

## REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DEL CAMBIO UNIFORME EN ESTUDIANTES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

**Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Julia Xóchilt Peralta García, Juan Antonio Alanís Rodríguez**

Instituto Tecnológico de Sonora. (México)

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. (México)

jesuseduardo12@hotmail.com, julia.peralta@itson.edu.mx, juan.antonio.alanis@itesm.mx

**Palabras clave:** cálculo diferencial, función lineal

**Key words:** differential calculus, linear function

### RESUMEN

La manera en que el Cálculo es presentado en las escuelas, como reglas y algoritmos, permite a los estudiantes resolver problemas matemáticos, pero sin comprensión e incapacidad de aplicarlo en la resolución de problemas reales, ha propiciado el desarrollo de diversas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, como la implementación de secuencias didácticas no formales en la educación superior; basando la instrucción en la propuesta didáctica del libro Elementos del Cálculo de Salinas, Alanís, Pulido, Escobedo y Garza, se genera una evaluación para alumnos de bachillerato con el fin de determinar su nivel de comprensión de las funciones lineales en contexto del Cálculo Diferencial.

### ABSTRACT

The way in which Calculus is taught in schools, in the manner of rules and algorithms, gives the students the means to solve mathematical problems, but without the needed comprehension and a lack of abilities to solve problems derived real-life situations, this has led to the development of research works in teaching mathematics, such as the rise in development of non-formal teaching sequences in College courses; based on the teaching proposal from the book Elementos del Cálculo from the authors Salinas, Alanís, Pulido, Escobedo y Garza, we propose a new way to test the students from High School and determine the comprehension level which they have on the Linear functions topic in Differential Calculus courses.

## ■ Introducción

Las Matemáticas escolares son mostradas como un conjunto de reglas a seguir para obtener un resultado determinado, algo que para las personas que logran aprender su manejo es agradable, pero frustrante para quienes no lo logran. Esto ocurre por dos razones importantes: (1) la estructura propia de las Matemáticas permite trabajar sobre reglas y algoritmos; (2) por tradición, pues fue de esa forma en que los profesores actuales fueron instruidos por los viejos profesores (Freudenthal, 1991).

El concepto de función es un tema central en los cursos de Cálculo pues permiten modelar matemáticamente las causas y efectos que producen las variables de un fenómeno o proceso, así como sus cambios y la acumulación de dichos cambios, lo que permite convertir un caso particular (por ejemplo el movimiento rectilíneo uniforme:  $s(t) = s_0 + vt$ ) en uno general (la ecuación de la recta:  $y = b + mx$ ), esto permite llevar a cabo acciones como anticipar, predecir y formular conclusiones respecto a la situación en estudio; en este sentido, las funciones lineales forman parte de los primeros temas de Cálculo Diferencial, pues permiten al estudiante iniciarse en el estudio de las razones de cambio, pues al ser el cambio constante permite aproximar fenómenos que de otra manera son muy complicados de modelarse.

Sin embargo, a pesar de que la enseñanza de las Matemáticas busca que el alumno descubra en ellas una herramienta útil para la vida cotidiana, le son presentadas como reglas y algoritmos, esto propicia la formación de *expertos en la resolución de problemas de algoritmia* que realizan actividades sin realmente comprender las nociones del Cálculo, efecto que se viene estudiando desde 1970 con el movimiento de las *Matemáticas Modernas* (Kline, 1976) donde la axiomatización y lenguaje simbólico convirtieron la práctica escolar en un proceso memorístico, abstracto y ajeno a realidades físicas (Cardona, 2009; Dolores, 2000; Sánchez, García y Llinares, 2006).

Las investigaciones realizadas por Zhang (2003), reportan este hecho, pues sus resultados con un grupo de 150 estudiantes que recibieron el modelo de instrucción tradicional del Cálculo, arrojaron que son pocos los estudiantes que realmente logran aprender los conceptos de Cálculo (por ejemplo: funciones, sucesiones, límites, derivadas, etc.), pues para ellos el Cálculo es un ente abstracto, aburrido y difícil de darle un significado propio, por lo que disminuye el interés hacia los temas y se conforman con un aprendizaje superficial para que sirva para acreditar el curso.

Debido a esto, se han desarrollado diversas investigaciones en Matemática Educativa, cuyo objetivo es proponer estrategias de enseñanza alternativas con el fin de dar una solución al problema de la falta de comprensión, entre ellas: el uso de herramientas de cómputo, reforzamiento y redescubrimiento de nociones y conceptos por medio del uso de manipulables (físicos o virtuales) y la implementación de secuencias didácticas no formales que afectan directamente el cómo se enseña en las instituciones escolares (Salinas y Alanís, 2009).

En Alanís (1996), se consolidó un estudio de corte Socioepistemológico para permitir a los estudiantes apropiarse de la idea que condujo Newton a la invención del Cálculo Diferencial, tomando como punto de partida la cinemática como contexto para *predecir* la posición de una partícula que se mueve en *línea recta*, posteriormente en el año 2002, se retomó dicho trabajo para construir un discurso escolar, el

resultado fue la publicación del libro titulado “*Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*”.

La propuesta didáctica mencionada comienza estudiando el movimiento rectilíneo uniforme, con la convicción de que la construcción del significado personal a partir de la aplicación del concepto de la función lineal le permitirá a los alumnos comprender los fenómenos que varían de manera constante, que como dice el autor: “esta propuesta no hace más fácil que el alumno acredite los cursos, pero les deja una comprensión más profunda de los objetos matemáticos estudiados” (Salinas y Alanís, 2009), por lo cual si un alumno de nivel medio superior estudiara siguiendo esta propuesta ¿Mejoraría su nivel de comprensión de los temas que se estudian en Cálculo Diferencial en dicho nivel educativo y le daría mejores herramientas para sus posteriores estudios profesionales?

El objetivo del presente fue verificar el nivel de comprensión de la función lineal como razón de cambio uniforme que obtiene el alumno de bachillerato al tomar un curso de Cálculo siguiendo una secuencia de enseñanza no tradicional, basando el estudio en un instrumento diagnóstico de problemas de aplicación, para determinar si es factible utilizar la propuesta del libro de los *Elementos del Cálculo* en el nivel previo a la educación superior.

### ■ Metodología

Para la realización del trabajo de investigación se seleccionaron cinco estudiantes procedentes de una institución educativa de nivel medio superior (dos de segundo semestre, dos de cuarto semestre y uno de sexto semestre), a los cuales se les aplicó una prueba tipo examen de problemas de aplicación (acotados a o que presentan) variación lineal, para determinar su nivel de comprensión actual y qué herramientas utilizan para dar un solución a dichos problemas, posteriormente fueron expuestos a la propuesta metodológica del libro *Elementos del Cálculo* y fueron evaluados de nuevo, para determinar si existe una mejor comprensión de los conceptos y nociones básicas del Cálculo Diferencial, utilizando la Socioepistemología para contextualizar a los estudiantes según sus conocimientos previos, como punto de referencia, y los registros de representación semiótica de Duval (1995) para analizar el aspecto cognitivo de sus prácticas matemáticas y el procept (Gray y Tall, 1991, 1992, 1993) que permite clasificar los diferentes niveles de comprensión del alumno.

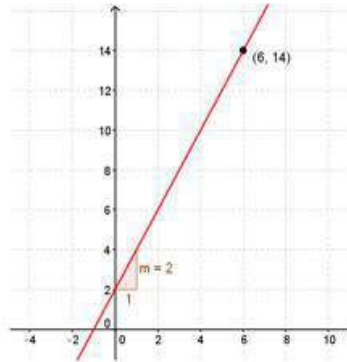
Los instrumentos utilizados para este trabajo fueron dos exámenes, denominados *Examen Introductorio* y *Examen de Cierre*, ambos contemplan reactivos de diferente contexto pero todos referentes al tema de la función lineal como modelo para estudiar el cambio uniforme. Los exámenes y testimonios de los alumnos se analizaron con base en la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, para obtener la información necesaria para formular conclusiones respecto a la investigación; se esperaba observar cambios significativos en los procedimientos realizados por los estudiantes posterior a la instrucción basada en el libro *Elementos del Cálculo*, comparando lo realizado en el *Examen Introductorio* y el *Examen de Cierre*.

### ■ Resultados

Para fines de la presentación del trabajo, se muestra un extracto de los resultados obtenidos, a continuación se muestra en la figura 1, uno de los problemas propuestos en el *Examen Introductorio*.

Figura 1. Problema 4 planteado en el Examen Introductorio.

4.- La gráfica de la función  $y = f(x) = mx + b$  es la recta que se muestra en la siguiente figura.



Si la pendiente de la recta es  $m = 2$ , calcula el valor de  $y$  cuando  $x = 9$

Este problema solamente tres de los cinco participantes lo respondieron, el análisis de sus procedimientos se resume en la tabla 1.

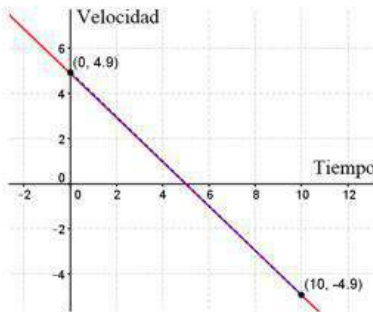
Figura 1. Problema 4 planteado en el Examen Introductorio.

Problema		Inciso	Alumnos que responden al problema	Formas distintas de responder al problema	Observaciones
4	A	3	1		Sólo tres alumnos responden el problema y lo hacen mediante la ecuación de la recta en su forma pendiente y ordenada al origen, pero ninguno de ellos logra realizar la conversión del registro gráfico al algebraico, pues no calculan correctamente el valor de la pendiente o no identifican en la gráfica el valor de la ordenada al origen.

En el *Examen de Cierre*, se plantea una situación similar, la cual se muestra a continuación en la figura 2.

**Figura 2. Problema 4 planteado en el Examen de Cierre.**

4.- La siguiente gráfica muestra la velocidad que lleva un Angrv Bird rojo al ser lanzado desde su resortera, las unidades son metros por segundo para la velocidad y segundos para el tiempo.



- a) Determina qué valor tiene la razón de cambio de la velocidad del Angrv Bird.
- b) Construye la función de la velocidad de Angrv Bird.

En este problema los 5 participantes contestan el inciso a y 4 contestan el inciso b, el análisis de sus respuestas se resume en la tabla 2.

**Tabla 2. Resumen de las observaciones y análisis del problema 4 del Examen de Cierre.**

Problema	Inciso	Alumnos que responden al problema	Formas distintas de responder al problema	Observaciones
4	A	5	1	Todos los estudiantes calculan la pendiente identificando dos puntos en la gráfica y sustituyendo la información en la fórmula de la pendiente, obteniendo el valor numérico correcto pero con signo contrario, a pesar de esto, dos de los alumnos indican explícitamente que como el fenómeno es de disminución (la recta se inclina hacia abajo), el valor de la pendiente debería ser negativo y lo modifican.
	B	4	1	Todos los estudiantes que responden al problema lo hacen planteando la ecuación de la recta en su forma pendiente y ordenada al origen, todos logran identificar correctamente el valor de la ordenada al origen.

Según el marco del procept y los resultados obtenidos en el *Examen Introductorio*, los 5 estudiantes participantes se clasifican en la fase de procedimiento, es decir, el resolver tareas matemáticas es para ellos un proceso algorítmico sin significado, donde sus acciones no tienen repercusión en los resultados, no analizan de forma correcta las situaciones y las herramientas que utilizan están directamente ligadas únicamente a lo desarrollado por el profesor durante las clases y cualquier otra situación fuera de dichas actividades preestablecidas carecen de una respuesta.

Posterior a la propuesta del libro de *Elementos del Cálculo* y con base en las respuestas del *Examen de Cierre*, los 5 estudiantes se encuentran próximos a entrar en la fase del proceso, pues ahora pueden reflexionar al respecto de sus prácticas matemáticas y argumentar al respecto de las herramientas utilizadas para responder un problema, además de tener la capacidad de articular características de los diferentes registros de representación (como es el caso de corregir el valor de la pendiente obtenida en un Cálculo numérico utilizando como argumento la representación gráfica), a pesar de esto aún tienen ciertas deficiencias al realizar tratamientos algebraicos y numéricos, las cuales pueden ser minimizadas o eliminadas mediante la realización de ejercicios de práctica.

### ■ Conclusiones

Las conclusiones de la investigación coinciden con los resultados obtenidos por Salinas gray(2010) en su tesis doctoral y muestran que efectivamente, la propuesta contenida en el libro *Elementos de Cálculo*, permite a los estudiantes tener una mejor comprensión de los objetos matemáticos de las nociones básicas del Cálculo Diferencial, esto se evidencia en el cambio que se muestra en la profundidad y análisis realizados por los alumnos entre las respuestas del *Examen Introductorio* y el *Examen de Cierre*, y aun cuando sigan presentando deficiencias en el tratamiento algebraico, pueden minimizarse estos problemas por medio de tareas, repasos y realimentación de sus actividades por parte del profesor.

### ■ Referencias bibliográficas

- Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Cardona, R. (2009). *Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de la derivada*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Legaria. México.
- Dolores, C. (2000). El futuro del Cálculo Infinitesimal. En R. Cantoral (Coord.). *International Congress on Mathematical Education* (pp. 155-181). España: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1995). *Semiósis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education, China lectures*. Países Bajos: Springer
- Gray, E. y Tall, D. (1991). *Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking*. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991h-gray-procept-pme.pdf>
- Gray, E. y Tall, D. (1992). *Success and failure in mathematics: procept and procedure*. A primary perspective. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de <http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/92b-procepts-primary.pdf>

- Gray, E. y Tall, D. (1993). *Success and failure in mathematics: procept and procedure. The flexible meaning of symbols as process and concept*. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de [http://wrap.warwick.ac.uk/504/1/WRAP\\_Tall\\_dot1993b-success-failure-mt.pdf](http://wrap.warwick.ac.uk/504/1/WRAP_Tall_dot1993b-success-failure-mt.pdf)
- Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. México.
- Salinas, P. (2010). *Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del cálculo en el contexto del estudio del cambio*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.
- Salinas, P. y Alanís, J. (2009). *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa*. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511859004>
- Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada en Investigación didáctica. *Enseñanza de las Ciencias* 24(1), 85-98.
- Zhang, B. (2003). Using Student-centered teaching strategies in Calculus. In M. Peat (Ed.), *The China papers: tertiary science and mathematics teaching for the 21<sup>st</sup> century* 2, 100-103.