

## ÁREA: CONCEPTO Y DEFINICIÓN ARTICULADOS POR LA TSD

**Mihály Martínez Miraval, Francisco Ugarte Guerra**

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú)

Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)

mihaly.martinez@upc.edu.pe, fugarte@pucp.edu.pe

**Palabras clave:** teoría de situaciones didácticas, geogebra, área

**Key words:** theory of didactical situations, geogebra, area

### RESUMEN

En este artículo se analiza el proceso de enseñanza y de aprendizaje del objeto matemático *área*, por considerarlo pieza clave en temas ligados al cálculo, en particular a la noción de integral definida. Para la investigación es importante analizar si el estudiante logra articular el concepto que tiene de área con su definición, a partir de un proceso de aproximación con rectángulos, mediado por el GeoGebra. Para lograr esto utilizaremos como marco teórico aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, ya que esperamos que el estudiante construya su aprendizaje por sus propios medios.

### ABSTRACT

This article discusses the teaching - learning process of the mathematical object called *area*, for considering it instrumental in issues related with calculation, particularly with the notion of definite integral. For the research is important to consider if the student succeeds in articulating the concept of area with its definition from a process of approximation with rectangles, mediated by GeoGebra. To achieve this we will use as theoretical framework aspects of the Brousseau's Theory of Didactical Situations, as we expect the student to build their learning process on their own.

## ■ Introducción

La relación entre la noción de área e integral definida forma parte de los contenidos de cualquier curso de cálculo diferencial e integral. Para su estudio, se parte de dos supuestos: el estudiante ha trabajado la noción de área en la escuela y, es capaz de calcular el área de una región limitada por segmentos de rectas o por curvas conocidas (como la de una semicircunferencia). Este cálculo lo realiza a partir de las fórmulas conocidas para las áreas de rectángulos y círculos.

Bajo estos supuestos, los cursos presentan la integral definida como una herramienta que permite calcular áreas de regiones distintas a las antes mencionadas; en adelante estas regiones podrá estar limitadas por curvas (gráficas de funciones continuas). Cabe señalar que la importancia del cálculo del área de una región (o el número asociado a dicha región), radica en la interpretación que el estudiante pueda dar a dicho número, lo que justifica que este contenido aparezca en la formación básica de muchas especialidades y, al mismo tiempo, justifica la pertinencia de nuestra investigación.

En nuestra práctica docente, en una universidad de Lima, en el curso de Cálculo de la Facultad de Administración, la Cátedra no propone una definición formal de área, definición que emplea diferentes conceptos como los de funciones, aproximaciones, sumas infinitas, límites, etc. La justificación dada podría resumirse en que la “construcción” del concepto de área los alejaría del objetivo principal del curso que es el de la interpretación del valor numérico del área en términos propios de la carrera.

De esta manera se pierde una excelente oportunidad de movilizar los conocimientos que los estudiantes tienen acerca de un problema conocido. Por lo anterior, nosotros pretendemos, construir una serie de propuestas, tomando en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas, que buscan que el estudiante sea capaz de adaptar un procedimiento de aproximación con áreas de rectángulos, para aproximar el área tanto como quiera, en este artículo damos cuenta de ellas.

Desde nuestra perspectiva, el proceso de enseñanza - aprendizaje en la educación debe tener una tendencia enfocada en que el saber que se pretende enseñar sea construido por el estudiante. En nuestro caso en particular y por las características del objeto matemático área, creemos que es beneficioso, para que logre su adquisición, el apoyo en recursos tecnológicos, para centrar su atención en la interpretación y no en los cálculos y gráficos repetitivos.

Bajo este pensamiento, nosotros debemos brindarle al estudiante todas las herramientas y condiciones necesarias para que pueda desenvolverse apropiadamente en el proceso de adquisición del saber; y en dicho proceso desarrolle habilidades para argumentar y justificar sus procedimientos, suposiciones y resultados.

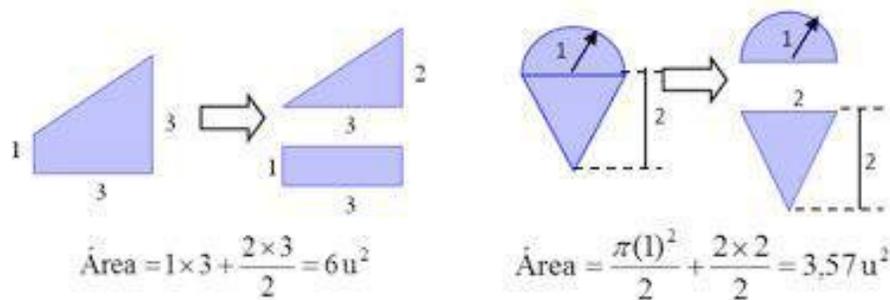
Es así que nace la idea de diseñar e implementar una secuencia de situaciones, donde el estudiante o grupo de estudiantes utilicen sus conocimientos previos, adquiridos en la etapa escolar y en el curso previo al cálculo diferencial e integral, para crear nuevos conocimientos que los lleven a la adquisición de un nuevo saber.

### ■ Problemática

En base a nuestra experiencia como docentes, tomamos como hipótesis de partida que los estudiantes conciben el área como un número, el cual asocian a una región limitada por segmentos de rectas, o a una región cuya área se calcula por fórmulas ya establecidas.

Un ejemplo de los procedimientos y uso de fórmulas de geometría plana que los estudiantes utilizan para obtener el área de las regiones mostradas, se muestra en la figura 1.

Figura 1. Fórmulas de geometría plana y propiedades de áreas.



Fuente: Propia.

Sin embargo, cuando la región no se encuentra limitada por segmentos de recta, ya sea total o parcialmente, los estudiantes presentan dificultades, pues al no poder relacionarla con ninguna fórmula previamente estudiada, no son capaces de calcular el área de la región y no atinan a proponer ni a describir un procedimiento que les permita aproximar el área de dicha región.

Las dificultades arriba señaladas aparecen reportadas en investigaciones en Didáctica de la Matemática anteriores. Olave (2005) señala que la idea asociada al concepto de área ligada a una fórmula, presentada por muchos de sus estudiantes, se da como resultado de la instrucción recibida en la etapa escolar (entre 13 y 14 años), y esto les impide poder determinar el área de superficies que no están limitadas por segmentos de rectas; lo que les traería dificultades para determinar el área de regiones de las que no disponen de una fórmula para calcularlas. En palabras de la investigadora:

Esta visión del área por parte de los estudiantes podría estar ligada al tratamiento que generalmente se hace del tema en los libros de textos y por consiguiente en el aula. Salvo en la etapa escolar, en donde se realizan actividades tendientes a medir superficies llegando a un número que representa el área buscada, en los años siguientes el área no se mide realmente sino que se calcula mediante las fórmulas adecuadas. Todas estas actividades podrían estar reforzando la idea del área como fórmula. (Olave 2005, p. 150).

Por lo anteriormente expuesto, pensamos que estas dificultades podrían reducirse articulando la concepción que tiene los estudiantes acerca del área, como un número asociado a una región limitada solamente por segmentos de rectas, y un procedimiento flexible que permita aproximar ese número

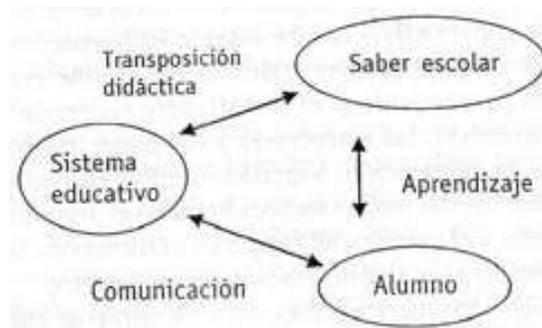
tanto como se quiera, ello como paso previo a la definición de área como la suma de áreas de infinitos rectángulos. Con ello estamos brindando al estudiante una herramienta que le ayude a comprender la noción de área, y creando la necesidad de aprender las nociones de límite e integral definida asociando un procedimiento con un problema que los estudiantes conocen desde su educación primaria (entre 8 y 9 años): el cálculo de áreas.

### ■ Marco teórico

Por la manera cómo concebimos el proceso de enseñanza - aprendizaje en la educación, consideramos que el marco teórico más adecuado a nuestra investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986).

Esta teoría considera fundamental las interacciones entre el profesor y el estudiante mediadas por el saber en una situación de enseñanza (ver figura 2).

Figura 2. Esquema tripolar de la enseñanza



Fuente: Brousseau (2007, p. 13).

En el esquema tripolar de la figura 2, el saber escolar puede ser cambiado por saber matemático contextualizado en una institución educativa (con profesores, alumnos y medio).

Esta teoría busca crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el medio en el cual el aprendizaje se debe desarrollar. El aprendizaje del estudiante tiene lugar a partir de una serie de situaciones (que pueden ser ejercicios, problemas, retos, etc.) que acepta desarrollar, que conducen a modificaciones en su comportamiento para la ocurrencia del aprendizaje esperado.

En palabras de Brousseau (2007):

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje (p. 30).

El objetivo de nuestra investigación es elaborar una propuesta desde la teoría de situaciones didácticas, que facilite la comprensión de la definición de área como la suma de áreas de infinitos rectángulos, centrando los esfuerzos en la articulación de la concepción que tienen los estudiantes acerca del área, como un número asociado a una región limitada solamente por segmentos de rectas. Dicho procedimiento es flexible en el sentido que permite aproximar ese número tanto como se quiera.

Para ello, hemos diseñado una secuencia de situaciones donde el estudiante utilice sus conocimientos previos de cálculo de áreas de rectángulos, de funciones, de sumas, y de límites, con la intención de adquirir un nuevo conocimiento en cada etapa del proceso de aproximación que debe seguir: reconocer la altura de un rectángulo como la imagen de la función; expresar el área de los rectángulos como una suma de términos; realizar un proceso de generalización utilizando el símbolo de la suma; e intuir, a partir de resultados numéricos y gráficos, que se puede aproximar tanto como se quiera al área de una región planteada.

Brousseau (1986 citado por Panizza, 2003) define a las *situaciones didácticas* como:

Un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos en un determinado medio, comprendiendo, eventualmente, instrumentos, objetos y un sistema educativo, representado por el profesor, con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución (p. 4).

Las situaciones construidas por el profesor para proporcionar al estudiante las condiciones propicias para la adquisición del saber, en las que la intención de enseñar no es revelada al estudiante son llamadas por el investigador *situaciones a-didácticas*.

En nuestras situaciones se han diseñado preguntas que lleven al estudiante a relacionar la altura de un rectángulo con la imagen de la función en el extremo derecho de la base. Luego, que exprese la suma de las medidas de las áreas de cuatro rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos, en este caso cada base mide 1 m. y valores del eje X generados por la partición regular son número enteros. Finalmente, cambiamos la variable “número de rectángulos de aproximación” para una cantidad mayor de rectángulos, y se le pide realizar la misma tarea.

Es importante comentar, previamente, lo que el investigador llama *medio* dentro de una situación didáctica. Para él, el medio es un sistema antagonista del estudiante; diseñado por el profesor con el fin de hacerlo reflexionar sobre su aprendizaje a partir de la información que recibe en respuesta a su acción sobre él. Esta respuesta puede reforzar el conocimiento nuevo que adquiere el estudiante en el proceso de adquisición del saber, o hacerle modificar o cambiar su procedimiento si el resultado dado no es coherente a lo esperado por el estudiante. Esta interacción con el medio permitirá al estudiante construir autónomamente su propio aprendizaje.

El medio es organizado a partir de la selección de *variables didácticas*, las cuales al cambiar de valor generan en los estudiantes cambios en sus estrategias consideradas como óptimas. Una primera selección de valores para las variables debe ocasionar el encaminamiento de una estrategia básica de

resolución; pero es necesaria una nueva selección de valores que permitan el desarrollo de la situación a-didáctica pretendida.

Para analizar el proceso de aprendizaje, la teoría de situaciones descompone dicho proceso en cuatro fases: de acción, de formulación, de validación y de institucionalización, las cuales se pueden modelar en diferentes situaciones. En cada una de ellas, la relación entre el estudiante y el saber es distinta. Cabe mencionar que en las tres primera fases, el profesor no interviene en el momento que se dan las interacciones del estudiante con el medio, y si lo hace es muy tangencialmente sin que entre el juego el saber que desea ver aparecer. Estas interacciones se muestran a continuación.

En una *situación de acción* el estudiante actúa, o decide cómo actuar, sobre el medio. Para ello, utiliza sus conocimientos previos y elige sus estrategias para desarrollar los problemas planteados en la situación. A partir de la respuesta dada por el medio, se generan en el estudiante nuevos conocimientos y se refuerzan otros, que son necesarios en el proceso de construcción de un nuevo saber. Por ejemplo, los estudiantes pasan por esta situación al relacionar la altura de cada rectángulo como la imagen de la función en uno de los extremos de la base, al calcular la suma de las áreas de los rectángulos dibujados, al expresar el área de forma reducida simbólicamente con la letra sigma " $\Sigma$ ", etc.

En una *situación de formulación* el estudiante (emisor) intercambia información (de forma oral o escrita) con uno o más sujetos (receptores). El estudiante está interesado en compartir lo que va aprendiendo a lo largo de la situación y de esa manera generar un lenguaje que sea comprensible por todos. Por ejemplo, al dibujar los rectángulos tomando como alturas las imágenes en ambos extremos de la base, los estudiantes expresan a otra persona porqué en un caso los rectángulos se inscriben a la región, y en el otro caso la circunscriben, o porqué en un caso la suma de áreas aumenta, y en el otro disminuye.

En una *situación de validación* el estudiante (proponente) debe demostrar a otras personas (oponentes) la validez de sus estrategias, procedimientos y resultados referidos al desarrollo de los problemas de la situación. Los oponentes, que han trabajado las mismas preguntas, pueden corroborar lo expuesto por el proponente, pedirle la aclaración si existen dudas, o rechazar lo expuesto y presentar su propia propuesta. Por ejemplo, los estudiantes pasan por esta situación al validar que el procedimiento de aproximación por rectángulos les permite acercarse al área tanto como se quiera, ya sea por exceso o por defecto.

En una *situación de institucionalización* el profesor formaliza el conocimiento puesto en juego, a partir de la producción de los estudiantes, y le da el estatus de saber. Por ejemplo, en esta situación el profesor, a partir de los resultados obtenidos y procedimientos realizados por los estudiantes, les explica a los estudiantes que a medida que se sigan aumentando rectángulos la aproximación mejorará, y para llegar al área se necesitan aplicar otros conceptos, como los de límite e infinito.

Es importante mencionar que el desarrollo de la situación didáctica se rige a partir de lo que Brousseau (2007) llama *contrato didáctico*. Este contrato, dado explícito como implícitamente, precisa las obligaciones y los comportamientos que deben tener los estudiantes y el profesor en el desarrollo de la situación. Los estudiantes se comprometen a actuar frente a los problemas planteados en la situación sin

saber qué conocimiento nuevo van a aprender y sin saber de qué manera van a utilizar sus conocimientos previos. Por otro lado, el profesor se compromete a no intervenir en el proceso de construcción del conocimiento que desea que los estudiantes adquieran.

A lo largo del desarrollo de la situación didáctica, se evitó cometer uno de los efectos del contrato didáctico que el investigador denomina efecto “Topaze”, circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema pero no por sus propios medios, sino porque el profesor sugiere la respuesta de forma disimulada.

### ■ Marco metodológico y uso de las TICs

Bajo esta teoría diseñamos una secuencia didáctica de carácter experimental, tomando en cuenta ciertos análisis preliminares (epistemológicos, cognitivos y didácticos) referentes al objeto matemático área. Esta secuencia la trabajamos en el aula y contrastamos el producto dado por los estudiantes (respuestas, procedimientos, ideas, estrategias) con nuestro análisis previo de lo que esperamos que respondan o actúen al interactuar con el medio creado por el investigador. Esta forma de enfocar nuestro análisis justifica la elección de la metodología de la Ingeniería Didáctica; la cual se caracteriza, en palabras de Artigue (1995), por ser «un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza» (p. 36).

Dado que la definición de área utiliza conceptos de geometría dinámica, hemos decidido utilizar como apoyo tecnológico el *software* GeoGebra. En nuestra investigación no le enseñamos al estudiante a utilizar los comandos del programa, sino que hemos diseñado *applets* en base a deslizadores, para que los utilicen como una herramienta que le permita manipular un procedimiento para descomponer el área como una suma de áreas de rectángulos. La secuencia didáctica planteada está compuesta por situaciones contextualizadas, donde el estudiante no se restringe a trabajar con una función fijada por el profesor – investigador. El estudiante crea su propia curva eligiendo los parámetros mediante los deslizadores. La figura 4 muestra parte de un *applet* diseñado para la construcción de la gráfica de una función. Luego, el dibujo de rectángulos y el cálculo de la suma de sus áreas se realiza de forma dinámica utilizando otro deslizador (ver figura 5).

Figura 4. Diseño de la curva.

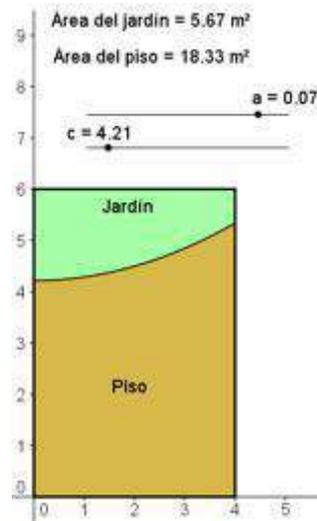
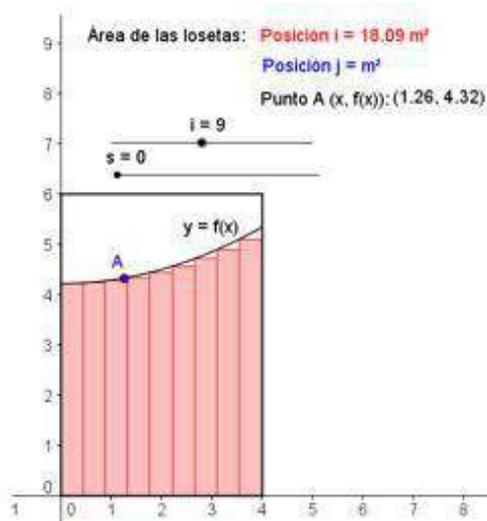


Figura 5. Construcción de rectángulos.



Fuente: Propria.

La importancia de utilizar el GeoGebra dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje del cálculo, está en que, según Amorim, F. V., Costa de Sousa, G y Salazar, J. V. (2011), permite que los estudiantes obtengan nociones de ciertos conceptos que difícilmente se consiguen realizar con otros medios, permite validar hipótesis, retroalimentar de los errores, criticar y cuestionar argumentos y fomentar la capacidad de argumentar ideas.

### ■ Conclusiones

A partir de las primeras experiencias realizadas con las situaciones diseñadas y de los datos recogidos hemos observado lo siguiente:

El uso del GeoGebra facilitó a los estudiantes dibujar rectángulos y calcular sus áreas, relacionar las alturas de dichos rectángulos con la imagen de la función, entre otras acciones. Asimismo, se suavizaron algunas de las dificultades previstas en el desarrollo de las situaciones. Sin embargo, las respuestas dadas por los estudiantes al expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de términos, no fueron satisfactorias luego de cambiar la variable “número de rectángulos de aproximación”. Solo llegaron a la fase de acción que dicta la teoría, ya que se esperaba que el trabajo sea natural al tener conocimientos previos de medidas de áreas de rectángulos, de funciones, de imágenes, etc., y solo presentaron algunas partes correctas de todo el proceso.

### ■ Reconocimiento

La presente investigación se realizó con el apoyo del grupo de investigación Didáctica de las Matemáticas – DIMAT, del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. En el marco del proyecto internacional: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos entre los grupos de investigación Didáctica de las Matemáticas- DIMAT/PUCP e Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática - PEAMAT/PUC-SP.*

### ■ Referencias bibliográficas

- Amorim, F. V., Costa de Sousa, G. y Salazar, J. V. (2011). *Atividades com geogebra para o ensino de cálculo*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado de: <http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/1649.pdf>
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá, D. C. Colombia: Grupo editorial Iberoamérica. 33-59.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México, D.F. Recuperado de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/olave\\_2005.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/olave_2005.pdf).
- Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas*. Recuperado de [http://www.crecerysonreir.org/docs/Matematicas\\_teorico.pdf](http://www.crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf).