carpenter, 1992).

Algunas definiciones

Referencia en el MIC

Para superar la dualidad representación externa-interna llamamos *referencia* a toda representación simbólica en el MIC (Goodman, 1968, citado en Tolchinsky, 1993, p. 134; Bruner, 1994, p. 108). Dicha referencia es triangular y debe comprenderse desde: (i) un signo, (ii) su objeto (lo que simboliza) y (iii) un sujeto que le da sentido y la interpreta (Peirce, 1955, citado en Tolchinsky, 1993) (ver Tabla Nº 1).

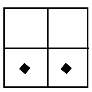
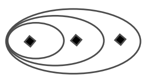
Representación externa		**Representación interna**
Signo (símbolo)	**Objeto simbolizado**	**Sujeto intepreta**
		- Tres unos - Tres veces uno - Un tres - Una vez tres

Tabla Nº 1.

Clase Referente (CR)

Para nuestro propósito toda referencia en MIC la llamaremos *Clase Referente*, es decir, un constructo o esquema conceptual del significado de número que articula una clase con su registro.

Clase Referente Reiterada (CRR)

En lenguaje MIC una clase referente se puede simbolizar por dos o más registros iguales (ver Figura Nº 7). Esta disposición, que puede interpretarse como una ambigüedad de los caracteres, la llamaremos *Clase Referente Reiterada*,

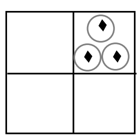


Figura Nº 7.

Toda CRR puede expresarse como $a \times (CR)$ donde a es el número de registros (acciones) iguales, $a > 1$. Si $a = 1$ es la forma más primitiva y menos evolucionada se trata entonces de una CR.

Carácter operatorio del número

La escritura en el MIC, muestra al igual que en el sistema usual, el interés por referenciar el carácter operatorio del número. Este se puede expresar mediante acciones para referirse a precios o cantidades de objetos que provienen de alguna *situación-problema* planteada al niño. El objetivo es mostrar el carácter activo del número como operador. A modo de ejemplo podríamos pensar en una *situación-problema* de la que el niño tiene que representar dos canastos y cinco mangos en cada uno, la pregunta sería ¿cuántos mangos tiene en total si tiene dos canastos con cinco mangos cada uno? En el MIC se representaría mediante dos (número de canastos) acciones diferenciadas y en cada acción representa cinco.

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

La comprensión e interpretación del concepto de estructura multiplicativa, como objeto de estudio, en la educación básica primaria y los procesos de construcción de la misma, tiene para nuestro propósito un marco de referencia piagetiano y de estudios en esa misma dirección realizados por Vergnaud y Durán (1976); Vergnaud, (1977) (citados en Orozco, 1984). Vergnaud (1983) (citado en Castro et al., 1995, p. 54) para quienes la estructura aditiva y la estructura multiplicativa son consideradas como:

> [...] conjunto de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción,...) o de tipo multiplicativo (tales como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza).

Centramos nuestra atención en las nociones aritméticas de tipo multiplicativo. Apoyándose en el concepto más usual de la multiplicación en el contexto escolar como es el de la suma reiterada, Castro et al. (1995) consideran que "Multiplicar es reiterar una cantidad en su nivel más intuitivo" (p. 45). Los dos términos del producto responden a contextos diferentes; uno de ellos es la cantidad que se repite —multiplicando— y es un número cardinal concreto que representa al número de objetos que se ven. El otro factor nos dice las veces que se repite la cantidad inicial —multiplicador— y es una especie de cardinal de segundo orden o cardinal de cardinales mucho más abstracto que el anterior y por eso mismo debe simbolizarse de inmediato.

López (1988, p. 99) define la multiplicación de la siguiente manera:

> [...] la multiplicación es la operación binaria en la que un término llamado multiplicando, denota el valor de cada sumando, mientras que otro término, que denota el número de sumandos es llamado multiplicador.

En tanto que Gómez (1984, p. 111- 112) considera que desde el punto de vista matemático la noción de multiplicación en los niños supone procesos más complejos que no se derivan de la visión como suma reiterada.

Estas dificultades se presentan cuando, a partir de esquemas reiterativos (e. g., 3 + 3 + 3 + 3), los niños tratan de ganar esquemas o representaciones internas de orden multiplicativo. En efecto en el modelo aditivo se obtiene el resultado final sumando sucesivamente tres (sin interesar cuántas veces); mientras que para la construcción del concepto de multiplicación es necesario abstraer otros elementos, que aunque tienen su historia en la composición aditiva reiterada, conllevan a situaciones más complejas.

> [...] será necesario que tengamos en cuenta el número de conjuntos equivalentes que tenemos, y este número de conjunto equivalentes, representa a la vez el número de acciones realizadas. Hay por lo tanto un operador que nos indica el número de veces que se repite un determinado conjunto, y que se sitúa pues, como una variable de rango superior en cuanto que representa números de operaciones con conjunto y no sólo con elementos (Gómez, 1984).

Castro et al. (1995) presentan varios modelos para el estudio de la multiplicación según el contexto y el concepto operatorio asignado al número tales como actividad de recuento, cardinal de un conjunto, medida sobre regletas, representación simbólica, razón aritmética y como operador.

Operador multiplicativo en el contexto aritmético

En sentido piagetiano las operaciones son acciones mentales que requieren de procesos de internalización, coordinación y reversibilidad. Son acciones puesto que antes de llevarse a cabo con símbolos, se han realizado sobre objetos (Piaget, 1975). Las operaciones reflejan la acción, lo que la persona o grupos de personas hacen sobre los objetos, a partir de referentes concretos en una etapa inicial y de abstracción en un nivel formal o simbólico.

En el caso de las operaciones aritméticas llamamos *operador* al símbolo o denotante de una operación. Los operadores como símbolo son predominantemente activos y prácticos, es algo que “hay que hacer” sobre un objeto, elemento o puesto vacío “()”; o sobre dos puestos vacíos “() ()”. En el primer caso se trata de un operador unario; mientras que en el segundo caso es un operador binario. En ambos eventos la operación —el operador— al actuar produce otro objeto (e. g., $3 \times \langle 4 \rangle = 12$). La interpretación puede darse en dos sentidos: (a) como operador unario “el triple de” aplicado a cuatro, y (b) como operador implícito que representa la multiplicación (Vasco, 1994, p. 134).

A la luz de estas consideraciones la experiencia que aquí se reporta busca explorar algunas características conceptuales acerca del operador multiplicativo mediante representaciones externas en el MIC. A través de la significación que construyen los niños referida a la relación entre lo que el alumno ya sabe sobre la multiplicación y la utilización del MIC como sistema para representarla, del sentido que atribuyen a la representación interna, de la capacidad de resignificar nuevas situaciones, de transferirlas a otros sistemas de representación y de utilizar las nociones matemáticas como herramienta para solucionar situaciones problemas verbales. Para ello, la multiplicación $a \times (CR)$ es considerada como una (CRR). El término que se reitera corresponde a una (CR) o multiplicando y es la representación o significante en el MIC; el otro término —multiplicador— operador, nos dice el número *a veces* que se reitera (CR) y su cardinal es el número de acciones o registros en MIC, mientras que el operador es un transformador activo —unario— que actúa sobre las CRS para resignificarlas.

UNA EXPERIENCIA CON EL MIC

A continuación se presenta una experiencia de utilización del MIC como sistema de representación externo que permite explorar las concepciones de los estudiantes sobre algunos aspectos de la estructura multiplicativa. Como se explicó al comienzo, esta experiencia tenía como propósito mostrar las posibilidades del MIC como herramienta de exploración. El propósito central de esta experiencia no era el de obtener nuevos resultados acerca de la comprensión de los estudiantes. No obstante, y como se verá más adelante, el MIC puede ser una herramienta prometedora en este sentido.

Metodología

Metodológicamente el significado y sentido del operador multiplicativo trata de explorarse a partir de representaciones en el MIC de situaciones problema verbales que comportan una multiplicación de la forma $a \times (CR)$, tomando como base el evento más primitivo y menos evolucionado, (a = 1) (ejemplo: un sobre contiene dos láminas), luego secuencialmente para $a = 2$, $a = 3$, etc. La idea es construir una (CRR) que permita hacer visible el referente, en tanto coherente con el esquema verbal "a veces CR", o con el operacional, $a \times (CR)$ (ver Tabla Nº 2).

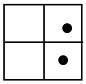
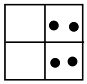
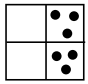
Acción previa	**Producción de CRRs**		**Interpretación**		**Esquema verbal**	**Esquema operacional**
a = 1	**a = 2**	**a = 3**	**Registros**	**CR**		
			Tres	Cinco	Tres veces cinco	3 x 5
1 vez 5	2 veces 5	3 veces 5				

Tabla Nº 2. Secuencia para explorar la representación $a \times (CR)$. Caso de $3 \times (5)$

Descripción de las actividades

En la experiencia participaron cinco alumnos de ambos sexos, (dos niñas y tres niños), de edades comprendidas entre 10 y 12 años. Realizaron dos tipos de actividades, *actividades previas* y *actividades exploratorias*.

En las *actividades previas* se quería que los estudiantes se familiarizaran con el manejo del MIC; escritura, lectura de los números del cero al noventa y nueve y utilización de las reglas de transformación.

En las *actividades exploratorias* en un primer momento, se trabajó con los estudiantes en la representación en el MIC de un producto 3×4. Después, en un segundo momento, se les dio a los niños una *situación-problema* verbal de estructura multiplicativa.

Esta segunda actividad consistió en lo siguiente: sobre una mesa fueron colocados varios sobres que contenían *n* láminas ($0 \le n \le 9$), y varias placas del MIC. Un entrevistador (E) describía y planteaba, en forma verbal, tres eventos (A, B, C) que los niños representaban en el MIC. Cada momento estaba relacionado con un valor diferente del operador *a*. Con el objeto de explorar las características conceptuales acerca del operador multiplicativo, la representación de cada evento se hizo en dos momentos diferentes pero relacionados (M_1, M_2) (ver Tabla Nº 3a y 3b).

Momentos	**Evento A (*a* = 1)**	**Evento B (*a* = 2)**	**Evento C (*a* = 3)**
M_1	"un sobre contiene cuatro láminas"	"dos sobres contienen cuatro láminas cada uno"	"tres sobres contienen cuatro láminas cada uno"
M_2	"un sobre contiene cinco láminas"	"dos sobres contienen cinco láminas cada uno"	"tres sobres contienen cinco láminas cada uno"

Tabla Nº 3 a.

Eventos	**A**		**B**		**C**	
Momentos	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
No. de sobres (a)	1	1	2	2	3	3
No. de láminas	4	5	4	5	4	5
CRR	-	-	(4 + 4)	(5 + 5)	(4 + 4 + 4)	(5 + 5 + 5)
$a \times (CR)$	1 x (4)	1 x (5)	2 x (4)	2 x (5)	3 x (4)	3 x (5)

Tabla Nº 3 b. Estructuración de las actividades

Análisis

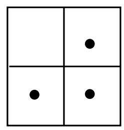
A partir de lo que realizaron dos niños durante las actividades exploratorias, haremos un análisis de lo que significa para nosotros estos hechos.

Primera actividad exploratoria: representación en el MIC del producto 3 x 4.

Caso Juan (J, 10 años)

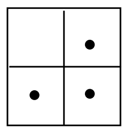
E: [Entrega una placa del MIC y varias fichas] Representa la multiplicación 3 x 4.

J: Aquí es cuatro [señala carmín y coloca una ficha...] Aquí es tres [señala blanco-rojo y lo registra en la misma placa, usando dos manos].



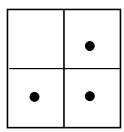
E: ¿Qué has representando en MIC? Lee, por favor.

J: Siete.



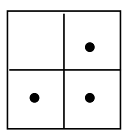
E: ¿Cómo representar, entonces, 3 x 4?

J: Así [registra en el MIC siete].



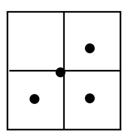
E: Pero lo que has representado es siete en MIC.

J: Si [levanta la ficha en carmín] pero primero es tres [señala blanco-rojo, y luego en la misma placa, coloca la ficha en carmín] y lo multiplico.



E: ¿Y el signo? ¿Cómo lo representas?

J: Lo multiplico [colocando una ficha en el centro de la placa]. Lo multiplico así.



En estas representaciones en el MIC, Juan referencia cada factor, en forma independiente, produciendo dos acciones o registros: el primero para la (CR) cuatro y el segundo para la (CR) tres. Esta acción de Juan, produce la (CR) siete en una composición aditiva de CRs.

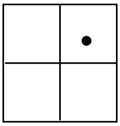
El concepto de multiplicación como operación que reitera sumandos iguales, y el de operador como número de veces que se reitera la (CR) no se hace visible en las representaciones de Juan en el MIC.

Segunda actividad exploratoria

1) Evento A. Caso Aura (Au, 10 años, M_1A).

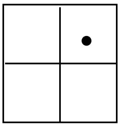
E: [Muestra a la niña un sobre que contiene cuatro láminas]. Ahora vas a representar esta situación en el MIC.

Au: [Representa la (CR) cuatro].



E: ¿Qué has representado en MIC?

Au: Un sobre que contiene cuatro láminas [señala la ficha en carmín].



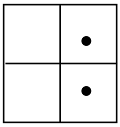
E: Y, ¿cuántos sobres? Muéstralos.

Au: Uno [levanta la ficha en carmín].

2) Evento A. Caso Jair (Ja, 11 años, M_2A)

E: [Entrega al niño un sobre que contiene cinco láminas]. Representa en MIC.

Ja: [Representa a dos manos la (CR) cinco].



E: ¿Qué has representado en MIC?

Ja: Un sobre que contiene cinco láminas.

E: Señala el número de láminas en el MIC.

Ja: Cinco (levantando a dos manos las fichas).

E: Y, ¿cuántos sobres?

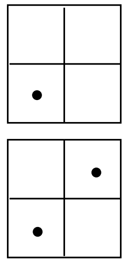
Ja: Uno [levanta la ficha en blanco].

Con las actividades de este evento se inicia la exploración de las características conceptuales del operador multiplicativo y la construcción de las (CRRs) de la forma $a\times\ (CR)$. En las producciones, los niños no encuentran obstáculos para representar el evento más primitivo de $a\times\ (CR)$. para $a = 1$, (e. g., M_1A, M_2A). Pese a ello, cuando la (CR) necesita de dos fichas para designar su representación o indicar su referente (e.g., M_2A) la explicación de Jair para referirse a la representación que corresponde al número de sobres, la hace señalando en el MIC la ficha en blanco, (CR) uno, como una acción independiente.

3) Evento B. Caso Aura (Au, 10 años, M_1B)

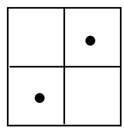
E: [Muestra y entrega a la niña dos sobres que contienen cuatro láminas cada uno]. Representa esta situación en el MIC.

Au: [Representa la (CR) dos en la placa y a continuación, en la misma placa, representa la (CR) cuatro].



E: Pero eso que has representado es seis en MIC. ¿Cómo representas dos sobres que contienen cada uno cuatro láminas?

Au: Así: dos sobres [levanta, y coloca la ficha en rojo] y cuatro láminas [levanta la ficha en carmín y la deja].

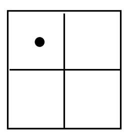


E: [Saca las láminas de los sobres y juntos las cuentan]. ¿Cuántas láminas hay?

Au: Ocho láminas.

E: Pero me habías dicho que eran cuatro láminas y ahora me dices que son ocho. ¿Cómo representas la situación: dos sobres contienen cuatro láminas cada uno?

Au: [Borra lo que tenía representado en MIC y representa la (CR) ocho].



E: ¿Cuantas láminas?

Au: Ocho [señala en el MIC la (CR)].

E: ¿Y cuántos sobres?

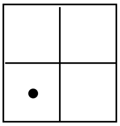
Au: Dos sobres.

E: Señálalos en el MIC.

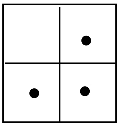
Au: No se, no puedo, solo veo uno.

4) Evento B. Caso Jair (Ja, 11 años, M_2B)

E: [Entrega a Jair dos sobres que contienen cada uno cinco láminas].

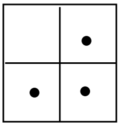


Ja: [Representa la (CR) dos y, a continuación en la misma placa, representa la (CR) cinco].



E: ¿Qué has representado en MIC?

Ja: Dos sobres con cinco láminas cada uno.



E: Señala los sobres en el MIC.

Ja: [Señala y levanta la ficha en rojo].

E: Ahora señala las láminas en el MIC.

Ja: [Señala y levanta a dos manos las fichas en carmín-blanco). Cinco láminas.

E: [Saca las láminas de los sobres y las cuenta]. ¿Cuántas láminas, Jair?

Ja: Diez láminas.

E: ¿Cómo representas entonces que dos sobres contienen cada uno cinco láminas?

Ja: Necesito otra placa.

Estas características de las representaciones simbólicas externas se consolidan cuando Aura representa, para este tipo de evento, dos acciones: la primera de ellas sobre la (CR) dos, y la segunda sobre la (CR) cuatro. De esta manera cada acción se aplica sobre una (CR) diferente.

Frente al estímulo visual que conlleva la representación externa, el niño atribuye diferente significado y sentido a las (CRs). A la (CR) dos le asigna el número de sobres; mientras que la (CR) cuatro significa para él el número de láminas. Estas mismas conductas aparecen cuando la (CR), que debe reiterarse, necesita de dos fichas para indicar su referente, (e. g. Jair, M_2B).

Ambas representaciones (M_1B, M_2B) sólo "reproducen" los términos de la multiplicación, que engloba la estructura multiplicativa, como una composición aditiva, $a + (CR)$, sin que medie una representación interna o imagen mental del concepto de multiplicación, que articule el significante de la representación de la (CR) que debe reiterarse —multiplicando— con el número de veces "a" que se reitera la (CR) —multiplicador. Ante esta situación anómala el entrevistador intenta una salida para buscar nuevas producciones. Para ello cuenta, delante del niño el número de láminas, ocho en total, (Au, M_1B). Aura, quien actuara en forma coherente en las producciones anteriores, se ve abocada a una situación conflictiva: primero porque representa el número total de láminas (CR) ocho que antes representó como cuatro y segundo no encuentra en el estímulo visual de la representación externa, que tiene frente a ella, la (CR) dos como sucedió anteriormente. En el caso de (Ja, M_2B) necesitaría de "una placa auxiliar", o placa de los "dieces", que no se utilizó en la experiencia.

CONCLUSIÓN

Los resultados del trabajo muestran, a grandes rasgos, que los niños en este caso, no encuentran dificultad para representar en el proceso de construcción de $a \times (CR)$, el momento menos evolucionado, $a = 1$, debido, posiblemente, a que les parece de sentido común que el estímulo visual de la representación externa que identifica a la (CR) evoque una representación interna o imagen conceptual que referencie y signifique simultáneamente el número a y la (CR) (e. g. M_1A).

Pese a ello, cuando el estímulo visual de la representación externa requiere de una acción a "dos manos" para significar el objeto representante y su representación, (e. g. M_2A) las "nuevas" conductas, explicaciones e interpretaciones del resolutor consideran: (a) una acción "inicial" que adelanta la representación y el significado del número a y corresponde al primer elemento del referente verbal de la *situación-problema*, y (b) una especie de acción de "segundo orden", envolvente de la anterior, que representa la (CR) que debe reiterarse y que entra en correspondencia con elementos de segundo orden de referente verbal de la *situación-problema* planteada. Para eventos más evolucionados (e. g. M_1B, M_2B), estas mismas conductas están presentes.

En general las representaciones externas de los niños sólo reproducen los términos de la multiplicación como la composición aditiva de (CR)s, o como el resultado final de operar entre dos números, en una situación algorítmica. Por lo tanto las representaciones internas o imágenes conceptuales que evoca el estímulo visual de la representación no resignifican estados o procesos evolutivos acerca de la concepción de multiplicación como suma de (CRR)s, ni del operador multiplicativo como el número de acciones sobre la (CR) que se reitera. El hecho de que los niños no accedan a la comprensión de la representación y de la construcción de $a \times (CR)$ se debe, posiblemente, a estos factores: (a) la no familiaridad con el MIC como herramienta de trabajo y como sistema manipulativo de representación particular, (b) la resistencia a modificar las ideas o concepciones previas acerca de la multiplicación, en el sentido de la aplicación algorítmica entre dos números adquirida en la escolaridad primaria, y (c) la poca transparencia que ofrece el MIC como sistema de representación externa, para consolidar una especie de "similitud significativa", una metáfora, o analogía entre los elementos del referente de la situación verbal planteada y la representación misma.

Con base en la experiencia que se ha presentado aquí es posible pensar en diseños metodológicos que permitan asegurarse de que los niños se encuentren familiarizados con el MIC y, por lo tanto, que permitan explorar con mayor profundidad sus concepciones.

REFERENCIAS

Bruner, J. (1994). *Realidad mental y mundos posibles.* Barcelona: Gedisa.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y educación.* Buenos Aires: Aique.

Castro, E., Rico, L. y Castro E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

García, H. y Rodríguez de A. (1988). Ideas previas, esquemas alternativos, cambio conceptual y el trabajo en el aula. *Enseñanza de las ciencias, 6* (2), 161-166.

Goldin, C. (1993). The IGPME. Working group on representations. En *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Tsukuba: University of Tsujuva.

Gómez, C. (1984). *Procesos cognitivos en el aprendizaje de la multiplicación.* Buenos Aires: Instituto Municipal de Psicología Aplicada a la Educación.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

López, A. (1988). *Ciencias lógico-matemáticas,* t. I (pp. 93-100). Barcelona: Enciclopedia Práctica Pedagógica.

Maza, C. (1995). *Aritmética y representación. De la comprensión del texto al uso de materiales*. Barcelona: Paidós.

Moreno, L. y Sacristán, A. (1996). Representaciones conceptuales y procesos recursivos. *Revista EMA, 1* (2), 83-96.

Orozco, M. (1984) (no publicado). *La enseñanza de la aritmética en los primeros grados del nivel de educación básica.* Cali: Univalle.

Piaget, J. (1975). *Seis estudios de psicología.* Barcelona: Seix Barral.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Tolchinsky, L. (1993). *Aprendizaje del lenguaje escrito. Procesos evolutivos e implicaciones didácticas.* Barcelona: Antrophos.

Vasco, E. (1994). *Un nuevo enfoque para la didáctica de la matemática.* Bogotá: MEN.

Wadsworth, B. (1989). *Teoría de Piaget del desarrollo cognitivo y afectivo*. México: Diana.

Ariel Arteta
Escuela Normal Superior
Calle 72 Carrera 35
Tels.: 095- 3523329
095- 3525706
Fax: 3688787
Barranquilla