

## EL LABORATORIO DE FÍSICA I PARA LA ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

**Rogelio Martínez García, Ignacio Garnica y Dovala**

CECyT No 4 "Lázaro Cárdenas". (México)

DME-Cinvestav Instituto Politécnico Nacional. (México)

rogeliomartinez@cinvestav.mx, rmartinezga@ipn.mx, igarnica@cinvestav.mx

**Palabras clave:** incorporación de experimentos en la enseñanza de la matemática

**Key words:** incorporating experiments in teaching mathematics

### RESUMEN

Durante el tiempo prescrito institucionalmente para la enseñanza de las funciones y sistemas de ecuaciones lineales, los docentes de Álgebra y del Laboratorio de Física I diseñaron e implementaron una estrategia de enseñanza complementaria a la tradicional, relativa a la experimentación de "fuerzas concurrentes (tensiones)", con el propósito de promover la aplicación de conceptos matemáticos en el estudio de situaciones presentadas en otras disciplinas, el laboratorio de Física. Se reportan resultados de la aplicación del instrumento diagnóstico, de enseñanza en el aula, de la realización del experimento en el laboratorio y de entrevistas semiestructuradas realizadas a dos estudiantes.

### ABSTRACT

During the time prescribed institutionally to the teaching of functions and systems of linear equations, teachers of Algebra and Physics Laboratory I designed and implemented a teaching strategy complementary to traditional on experimentation "concurrent forces (stresses) "with the purpose of promoting the application of mathematical concepts in the study of situations presented in other disciplines, physics laboratory. Results of the application of the diagnostic tool of classroom teaching, the performance of the experiment in the laboratory and semi-structured interviews with two students are reported.

## ■ Introducción

La investigación se realizó en condiciones institucionales de tiempo real de aula para la enseñanza de las funciones y sistemas de ecuaciones lineales. El diseño de una estrategia de enseñanza complementaria a la tradicional, con actividades experimentales (prácticas de laboratorio de física), consideró el fenómeno físico de “fuerzas concurrentes (tensiones)” con sus conceptos matemáticos implícitos, dándoles sentido a éstos mediante los datos experimentales. La estrategia requirió la comunicación entre los docentes de los dos campos disciplinarios (Álgebra y Física).

Con el enfoque de enseñanza interdisciplinaria, Boix-Mansilla (2010), de las asignaturas: matemáticas I – laboratorio de física I del bachillerato tecnológico se planteó la pregunta de investigación ¿Se fortalece la comprensión de “sistema de ecuaciones lineales” por parte de los estudiantes de matemáticas? El objetivo es promover métodos de enseñanza que fortalezcan al aprendizaje de conceptos matemáticos.

## ■ Marco de referencia

Martínez, Giordano y Ubaldo (2013) han propuesto la noción de *Docencia interdisciplinaria* entendida como la de docentes de disciplinas distintas que desarrollan e instrumentan conjuntamente estrategias de enseñanza a partir de contenidos vinculantes. Ésta noción centra su interés en la docencia a la vez que incide en el aprendizaje, en este sentido es consecuente con el concepto de Enseñanza interdisciplinaria propuesto por Boix-Mansilla (2010) en los siguientes términos:

[...] la enseñanza disciplinaria en los grupos de asignaturas tiene lugar cuando los docentes se centran en los grupos en la historia, la biología, la música o el diseño gráfico como asignaturas individuales, la enseñanza interdisciplinaria ocurre cuando proponen a los alumnos combinar conceptos y modos de pensar dentro de los grupos de asignaturas entre ellos (p. 7).

Las estrategias de enseñanza que se ponen en juego siguen los lineamientos que se clasifican en Díaz-Barriga, Hernández (1998, p.69) “..., podríamos definir a las estrategias de enseñanza como los procedimientos o recursos utilizados por el agente de enseñanza para promover aprendizajes significativos (Mayer, 1984; Shuell, 1988; West, Farmer y Wolff, 1991)”. En nuestro caso las estrategias en cuestión aspiran a que los estudiantes den sentido a los datos experimentales y relacionen los fenómenos físicos con los conceptos matemáticos implícitos en su descripción, en particular los del Álgebra.

Esas estrategias son consecuentes con el requerimiento institucional de que los estudiantes traduzcan de un lenguaje verbal a un lenguaje algebraico y viceversa, que facilita los procedimientos empíricos, deductivos e inductivos tanto para la ejercitación de algoritmos como la resolución de problemas y que solucionen ecuaciones y las representen gráficamente con su formación en Física que, por ser una ciencia experimental, requiere un enfoque práctico referente a estructuras de pensamiento y procesos aplicables a contextos diversos, útiles a lo largo de la vida, sin que se pierda su rigor metodológico, que impone la disciplina por lo que sus experiencias en el laboratorio son fundamentales para la comprensión de los conceptos en foco. Los contenidos vinculantes relativos a los conceptos en foco se presentan en la tabla 1.

**Tabla 1. Contenidos vinculantes de las asignaturas: Matemática I – Física I (laboratorio).**

Matemáticas	Competencia Particular: Contenido	semestre		Laboratorio de Física Practicario
		M	LF	
Álgebra	CP3: Funciones y ecuaciones lineales	I	III	Física I (practica 6): Fuerzas Concurrentes (tensiones)

### ■ Métodos e instrumentos

Participaron siete estudiantes de Álgebra (primer semestre) seleccionados tanto por su desempeño durante la enseñanza como por su disposición mostrada, se aplicó un cuestionario (CE) que precedió a la unidad III “funciones y ecuaciones lineales” y “sistemas de dos y tres incógnitas”, (RAP 1) resultado de aprendizaje propuesto: identifica elementos de las funciones lineales a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito personal y social, del programa de Álgebra (DEMS, 2008). El instrumento incluyó algoritmos de las operaciones con polinomios, productos notables, métodos de factorización y estructuras de fracciones algebraicas. Con el docente de Física se diseñó el desarrollo de la práctica “Tensiones”, que realizaron los estudiantes de Física I (tercer semestre) en equipos, con un estudiante de Álgebra por cada equipo; la sesión fue videograbada. Antes de ir al laboratorio se trató su tema en el aula.

El propósito de la estrategia de enseñanza se fundamentó en la realización del experimento típico de la Física newtoniana y en el posterior tratamiento de los datos así obtenidos, para hacer explícitas relaciones y conceptos matemáticos fundamentales en el planteamiento y solución del sistema de ecuaciones para el cálculo de las tensiones de un cuerpo en equilibrio. Por su desempeño durante el experimento, se entrevistó individualmente a dos estudiantes, respecto al fenómeno físico y a sus respuestas al guión de la práctica, también en sesiones videograbadas. Al final del curso se aplicó otro cuestionario (CF), propuesto por la academia de Matemáticas, cuya estructura de contenidos se presenta en la tabla 2.

**Tabla 2. Cuestionario F (CF) unidad III: Ecuaciones y funciones lineales.**

Sección I	1. Ecuación lineal con una incógnita	2. Binomio al cuadrado	3. Factorización de trinomio	4. Despeje de una de las variables
<b>Resolución de problemas</b>				
Sección II	1. Planteamiento de la expresión para calcular el área de un rectángulo	2. Planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones lineales	3. Resolución de una ecuación cuadrática	

### ■ Resultados

Se presentan resultados correspondientes a cada uno de los procesos realizados; 1) aplicación del instrumento CE, CF, 2) enseñanza en el aula, 3) realización del experimento en el laboratorio y 4) la aplicación del guion de entrevista a dos estudiantes.

### ■ Cuestionarios

Las respuestas al cuestionario CE evidenciaron carencias en los conocimientos adquiridos requeridos: operaciones básicas aritméticas y algebraicas aditivas y multiplicativas con números enteros y racionales, la jerarquía en la reducción de expresiones, el tanto por ciento, la notación científica, las cuatro operaciones fundamentales con los binomios, las propiedades en los diferentes conjuntos de números, la resolución de problemas que implican proporcionalidad directa e inversa y su operatividad. Todos ellos elementos necesarios para lograr los objetivos de la unidad III “funciones, ecuaciones lineales y sistemas con dos y tres incógnitas”.

Respecto al CF, propuesto por la academia de matemáticas, los resultados que se consideraron fueron los correspondientes a cada uno de los siete estudiantes seleccionados. En relación directa con el tema en foco, sistema de ecuaciones lineales, los reactivos representativos fueron el I.4 que consistió en despejar una variable de la expresión de la ley de ohm; el II.2 (véanse figuras 1a), problema típico relativo a un sistema de ecuaciones lineales: “En un corral hay gallinas y borregos. Los animales tienen un total de 60 cabezas y 150 patas ¿cuántas gallinas y cuántos borregos hay en el corral? Los siete estudiantes resolvieron los reactivos en cuestión sin dificultad (véanse figuras 1b).

Figura 1a. Reactivo I. 4

$$4- I = \frac{E}{R+r}$$

$$\frac{E}{R+r} = I$$

$$E = I(R+r)$$

$$R+r = \left(\frac{1}{I}\right)E$$

$$R = \left(\frac{1}{I}\right)E - r$$

4) Despejar a R.

$$I = \frac{E}{R+r}$$

$$(R+r)(I) = E$$

$$R+r = \frac{E}{I}$$

$$R = \frac{E}{I} - r$$

Figura 1b. Reactivo II. 2

Gallinas = x borregos = y

$$x + y = 60 \quad (1)$$

$$2x + 4y = 150 \quad (2)$$

$$\frac{2x + 2y = 120}{2x + 4y = 150}$$

$$-2x - 2y = -120$$

$$2x - 4y = -150$$

$$\frac{2x - 4y = -150}{-2x - 2y = -120}$$

$$-2y = -30$$

$$y = 15$$

(2)  $2x + 4y = 150$

$$x + y = 60$$

$$x + 2y = 150$$

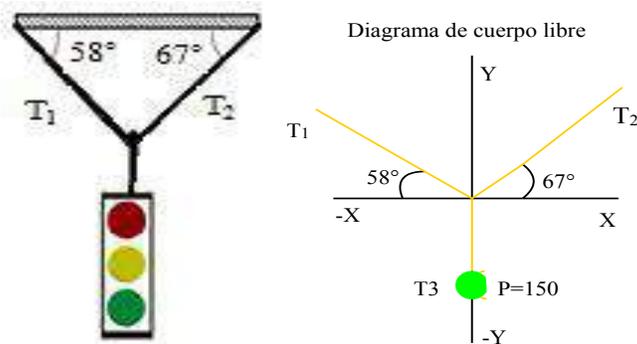
$$-2x - 2y = -120$$

$$2x = 30$$

$$x = 15 \text{ borregos}$$

En el aula de matemáticas se trató el tema del planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales, utilizando las literales  $x$ ,  $y$ . Ante este procedimiento, los estudiantes no mostraron dificultades para tratar los sistemas planteados así mismo se planteó el problema: “un bloque de 150 kg está colgado de tres cuerdas como se muestra en las figuras 2a y 2b. ¿Cuáles son las tensiones  $T_1$  y  $T_2$ ?

Figuras 2a y 2b.



La resolución condujo a las dos representaciones que se muestran en las figuras 3a y 3b.

Figura 3a. Representación en Álgebra "Sistemas ecuaciones lineales"

$$\begin{aligned}
 .3907y - 0.529x &= 0 \\
 0.048x + 0.920y - 150 &= 0 \\
 1.603(-.529x + 0.3907y) &= 0 \\
 0.848x + 0.920y &= 150 \\
 0 + 1.545y &= 150 \\
 x_1 = 97.08 \quad x_2 &= 71.55
 \end{aligned}$$

Figura 3b. Representación empleada en el Laboratorio de Física I "Tensiones"

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \\
 T_2 \cos 67^\circ - T_1 \cos 58^\circ &= 0 \\
 \sum F_y &= 0 \\
 T_1 \sin 58^\circ + T_2 \sin 67^\circ - 150 &= 0 \\
 1.603(-0.529 T_1 + 0.3907 T_2) &= 0 \\
 0.848 T_1 + 0.920 T_2 &= 150 \\
 0 + 1.545 T_2 &= 150 \\
 T_2 = 97.08 \quad T_1 &= 71.55
 \end{aligned}$$

Los estudiantes encontraron que la variable ahora es T<sub>1</sub> y representa la tensión en la cuerda uno y que el coeficiente ahora aparece a la derecha en vez de estar a la izquierda y su valor depende del ángulo que forma la cuerda con la horizontal.

### ■ Resultados Práctica

Se presentan las actividades realizadas por los estudiantes en el Laboratorio de Física durante el experimento de "fuerzas concurrentes (tensiones)" en la siguiente secuencia:



Es importante resaltar que el disco metálico está graduado pero no tiene numerales en la caratula, sin embargo el estudiante prefiere ocupar su transportador, haciendo coincidir el centro del transportador graduado con la intersección de las cuerdas y mide los ángulos correspondientes.



Los estudiantes ocupan un pedazo de tubo como carga y se les solicita representar el fenómeno físico (tensiones) mediante un diagrama de cuerpo libre en equilibrio en hoja de papel, anotando los valores encontrados y los que se quieren conocer.

Se encontró que los estudiantes participantes lograron comprender el fenómeno de fuerzas concurrentes presentado en el laboratorio e interpretarlo mediante el diagrama de cuerpo libre; identificaron las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo como vectores, les asignaron sentido y magnitud y proyectaron sus componentes rectangulares en el plano cartesiano como se muestra en las Figuras (4a y 4b).

Figura 4a

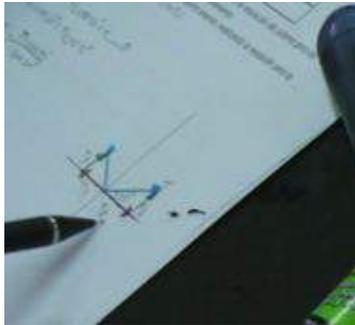
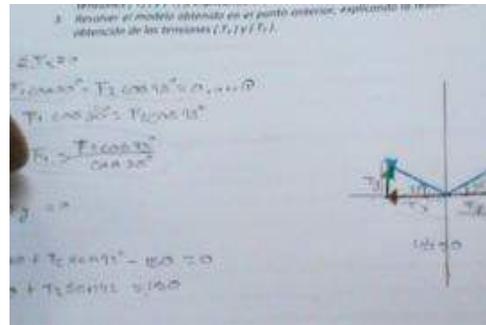


Figura 4b



### ■ Entrevistas

Con el fin de reconocer su comprensión acerca del fenómeno físico mediante la modelación gráfica y algebraica se aplicaron dos entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999). El guión correspondiente consistió en lo siguiente 1) se simuló un fenómeno físico análogo al desarrollado en el laboratorio: el estudiante percibía las tensiones de dos cuerdas una en cada mano y una carga al centro de objetos diversos (arracada y tijeras) como se muestra en las figura 5a; 2) ante tal situación se

plantearon las preguntas ¿qué sucede si solo levantas tu brazo (derecho o izquierdo)? ¿qué varía ante tal movimiento? ¿qué sucede si se cuelga un objeto de peso mayor? ¿cómo representas matemáticamente el sistema? Se les solicitó proponer ejemplos de la vida cotidiana.

Las respuestas del estudiante E<sub>1</sub> reconoció la importancia de conocer la tensión para elegir el tipo de material que debe resistir al ponerle la carga, argumentando que si la carga fuera mucho mayor se rompería el hilo y dio como ejemplo análogo cuando se cuelga una piñata y la jalen entre dos personas y sin en lugar de la piñata cuelgan un objeto demasiado pesado se revientan las cuerdas, el estudiante E<sub>2</sub> se refirió como ejemplo práctico al gancho de una grúa mecánica que levanta un objeto pesado, la tensión que deben soportar las cuerdas y también menciono las cuerdas de la guitarra que soportan cierta tensión cuando se aprieta de más se rompen ver figura 5b.

Figura 5a

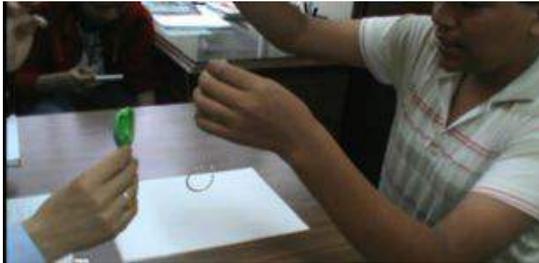


Figura 5b



El interrogatorio, se orientó hacia la exigencia matemática, resultó en la evocación confusa por los entrevistados respecto a la aplicación de las funciones trigonométricas para la proyección de las fuerzas en los ejes coordenados, pues sus antecedentes al respecto son solamente lo que vieron en la secundaria y sus conceptos aún no están consolidados, en el nivel medio superior la Geometría y Trigonometría corresponde al curso del segundo semestre, por lo que se les tuvo que explicar la correspondencia con en el plano cartesiano el cateto adyacente con el eje de las “ $x_s$ ” y el cateto opuesto con el eje de las “ $y_s$ ” (Figura 6a y Figura 6b).

Figura 6a

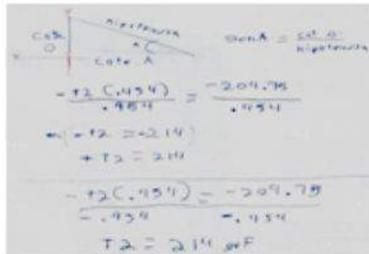


Figura 6b



Finalmente, basándose en la segunda condición de equilibrio los estudiantes plantearon el modelo matemático que representa la resolución del sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones (T1) y (T2) y posteriormente lo resolvieron considerando que en la sustitución de valores en física el coeficiente de la variable queda del lado derecho y no a la izquierda como se presenta en matemáticas ver (Figura 7) Así, el estudiante interactuó con una situación concreta para la que planteó y solucionó un sistema de ecuaciones, como los sistemas que se le presentan comúnmente en el pizarrón del aula de matemáticas, pero ahora con los datos generados durante la experimentación.

Figura 7

$T_1 + T_2 = 11.35$  (Suma)  
 $T_1 - 2T_2 = -11.35$  (Resta)  
 $(1) - (2) \Rightarrow 3T_2 = 22.7$   
 $T_2 = 7.566666666666667$   
 $T_1 = 11.35 - 7.566666666666667$   
 $T_1 = 3.783333333333333$

### ■ Conclusiones

La investigación se encauzó al proceso de razonamiento analítico más que al operativo, para que el estudiante solucionara el sistema de ecuaciones lineales que describe al fenómeno físico. Los ejemplos en los libros de texto de Álgebra generalmente emplean coeficientes enteros o fraccionarios, pero en los cálculos realizados en el laboratorio los coeficientes fueron decimales, lo que desconcertó a los estudiantes; persistió la ausencia del concepto de número real positivo y la mayoría prefirió usar el método de solución por reducción de sumas y restas en cambio los estudiantes de Física ocuparon el método de sustitución que es el utilizado en su libro de texto.

Aunque el guión de la práctica indica que se comente el porqué del planteamiento de las operaciones efectuadas, los estudiantes no lo hicieron, omitieron las unidades implicadas y sólo anotaron la magnitud numérica, o utilizaron newtons (N) en vez de gramos fuerza (grf.), para las componentes de las tensiones en el plano cartesiano. La investigación sometió a análisis la enseñanza y considera conveniente incorporar el experimento “fuerzas concurrentes (tensiones)”, como estrategia de enseñanza en la U-III de la Unidad de Aprendizaje Álgebra. La actividad se realizó atendiendo las 18 horas marcadas en el programa de estudios como no presenciales o en otros ambientes, y contribuye en la conformación de la evidencia integradora.

### ■ Referencias bibliográficas

- Boix-Mansilla, V. (2010). *Programa de los años intermedios*. Guía del PAI para la enseñanza y el aprendizaje interdisciplinarios. UK: Organización del Bachillerato Internacional.
- Díaz Barriga, F. y G. Hernández (1998). *Estrategias docentes para el aprendizaje significativo*. Una interpretación constructivista. México, McGraw Hill pp. 69-112.
- Dirección de Educación Media Superior (DEMS) (2008). *Programa de estudios de la unidad de aprendizaje álgebra*. México: IPN.
- Martínez, R., Giordano, M. A. y Ubaldo, P. J. (2013). Matemática y laboratorio de física: hacia una enseñanza interdisciplinaria. En L. Sosa, J. Hernández, y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 379-386). México: Red Cimates.
- Zaskiz, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.