Resolución de ecuaciones con un soporte geométrico: la obra de Omar Jayyam

José Ismael Arcos, Mónica Lorena Micelli
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México. (México)
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*", Buenos Aires. (Argentina)
ismael_arcos@msn.com, monikmathis@gmail.com

Palabras clave: matemática árabe, Jayyam, ecuaciones cúbicas
Key words: islamic mathematics, Khayyam, cubic equations

RESUMEN

El trabajo que se presenta es parte de una investigación en proceso, en la cual se concibe la Historia de la Matemática como un recurso didáctico. En este caso se aborda el asunto de la resolución de ecuaciones cúbicas, específicamente lo encontrando en la obra de Omar Jayyam, poeta y matemático árabe del siglo xi, quien realizó un trabajo minucioso de esta clase de ecuaciones. El gran aporte de la Matemática árabe que no siempre es valorizada. En este reconocimiento no solo se busca recuperar logros que han caído en el olvido sino que al estudiar el método geométrico de resolución permite integrar distintas ramas de la Matemática.

ABSTRACT

The work that is presented is part of a research process, in which it is conceived the history of mathematics as a teaching resource. In this case addresses the matter of the resolution of cubic equations, specifically what is missing from the work of Omar Jayyam, poet and Arab mathematician of the XI century, who did a thorough job in this class of equations. The great contribution of Arab mathematics that is not always valued. In this recognition, we not only seek to recover achievements that have been forgotten but that as we study the geometric method of resolution allows you to integrate different branches of mathematics.

Introducción

Bell indicaba que “ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las matemáticas” (1985, p. 54). Investigar y trabajar con los alumnos sobre la historia de la Matemática y cómo ciertos conceptos y métodos han evolucionado, proporciona elementos para la interpretación de cómo se construye un conocimiento matemático según las características de una determinada época y contexto.

Abordar su historia permite poner de manifiesto su dimensión cultural y no ver a la Matemática como un saber aislado de la sociedad, estático y cerrado. La historia permite al docente alcanzar una visión de la Matemática como un saber dinámico que está en constante expansión. Expansión que los estudiantes no siempre logran percibir y que en ciertas ocasiones provoca que ciertos métodos de resolución pasen al olvido, con todo el aporte didáctico que podrían tener.

Muchas veces los enfoques históricos sobre la Matemática se centran en algunas personalidades o momentos históricos, generalmente en el así llamado *Occidente*, como por ejemplo “El milagro griego” del cual hablan algunos investigadores (González, 2001). Es la intención del presente artículo estudiar el trabajo de Omar Jayyam, un matemático no debidamente reconocido si se considera la importancia de su obra.

Fundamentos teóricos

Muchos avances en la Matemática parecen por momentos haber caído en el olvido para los matemáticos de épocas siguientes, uno de los ejemplos es la obra de Jayyam. Las preguntas que surgen son ¿por qué ocurre esto?, ¿por qué grandes avances caen en la oscuridad del olvido? Houzel (1977, citado por González, 2004, p. 19), indicaba que “las reelaboraciones sucesivas que la Matemática hace de las teorías precedentes, atenúan su historia, y aquí hay que buscar una de las principales razones que provocan el que las Matemáticas sean, en un alto grado, negadoras de su propia historia”.

Estudiar la historia de la Matemática con los alumnos puede facilitar la comprensión no solo de la evolución dinámica de las ideas sino recuperar métodos de resolución olvidados que no conforman parte de los contenidos de la Matemática Educativa actual pero que podrían incluirse en las clases debido a que muchos de estos métodos permitirían una resolución más comprensiva conceptualmente y no tan memorística como a veces se presenta en las clases de Matemática.

Por otra parte, en la Matemática escolar, al menos hasta tiempos recientes, se han presentado por separado los contenidos algebraicos y aquellos de carácter geométrico, mientras que en la historia el surgimiento de nuevos conceptos o conocimientos con frecuencia ocurrían de manera que no siempre podía distinguirse con claridad a qué rama de la Matemática correspondían.

Así pues, el desarrollo de la Matemática no se da en forma fragmentada, ni tampoco lineal, aunque generalmente la forma se presenta a los estudiantes como un conocimiento ordenado y prolijo, lo que contribuye a que los alumnos la conciban como un conocimiento acabado. Estudiar su historia puede empezar a revertir estas ideas para construir una nueva mirada de la Matemática como un conocimiento “vivo” y “en constante movimiento”.

Ahora bien, por lo general, la reseña histórica que aparece en relación a las ecuaciones cúbicas se encuentra en el siglo XVI, con el conocido conflicto de autoría entre Cardano y Tartaglia, pero realmente ¿estos son los primeros trabajos al respecto? Si se amplía la mirada más allá de las fronteras de Europa se encuentra que no son los primeros avances al respecto pues en la Matemática desarrollada por los árabes, más precisamente por Omar Jayyam, se observa un estudio minucioso de esta clase de ecuaciones.

En este artículo se presentarán los primeros resultados de una investigación bibliográfica que tiene por objetivo aportar métodos gráficos de resolución de ecuaciones que pueden incluirse en la enseñanza de la Matemática acompañados de su evolución histórica. En las siguientes fases se buscará diseñar una secuencia didáctica que incluya estos métodos en la resolución para implementar con profesores y futuros profesores del área y así analizar los resultados obtenidos para poder evaluar si la incorporación de esta mirada histórica con la inclusión de métodos gráficos de resolución aporta una mejor comprensión del trabajo con cónicas en la resolución de ecuaciones cúbicas.

La intención es presentar en este artículo los resultados de la revisión bibliográfica sobre la obra de Jayyam para abordar la historia de la Matemática como un recurso didáctico. Por lo tanto, el objetivo que guía esta investigación es que los estudiantes logren desarrollar y conectar conceptos matemáticos en la resolución de ecuaciones cúbicas a través de métodos históricos.

■ La obra de Omar Jayyam

Antes de presentar la obra de Omar Jayyam, es importante contextualizar su trabajo. Para hacer referencia a las características más relevantes de la matemática árabe, se tomaran las palabras de Casalderrey quien plantea:

Confluyen en la ciencia árabe tres culturas matemáticas distintas: por una parte la babilónica, con su tradición astronómica y aritmética; por otra la griega, fundamentalmente platónica y aristotélica; y por otra parte la hindú, con una aportación básica, el sistema de numeración posicional, que habría de ser esencial para el desarrollo posterior de las matemáticas (2000, p. 18).

Esta confluencia de distintas culturas, característica propia de la matemática árabe permitió la conformación de un contexto apropiado para el surgimiento de resultados originales que consideramos de importancia destacar.

Con respecto al trabajo algebraico, se debe reconocer el gran aporte de Al-Jwarizmi (780-850 aproximadamente) para muchos historiadores reconocido como el padre del álgebra. Su libro fue escrito entre el año 813 y el 830 de nuestra era, el título traducido al español por Moreno es *El libro del Álgebra* (Al-Jwarizmi, 2009). En esta obra, el matemático árabe publicó los algoritmos para resolver cada uno de los tres casos (completos) de la ecuación de segundo grado, que con nuestra actual simbología corresponden a $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$ y $x^2 = bx + c$. Cada algoritmo se explicaba con la ayuda de una figura y para un caso particular, sin embargo la descripción se hacía de manera que podía aplicarse sin problemas con otros valores de b y c.

Con estos antecedentes, uno de los primeros matemático que se tiene registro en estudiar las ecuaciones cúbicas fue Omar Jayyam (1048-1131). Su obra, *Álgebra* fue escrita alrededor de 1074 y en ella se presenta su técnica de resolución que requería de métodos geométricos al estilo de Al–Jwarizmi con la diferencia que su trabajo hace uso de cónicas. Al parecer Jayyam había logrado averiguar que era imposible resolverlas utilizando únicamente regla y compás.

Al igual que Al–Jwarizmi con las ecuaciones cuadráticas, Jayyam analiza cada uno de los casos posibles de las ecuaciones cúbicas, identificando 14 situaciones distintas, cada una de las cuales resolvía de una forma diferente pero en todas empleando secciones cónicas. Esto era posible pues se requerían conocimientos disponibles en los *Elementos* de Euclides y *Las Cónicas* de Apolonio.

A pesar de tomar como base estas dos obras griegas su trabajo implicaba resolver geométricamente estas ecuaciones empleando para tal fin circunferencias, parábolas e hipérbolas equiláteras, con lo que rompía con ciertas ideas griegas de emplear solo regla y compás (Arcos, 2011). Para los matemáticos griegos el no cumplir la norma del uso de regla y compás en la solución de un problema significaba que dicha solución no fuese considerada como válida, por lo tanto Jayyam rompe esta norma y va más allá explorando la intersección de secciones cónicas asociadas a las distintas clases de ecuaciones cúbicas.

Como ocurría en la época, Jayyam consideraba sólo las raíces reales positivas, por lo que tenía que atender cada caso por separado. Aquí se transcribirán y comentarán sólo dos de ellos. También se describen las pruebas, siguiendo el texto de Moreno (2002), de acuerdo con el cual Jayyam se basaba en *Los Elementos* de Euclides y en *Las Cónicas* de Apolonio.

Así por ejemplo, de la primera de estas obras se recurre a una propiedad de la circunferencia, según la cual, si P es un punto cualquiera de una circunferencia y Q es la proyección perpendicular de P sobre un diámetro AB de la misma, entonces $\overline{\mathrm{AQ}} \cdot \overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{QP}}^2$.

Para la parábola (figura 1), si P es un punto de la parábola, Q la proyección perpendicular del punto sobre el eje de la parábola, V es el vértice y a es el lado recto (parámetro principal de la parábola), entonces se cumple la ecuación $\overline{\mathrm{QP}}^2 = a\,\overline{\mathrm{VQ}}$. Para una hipérbola, Apolonio obtuvo que el área del paralelogramo definido por las paralelas trazadas desde un punto de la hipérbola, a las asíntotas de la misma, y las asíntotas mismas, es constante, de manera que, para una hipérbola con asíntotas perpendiculares, siendo P y Q puntos de la hipérbola (figura 2), y A, B, C y D las proyecciones perpendiculares de esos puntos sobre las asíntotas, entonces $\overline{\mathrm{OC}} \cdot \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OE}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$.

Figura 1. Ecuación fundamental de la parábola

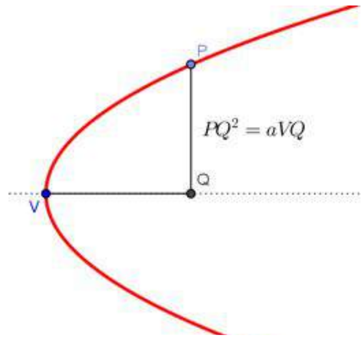
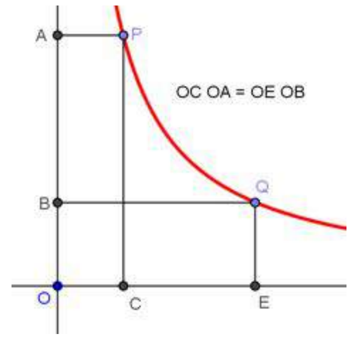


Figura 2. Ecuación fundamental de la hipérbola equilátera



Cubo de la cosa más cosa igual a número

Este caso corresponde, en nuestra notación actual a la ecuación:

$$x^3 + bx = c \qquad (1)$$

Para obtener el segmento de longitud *x*, que satisface la ecuación, a partir de los segmentos de longitudes *b* y *c* dados, Jayyam recurre a una parábola y una circunferencia, según nos indica:

Construimos un cuadrado de lado $\sqrt{b}$ (esto se hace encontrando la media proporcional entre *b* y la unidad mediante la proposición 13 del libro VI de los *Elementos*) y sobre él, apoyándonos en el lema 2, un paralelepípedo de altura *h* y volumen *c*, de manera que $\left(\sqrt{b}\right)^2 h = c$ y $h = \frac{c}{b}$. Dibujamos ahora una parábola de vértice O y lado recto $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{b}$, y una circunferencia de diámetro $\mathrm{OH} = h$ tangente al eje de la parábola en el vértice de ésta (figura 3).

Ambas curvas se cortan necesariamente en O y en otro punto P. Proyectamos P perpendicularmente sobre OH y obtenemos el punto X. El segmento $\overline{OX}$ es la solución.

Figura 3. Solución de Jayyam para "Cubo de la cosa más la cosa igual a número".

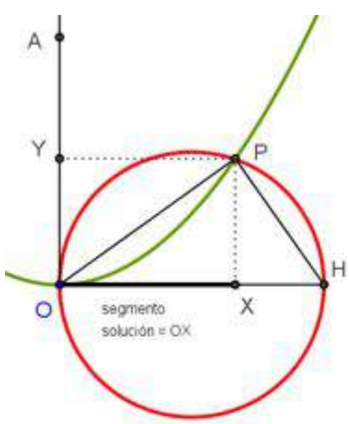
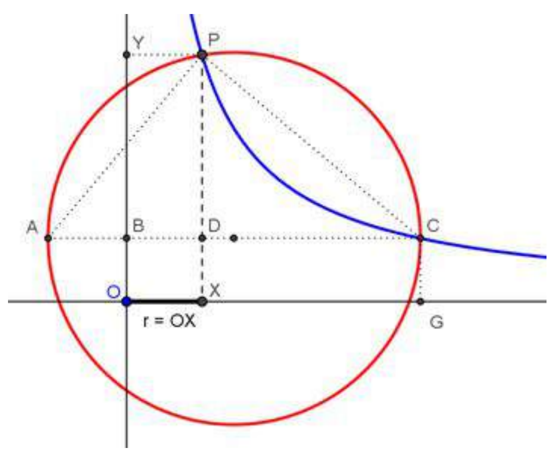


Figura 4. Solución de Jayyam para "Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más la cosa igual a número".



Prueba: Como P es un punto de la parábola con lado recto en el segmento $\overline{OA}$, tendremos que $\overline{\mathrm{YP}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OY}}$. Es decir $\overline{\mathrm{OX}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OY}}$, de donde:

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OX}}} = \frac{\overline{\mathrm{OX}}}{\overline{\mathrm{OY}}} \qquad \text{(1a)}$$

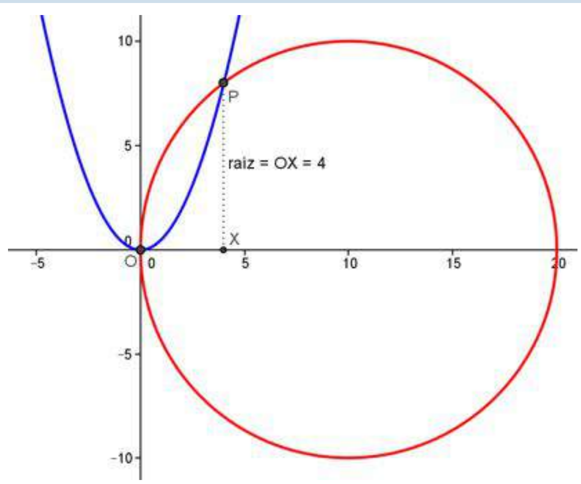
Y como P es un punto de la circunferencia (con diámetro OH), tenemos que $\overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{XH}} = \overline{\mathrm{XP}}^2$. Es decir $\overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{XH}} = \overline{\mathrm{OY}}^2$, de donde:

$$\frac{\overline{\mathrm{OX}}}{\overline{\mathrm{OY}}} = \frac{\overline{\mathrm{OY}}}{\overline{\mathrm{XH}}} \qquad \text{(1b)}$$

Combinando (1a) y (1b) obtenemos $\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OX}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{OX}}}{\overline{\mathrm{OY}}}\frac{\overline{\mathrm{OY}}}{\overline{\mathrm{XH}}} = \frac{\overline{\mathrm{OX}}}{\overline{\mathrm{XH}}}$, de donde $\overline{\mathrm{OX}}^3 = \overline{\mathrm{OA}}^2 \cdot \overline{\mathrm{XH}}$, y de aquí $\overline{\mathrm{OX}}^3 + \overline{\mathrm{OA}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} = \overline{\mathrm{OA}}^2 \cdot \overline{\mathrm{XH}} + \overline{\mathrm{OA}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} = \overline{\mathrm{OA}}^2(\overline{\mathrm{XH}} + \overline{\mathrm{OX}})$, $\overline{\mathrm{OX}}^3 + \overline{\mathrm{OA}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} = \overline{\mathrm{OA}}^2\overline{\mathrm{OH}}$. Pero $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{b}$, así que $\overline{\mathrm{OA}}^2 = b$, y $\overline{\mathrm{OH}} = h = \frac{c}{b}$, así que $\overline{\mathrm{OA}}^2\overline{\mathrm{OH}} = b \cdot \frac{c}{b} = c$, y la última igualdad queda $\overline{\mathrm{OX}}^3 + b\overline{\mathrm{OX}} = c$, lo que quiere decir que la longitud del segmento $\overline{\mathrm{OX}}$ es la solución buscada de la ecuación (1).

Así pues, Jayyam establece que una de las raíces de $x^3 + bx = c$, se encuentra al intersecar la parábola $y = \frac{1}{\sqrt{b}}x^2$con la circunferencia $\left(x - \frac{c}{2b}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2$. Supóngase entonces que se desea resolver la ecuación $x^3 + 4x = 80$, siendo $b = 4$ y $c = 80$, las dos cónicas a intersecar serían $y = \frac{1}{2}x^2$ y $(x - 10)^2 + y^2 = 100$. Haciendo uso de software que nos permita graficar estas cónicas encontramos que el punto de intersección (distinto de origen de coordenadas) tiene como valor de las abscisas igual a 4, solución de dicha ecuación como se observa en la figura 5.

Figura 5. Solución grafica de $\mathrm{x}^3 + 4\mathrm{x} = 80$**.**



■ Cubo más cuadrado más la cosa igual a número

Consideremos ahora uno de los casos correspondientes a la ecuación cúbica completa, el de “Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número”, que con simbología actual es:

$$x^3 + ax^2 + bx = c \qquad (2)$$

En este caso Jayyam indica:
Sean los segmentos $\overline{AB} = a$, $\overline{OB} = \sqrt{b}$ y $\overline{BC}$ cuya longitud es la de la altura de un prisma de volumen *c* y base cuadrada de lado $\overline{OB}$. $\overline{BC}$ prolonga al segmento $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ (figura 4). Dibujamos el círculo de diámetro $\overline{AC}$, y también la hipérbola que pasa por *C* y tiene como asíntotas a la recta que contiene al segmento $\overline{OB}$ y a su perpendicular que pasa por *O*. Las dos se encuentran en un punto *P*.

Así pues, de acuerdo con lo indicado por Jayyam, habiendo marcado un punto O, se ubican enseguida el punto B, situado $\sqrt{b}$ unidades arriba de O, el punto A, a unidades a la izquierda de B, el punto C, situado c/b unidades a la derecha de B, y el punto G, tal que OG sea perpendicular a OB y tenga longitud igual a la de $\overline{\mathrm{BC}}$.

Enseguida se trazan la circunferencia con diámetro en $\overline{\mathrm{AC}}$, y la hipérbola equilátera con asíntotas en OB y OD. Las curvas se cortarán en C y en otro punto P. Al igual que en el caso anterior, si X es la proyección perpendicular de P sobre OD, entonces $\overline{\mathrm{OX}} = \mathrm{r}$ es el segmento solución buscado.

Prueba. P y C son puntos de la hipérbola, de manera que:

$$\overline{OX} \cdot \overline{\mathrm{XP}} = \overline{\mathrm{OG}} \cdot \overline{\mathrm{GC}} \qquad (2a)$$

Pero, siendo D el punto de intersección entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{XP}$, tenemos que$\overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{XP}} = \overline{\mathrm{OX}}\,(\overline{\mathrm{XD}} + \overline{\mathrm{DP}}) = \overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{XD}} + \overline{\mathrm{BD}} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$. O bien:

$$\overline{OX} \cdot \overline{\mathrm{XP}} = \overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{DP}} \qquad (2b)$$

Y también $\overline{\mathrm{OG}} \cdot \overline{\mathrm{GC}} = \overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{XG}} \cdot \overline{\mathrm{GC}}$

$$\overline{\mathrm{OG}} \cdot \overline{\mathrm{GC}} = \overline{\mathrm{OX}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{DC}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \qquad (2c)$$

Por otra parte, $\overline{AC}$es el diámetro de una circunferencia, de manera que el triángulo APC es rectángulo y $\overline{\mathrm{AD}} \cdot \overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{DP}}^2 = \overline{\mathrm{DP}} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$. De donde:

$$\frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{DC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DP}}} \qquad (2e)$$

Tenemos entonces, de (2d) y (2e), que $\frac{\overline{\mathrm{OB}}^2}{\overline{\mathrm{OX}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{DP}}^2}{\overline{\mathrm{DC}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{DC}}}\frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{DC}}} = \frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{DC}}}\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DP}}} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DC}}}$, y de aquí, que:

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{OX}}^2 \cdot \overline{\mathrm{AD}} \qquad (2f)$$

A partir de todo lo anterior, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{OX}}^3 + \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{OX}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} &= \overline{\mathrm{OX}}^2(\overline{\mathrm{OX}} + \overline{\mathrm{AB}}) + \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} \\
&= \overline{\mathrm{OX}}^2(\overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{AB}}) + \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} \\
&= \overline{\mathrm{OX}}^2 \cdot \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} = \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{DC}} + \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} \\
&= \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot (\overline{\mathrm{DC}} + \overline{\mathrm{OX}}) = \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot (\overline{\mathrm{DC}} + \overline{\mathrm{BD}}) \\
\overline{\mathrm{OX}}^3 + \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{OX}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{OX}} &= \overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{BC}}
\end{aligned}$$

Pero $\overline{\mathrm{AB}} = a$, $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{b}$, $\overline{\mathrm{OB}}^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b$, $\overline{\mathrm{BC}} = \frac{c}{b}$ y $\overline{\mathrm{OB}}^2 \cdot \overline{\mathrm{BC}} = b\,\left(\frac{c}{b}\right) = c$, así que:

$$\overline{\mathrm{OX}}^3 + a \cdot \overline{\mathrm{OX}}^2 + b \cdot \overline{\mathrm{OX}} = c$$

Es decir,$\overline{\mathrm{OX}}$ es el segmento solución de la ecuación (2).Ahora bien, como la circunferencia tiene a $\overline{\mathrm{AC}}$ como uno de sus diámetros y la hipérbola tiene que pasar por C, entonces ambas curvas tienen que cortarse necesariamente en C. Esto quiere decir que la abscisa de este punto es una raíz “extraña” de la ecuación cúbica, lo que a su vez quiere decir que lo que resuelve geométricamente Jayyam es una ecuación de grado cuatro, que tendrá necesariamente dos raíces positivas, una de las cuales ocurre obligadamente por la construcción misma (la abscisa de C) y la otra es la buscada (la abscisa de P).

Algunas reflexiones de carácter didáctico

Muchas veces la enseñanza de los contenidos de la Matemática en nivel medio o superior termina convirtiéndose en la enseñanza de temas aislados sin conexión entre ellos. En el caso de las ecuaciones algebraicas, los conceptos se presentan en un contexto meramente simbólico, desprovisto de un referente geométrico que podría aprovecharse didácticamente. Posteriormente se da mayor importancia al aspecto operativo, minimizando el asunto de una resolución de problemas con palabras.

Si la presentación se hiciera incorporando elementos históricos y geométricos, la temática resultaría más interesante y comprensible para la mayoría de los alumnos, y si además se incorporara la tecnología, podría recuperarse la importancia de aspectos conceptuales y de resolución de problemas, al restarle importancia al aspecto operativo.

En cuanto a los docentes cabe preguntarse si docentes ejercicio y futuros docentes de Matemática, pueden encontrar la asociación con las cónicas ya estudiadas en forma independiente con el álgebra, al tratar el asunto de la ecuación cúbica. El interrogante queda abierto y se intentará dar respuesta con la presente investigación. Para tal fin, una vez finalizada la revisión bibliográfica presentada en forma somera en este artículo, se diseñará una secuencia de actividades con un fuerte sustento histórico para ser abordado por los futuros docentes para luego analizar los resultados obtenidos. En este diseño de actividades se buscará también la incorporación de software que agilice las construcciones pues lo que se busca es la reflexión sobre las mismas gráficas, más que la habilidad para el trazo de las mismas con lápiz y papel.

Referencias bibliográficas

Al-Jwarizmi, M. I. (2009). *El libro del álgebra*. (de Moreno, R., Trad.). España: Nivola.
Arcos, I. (2011). Omar Jayyam y la ecuación cúbica. *Ideas en Ciencia 36*, 66-77.
Bell, E. T. (1985). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.
Casalderrey, F. M. (2000). *Cardano y Tartaglia*. Las matemáticas en el renacimiento italiano. España: Nivola.
González, P. (2001). *Pitágoras.* El filósofo del número. España: Nivola.
González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.
Moreno, R. (2002). *Omar Jayyam.* Poeta y matemático. España: Nivola.