

RESOLUCION DE PROBLEMAS CON IDEAS DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Claudia Vargas

Universidad del Bío-Bío. (Chile)

cvargas@ubiobio.cl

Palabras clave: resolución de problemas, pensamiento crítico, matemática, heurística, método

Key words: problem solving, critical thinking, mathematics, heuristic, method

RESUMEN

En el taller de Resolución de Problemas con ideas del Pensamiento Crítico, se presentó la metodología de resolución de problemas APRENC-Mates que tiene su origen en las ideas más recientes del pensamiento crítico. Inicialmente el método se descubre como un aporte para la formación de maestros de primaria, pero se puede considerar un aporte del pensamiento crítico a la resolución de problemas para la enseñanza de la matemática. Se destaca el énfasis que pone el pensamiento crítico en dar una explicación clara y precisa de la solución de un problema a otros, ya sea compañeros de clase o por parte del profesor hacia sus alumnos. En este reporte destacamos además las competencias heurísticas que se pueden desarrollar a través del método presentado.

ABSTRACT

In the workshop on Problem Solving with ideas from Critical Thinking, we presented the APREN-Mates problem solving methodology that originates in the latest ideas on critical thinking. Initially the method was obtained as a contribution to the training of primary school teachers, but also as a contribution of critical thinking to problem solving in math education. The emphasis that critical thinking puts on giving a clear and precise explanation for the solution of a problem to others, whether it is between classmates or by the teacher towards his students. This report also highlights the heuristic skills that can be developed through the method presented.

■ Introducción

Cuando se habla de matemáticas, *ejercicio y problema* son dos conceptos que se pueden confundir. Un problema de matemáticas se distingue por cuatro características fundamentales:

1. Debe ser comprendido por el estudiante con absoluta claridad.
2. La persona no lo sabe resolver.
3. El problema debe ser accesible.
4. A través de la reflexión, la persona puede llegar a su propia solución o bien constituir un medio para llegar a un aprendizaje.

De lo último se desprende que el objetivo de resolver un problema es constituir un acto de aprendizaje que proviene del esfuerzo por resolver. Si existe esfuerzo para resolver un problema, éste puede provenir de dos fuentes: la propia inspiración o de solicitar la ayuda de otra persona y que esta acompañe o guíe en el proceso de resolución. En el caso de un alumno esta ayuda puede provenir de un profesor o de un compañero de clase. En general, se tiene un problema en función de lo que provoca en la persona a la que se le presente, ya que lo que es problema para uno, no es un problema para otro.

Para De Guzmán,

“Un verdadero problema es una situación en la que sabes, más o menos, adónde quieres ir, pero no sabes cómo llegar” (De Guzmán, M., 2004)

El “cómo llegar” en un problema, tiene diferentes fases:

1. Fase de preparación en la cual se produce la familiarización con el problema y comprensión de su naturaleza. Se considera por la imposibilidad de resolución sin comprensión.
2. Fase de producción en la que se intenta descubrir vías de solución.
3. Fase de verificación.

■ Dos métodos de resolución de problemas

George Pólya, en su libro *Cómo Plantear y Resolver Problemas* (Pólya, 1965), introduce “la lista” que son cuatro fases que conforman su Método de Resolución de Problemas:

1. Comprender el problema: entender de qué tipo de problema se trata, mirar si los datos son suficientes.
2. Confección de un plan: preguntarse si se ha encontrado con situaciones similares, intentar enunciar el problema de otra forma, tener en cuenta todos los datos.
3. Ejecución del Plan: cuando se lleva a cabo el plan, ir comprobando cada paso, asegurarse de que cada paso es correcto, preguntarse si se puede demostrar que es correcto todo.
4. Visión retrospectiva. Preguntarse si es posible verificar el resultado o si se podía obtener lo mismo de otra forma.

Para cada paso, Pólya diseñó unas preguntas meta-cognitivas que se debe formular quien resuelve el problema. Por ejemplo, para la fase de Comprender el problema, algunas preguntas son: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la definición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿es insuficiente?, ¿es redundante? En cada fase, Pólya evoca preguntas que de alguna manera guían hacia la solución.

Como vemos, siempre que se resuelve un problema debemos pensar y tomar decisiones sobre los datos, el camino de resolución, y sobre nuestro proceso hacia conseguir la solución. Idealmente haciendo juicios críticos acerca de lo que nos conviene.

Esto nos llama a estudiar el pensamiento crítico cuya definición contemporánea es la siguiente:

“Critical thinking is reasonable, reflective thinking that is focused on deciding what to believe or do”.

R. Ennis.

La traducción de esta cita es: el pensamiento crítico es un pensamiento razonable y reflexivo que se enfoca en decidir qué creer o hacer.

Robert Ennis en *Critical Thinking* (Ennis, 1996) introdujo lo que considera los seis elementos básicos del pensamiento crítico “La aproximación FRISCO”: Focus, Reasons, Inference, Clarity, Situation y Overview, que ayuda a hacer un chequeo mental para el pensamiento crítico y está desarrollada para juzgar ideas o crear nuevas ideas.

La similitud de FRISCO con los métodos de resolución de problemas nos llevaron a considerarlo como base para desarrollar una adaptación de él para la resolución de problemas de matemática (Vargas, 2011).

Esta adaptación la hemos denominado APRENC-Mates que es un acrónimo que significa Aprendo Matemáticas. APRENC es aprendo lengua catalana y Mates es Matemáticas coloquialmente en España.

APRENC-Mates se desglosa en *Análisis del enunciado del problema (A)*, *¿Por qué estos datos? (P)*, *Ruta de Resolución (R)*, *Entorno del Problema (E)*, *Nitidez del proceso (N)* y *Comprobar proceso y resultado (C)*. A continuación se explican cada una de estas fases:

■ Análisis del enunciado del problema (A)

Cuando resolvemos un problema de matemáticas lo primero que hacemos para entenderlo es reconocer qué se pide en el problema. Debemos preguntarnos: ¿está bien formulado el problema?, ¿qué se quiere resolver?, ¿qué se quiere saber? Generalmente, si no se tiene una mínima idea de lo que podría ser la solución al problema, cuesta comenzar. Por esto es importante intentar comprender y analizar a qué se quiere llegar.

■ ¿Por qué estos datos? (P)

Una vez que se ha identificado el problema corresponde analizar la información disponible con preguntas como las siguientes: ¿por qué esta información sirve para resolver el problema?, ¿por qué esta información es un soporte para llegar a la respuesta?, ¿cómo se pueden interpretar estos datos?

Cuando ya se tiene claro para qué sirve la información disponible, es necesario valorar si esta información es suficiente para resolver el problema. En caso afirmativo, se debe elaborar una estrategia

de resolución y aplicarla a partir de unas razones. En otro caso, se sugiere buscar alternativas y regresar a **(A)** o a **(P)**.

Además, una vez que se formulan las primeras hipótesis y se dan las primeras razones a partir de los datos conviene preguntarse si los argumentos que estamos usando para resolver el problema son válidos.

■ Ruta de Resolución (R)

Al resolver un problema de matemáticas, necesitamos razones para elegir un camino de resolución. Y a partir de alguna afirmación que sea verdadera en matemáticas, ya sea un teorema o el resultado de una experimentación, entonces se puede sacar una conclusión que permita decidir el camino a seguir.

Por lo tanto la Ruta de Resolución es el esquema de pasos para conseguir resolver el problema, teniendo en cuenta que puede haber más de un esquema de resolución.

■ Entorno del Problema (E)

Una vez elaborado el plan acción se debe examinar la situación. La situación incluye todos los aspectos que están relacionados con el problema. El contexto de problema, las fuentes de información, entre otros, para ver si el plan de acción está en consonancia con la situación.

Para resolver el problema es crucial el reconocimiento de:

- El contexto en el que está planteado un problema
- La experiencia que tenga quien resuelve el problema con ese tipo de problemas
- La falta de experiencia con un tipo de problemas concretos.
- El tipo de conocimiento matemático que se usa para resolverlo

■ Nitidez del proceso (N)

Es importante que lo que se escriba como una explicación del problema y del proceso esté claramente expresado por quien resuelve el problema. Conviene hacerse la pregunta, ¿qué estoy diciendo con todo esto?

Cuando se escribe o habla acerca de algo, ser claro y preciso en lo que se dice, da un valor añadido al contenido. Resulta idóneo para la persona que resuelve el problema y a sus interlocutores formular claramente la resolución del problema para dar a entender más eficazmente el camino elegido, la matemática utilizada, los pasos de la resolución.

■ Comprobar proceso y resultado (C)

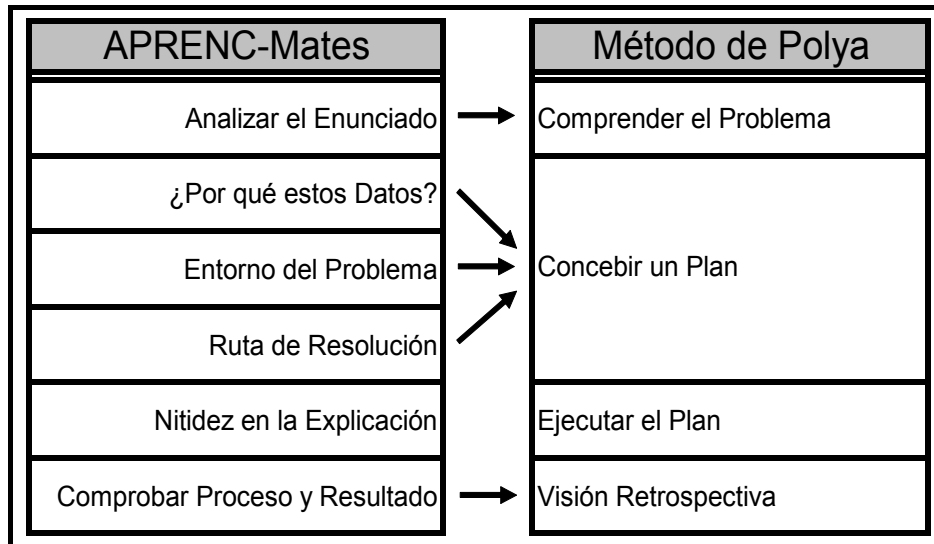
Es el paso final. Se trata de revisar lo que está hecho, chequear los descubrimientos realizados, los argumentos utilizados, reunirlos todo y comprobar que la solución del problema es correcta y coherente.

Con esta fase se resume lo que se ha descubierto, decidido, considerado, aprendido e inferido para poder resolver el problema. El mensaje en este punto es “junte todo y compruebe si tiene sentido”. Esto debería hacerse no sólo al final sino continuamente a medida que se avanza por la resolución.

■ El aporte de APRENC-Mates y las competencias heurísticas a desarrollar

Existen similitudes entre APRENC-Mates y el método de Pólya. En este trabajo queremos resumirlas en la siguiente tabla.

Tabla de similitudes entre los métodos.



En efecto, hay fases de APRENC-Mates inspiradas en el pensamiento crítico, que son desgloses de la fase *Concebir un Plan* en el Método de Pólya como se puede apreciar en la *Tabla de similitudes entre los métodos*. Pero también se aprecia que no existe conexión alguna con la fase de explicar soluciones a otros. APRENC-Mates incluye el hecho de considerar dar una explicación clara (Nitidez) de los pasos ejecutados de un problema a otras personas.

Por su parte, el método de Pólya no solicita explicar claramente los pasos ejecutados para resolver un problema a terceros. Por tanto, destacamos que el aporte de este método radica en considerar la Nitidez en las explicaciones de los pasos del problema resuelto. Es decir, considerar la importancia de ser claro y preciso cuando explicamos a otros los pasos de la Ruta de resolución.

En la investigación (Vargas, 2008) pudimos entender que resulta significativo añadir esta idea del Pensamiento Crítico a la formación de profesores. Ahora, en el presente artículo queremos poner el énfasis en que esta idea del Pensamiento Crítico es un aporte a considerar en la enseñanza de la resolución de problemas para niños y jóvenes. Esto por la posibilidad de diálogo, socialización y capacidad de debate que puede fomentarse en los educandos. Además, consideramos que es posible trabajar competencias argumentativas y retóricas cuando se resuelven problemas de matemática, las cuales son transversales a todas las asignaturas en la educación básica y media, y también a nivel universitario.

Además, tal y como se aprecia en la *Tabla explicativa del método APRENC-Mates*, hay estrategias heurísticas que se pueden desarrollar a través de este método que es importante destacar junto con las correspondientes preguntas meta-cognitivas que cabe hacerse.

Tabla explicativa del método APRENC-Mates.

APRENC-Mates	Preguntas meta-cognitivas	Competencia heurística a desarrollar
Analizar el enunciado	¿Qué se quiere resolver? ¿Son suficientes los datos del enunciado del problema?	Identificar lo que es importante en el problema
Por qué estos datos	Una vez que formulas una hipótesis a partir de los datos o piensas en el resultado, ¿revisas si tus argumentos son válidos?	Controla su proceso Validar sus ideas Tomar decisiones
Ruta de resolución	¿Te planteas construir una ruta de resolución?	Seguir una secuencia de pasos para conseguir el objetivo
Entorno del problema	¿Qué conocimiento matemático se usa para resolver este problema?	Identificar en qué área de la matemática está trabajando, las informaciones que se necesitan
Nitidez en la explicación	¿Soy capaz de explicar por escrito claramente el desarrollo de la ruta de resolución?	Dar a conocer con claridad su proceso
Comprobar proceso y resultado	¿Lees todo lo que has hecho y compruebas que es correcto?	Repasar el proceso globalmente.

Por ejemplo, vamos a destacar una de ellas: APRENC-Mates invita a ser bien conscientes acerca de la matemática que estamos usando en la resolución de un problema. A través de APRENC-Mates somos llamados a investigar cuál es el contexto matemático (Entorno del Problema) que subyace en la solución. Por ejemplo, para el problema que enunciarnos a continuación y que se trabajó en el taller, el entorno del problema está ligado a un principio matemático.

Problemas de pelos: ¿Se puede asegurar que en Barranquilla existen al menos dos personas con el mismo número de cabellos en la cabeza? Encuentra un argumento que confirme la veracidad de tu respuesta.

Este problema se resuelve muy fácilmente si se conoce el Principio de Dirichlet o Principio del Palomar: Si n palomas se distribuyen en m palomares, y si $n > m$, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma. En efecto, Si hay un palomar con 10 agujeros y tenemos 11 palomas, lo cierto es que la paloma número 11 deberá entrar en uno de los agujeros. En el caso del problema planteado, las palomas son las personas y la cantidad de cabellos son los nidos.

Pero para resolver este problema se necesita saber que un humano tiene en promedio 200.000 cabellos y que en Barranquilla hay 1.897.989 (aprox.) de habitantes (Fuente Wikipedia).

Desconocer las informaciones cuantitativas de cantidad de habitantes y cantidad aproximada de cabellos en un humano, podrían llevarnos a reconocer la desinformación como una limitación. Igualmente, si no se conoce o no se está mínimamente relacionado con el Principio de Dirichlet (del Palomar), se tendrá que deducir y explicar con palabras propias el fundamento de la solución. Por tanto, el pensamiento crítico da importancia a estar informado, buscar información para conocer lo que hemos denominado Entorno del problema.

Otro aspecto que queremos destacar en el presente artículo, es que APRENC-Mates hace una distinción bien precisa entre fases de la resolución de un problema y Ruta de resolución que es la secuencia de pasos que resuelven el problema.

Por último, se debe decir que el pensamiento crítico también pone el acento en la necesidad de comprobar el proceso de la resolución. Esto se logra mucho más fuertemente en el sentido de dar coherencia al proceso puesto que en el pensamiento crítico es importante que lo que pensemos sea coherente al momento de tomar decisiones.

■ Algunos de los problemas trabajados en el taller

En la sesión de taller durante Relme 28, se entregó una hoja de trabajo a cada uno de los asistentes donde identificaron las fases del método de resolución de APRENC-Mates y de esta manera guiaron su resolución. Se trabajó en problemas clásicos de la resolución de problemas de matemática que citamos a continuación.

Problema de zánganos: Las abejas macho, es decir, los zánganos, nacen de huevos sin fecundar, y por lo tanto, tienen madre pero no padre. Las abejas hembra en cambio, nacen de huevos fecundados y por lo tanto tienen padre y madre. ¿Cuántos antepasados tendrán una abeja macho en la duodécima generación? ¿Cuántos de ellos serán machos?

Problema de Sumas de cuadrados: Algunos números se pueden expresar como una suma de dos cuadrados, pero otros números, no. Así por ejemplo 34 se puede escribir de la manera siguiente: $34=3^2+5^2$. Entre los números comprendidos del 1 al 50, ¿cuáles son iguales a la suma de dos cuadrados?

Problema del pastel: Con un solo corte recto puedes dividir un pastel en dos partes. Un segundo corte que atraviese el primero producirá probablemente cuatro partes, y un tercer corte (mira el dibujo)

puede llegar a producir siete partes. ¿Cuál es el mayor número posible de partes que puedes lograr con seis cortes rectos?

Problema bonito: En una circunferencia dibuje dos puntos y únalos. Obtendrá dos regiones. Dibuje tres puntos, únalos y obtendrá cuatro regiones... ¿Puede obtener una conjetura que le ayude a generalizar cuántas regiones se obtienen si se trazan n puntos?

■ Referencias bibliográficas

- De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- De Guzmán, M. (2004). *Cómo hablar, demostrar en matemática*. Base Universitaria. Anaya.
- Ennis, R. (1989). Critical thinking and subject specificity: clarification and needed research. *Educational Researcher* 18, 4-10.
- Ennis, R. (1990). The extent to which critical thinking is subject-specific: further clarification. *Educational Researcher*, 19 (4), 13-16.
- Ennis, R. (1991). Critical thinking: a streamlined conception. *Teaching Philosophy* 14, 5-25.
- Ennis, R. (1996). *Critical thinking*. New Jersey: Prentice Hall.
- Fisher, A. (2001). *Critical thinking: an introduction*. Cambridge. Cambridge University Press. 1-12.
- Hager, P., Sleet R., Logan P. y Hooper, P. (2003). Teaching Critical Thinking in Undergraduate Science Courses, *Science & Education* 12, 303-313.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona. Labor.
- Pithers, R.T. (2000). Critical thinking in education: a review. *Educational Research*, 42(3), 237-249.
- Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Serie matemáticas. México: Trillas.
- Saiz, C. (2001). *Pensamiento crítico: conceptos básicos y actividades prácticas*. Madrid: Psicología Pirámide.
- Vargas, C. (2008). *Resolución de problemas y pensamiento crítico*. APRENC-Mates y el método de Pólya. Un estudio preliminar en formación inicial de profesores. Treball de Recerca de Doctorat de Didáctica de la Matemática no publicado. Universitat Autònoma de Barcelona. España.
- Vargas, C. (2011). Resolución de problemas de matemáticas y pensamiento crítico APRENC-Mates: propuesta de innovación en formación inicial de maestros. *Revista Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 28, 117- 128.
- Vila, A., (2004). *Matemáticas para aprender a pensar*. Barcelona: Narcea.