

## RAZÓN DE CAMBIO E IDENTIFICACIÓN DEL MOVIMIENTO

**Mario Armando Giordano Moreno, Orlando Moctezuma Cruz, Ignacio Garnica y Dovala**

Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 "Lázaro Cárdenas del Río". (México) Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. (México)

Instituto Politécnico Nacional. (México)

mgordano@prodigy.net.mx, orlymx2000@yahoo.com.mx, igarnica@cinvestav.mx

**Palabras clave:** razón de cambio, movimiento rectilíneo

**Key words:** rate of change, rectilinear motion

### RESUMEN

Se describe una experiencia de aprendizaje en la que se promueve la interacción entre estudiantes orientada a la identificación del movimiento. Participan estudiantes de distinto grado con la finalidad de que los más avanzados introduzcan en la discusión la noción de razón de cambio para avanzar en dicha identificación. La experiencia muestra la pertinencia de realizar actividades de aprendizaje apoyadas en la experimentación científica, con la inserción planeada de estudiantes que, por encontrarse en un nivel superior del currículo, están en condición de aportar a la discusión nociones matemáticas fundamentales que son convenientes para el análisis de los resultados de la experimentación.

### ABSTRACT

A learning experience for promoting interaction between students is described in this document. The interaction is focused on recognizes the kind of motion. The experience was shared among students of two different levels respect the curriculum. Upper students should introduce the notion of rate of change in the discussion for supporting the task. This experience shows that is relevant to realize learning activities supported by scientific experimentation, including students that, being in higher level, could introduce in the analysis fundamental mathematical ideas.

## ■ Introducción

Uno de los objetivos de la experiencia que aquí se reporta es la de fundamentar la interacción entre estudiantes de distintos grados enfocada en la solución de tareas de aprendizaje de las ciencias en las que subyacen ideas fundamentales de matemáticas, mismas que constituyen un medio para dar sentido a esas tareas. De esta manera, se enfoca la interacción entre estudiantes del bachillerato tecnológico del Instituto Politécnico Nacional al dotar de sentido a experiencias en el laboratorio de Física. Esta experiencia forma parte de una estrategia de enseñanza en la que se vinculan distintas unidades de aprendizaje elaborada por Martínez, Giordano y Ubaldo (2013) en la cual se considera que la interdisciplinariedad promueve en los estudiantes la construcción de vínculos entre distintos campos del conocimiento, lo cual podría promover, a su vez, aprendizaje significativo.

Desde nuestra perspectiva, vincular el aula de Matemáticas con el laboratorio de Física genera ambientes de aprendizaje enriquecidos y promueve la comprensión de conceptos y la capacidad de dotar de sentido a experiencias realizadas en espacios de experimentación científica. Dada la relación histórica entre el estudio del movimiento y los conceptos de razón de cambio y acumulación, se seleccionaron los experimentos de movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) como un escenario propicio para hacer sentido del concepto de razón de cambio y de su papel en el estudio del movimiento.

Complementariamente, se planteó la interacción entre estudiantes de quinto semestre y estudiantes del tercer semestre del bachillerato tecnológico como una oportunidad de construir significados compartidos y de promover el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y de comunicación.

Lo que nos impulsa a proponer este tipo de actividades es la importancia que debiera tener en la formación de los jóvenes la construcción de vínculos estrechos y funcionales entre las disciplinas que conforman el currículo del bachillerato; tal como se señala en los documentos para la Reforma Integral del Bachillerato:

La interdisciplinariedad permite a los estudiantes entender la educación como un proceso integral, en el que existen articulaciones diversas entre las distintas disciplinas. Desarrollar estas articulaciones favorece el desarrollo del pensamiento complejo mediante el abordaje de objetos y problemas de interés para los jóvenes estudiantes de hoy. (Subsecretaría de Educación Media Superior, 2008, p. 5).

Esto nos lleva a asumir los laboratorios de ciencias como espacios en los que naturalmente es posible promover la vinculación de contenidos y el sentido de interdisciplinar por medio de experiencias de aprendizaje en las que el énfasis está puesto en construir interpretaciones de los fenómenos bajo estudio sustentadas en ideas fundamentales del pensamiento matemático.

## ■ Marco de referencia

La razón de cambio y la acumulación constituyen conceptos transversales en el currículo del bachillerato. Consideramos estos conceptos como contenidos vinculantes entre dos o más disciplinas, asumiendo que son fundamentales desde el enfoque de la formación matemática, así como desde el enfoque en el desarrollo de competencias y el de la enseñanza de las ciencias. Se trata de ideas fundamentales que son

inherentes a una amplia variedad de situaciones. Wenzelburger (1993) señala que el reconocimiento de una relación funcional entre dos magnitudes variables y la posibilidad de estudiar el cambio de una relativo al de la otra son nociones presentes en la vida diaria; la cinética química, las inversiones financieras, la dinámica poblacional o el gasto energético, son situaciones en las que subyacen relaciones funcionales y en las que es posible descubrir razones de cambio entre magnitudes variables y procesos de acumulación asociados.

Particularmente, en el desarrollo de la Mecánica, vemos que estos conceptos permitieron formalizar una teoría del movimiento. Desde los estudios de Kepler en el siglo XVI y de Galileo en el XVII, hasta los estudios de Newton, el concepto de razón de cambio tuvo un papel esencial como un medio para conceptualizar y describir el movimiento (Viniegra, 1986). Desde un enfoque didáctico, Thompson (1994) analiza el desarrollo de imágenes de razón de cambio y considera que son un concepto dinámico que tienen su origen en acciones corporales y en movimientos de la atención, y son, además, la fuente y el medio por los cuales se llevan a cabo las operaciones mentales. En su investigación, este autor identifica formas tempranas de imágenes de razón de cambio, como las que se apoyan en el pensamiento proporcional, que podrían ser un soporte pedagógico para la enseñanza de las ideas del Cálculo.

En relación a las competencias matemáticas, trátase de las que se establecen en el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato (Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública, 2008) o de otras propuestas en el contexto mexicano como la del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (2014), observamos que el énfasis está puesto en explorar y recurrir sistemáticamente a las posibles conexiones o vínculos que existen entre las matemáticas y el entorno.

Se trata esencialmente de dotar de sentido a la realidad mediante el empleo de conceptos, procedimientos o métodos matemáticos, a fin de construir interpretaciones que permitan comprender y, eventualmente, intervenir de manera informada en fenómenos que surgen en contextos diversos.

Estas consideraciones permiten proponer experiencias de aprendizaje en las que estudiantes de diferentes grados interactúan para dotar de sentido a las experiencias en el laboratorio de Física, recurriendo eventualmente a la noción de razón de cambio para conceptualizar e identificar dos tipos básicos del movimiento.

### ■ Método y descripción de la experiencia de aprendizaje

La experiencia que se reporta en este documento, consistió en la realización en el laboratorio de Física de los experimentos MRU y MRUV. En la experiencia participaron estudiantes de un grupo del tercer semestre cursando la unidad de aprendizaje de Física I (a quienes nos referiremos como estudiantes de Física), como una de las asignaturas en el plan de estudios correspondiente, y estudiantes de quinto semestre, quienes cursaban Cálculo Integral (a quienes nos referiremos como estudiantes de Cálculo), además de las otras asignaturas contempladas en el plan de estudios.

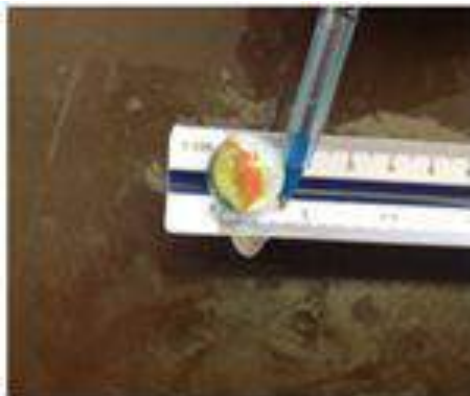
El profesor de Física participante en esta experiencia, preparó a su grupo para realizar la actividad en conjunto con los estudiantes de Cálculo, poniendo énfasis en la oportunidad de interactuar con estudiantes más avanzados para generar una actividad de aprendizaje más productiva.

Los estudiantes de Cálculo realizaron previamente actividades en las que calcularon razones de cambio, transitando de la razón de cambio en un intervalo a la razón de cambio en un punto a partir del análisis de funciones, y en el caso hipotético de la trayectoria de un cohete, a partir de una representación gráfica de su posición respecto al tiempo (Welzenburger, 1993).

En el laboratorio de Física se organizó la práctica en nueve mesas de trabajo, cada una con cinco o seis estudiantes de Física y una o un estudiante de Cálculo. Al iniciar la actividad el profesor de Física hizo una introducción a los conceptos de MRU y MRUV, solicitando la participación de los estudiantes para formular la condición fundamental en cada caso. La introducción fue acompañada de un riel neumático sobre el que se desliza un deslizador minimizando la fricción.

Mediante este aparato se realizaron varios experimentos, con la intención de hacer notable la condición fundamental para diferenciar entre las dos clases de movimiento experimentadas en la sesión, es decir, en la cualidad de la velocidad del objeto en movimiento. Para reproducir el experimento, los estudiantes disponían de escalímetros triangulares, haciendo las veces de un riel graduado, y de esferas de vidrio (canicas) como objetos en movimiento (ver Figura 1).

Figura 1. Materiales para la experimentación.



La tarea consistió en fijar y nivelar el escalímetro sobre la mesa mediante trozos de plastilina y un nivel. De esta forma, ellos se dispusieron a realizar varias repeticiones del experimento hasta lograr al menos un caso de MRU. Los experimentos se registraron en video mediante dispositivos móviles (celulares), así, los estudiantes pudieron revisar el video de cada experimento y obtener pares (tiempo, desplazamiento) con la intención de determinar si se satisfacía la condición de MRU. A partir de los videos realizados, cada equipo procedió a elaborar tablas de desplazamiento contra tiempo y a graficar los pares tabulados.

Los estudiantes de Física tenían la indicación de analizar los ensayos grabados en video, organizar sus datos, elaborar gráficas e interpretar la información así obtenida. Los estudiantes de Cálculo tenían la tarea de participar como mediadores entre la actividad práctica y el análisis de los resultados obtenidos, poniendo énfasis en la utilización de la razón de cambio para dicho análisis. Complementariamente, estos estudiantes elaboraron tablas y gráficas en las que representaron la distancia recorrida como función del tiempo. La actividad hasta aquí descrita tuvo una duración de 105 minutos.

## ■ Resultados

Para la elaboración de los reportes de la experiencia de aprendizaje realizada, los estudiantes de Física emplearon el esquema conocido como “V de Gowin”, cuya estructura permite hacer explícitos los siguientes aspectos:

- una o más preguntas de investigación referidas al fenómeno bajo estudio,
- consideraciones teóricas referidas a ese fenómeno,
- el procedimiento a seguir para experimentar el fenómeno y
- los hechos observados y registrados.

Los reportes de los estudiantes de Física indican que su actividad se centró en diferenciar entre ambos tipos de movimiento, empleando la velocidad registrada en cada experimento como criterio de diferenciación. A partir de la actividad, estos estudiantes generaron descripciones o afirmaciones como las siguientes:

- Se tiene que hacer varias pruebas para poder ver si el tipo de movimiento del cuerpo (canica) es MRUV con ayuda de un video verificando el tiempo y la distancia recorrida, si el tiempo y la distancia fueron los mismos en todo el proceso, eso quiere decir que es MRU pero si hay variaciones en la velocidad de éstos entonces tenemos como resultado movimiento rectilíneo uniformemente variado o acelerado.*
- Para obtener MRU fue necesario modificar la posición del escalímetro varias veces. El movimiento rectilíneo uniforme es así cuando no presenta aceleración o disminución de velocidad.*

Los estudiantes de Cálculo colaboraron en la actividad haciendo explícita la razón de cambio de la distancia recorrida por el móvil respecto al tiempo, como en el siguiente caso:

- Les pude explicar de dónde sale las fórmulas para calcular la velocidad. La fórmula como tal es la velocidad es la distancia sobre el tiempo*

$$v = \frac{d}{t}$$

*debido a que la fórmula de la razón de cambio es*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con el objetivo de profundizar en la investigación de la interacción entre estudiantes de distinto nivel al resolver tareas en las que la utilización eficaz de la razón de cambio permitiría reconocer y caracterizar

fenómenos de movimiento, se realizó una actividad dirigida al análisis de dos series de datos, específicamente pares (desplazamiento, tiempo), obtenidos al realizar los respectivos experimentos de MRU y de MRUV. Esta actividad tuvo una duración de 65 minutos y fue registrada en video, en ella participaron un estudiante de tercer semestre y una estudiante de quinto semestre, quienes habían participado en la experiencia previa de laboratorio.

El estudiante de Física, al que nos referiremos por E1, fue elegido por su profesor en consideración a su buen desempeño, mientras que la estudiante de Cálculo, a la que nos referiremos por E2, fue elegida por su buena disposición al interactuar con sus compañeros durante la experiencia en el laboratorio. Esta tarea fue realizada siguiendo un cuestionario en el que se pedía describir los cambios en la posición, en la velocidad y en la aceleración de los experimentos de movimiento correspondientes a ambas series de datos.

A continuación se muestran dos de los diálogos entre los estudiantes. Para cada intervención indica el momento, en minutos y segundos, en que ésta se produjo. En el primero de los diálogos ellos hacen la comparación entre incrementos de tiempo para establecer el tipo de movimiento al que corresponden los datos, llegando a percatarse de que las lecturas mostradas en la segunda serie de pares (desplazamiento, tiempo), al igual que en la primera, se hicieron a intervalos iguales de desplazamiento, por lo cual la comparación entre mediciones de tiempo les permite reconocer que, en este caso, el movimiento es acelerado:

(31:28) E1: “Aquí sería lo mismo, pero lo que anoté fue que aquí los intervalos cambian” (señalando la columna de tiempo).

(31:29) E2: “El tiempo”.

(31:30) E1: “Los intervalos de tiempo cambian”.

E1 hace explícito el hecho de que mientras que los intervalos de desplazamiento son constantes, los intervalos de tiempo no lo son, y lo verifica calculando diferencias entre mediciones consecutivas. De esto, ellos deducen que hay una aceleración en el experimento:

(32:39) E2: “Entonces, el cambio de posición del objeto es de la misma distancia pero el tiempo es diferente”.

(32:49) E1: “Quiere decir que lo recorre en menor tiempo porque hay una aceleración, si tú haces una comparativa, recorre el mismo (señalando los desplazamientos en la tabla), pero en menos tiempo”.

A partir de este momento esta pareja de estudiantes se involucra en la tarea de validar la afirmación de que los datos corresponden a un caso de movimiento acelerado. Ellos proceden a calcular razones de cambio de la velocidad, con el antecedente de que en la primera serie de datos esta razón de cambio era prácticamente nula. Ambos estudiantes han señalado que la segunda serie de datos corresponde a un caso en el que la velocidad va en aumento. Es claro para ellos que en el segundo experimento al considerar desplazamientos iguales, los intervalos de tiempo no lo son, de hecho se van haciendo más cortos (la referencia de E1 a comparar ambas tablas de datos, Figura 2). Esto es interpretado en el sentido de que el movimiento el que provienen los datos es acelerado.

**Figura 2. Identificación del movimiento.**

(1:02:17) Entrevistador: ¿A qué tipo de movimiento corresponden estos datos?

(1:02:22) E2: Movimiento uniformemente acelerado...

(1:02:24) E1: Variado.

(1:02:26) E2: Variado, bueno estamos como en que sí... como en que no... porque los datos que obtuvimos no se disparan tanto, pero sí, entonces tendríamos...

(1:02:39) E1: Sí, es una aceleración pero es muy pequeña.

(1:02:41) E2: Sí, tendríamos que ver de cuanto sería el margen de error para ver si es o no una aceleración.

Los resultados que obtienen generan incertidumbre respecto al tipo de movimiento del que provienen los datos. Ellos observan variaciones en el valor de la razón de cambio de la velocidad, cuando la expectativa era que fuese más o menos constante. Intuyen que se tiene el problema de la medición al tratarse de datos experimentales. El entrevistador interviene señalando el hecho de que se trata de datos experimentales obtenidos de un solo ensayo, por lo que la variabilidad de los datos puede ser significativa.

Como parte de la reflexión compartida entre los docentes participantes en torno a la experiencia de aprendizaje realizada, se presentan las siguientes consideraciones:

- Respecto a la calidad de la interacción entre los estudiantes, es importante señalar que las expectativas inducidas por los profesores en ambos grupos se orientaron a la colaboración en la realización de los experimentos y en la elaboración de las representaciones de los resultados obtenidos, esencialmente tablas y gráficas, para culminar en la caracterización de cada uno de los dos tipos de movimiento experimentados.
- Consideramos que este tipo de experiencias promueven la interacción y la comunicación entre pares, generando oportunidades para construir significados compartidos e iniciar procesos de validación. Se observó buena disposición a esta colaboración y se generó una comunicación orientada a construir significados compartidos y validar las conclusiones alcanzadas. Los estudiantes de Física aceptaron positivamente la participación de sus compañeros estudiantes de Cálculo y éstos mostraron



disposición para aportar, al análisis de los datos recogidos, sus propias formas de interpretar esas experiencias.

- La experiencia realizada permite vislumbrar nuevas oportunidades de colaboración al vincular experiencias en el laboratorio de Física con conceptos matemáticos fundamentales. Esta es la intención de promover la comunicación entre academias y entre docentes para generar experiencias de aprendizaje que contribuyan al desarrollo de competencias y a que los estudiantes en el bachillerato tecnológico desarrollen una formación integral acorde con los retos que el nuevo siglo plantea.

### ■ Conclusiones

Las condiciones en las que se realizó la práctica fueron favorables a que los estudiantes se apropiaran del experimento. El uso de herramientas y artefactos que les son familiares propició que se involucraran en la tarea y que pudiesen ensayar la experiencia tantas veces como lo consideraron necesario. Este tipo de experiencias puede generar momentos particulares en el desarrollo de un curso, en los que los estudiantes tengan oportunidad de construir significados compartidos, es decir, es posible promover experiencias de aprendizaje compartidas como momentos cruciales en los que se haga sentido de conceptos fundamentales tanto de matemáticas como de otras disciplinas.

Por otra parte, el desarrollo de una actividad a partir de datos experimentales implica un reto para los estudiantes y para los profesores. En este sentido es importante considerar al menos dos aspectos: la forma en que se tratan los datos o la exploración que se hace a partir de éstos y la incertidumbre intrínseca al proceso de medición. Si bien, pueden representar un obstáculo para elaborar conceptos con suficiente claridad, también representan una oportunidad para que los estudiantes reconozcan la importancia de la medición y de la experimentación en el proceso de construcción de conceptos y teorías científicas. El contraste entre lo que el video de un ensayo sugiere y lo que se obtiene al explorar los datos mediante el cálculo de razones de cambio es una de las oportunidades que se generan para avanzar en la significación del concepto de razón de cambio y de su pertinencia para caracterizar el movimiento rectilíneo.

Siguiendo algunas ideas de Thompson (1994), el tránsito de imágenes (entendidas como concepciones idiosincrásicas constituidas por fragmentos coordinados de experiencias cognitivas, afectivas o sensoriales) de la noción de razón de cambio que se sostienen en relaciones cualitativas, a imágenes apoyadas en relaciones cuantitativas, podría ser uno de los rasgos que caracterizan el paso a la construcción de imágenes maduras de este concepto.

### ■ Referencias bibliográficas

- Martínez, R., Giordano, M. y Ubaldo, P. (2013). Matemática y laboratorio de física: hacia una enseñanza interdisciplinaria. En L. Sosa, J. Hernández y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp.379-386). Tuxtla Gutiérrez: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.
- Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública. (2008). *Competencias disciplinares básicas del sistema nacional de bachillerato: Documento de trabajo*. Recuperado el 20



de mayo de 2009 de: [http://www.sems.udg.mx/principal/anexos\\_bgc\\_may0807/BGC\\_SEMS-SEP/Competencias\\_disciplinarias\\_basicas\\_del\\_sistema\\_nacional\\_Bachillerato.pdf](http://www.sems.udg.mx/principal/anexos_bgc_may0807/BGC_SEMS-SEP/Competencias_disciplinarias_basicas_del_sistema_nacional_Bachillerato.pdf).

Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (2014). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM*. México. Universidad Nacional Autónoma de México.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2, 3), 125-170.

Viniegra, F. (1986). *Una mecánica sin talachas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción a los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral: Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5(3), 93-122.