LAS INECUACIONES: UNA MIRADA DESDE EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Silvia López Fernández, Elizabeth Montoya Delgadillo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
Soledadlopezf7@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Palabras clave: espacio de trabajo matemático, inecuaciones
Key words: mathematical working space, inequations

RESUMEN
La investigación que se reporta tiene por objetivo analizar el ETM de referencia y robustecer el ETM personal de estudiantes de primer año de universidad en torno al objeto matemático de inecuación. Para ello utilizamos la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de Alain Kuzniak, en la cual se postula que, mediante la articulación de los planos cognitivo y epistemológico, a través de las génesis: semiótica, instrumental y discursiva se propicia el conocimiento matemático. La metodología se realiza en base a un estudio de casos, se diseñó y aplicó una situación de aprendizaje que evidencia elementos que favorecen el ETM personal del aprendiz.

ABSTRACT
The investigation that is brought has for aim analyze the ETM of reference and robustecer the students' personal ETM of the first year of university concerning the mathematical object of inequation. For it we use the theory of Mathematical Working space Alain Kuzniak's (ETM), in which there is postulated that, by means of the joint of the planes cognitive and epistemológico, across the geneses: semiótica, instrumental and discursive the mathematical knowledge is propitiated. The methodology is realized on the basis of a study of cases, there was designed and applied a situation of learning that demonstrates elements that favor the personal ETM of the apprentice.

■ Descripción de la problemática y objetivos de investigación

El trabajo que se presenta corresponde a una investigación sobre el objeto matemático inecuación. La problemática nace a través de la experiencia docente, donde he podido verificar que los estudiantes del primer año del nivel superior manejan técnicas algebraicas mecánicas de resolución de inecuaciones, generando errores y dificultades y una escaza comprensión del objeto matemático, entre otras causas, esto se debe al tratamiento que se le da desde sus comienzos en la secundaria (nivel 9, 14 años), puesto que su estudio en general se desarrolla privilegiando un enfoque de tipo algebraico, siendo algunas técnicas de resolución el centro principal de aprendizaje. En investigaciones como Alvarenga (2006), dan cuenta que el estudio de las inecuaciones se vuelve sólo una resolución de tipo algebraica, y que esto sucede en general en la secundaria alrededor de los 14 años con la resolución de las inecuaciones lineales y cuadráticas y en el bachillerato de la misma manera. Borello (2010), señala también que los alumnos confunden las ecuaciones con las inecuaciones, ya que según su estudio en el curriculum y variados textos escolares que se utilizan en las aulas de México, el discurso matemático cambia la naturaleza del concepto de desigualdad, sometiendo a la inecuación a una simple técnica operacional.

Con el propósito, entonces, de indagar en la comprensión del concepto por parte de los aprendices, se utiliza como marco teórico el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011). En este marco, se distinguen dos planos: uno epistemológico y otro cognitivo, que se articulan mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación, la articulación de estos dos planos mediante las génesis mencionadas propician la comprensión del conocimiento matemático.

En virtud de nuestra problemática, emerge nuestro objetivo general de investigación:

- Analizar el espacio de trabajo matemático de referencia del concepto de inecuación, y fortalecer el espacio de trabajo de los aprendices en torno a este concepto.

Para llevar a cabo nuestro objetivo general, nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las génesis que se deberán activar para propiciar el espacio de trabajo personal de los estudiantes de acuerdo al concepto de inecuación.
- Diseñar y aplicar una situación de aprendizaje a estudiantes de primer año de universidad que estudian la carrera de pedagogía en matemática, en una institución chilena estatal.

Como diseño metodológico se utilizó el estudio de casos (Stake, 1998) contemplando el análisis epistemológico del objeto de estudio con el fin de diseñar y aplicar una situación de aprendizaje en torno a las inecuaciones de primer y segundo grado, con valor absoluto y la pertinencia de sus soluciones. Éste será aplicado a estudiantes chilenos de primer año de universidad (18-20 años) pudiendo realizar una intencionada articulación de los planos (epistemológico y cognitivo) mediante las génesis (semiótica, instrumental y discursiva).

■ Sobre el estudio epistemológico

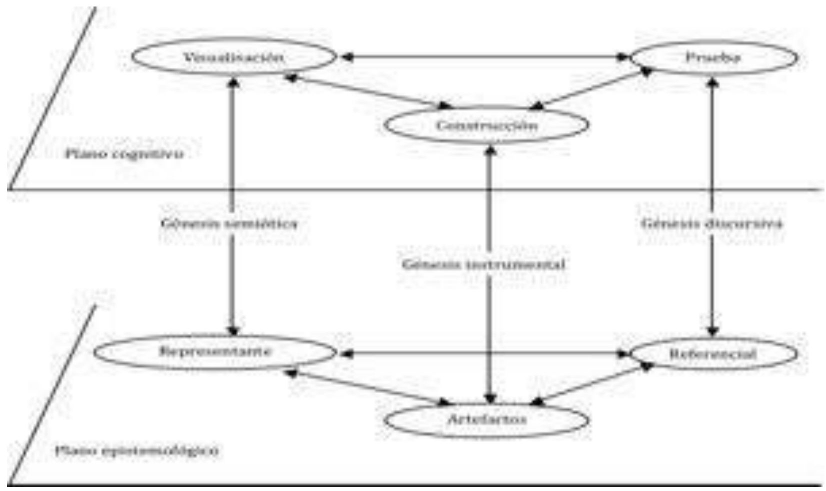
Es en las obras de Euclides, donde se pueden encontrar los primeros indicios de la comparación de magnitudes. Luego con Descartes y su plano en 1630 se logra un avance importante en la teoría de las inecuaciones, éste fija los números positivos hacia la derecha del eje horizontal y superior en el eje vertical, situándolos de forma geométrica, permitiendo con esto un tipo diferente de estudio, este hecho junto con los de Fermat serán continuados por diversos autores tales como; Wallis, Huyghns, los Bernoulli, y dará origen al Cálculo Infinitesimal por, Newton y Leibniz, y sus variadas aplicaciones al interior de la matemática como fuera de ella a mediados del siglo XVII. Este hecho experimentará un gran crecimiento en el siguiente siglo, específicamente con Euler y Laplace. En el siglo XIX, Cauchy se hará cargo de las dificultades que presentaron el Cálculo Infinitesimal, con el comienzo de la aritmetización del análisis (Tapia, 1998). Posteriormente, a mediados del siglo XIX Peano quien interesado en la lógica, da a conocer una lista de nueve axiomas acerca de los Números Naturales, dentro de ellos cuatro están relacionados con el significado del signo "igual", los faltantes se conocen como los "Axiomas de Peano", los cuales se consideran como un punto de partida para los matemáticos, con el propósito de desarrollar los conjuntos habituales de números. Peano propone la importante idea de "sucesor", el cual permite pasar de un número natural al siguiente, de esto viene que en los Números Naturales existe el orden desde su construcción. Con esta versión, la desigualdad $a \leq b$ se obtiene por medio de la igualdad $a + c = b$ para algún número natural c. Dedekind se preocupará de la construcción de los Números Reales, añadiendo que; si todos los puntos se reparten en dos (conjuntos) tales que todo punto del primero permanece a la izquierda de todo punto del segundo conjunto, entonces existe un punto, y sólo uno, que produce la división de todo los puntos en dos conjuntos, dividiendo así la línea recta en dos porciones (Dedekind utiliza la palabra "clase" en lugar de "conjunto"). Esto se refiere a que para cada número a sobre la recta numérica existe un conjunto A_1, a su izquierda tal que todo número contenido en él es menor que a, y un conjunto A_2 de números, a su derecha que contiene todos los números mayores que a (Pelletier, 1958).

Por otro lado, Bagni (2005) en su investigación "Inecuaciones y Ecuaciones: Historia y Didáctica", señala que la historia de las inecuaciones no es tan extensa como el de las ecuaciones, analiza algunos textos del siglo XIX publicados por P. Ruffini (1765-1822) que fueron incluidos en el volumen III del corso di Matematiche en los que plantea algunos ejemplos, en este volumen III, las inecuaciones son propuestas y resueltas con el fin de expresar algunas condiciones especiales para las soluciones de algunas ecuaciones, las inecuaciones generalmente se combinan con las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones con el propósito de formular algunas condiciones.

■ Marco teórico: La teoría de ETM

La teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) desarrollada por Kuzniak (2011), se estructura por dos planos, el epistemológico, el cual se refiere al contenido matemático, y se encuentra constituido por tres componentes o polos: representante o representamen, referencial, y artefacto, y el plano cognitivo, por su parte, está también conformado por tres componentes: los procesos de visualización, construcción y prueba (ver figura 1).

Figura 1: Espacio de trabajo geométrico y sus génesis (Kuzniak, 2011)



Para que estos dos planos se articulen y se genere el espacio de trabajo matemático, se consideran tres génesis: la génesis semiótica, la cual se basa en la representación semiótica que certifica que los objetos tangibles del ETM su estatus de objetos matemáticos operatorios, la génesis instrumental, la cual permite operar los artefactos en el proceso constructivo, y la génesis discursiva de la prueba, la cual dará un sentido a las definiciones y propiedades para ser utilizadas en el razonamiento matemático de validación.

La teoría caracteriza además, tres tipos de espacios de trabajo: (1) de referencia, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; (2) idóneo, según se enseña este saber en una institución dada con una función definida, y (3) personal, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático específico en cuestión. La activación de las génesis y una circulación intencionada en el ETM propicia el conocimiento matemático (Montoya, Mena, Mena, 2012).

De esta manera, el marco nos brinda elementos teóricos para analizar el espacio de trabajo del concepto de inecuación por parte de los aprendices, ya que nos aporta elementos para conocer los procesos tanto cognitivos como epistemológicos, que se promueven en el aprendizaje de las inecuaciones.

■ Metodología

Nos basamos en una metodología de carácter cualitativo, por tanto realizamos un estudio de casos (Stake, 1998), ya que para abordar nuestro objetivo de investigación “la unicidad de los casos y de los contextos individuales es importante para la comprensión. La particularización es un objetivo importante, llegar a entender la particularidad del caso” (Stake, 1998, p.44) este hecho nos ayudará en el análisis de nuestra situación de aprendizaje, vale decir si ésta promueve la comprensión del concepto.

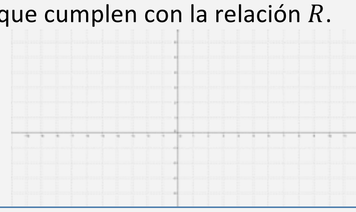
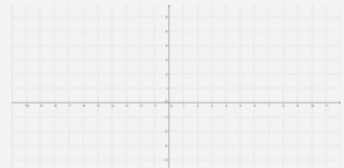
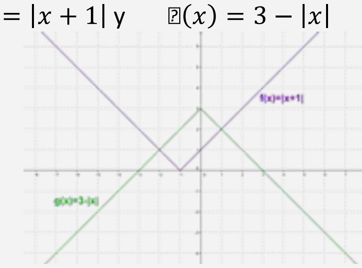
Además, dispondremos y analizaremos la grabación de la puesta en marcha de la situación de aprendizaje, puesto que nos ayudará a comprender lo que ocurrió en determinados episodios. La validación del instrumento se realizó a través de sugerencias y opiniones del grupo del seminario del instituto de matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, donde participaban especialistas de la didáctica de la matemática, más un afinamiento del mismo mediante una pre-experimentación con 15 estudiantes de 4 y 5 semestre de ingenierías.

La situación se aplicó a 34 alumnos de primer año universitario (licenciatura y pedagogía en matemática) que ya habían estudiado el concepto de inecuación en la asignatura que cursan de cálculo I, además cabe señalar que ellos accedieron voluntariamente a la participación de esta investigación. Los estudiantes en la puesta en marcha del instrumento trabajaron de a dos, esto con el propósito de que la intervención nuestra fuera mínima y se apoyaran en otro compañero, mediante sus propias capacidades y conocimientos previos.

A continuación se presenta la situación de aprendizaje (Tabla 1), la cual consta de 7 actividades de desarrollo, diseñadas de forma secuencial y con el propósito de activar la circulación en el ETM; las génesis semiótica, intrumental y discursiva. Específicamente se trata de tensionar dos génesis y hacer que los estudiantes a través de las actividades relacionen las componentes del ETM.

Para analizar los datos obtenidos en la situación de aprendizaje se realizó un análisis a priori, con el propósito de explicar la necesidad de propiciar las respuestas esperadas, ya que será fundamental en la circulación del ETM, las génesis semiótica, instrumental y discursiva, con su respectivo objetivo para cada situación y la justificación de su estructura.

Tabla 1: Situación de aprendizaje

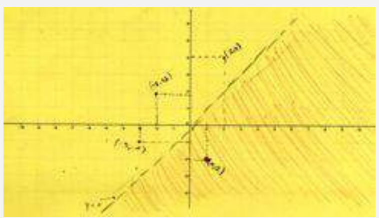
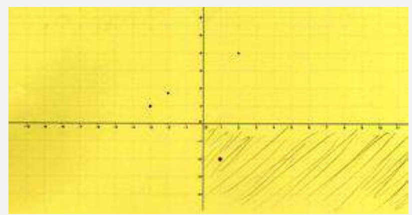
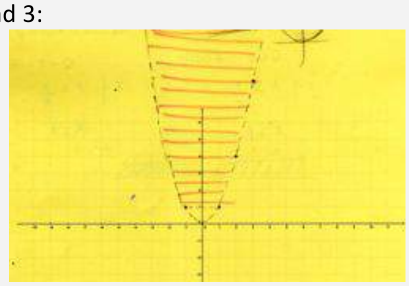
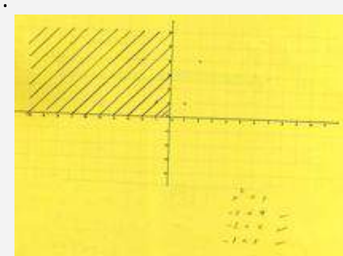
<table>
<tr>
<td>Actividad 1:
Grafique las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$:
a) $x < -\frac{1}{2}$
b) $x > -1{,}2$
c) $x \geq \frac{3}{4}$
d) $x \leq \sqrt{2}$</td>
<td>Actividad 2:
Considere la relación: $xRy \Leftrightarrow x > y$
a) Dado el conjunto A, y considerando la relación R.
$A = \{(2{,}4) ; (1, -2) ; (-2{,}1.8) ; (-3, -1)\}$
Ubica todos los puntos en el plano cartesiano e identifica con color rojo los que cumplen la relación R
b) Achure la zona de todos aquellos puntos del plano que cumplen con la relación R.
</td>
<td>Actividad 3:
Achure la zona de todos aquellos puntos del plano, que cumplen con la siguiente relación: $x^2 < y$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividad 4:
Resuelva la siguiente inecuación:
$\frac{1}{x} < 1 \quad \wedge \quad x \neq 0.$
Sabiendo que:
$\frac{1}{x} < 1 \quad \wedge \quad [(x < 0) \vee (x > 0)]$, plantea los casos y grafique la solución.</td>
<td>Actividad 5:
Dada las gráficas de las siguientes funciones:
$f(x) = |x + 1|$ y $g(x) = 3 - |x|$

¿Para qué valor(es) de x la función $f(x)$ es menor que la función $g(x)$?, vale decir, se cumple que: $|x + 1| < 3 - |x|$</td>
<td>Actividad 6:
Determinar el conjunto solución de pares ordenados (x, y), que verifican:
$(y - x) \cdot (y - x^2 + 3x) > 0$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Actividad 7:
A continuación se presentan gráficas donde el color café representa la solución de una inecuación:
Determina la inecuación que representa todos los valores para x que pertecen a la solución.
</td>
</tr>
</table>

■ Resultados

De acuerdo al análisis a priori realizado, se estudian las producciones de los estudiantes, con el objetivo de verificar nuestra hipótesis de investigación, y elementos que surjan de la misma. A continuación se presentan algunos desarrollos de los estudiantes que resultan representativos de los casos analizados, en particular de las actividades 2 y 3, ya que son importantes en la secuencialidad de la situación de aprendizaje, pues a través de su realización se trata de realizar predecir el tratamiento gráfico de las relaciones involucradas en la desigualdad (génesis semiótica) por medio de determinados artefactos simbólicos los cuales se transformarán en un instrumento para poder llegar a la respuesta (génesis instrumental), se evidencia que los estudiantes que logran realizar con éxito estas actividades adquieren una comprensión más profunda del concepto en cuestión, ya que tienen herramientas para poder analizar la pertinencia de las soluciones, desde otra perspectiva a la cual estaban acostumbrados me refiero al tratamiento algebraico.

Hemos realizado un cuadro comparativo (Tabla 2) entre estudiantes que logran el objetivo de las actividades y otros que no, puesto que este hecho es relevante para la completa realización de las actividades diseñadas.

Tabla 2: Comparación de resultados

Estudiante A	Estudiante B
Actividad 2:  ***Figura 2:*** respuesta estudiante A, a la actividad 2 de la situación de aprendizaje.	Actividad 2:  ***Figura 4:*** respuesta estudiante B, a la actividad 2 de la situación de aprendizaje.
Actividad 3:  ***Figura 3:*** respuesta estudiante A, a la actividad 3 de la situación de aprendizaje.	Actividad 3:  ***Figura 5:*** respuesta estudiante B, a la actividad 3 de la situación de aprendizaje.

Nota: se le llama Estudiante A y Estudiante B (al par de estudiantes que participó en el desarrollo de la actividad), como se definió en la metodología.

De todos los casos estudiados mostramos dos que resultan interesantes de analizar con respecto a sus resultados de aprendizaje, el estudiante A, logra el objetivo de las situaciones 2 y 3, y desarrolla las siete actividades propuestas, a excepción de la actividad seis donde presenta dificultades con la intersección de las regiones o zonas. El estudiante B no logra representar en la gráfica la relación dada y se evidencia en el transcurso de las actividades que siguen, una escaza comprensión de lo que se pide, teniendo serias dificultades en el análisis de las gráficas presentadas, inclinándose hacia una resolución de tipo algebraica, y teniendo problemas con este registro también.

■ Conclusiones

De los 17 casos estudiados, se evidenció que la situación de aprendizaje diseñada logra que los alumnos transiten por los planos por medio de las génesis (semiótica, instrumental y discursiva), este hecho los ayudó a una comprensión y análisis más profundo del concepto de inecuación, quedando en evidencia en sus argumentos dados de forma verbal y escrita.

Por otro lado, los estudiantes que no lograron transitar por los planos tienden a la resolución puramente algebraica y no utilizan la información que se presenta en la gráfica de las actividades, esto se pudo verificar en la actividad cinco y seis, donde en esta última plantean los casos que satisfacen la desigualdad en el registro algebraico, pero al encontrarse limitados por esa vía se quedan entrampados en eso sin poder activar la génesis semiótica para visualizar la pertinencia de las soluciones.

■ Sugerencias didácticas

Se sugiere aplicar la actividad a un número más reducido de estudiantes, ya que este hecho nos hizo tediosa la puesta en marcha con 34 informantes, pues no se puede atender y guiar a todos en algunos momentos que son importantes para la comprensión y secuencialidad de la situación de aprendizaje, pero si se tiene un número similar, aplicar en dos sesiones para poder optimizar más el tiempo en aquellas que son más demandadas. Por último, trabajar previamente con funciones lineales y cuadráticas, con algún software donde se propicie la génesis instrumental, ayudará a una mejor comprensión de la tarea.

■ Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. B. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios.* (Tesis Doctoral). Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Ciudad de México, México.

Bagni, G. T. (2005). *Inequalities and equations: history and didactics*. Cerme, 652-662.

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico*. (Tesis Doctoral). Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Ciudad de México, México: secretaria de educación pública.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Montoya, E. Mena, A. Mena, J. (2012). *Los artefactos y la visualización: en un ambiente geométrico y algebraico.* Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático, Universidad de Montreal, Canadá, 23 al 26 de noviembre.

Pelletier, J.L. (1958). *Etapas de la Matemática.* Buenos Aires, Argentina: Losada.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Tapia Silva, X. (1998). *Pasaje de Registros: Inecuaciones*. (Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias Mención en Didáctica de la Matemática). Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.