REVISTA EMA
1998, VOL. 3, Nº 3, 241-253

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN[1]

CARMEN ANDRADE

Este artículo considera algunas dificultades de comprensión sobre variación en estudiantes de octavo grado. La aproximación a la historia de la matemática señala que la variable es una herramienta de la matemática para representar la variación y que su conformación es el resultado del desarrollo de un proceso. Estableciendo un paralelo con el aprendizaje, se determina que el conocimiento matemático también necesita ser el desarrollo de un proceso y que las dificultades conceptuales en los estudiantes se generan cuando se producen rupturas en este desarrollo. Cuando la variable se enseña como un símbolo para representar cantidades desconocidas o cuando el uso de la letra es el resultado de una práctica sintáctica de procedimientos más que el resultado de un proceso, se presentan dificultades para interpretar la letra como variable. Un desarrollo adecuado de este proceso conlleva a lograr tareas sobre generalización y simbolización de relaciones de variación y a hacer uso de la variable en su sentido dinámico.

INTRODUCCIÓN

El presente artículo está dirigido a señalar dificultades en estudiantes de octavo grado para la comprensión de la variable. Estas dificultades se han identificado, en investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra, como dificultades para interpretar la letra como variable.

El análisis de las palabras variable y variación, desde su definición semántica y su uso en el lenguaje común, hasta su noción matemática, llevó a una aproximación a la historia de la matemática. Los resultados de este análisis indican que no hay una definición de variable como sí es el caso del concepto de número. Por el contrario, la noción matemática de variable hace referencia a la herramienta de la matemática para representar la variación. A lo largo del artículo se mencionará la noción de variable con este significado y la noción de variación como los diferentes valores que puede tomar la variable.

Estableciendo un paralelo entre el proceso histórico de la noción de variable y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la misma, se encuentra que

1. Este artículo fue editado por Cristina Carulla, investigadora de “una empresa docente”.

el uso de la variable requiere el desarrollo de un proceso de conocimiento continuo y secuencial. Mediante la revisión de algunos textos de álgebra elemental, usados en nuestro país durante la última década, se observa que la forma de presentar la variable no es acorde con el proceso histórico, ya que el uso de símbolos abstractos se da por medio de una definición sin conexión con el nivel numérico. Esta presentación de la variable produce saltos en el aprendizaje que se convierten en dificultades conceptuales. Las dificultades conceptuales sobre variación se diagnosticaron a través del análisis y la interpretación de los resultados de una prueba aplicada en dos colegios de Bogotá, en el marco de un proyecto de grado[2].

La reflexión final recoge las conclusiones del artículo y plantea algunas sugerencias que podrían contribuir a prevenir dificultades a futuros estudiantes de álgebra en octavo grado.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra han demostrado que muchos de los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra en octavo grado de la educación básica tienen dificultades. Para Kieran y Filloy (1992, p. 28) éstas se presentan porque

> aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones.

Estas dificultades se reflejan en errores que cometen los estudiantes cuando hacen tareas algebraicas. Booth (1988) los clasificó de acuerdo a cuatro aspectos:

La clase de relaciones y de métodos usados en aritmética. Cuando se presentan errores en la generalización de relaciones y procedimientos, las dificultades no se deben tanto al álgebra misma sino a problemas en la aritmética que no se corrigieron. Ya que el álgebra es, en muchos aspectos, aritmética generalizada, se requiere que los estudiantes hayan asimilado la aritmética de forma que les permita efectuar computaciones con cierta competencia y flexibilidad para pensar numéricamente. Por ejemplo: Tall et al. (1993) encontraron que la respuesta a la expresión $2 \times 6 - 4 + 40/2$ es 24 para la mayoría de estudiantes (61%) porque el resultado lo determinan si-

2. Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Matemáticas. Director: Gloria García de García. Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Santafé de Bogotá, D.C., 1996.

guiendo el orden de aparición de los símbolos y no el orden de precedencia en las operaciones.

El uso de la notación y las convenciones en álgebra. Cuando se interpretan los símbolos haciendo falsas generalizaciones o cuando los símbolos se perciben en forma puramente sintáctica se presentan dificultades. Por ejemplo, Booth (1988, p.24) determinó que el signo “=”, “[...] típicamente interpretado en términos de una acción que debe ser realizada [...]” y no como un símbolo de equivalencia, interfiere en la resolución de ecuaciones, o en la simplificación de expresiones algebraicas.

El enfoque de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas. El objetivo general de la aritmética es encontrar una respuesta numérica. Por el contrario, el álgebra está centrada en las relaciones entre cantidades. Una de las dificultades se refiere a la incapacidad para aceptar una expresión algebraica abierta como una respuesta. Por ejemplo, Alonso et al. (1989, p.15) encontraron que los estudiantes hacen la conjunción de términos debido a la incapacidad para aceptar expresiones algebraicas como resultado de un problema, como en el caso de $5 + n = 5n$, porque hay “[...] una necesidad de dar como resultado un sólo elemento.” Esta dificultad se conoce como “necesidad de clausura”. Otra dificultad se presenta cuando los estudiantes son incapaces de generalizar reglas más allá de su campo de aplicación.

El significado de las letras y de las variables. Una de las diferencias más evidentes entre la aritmética y el álgebra es el uso de letras que representan valores. Las dificultades se presentan cuando las variables se interpretan como símbolos que representan un único valor, en forma similar a los números, como en el caso de la incógnita o del número generalizado, pero no como representación de variación.

El presente artículo está dirigido al análisis de este último grupo: las dificultades para interpretar la letra como variable. Para determinar en qué consisten esas dificultades es necesario precisar qué se entiende por variable en matemáticas.

NOCIÓN DE VARIABLE Y VARIACIÓN EN LA MATEMÁTICA

El significado matemático de las palabras **variable** y **variación** se revisó desde su definición semántica y su uso en el lenguaje común, hasta la conformación de su noción en la historia de la matemática.

De acuerdo con algunos diccionarios consultados **variable** es un adjetivo para nombrar algo que cambia, lo que varía; **variación** es la acción de cambiar o variar; mientras que **cambio** es el resultado de la variación o modificación. Se puede concluir que las definiciones semánticas de variable y variación se relacionan con la definición de cambio pero que cada palabra tiene un sentido y una función propia en la oración que las diferencia del cambio mismo.

En el sentido común, la palabra variable también se usa para calificar, sin embargo, su uso es más frecuente en situaciones que cambian de estado en corto tiempo, como en el caso de persona variable o clima variable, y no en otras situaciones cotidianas de cambio. Por ejemplo, ante el cambio de la luz del día, o si aumenta el costo de vida, o si un niño crece, no se hace referencia a la palabra variable sino al cambio, al resultado de la modificación: ¡ya es de noche!", "¡Cómo has crecido!", "¡Cómo está de cara la vida!".

En el sentido común no se presta atención a las causas de estos cambios como sí se hace desde el punto de vista científico. La ciencia experimental determina qué aspectos de la situación en estudio modificaron su valor para que se diera el cambio y cuánto variaron. Estos aspectos que cambian de valor se llaman variables y los valores que puede tomar la variable se llama variación. Por ejemplo, la variable del crecimiento es la estatura y su variación es de 0 a 250 cm; la variable del costo de vida es el precio de los artículos pero su variación no tiene un límite definido en un tiempo específico ya que hay otra cantidad de factores que afectan. El significado científico de estas palabras está directamente relacionado con su noción matemática, ya que el avance de la ciencia experimental se apoya en la matemática y a su vez ésta avanza gracias a las necesidades de la ciencia.

Evolución de la noción de variación: una aproximación a la historia de la matemática

La importancia de establecer la noción matemática de variable llevó a una aproximación a la historia de la matemática. Esta revisión indica que esta noción es el resultado del desarrollo de un proceso de conocimiento matemático que tardó varios siglos. Este proceso comprende a su vez dos procesos relacionados entre sí pero con un desarrollo propio: *generalización de cantidades variables y simbolización algebraica.*

Proceso de generalización de cantidades variables

El proceso de generalización de cantidades variables es secuencial desde el concepto de número hasta el uso de cantidades variables con un sentido de variación. Este proceso comprende dos etapas: una primera etapa que se remonta al uso de los números en las primeras civilizaciones hasta la construcción del concepto de número y otra etapa que parte desde el uso de cantidades generales hasta la aparición de cantidades variables. A la primera etapa la denominamos *Concepto de número* y a la segunda *Cantidades variables*.

En la etapa *Concepto de número*, los números y su representación, los numerales, se construyeron a partir de la observación de las propiedades cuantitativas de las colecciones de objetos de la vida cotidiana de las diferentes culturas. Por ejemplo, para conocer si un grupo de animales estaba completo era necesario contarlos, es decir, referirse a la cantidad del grupo. Inicialmente el uso de números no implicaba un concepto de número, ya que la cantidad encontrada no estaba desligada de los objetos mismos; "[...] los números eran directamente percibidos por ellos como una propiedad inseparable de una colección de objetos (...)" (Aleksandrov et al., 1994, p. 24). Por ejemplo, no usaban el mismo número para cinco barcos que para cinco ovejas.

Posteriormente, las cantidades se compararon con otras cantidades más fáciles de reconocer, como los dedos de la mano o de los pies. La repetición continua de este proceso y la regularidad de las propiedades cuantitativas de las diferentes colecciones permitió determinar la cantidad como la única propiedad que no cambia de la colección y utilizar los números para representarla. Así, si hay cinco barcos o cinco ovejas, se utiliza el mismo número porque hay la misma cantidad. Cuando se encontró que un número es el mismo número de cualquier colección con esa misma cantidad de objetos, sin interferencia de las propiedades cualitativas, se logró deducir el concepto de número[3].

Frente a la exigencia de recordar los resultados aparecieron los símbolos numéricos. Como primera etapa se utilizaron los dedos, luego los palos que podían representar los dedos y por último, cada cultura desarrolló su propio sistema, logrando algunos, una numeración sucesiva sin límites. Debió pasar mucho tiempo hasta el uso del sistema posicional decimal, cuando los árabes lo dieron a conocer en Europa. Las ventajas de este sistema, por encima de otros como el romano, es que la escritura de números grandes requiere de pocas cifras y se pueden determinar algoritmos para agilizar los cálculos.

En la etapa de *Cantidades variables* encontramos que en la historia de la matemática, el incremento del comercio trajo consigo nuevos problemas matemáticos, como por ejemplo, hallar el valor de una cantidad desconocida

3. "El número [...] es aquella propiedad de las colecciones de objetos que es común a todas las colecciones cuyos objetos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, unos con otros, y que es diferente en aquellas colecciones para las cuales tal correspondencia es imposible." (Aleksandrov et al., 1994, p. 26)

en una suma. Durante el período comprendido entre 1700 a. C. y mediados del siglo XVII el uso de cantidades desconocidas derivó en la aparición de la incógnita. La incógnita representaba un número particular, es decir, un número desconocido pero específico. En el siglo III a. C., los griegos reconocieron que la sucesión de números se podía prolongar indefinidamente y que podían “referirse a los números en general y formular y probar teoremas sobre ellos.” (Aleksandrov et al., 1994, p. 33) Las cantidades generales se usaron para establecer propiedades de los números o para la solución de problemas con incógnitas específicas. Esto fomentó el progreso en la resolución de ecuaciones, por ejemplo, Diofanto (c 250 d. C.) desarrolló un sistema para resolver ecuaciones de primer grado e incluso de tercer y cuarto grado.

En el siglo XVII, debido a las necesidades de la vida diaria y al desarrollo de la ciencia, la física centró su estudio en el movimiento y por tanto en el cambio. Esto conllevó a hablar de magnitudes variables o magnitudes que variaban su valor[4]. El estudio de la relación entre dos o más magnitudes variables dio lugar a la noción de variación. El proceso de generalización de estas relaciones se especificó en el concepto de función.

La abstracción de variables concretas tales como tiempo, distancia, velocidad, etc. condujo al uso de la variable como herramienta de la matemática para representar cantidades con posibilidad de variación dentro de un rango de valores específico.

La variación en matemáticas se encuentra en otros conceptos que se desarrollan a partir del concepto de función como en fórmulas y en inecuaciones. Con Descartes (1637) y la aparición del álgebra geométrica se tuvo la posibilidad de visualizar la relación de variación entre variables mediante gráficas cartesianas.

Proceso de simbolización algebraica

La representación simbólica de la noción de variable en la matemática tiene un recorrido bastante largo durante la historia. En primer lugar se construyó su noción y su forma simbólica fue apareciendo posteriormente hasta conformarse el sistema actual de simbolización algebraica[5]. Este sistema supera la referencia a lo concreto y permite que la matemática avance en forma más abstracta mediante el uso del lenguaje simbólico.

El uso de letras se dio gradualmente, desde la escritura textual de situaciones que involucraban incógnitas, pasando por el uso de abreviaciones para representar la incógnita, hasta conformarse el sistema algebraico con el

4. “Como reflejo de las propiedades generales del concepto de cambio aparecen en la matemática los conceptos de magnitud variable y función.” (Aleksandrov et al., 1994, 65)
5. “La forma del Álgebra ha ido, en general, siempre por detrás del contenido del Álgebra [...]” (Enfedaque, 1990, p. 25)

uso de letras para representar las variables. Kieran (1994) clasifica este proceso en tres etapas: e*tapa retórica, etapa sincopada y álgebra simbólica. L*a etapa retórica comprende el período anterior a Diofanto (c 250 d. C.). Se caracteriza por el uso del lenguaje natural para describir la resolución de problemas y la carencia de símbolos o signos especiales para representar la incógnita o valor específico de una cantidad desconocida. Por ejemplo, usaban la palabra "montón" para representar la incógnita. La etapa sincopada se inicia con Diofanto y se prolonga hasta Vieta. Se caracteriza por el uso de abreviaciones para representar algunas operaciones y de letras para representar cantidades desconocidas. Con Diofanto se inicia el simbolismo algebraico ya que fue el primer matemático en utilizar símbolos para representar cantidades desconocidas. El álgebra simbólica se consolida con Vieta y Descartes. Vieta usa letras no sólo para representar incógnitas sino para representar coeficientes generales. Da un salto definitivo entre la aritmética y el álgebra ya que consideró que la aritmética trataba de números mientras que el álgebra, la "logística speciosa", era un método de operar con especies o formas de cosas. El álgebra se convirtió "en un estudio de tipos generales de formas y ecuaciones". Descartes parte del análisis de Vieta para desarrollar su geometría analítica. Logra independizar el cálculo algebraico de la geometría y utiliza por primera vez, prácticamente, toda la notación actual salvo la convención de considerar constantes a las primeras letras del alfabeto y variables a las últimas.

Hacia 1700 se generaliza el sistema algebraico actual. Con el Álgebra simbólica se hace posible expresar soluciones generales y usar la variable como una herramienta para representar estructuras matemáticas, representar un rango de variación, o expresar y analizar relaciones entre variables. Las características de este sistema de simbolización impulsaron el desarrollo de la matemática como ciencia y el de otras ciencias.

A lo largo de la revisión en la historia de la matemática se encontró que no hay una definición de variable o de variación, como sí es el caso del concepto de número. Se estableció que la noción de variable es una herramienta de la matemática para representar la variación, la cual se determina mediante un rango específico de valores. El carácter abstracto de la noción de variable lo adquiere a través del desarrollo de un proceso de conocimiento matemático que tiene su origen en lo concreto. Este proceso fue bastante largo hasta que se logró el paso entre el uso de números y el uso de cantidades generales, iniciando una etapa de construcción de las cantidades variables. Aunque esta etapa se da a partir del uso de incógnitas que representan un sólo valor, cuando se estudió el cambio la variable adquirió una nueva dimensión, una concepción dinámica, por cuanto pasó a representar rangos de variación. La simbolización de la variable fue el resultado de un proceso de escritura desde el lenguaje natural, pasando por abreviaciones, hasta el uso de letras como representación de variación.

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN: UNA MIRADA A LOS LIBROS DE TEXTO

La revisión de algunos textos[6], usados en nuestro país durante la última década, señala que la forma de presentar la noción de variable no es paralela al desarrollo de su evolución histórica. Esto no quiere decir que la enseñanza de todos los conceptos matemáticos debe hacerse en esta forma. Sin embargo, con respecto al concepto de variación valdría la pena considerar fases similares a aquellas indicadas en la historia.

Esta revisión se enfocó hacia tres aspectos: la presentación de la variable, el uso de letras y la presentación de la noción de variación. La interpretación de la información recolectada sobre cada uno de estos aspectos llevó a concluir lo siguiente: la variable se define como una letra para representar cantidades desconocidas [7]o números generalizados[8] pero no como una herramienta para representar la variación; el uso de la letra en su carácter abstracto es el resultado de la manipulación de expresiones algebraicas bajo ciertas reglas y no el resultado de un proceso de generalización y simbolización; la letra como representación de variación, o la concepción dinámica de la variable, se presenta como parte de la definición de función, hacia el final del libro, pero no hay una introducción de la noción de variación ni de sus diferentes formas de representarla: fórmula, tabla numérica o gráfica cartesiana.

La forma de presentar la noción de variable a los estudiantes influye en el aprendizaje. De acuerdo con el proceso histórico, la conformación de esta noción lleva un proceso continuo y secuencial. Continuo porque no hay rupturas entre la aritmética y el álgebra, y secuencial porque para lograr la variable fue necesario el uso de la letra como incógnita y luego como cantidades generales, antes de pasar a representar la variación.

De acuerdo con los resultados de la revisión de textos, la forma de presentar la noción de variable no es continua ya que hay saltos entre la aritmética y el álgebra, por ejemplo, cuando se hace uso de símbolos abstractos sin conexión con el uso de números. Tampoco es secuencial ya que se presentan diferentes usos de la letra, como incógnita, como cantidad general, como

6. Baldor, *Álgebra Elemental* (1970); Barnett y Kearns, *Matemáticas octavo grado* (1995); Berrío, *Matemática Universal 8* (1995); Londoño et al., *Dimensión Matemática 8* (1994)
7. "Las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z." (Baldor, 1970, p. 5)
8. "La variable es un símbolo que [...] puede reemplazarse por un número de un conjunto que contiene más de un número." (Barnett y Kearns, 1995, p. 8)

forma de describir propiedades matemáticas o como variable, y esto sin orden particular de objetivos. Por tanto, los estudiantes no pueden desarrollar una noción de variable como el resultado de un proceso de generalización y simbolización.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN

Desde la perspectiva piagetiana, las rupturas que se presentan en el proceso de aprendizaje generan dificultades conceptuales en los estudiantes. Estas dificultades se producen cuando los estudiantes se encuentran ante nuevos conocimientos que requieren la acomodación o la modificación de sus estructuras cognitivas existentes. En este sentido, las dificultades conceptuales de los estudiantes tienen su originen en la escuela a través de la enseñanza.

Las dificultades conceptuales de los estudiantes en el aprendizaje de la noción de variación se diagnosticaron a través de una prueba. Esta se aplicó a estudiantes de octavo grado (13 a16 años) en dos colegios, uno privado y uno oficial. Con la ayuda del profesor de matemáticas correspondiente, se seleccionaron 10 estudiantes en dos niveles: con rendimiento normal y con dificultades en matemáticas.

Esta prueba se diseñó teniendo en cuenta los siguientes aspectos de la noción de variable: a) como herramienta de la matemática para representar la variación; b) en su carácter abstracto como el resultado de un proceso de generalización; c) en su carácter dinámico como representación de diferentes valores y d) en su simbolización por medio de letras que llevan a fórmulas, tablas o gráficas.

Se empleó el método del cuestionario con respuestas cerradas para identificar errores, ya que estos se consideran como ventanas para interpretar las dificultades, y con justificación de sus respuestas ya que estas permiten determinar obstáculos en la comprensión. Sin embargo, en esta prueba no se tuvo la oportunidad de realizar una entrevista personal con cada estudiante para que explicaran sus respuestas en forma verbal.

Se escogieron tareas sobre variación como: simbolizar la relación entre dos variables dada en forma verbal (ver Ejemplo 1); generalizar una relación de variación y relacionar diferentes representaciones (ver Ejemplo 2); e interpretar la letra como variable a partir de ecuaciones algebraicas (ver Ejemplo 3).

El análisis y la interpretación de los datos se centró en la clase de respuesta, la justificación de las respuestas y la coherencia entre estas dos. Con base en los resultados de este análisis se diagnosticaron dificultades sobre variación.

En un colegio hay seis veces más estudiantes que profesores. Si E representa la cantidad de estudiantes y P la cantidad de profesores, escriba la fórmula que relaciona E y P. Explique su respuesta.

Ejemplo Nº 1.

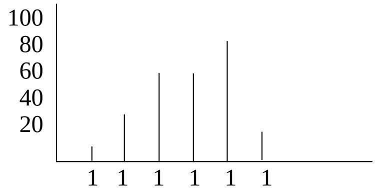
Análisis del Ejemplo Nº 1. El 40% de estudiantes logró la fórmula correcta pero sólo el 20% de estos estudiantes justificó su respuesta acorde con la fórmula; el 55% no escribió ninguna fórmula, en algunos casos escribían datos que no correspondían a la pregunta planteada, por ejemplo, respuestas como $+E$, $-P$ para simbolizar más cantidad de estudiantes y menos cantidad de profesores; el 35% escribió una justificación que no correspondía con su respuesta, por ejemplo $E+P$ porque si E es el mayor número de los estudiantes P sería el menor número de profesores, $P = 6$, $E = 12$ y el 30% justificó con un valor numérico, por ejemplo $60 = 6P$ o $P \cdot 6 = 36$.

La interpretación de estos resultados permite diagnosticar dificultades para simbolizar por medio de letras una relación de variación dada en forma verbal y asignar un carácter abstracto a las letras sin referencia a lo numérico.

Un automóvil consume 1 galón de gasolina por cada 20 kilómetros recorridos. a) Hacer una tabla para mostrar el consumo de gasolina y de kilometraje recorrido durante un trayecto de 120 kilómetros. b) Hacer una gráfica que muestre el resultado de la tabla. c) Determinar cuántos kilómetros se recorrieron con un consumo de 8.5 galones. d) Explique cómo encontró la solución.

Ejemplo Nº 2.

Análisis del Ejemplo Nº 2. a) El 55% de estudiantes estableció una relación de variación entre el consumo de gasolina y los kilómetros recorridos en forma correcta; el 15% no comprendió el sentido de variación para la gasolina, ya que mientras los kilómetros variaban de 20 en 20 hasta 120, el valor para la gasolina fue 1 para todos los valores; el 10% no hizo tabla. b) Los estudiantes hacen diferentes gráficas o no responden. El 30% señaló una recta en un plano cartesiano, pero sólo el 10% de estos partió del origen, mientras el otro 20% lo hizo desde (1,20). El 15% relaciona los valores de cada variable en un plano cartesiano pero no gráfica; el 30% utilizó gráfica de barras; el 5% otra gráfica; y el 20% no respondió la pregunta. Los que no varían sino una sola variable en la tabla, tampoco la varían en la gráfica, por ejemplo:



c) y d) Para determinar el número de kilómetros que se recorrieron con un consumo determinado emplean diferentes métodos y la explicación concuerda con la capacidad para responder correctamente: el 50% de los estudiantes encuentra la respuesta por aproximación numérica y su explicación también se hace en forma numérica o no corresponde a su respuesta; el 15% utiliza fórmula y encuentra un resultado correcto, al igual que logra explicar con coherencia su respuesta; el 30% responde en forma incorrecta, no utiliza fórmula ni logra coherencia en su explicación, por ejemplo: "recorrió 165 kilómetros porque si gasté un galón entonces 8.5 galones es 165 kilómetros" siguiendo el procedimiento a,b. Sólo el 5% no respondió esta pregunta.

Con base en estos resultados del análisis se diagnosticaron algunas dificultades en los estudiantes: utilizar la variable como herramienta para representar la variación, por ejemplo, cuando no logran escribir una fórmula correcta para encontrar relaciones de variación entre dos variables; representar la variación en sus diferentes posibilidades, tabla, fórmula, gráfica.

a) Explique cuándo es verdadera la expresión $L + M + N = L + P + N$. siempre/algunas veces/nunca. b) Explique qué se puede decir acerca de c, si $c + d = 10$ y c es menor que d.

Ejemplo Nº 3.

Análisis del Ejemplo Nº 3. a) Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en: nunca 40%, algunas veces 20%. Ningún estudiante respondió que siempre y el 35% no respondió esta pregunta. El 5% no comprendió la pregunta y su respuesta fue dar el significado de las palabras nunca, siempre y algunas veces. El análisis de la explicación se relacionó con la variación: el 35% no tuvo en cuenta la variación, contestó que nunca porque no eran iguales; el 10% justificó su respuesta "algunas veces" con un valor numérico y el 10% justificó colocando el valor 0 para M y P, o cambiando las letras, P por M o al revés. b) El 80% respondió esta pregunta, sin embargo, sólo el 5% logró una respuesta general; el 25% dio una respuesta con un valor numérico; el 15% encontró diferentes valores para una misma letra, inclusive encontrando valores negativos para c y positivos para d; el 5% tiene en cuenta sólo la primera condición, por ejemplo, escriben: c puede ser 5 y d también 5, porque la otra condición no es necesaria.

A partir de este análisis se diagnosticaron dificultades en: interpretar la variable como representación de la variación, interpretar el carácter dinámico de la variable como representación de diferentes valores, interpretar el carácter abstracto de la variable por cuanto representa situaciones generales.

Conclusión

Los errores se pueden agrupar de la siguiente manera. Los estudiantes escriben una fórmula que no corresponde al enunciado o recurren al ejemplo numérico para justificar su respuesta; falta relación entre la representación de una misma situación de variación en gráficas, tablas o fórmulas; interpretan la letra en ecuaciones algebraicas con un único valor; o falta concordancia entre la respuesta y su justificación. La interpretación de estos errores permite hacer un diagnóstico de las dificultades de los estudiantes sobre variación, como son: representar la variación por medio de letras en fórmulas, generalizar una situación de variación, interpretar el carácter abstracto y dinámico de la variable en expresiones algebraicas, establecer la relación de variación entre dos variables en una tabla, en una gráfica o en una fórmula.

Con base en estos resultados, se puede concluir que las dificultades sobre variación tienen su origen en: un desarrollo del proceso de generalización en la etapa numérica por lo cual su nivel de abstracción está referido a lo concreto, a los números; memorización de reglas y procedimientos más que comprensión en tareas algebraicas; concepción estática de los símbolos al igual que los números y falta de experiencia en tareas de variación. Estas conclusiones sugieren que si la enseñanza-aprendizaje de la noción de variable se enfoca hacia el desarrollo de los procesos de generalización y simbolización, en forma secuencial y continua, muchas de estas dificultades podrán ser superadas por los estudiantes de octavo grado.

REFLEXIÓN FINAL

Las dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado en la comprensión y uso de la variable en su sentido de variación son conceptuales y se originan en la forma de enseñar el álgebra. Esto implica que pueden remediarse en la escuela.

A lo largo del análisis histórico se pudo determinar que la variable es la herramienta de la matemática para representar la variación y que su noción es el resultado de la evolución de un proceso de conocimiento que tardó muchos siglos. Este proceso es continuo y secuencial lo cual implica que no hay una ruptura entre el concepto de número y la noción de variable. Esto sugiere que el estudiante, antes de usar la variable, necesita consolidar su concepto de número y operaciones con ellos para así desarrollar un proceso continuo que establezca vínculos entre los números y las variables.

Si la enseñanza de las matemáticas lograra presentar a los estudiantes tareas apropiadas para superar el salto entre la aritmética y el álgebra, y entre el uso de números y letras, ellos podrían pasar de una concepción estática a una concepción dinámica de los símbolos, evitando así muchas dificultades. El enfoque de la enseñanza hacia los procesos más que hacia la automatización de rutinas permitirá establecer este vínculo y desarrollar procesos de generalización y simbolización en un proceso continuo que inicie desde los primeros años escolares.

REFERENCIAS

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y Laurentiev, M. A. (1994). *La Matemática: su Contenido, Métodos y Significado.* Madrid: Alianza Editorial.

Alonso, S., Alonso, M. E. (1989). Problemática de la Sintaxis Algebraica en el Bachillerato y Algunas Alternativas de Solución. *Cuadernos de Investigación. PNFAPM, ULIE, CIMAT, Guanajuato, 12,* 12-22

Baldor, A.(1970). *Álgebra Elemental.* Bogotá: Cultural Colombiana Ltda.

Barnett, R. A. y Kearns, T. J. (1995). *Matemáticas octavo grado.* Bogotá: McGraw-Hill.

Berrío M. (1994). *Matemática Universal 8.* Bogotá: Bedout Editores.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginnig Algebra. En NCTM (Ed.), *The Ideas of Algebra*, K-12, (pp. 20-32). Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1994). Doing and Seeing Things Differently: A 25 Year Retrospective on Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (6), 583-607

Kieran, C. y Filloy, Y. E. (1992), El Aprendizaje del Álgebra Escolar desde una Perspectiva Psicológica. *Planteamientos, 1*(3), 27-49.

Razali, R. M. y Tall, D. (1993). Diagnosing Students' Difificulties in Learning Mathematics. *International Journal for Mathematics Education, Science and Technology, 24*(2), 209-222.

Carmen Andrade
Gimnasio Moderno
Carrera 9 Nº 74-99
Tel.: 2110810 - 2730786
Bogotá, Colombia