

ESTUDIO COMPARATIVO SOBRE LA EFICIENCIA DE CONOCIMIENTOS EN TÓPICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL QUE LOGRAN LOS ESTUDIANTES A PARTIR DE DOS FORMAS DE ENSEÑANZA: LA TRADICIONAL Y OTRA QUE INCORPORA EL PIZARRÓN DIGITAL INTERACTIVO

Ruth E. Rivera, Maximiliano De Las Fuentes, Milagros Guiza, Ana Dolores Martínez

Universidad Autónoma de Baja California. (México)

rrivera@uabc.edu.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, mguizae@gmail.com,

ana.dolores.martinez.molina@uabc.edu.mx

Palabras clave: pizarrón interactivo, cálculo diferencial, límites

Key words: interactive whiteboard, differential calculus, limit

RESUMEN

El presente reporte es un avance de un estudio *explorativo y comparativo* aplicado a dos formas de estructurar la enseñanza del concepto de límite. La investigación se realizó en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, con 751 estudiantes inscritos en el curso de cálculo diferencial, el cual se imparte a través de un esquema tradicional y donde se seleccionaron a 121 alumnos con los cuales se implementó un juego didáctico utilizando el pizarrón digital interactivo. Los resultados se analizaron mediante un instrumento de medición válida y confiable en función de los indicadores de logro asociados al *concepto de límite*. Esta comparación permitió observar mayores niveles de eficiencia en los indicadores de los estudiantes que usaron el pizarrón digital, especialmente al realizar cálculos de límites de funciones racionales partiendo de su representación algebraica. Además se detectó mayor disposición y protagonismo en aquellos estudiantes que utilizaron el pizarrón digital.

ABSTRACT

The report presented in this paper shows partial results of an explorative and comparative study applied in two forms to structure the teaching concept of limit in a differential calculus program. The study took place at the Faculty of Engineering of the Autonomous University of Baja California. From 751 students enrolled in the differential calculus who received face to face classes, a sample of 121 students were selected to have them play a didactic game using the interactive Digital Blackboard. Results were analyzed by a valid and trustworthy instrument, which included achievements indicators associated with the concept of limit. The results of this comparison show higher indicator levels of efficiency on students that used the Digital Blackboard, especially when solving limit calculus rational functions from its algebraic representations. Also as a result of our observations on students who participated, we noticed a major disposition and prominence on all those that used the digital blackboard.

■ Introducción

La intensión de los cursos de matemáticas de nivel superior en ingeniería es que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos, los cuales deben estar disponibles para ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. En particular, “aplicar los conceptos y procedimientos del cálculo en la diferenciación de funciones mediante el uso de límites y teoremas de derivación, para resolver problemas cotidianos, de ciencia e ingeniería, apoyados en tecnologías de información con disposición para el trabajo colaborativo, respeto y honestidad”, esta es la competencia que se espera que el estudiante de la Facultad de Ingeniería Mexicali (FIM) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) logre durante el curso de cálculo diferencial.

Al revisar las características de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería (Muñoz, 2005; Deiros, 2003; Gerald, 2002), es factible percatarse del empirismo con el que los docentes atienden los procesos educativos, además de un estilo usual de exposición magistral que minimiza el protagonismo del estudiante y excluye el uso de los recursos tecnológicos. Algunos estudios muestran claramente que la enseñanza universitaria está enfocada en el funcionamiento del contexto algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

Estadísticas llevadas a cabo en la FIM con datos de los años 2005 al 2011 permiten observar porcentajes promedio de aprobación en periodo ordinario del orden del 55% en los cursos de cálculo diferencial, si se considera que ingresan 1300 alumnos por año, entonces casi 600 de ellos se rezagan o desertan cada semestre solamente debido a esta unidad de aprendizaje.

Varios autores (Moreno y Rojano, 1999; Hernández, 2000; Queralt, 2000; Bower, 2003; Heugl, 2003; Laborde, 2003; De Faria, 2005; Eduteka, 2006) confirman que la incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas contribuye a modificar los enfoques de enseñanza y estimulan la actividad intelectual de los estudiantes; pero a la vez mencionan que existe resistencia del profesorado para su aceptación y que es necesario llevar a cabo más investigación sobre los efectos cognitivos que provoca el uso de tecnología en los estudiantes. Así también cuales son las habilidades y actitudes que favorece. Una investigación reciente (Díaz, Herrera, Recio y Saucedo, 2013) de carácter cuantitativo en la cual se utiliza una herramienta interactiva previamente diseñada para la enseñanza del concepto de límite de una función, mostró una diferencia favorable para el grupo experimental en cuanto a la comprensión de dicho concepto desde una perspectiva numérica y geométrica.

■ Marco conceptual

En este proyecto de investigación se diseñó un juego didáctico para abordar el concepto de límite que forma parte del curso de cálculo diferencial que se imparte en la FIM de la UABC. El diseño del juego se basa en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993, 2000, 2006a, 2006b) y Hitt (1991, 2003). Los estudiantes tienen que cambiar de un registro de representación a otro y se promueve en lo general un equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico).

Basándonos en la perspectiva de Duval (2006a) toda actividad cognitiva de representación constituye una prueba o conjunto de señales perceptibles e identificables con respecto a un objeto matemático. En

si el tratamiento es la transformación de una representación dentro del mismo registro de representación y la conversión es la transformación en otra representación diferente del registro original, pero conservando su misma naturaleza. Se sabe que a través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se pueden exteriorizar las representaciones mentales de los individuos. Lo anterior conlleva a la formación de conceptos y a la comprensión de los objetos matemáticos.

El pizarrón digital interactivo (PDI) es un mediador tecnológico de avanzada en la implementación de la estrategia didáctica. Su uso contempla los criterios y consideraciones de algunos especialistas (Giandini y Salerno 2009; Garibay, Vázquez, Castañeda y Hernández, 2008; Laborde, 2003; Herget, Heugl, Kutzler y Lehmann, 2000). Que opinan que el PDI es un recurso flexible y amigable a diferentes estrategias docentes, ya que se adapta a diferentes modos de enseñanza, reforzando los conceptos con la clase completa, pero sirviendo como adecuada combinación al trabajo individual y grupal de los estudiantes.

La concentración y el protagonismo de los estudiantes es un rasgo muy destacado cuando se incorpora el PDI en las actividades de enseñanza (Hervás, Toledo y González, 2010), además de su versatilidad, aceptación y fácil manejo (Domingo, Cacheiro y Dulac, 2009). Aunque las vertientes de análisis y desarrollo de esta tecnología son muy diversas, desde la perspectiva del rendimiento del alumno no hay evidencia suficiente sobre el impacto de esta en el aprendizaje de los estudiantes (Gandol, Carrillo y Prats, 2012; Dorado, 2011; Torff y Tirota, 2010; Smith, Higgins, Wall y Miller, 2005). Por consiguiente se considera pertinente realizar trabajos de investigación con este propósito.

■ Desarrollo metodológico

En esta investigación se tiene como objetivo producir una estrategia didáctica que promueva en el alumno la eficiencia del conocimiento matemático relacionado con el concepto de límite de una función, también se pretende comparar la eficiencia de conocimientos que logran los estudiantes cuando utilizan el PDI en contraste con aquellos que trabajan bajo un esquema tradicional de enseñanza (Gerald, 2002). La eficiencia de conocimientos se determinó a partir de los resultados de la aplicación de un instrumento válido y confiable, mismo que fue diseñado con los criterios de Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004) para la generación de reactivos en la construcción de exámenes del tipo criterial de alto impacto y alineado con el currículum.

Para evaluar la eficiencia del conocimiento o dominio de los componentes conceptuales o procedimentales se diseñaron reactivos con indicadores de logro de acuerdo a Zabala y Arnau (2008). Se diseñó un juego didáctico en el PDI que incluye 10 actividades con la intención de abordar específicamente límites unilaterales y bilaterales, asíntotas horizontales, límites infinitos, continuidad y discontinuidad. En el juego didáctico se destaca el trabajo por parte de los estudiantes en las diferentes actividades cognitivas demandadas, los tipos de representación y el concepto tratado evaluado mediante indicadores de logro.

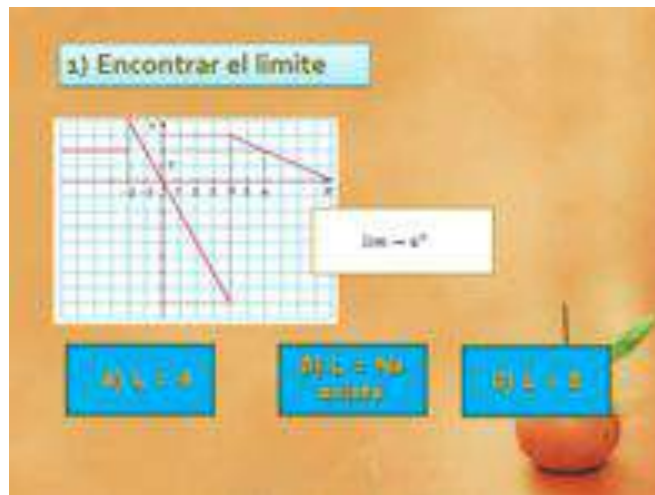
Se utiliza como diseño de investigación el experimento “puro”, en virtud de que se manipula de manera intencional la variable independiente, que corresponde al esquema de enseñanza, por una parte, se diseña e implementa un juego didáctico que incorpora el uso del PDI y por otra, la enseñanza bajo un

enfoque tradicional. La variable dependiente está definida como la eficiencia de conocimientos que adquieren los estudiantes sobre el concepto de límite y se mide con un instrumento de medición ex profeso para ello, dicho instrumento permite la comparación de los dos grupos de estudio. Con el objeto de comprobar si existe diferencia significativa de la eficiencia de conocimientos que logran los estudiantes ante los dos enfoques de enseñanza utilizando la prueba de medias (Walpole y Myers, 1989). La calidad del experimento fue verificada mediante su validez interna de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006).

La implementación del juego didáctico se llevó a cabo durante dos sesiones de una hora cada una en un salón previsto con las instalaciones requeridas para el uso del PDI. Los estudiantes que formaron parte del grupo experimental contaron con material de apoyo y se les solicitó la lectura previa al tratamiento de los conceptos, también por parte del instructor se tuvo una discusión previa a la puesta en escena del juego didáctico sobre dichos conceptos. Se formaron aleatoriamente 2 equipos de 15 estudiantes cada uno, para iniciar con la competencia se eligió un estudiante (también al azar) de cada equipo.

Los estudiantes contaron con un tiempo limitado de 60 segundos para emitir la respuesta correcta en cada una de las actividades, cuando el estudiante elige alguna de las posibles respuestas sobre el PDI, se produce un cambio de pantalla con la leyenda de respuesta correcta o respuesta incorrecta. En cualquier caso, por una parte, el estudiante que responde correctamente promueve una puntuación positiva para su equipo, y así cada alumno procede a seleccionar un reactivo con tres posibles respuestas como el que se ilustra en la Figura 1, la cual se muestra a continuación.

Figura 1. Pantalla del juego didáctico correspondiente a la actividad 1



Por otra parte, el profesor aporta las aclaraciones e institucionalizaciones sobre el concepto en cuestión, reforzando las respuestas acertadas y corrigiendo aquellas que son incorrectas. El juego continúa con cada una de las actividades y los ganadores son el equipo de estudiantes con mayor número de aciertos.

■ Análisis de resultados

La conformación inicial de los grupos con los estudiantes participantes en el estudio es aleatoria y la aplicación de instrumentos de medición en la FIM (De Las Fuentes, Arcos, y Encinas, 2010) sobre la eficiencia de conocimientos tratada a partir de índices promedio de competencias matemáticas y actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) permiten declarar que no hay diferencia significativa en cuanto a las actividades cognitivas de los estudiantes, tanto de los grupos con enseñanza tradicional como de los grupos en los que incluyeron el uso del PDI.

La confiabilidad del instrumento de medición se determinó con el método de mitades partidas de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). La confiabilidad calculada es 0.87, considerada como aceptable para Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004) para el caso de exámenes estandarizados. Los cálculos y resultados de la prueba de igualdad de medias para los indicadores de logro se llevaron a cabo mediante los índices promedio de dificultad de acuerdo a Crocker y Algina (1986).

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la administración del instrumento de medición, mismo que se aplicó a 751 estudiantes al finalizar el curso de cálculo diferencial, 121 de ellos participaron en el juego didáctico que implicaba el uso del PDI, mientras que el resto abordó el tema de límites de una función bajo un esquema tradicional de enseñanza. Los resultados solo contemplan los indicadores de logro impactados por el uso del PDI. Para el reactivo 4 se realizó una prueba de hipótesis de proporciones (índices de dificultad) y con un nivel de confianza del 95%, se obtuvo el estadístico $z = 2.82$, con lo que existen elementos para declarar que existe diferencia significativa en el índice promedio de dificultad a favor de los estudiantes que emplearon el PDI en contra de aquellos que utilizaron un esquema tradicional de enseñanza (Ver cuadro 1).

Cuadro 1. Comparativo de los índices promedio de dificultad e indicadores de logro.

Reactivo	Indicador de logro	Juego didáctico	Enfoque tradicional
1	Determinar el límite de una función por partes cuando está representada gráficamente	0.60	0.58
2	Calcular el límite de una función a partir de su representación algebraica	0.87	0.83
3	Determinar el límite unilateral de una función cuando está representada gráficamente	0.36	0.41
4	Calcular el límite de una función racional a partir de su representación algebraica	0.65	0.51
5	Determinar las asíntotas horizontales de una función racional a partir de su representación algebraica	0.54	0.46
6	Determinar los límites infinitos de una función racional a partir de su representación gráfica	0.64	0.58
7	Determinar la discontinuidad (puntual) de una función racional a partir de su representación algebraica	0.72	0.69

En el resto de reactivos 1, 2, 3, 5, 6 y 7 no se encontró diferencia significativa, sin embargo, en todos ellos salvo en el reactivo 3, las diferencias son favorables para los estudiantes que emplearon el PDI. En general, la prueba de hipótesis con nivel de confianza del 95% y con estadístico $z = 3.15$ $z = 3.15$ demuestra que hay diferencias significativas y favorables respecto del índice promedio de dificultad para los estudiantes que emplearon el PDI como recurso mediador para abordar los temas señalados de límites. La incorporación del PDI le facilitó al docente la promoción de las discusiones, observar los avances de sus alumnos, detectar dificultades y responder dudas individuales.

■ Conclusiones

El balance general del estudio se considera exitoso en virtud de evidenciar disposición, motivación y un protagonismo importante por parte de los estudiantes que utilizaron el PDI, además los resultados de la aplicación muestran mayores niveles de eficiencia en los indicadores de logro cuando se utiliza el juego didáctico, en particular, al calcular el límite de una función racional a partir de su representación algebraica. El juego didáctico implementado mediante el PDI permite a los estudiantes interactuar de forma más natural con los conceptos matemáticos, el PDI juega un papel de mediador entre los alumnos, los conceptos matemáticos y las aportaciones del Docente.

El juego didáctico se considera como una actividad complementaria que enfatiza el uso de los registros gráfico, algebraico y numérico, además de que refuerza los conceptos matemáticos tratados en las clases previas. El juego didáctico promueve en el alumno una mayor participación y lo convierte en protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje, el estudiante fortalece su espíritu de competitividad inmerso en un ambiente de reflexión sobre los conceptos matemáticos y a la vez, desarrolla un trabajo colaborativo con sus compañeros de equipo.

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M., Douady, R., Moreno L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Iberoamérica.
- Bower, B., Brueningsen, C., Brueningsen, E., Gough, S. y Turley, W. (2003). *Discovering math on the voyage (20: Explorations)*. Estados Unidos: Texas Instruments.
- Contreras, L., Bachhoff, E., y Larrazolo, N. (2004). *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica*. México: Manual Moderno.
- Crocker, L., y Algina, J. (1986). *Introduction to classical and modern test theory*. Estados Unidos: Holt, Rinehart and Winston.
- Deiros, F. (2003). *Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería*. Recuperado de <http://www.ilustrados.com/publicaciones/EpyAVkkykeLzKtzAv.php>
- De Las Fuentes, M., Arcos, J., y Encinas, A. (2010). Aplicación de un instrumento y análisis de resultados para medir la actividad cognitiva en estudiantes de ingeniería alrededor del fenómeno sistema masa-resorte. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23* (pp. 475-484). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- De Faria, E., (2005). Matemáticas y nuevas tecnología en Costa Rica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 749-754). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Díaz, J., Herrera, S., Recio, C. y Saucedo, M. (2013). Herramienta interactiva en la comprensión del límite de una función. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 1887-1896). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Domingo J., Cacheiro, M. y Dulac, J. (2009). La pizarra digital interactiva como recurso docente. *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información 10* (pp. 127-145). España: Universidad de Salamanca.
- Dorado, C. (2011). Creación de objetos de enseñanza y aprendizaje mediante el uso didáctico de la pizarra digital interactiva (pdi). *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información 12* (pp. 116- 144). España: Universidad de Salamanca.
- Duval, R., (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives* (pp. 37–65). Strasbourg: IREM.
- Duval, R., (2000). *Representación, visión y visualización: funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Recuperado de <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>
- Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Journal of Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.
- Duval, R., (2006b). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*, 45-81.
- EduTEKA. (2006). *Funcionaria del ministerio de educación explica los alcances del proyecto de calculadoras en la enseñanza*. Recuperado de <http://www.eduteka.org/Entrevista3.php>
- Gandol, F., Carrillo, E., y Prats, M. (2012). Potencialidades y limitaciones de la pizarra digital interactiva, una revisión crítica de la literatura. *Pixel-Bit Revista de Medios y Educación*. España: Universidad de Sevilla.
- Garibay, G., Vázquez, R., Castañeda, M., y Hernández, M. (2008). *El pizarrón interactivo promethean: su uso en las asignaturas de ciencias y tecnología a nivel pregrado*. Reporte Técnico. México: Universidad Autónoma de Guadalajara.
- Gerald, A. G. (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey.
- Giandini, V. y Salerno, M. (2009). La geometría, los ingresantes y el software maple. *Formación Universitaria, 2*(4), 23-30.
- Hernández, S., Fernández, C. Y Baptista, L. (2006). *Metodología de la investigación* (4a. ed.). México: Mc. Graw Hill.
- Hernández, R. (2000). *A didactic engineering research performed within a course on ordinary differential equations where students use the TI-92 calculator*. Recuperado de <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>
- Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., y Lehmann, E. (2000). *Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Environment*. Recuperado el 12 de marzo de 2007 de http://www.matematicamente.it/approfondimenti/skills_ita.PDF
- Hervás, C., Toledo, P., y González, M. (2010). La utilización conjunta de la pizarra digital interactiva y el sistema de participación senteo: una experiencia universitaria. *Pixel-Bit Revista de Medios y Educación, 36*, 203-214. España: Universidad de Sevilla.
- Heugl, H. (2003). *La necesaria competencia algebraica fundamental en la época de los sistemas de cómputo algebraico*. En A. Del Castillo, et al, (Eds.), *Antología de lecturas: El uso del sistema de*

- cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico (pp 29-66). México: Universidad de Sonora.
- Hitt, E. F. (1991). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Educación Matemática* 7, 63-75.
- Hitt, E. F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes de tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana*, 10(2), 12-21.
- Laborde, C. (2003). *¿Por qué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?*, En J. Jiménez, et al (Eds.), Antología de lecturas. El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico (pp. 115-127). México: Universidad de Sonora.
- Moreno, L. y Rojano, T. (1999). Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. *Revista Avance y Perspectiva*, 18, 325-333.
- Muñoz, A. (2005). El uso inadecuado de conceptos matemáticos en las escuelas de ingeniería. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (pp. 377-382). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Queralt, T. (2000). *Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas*. Recuperado el 8 de abril de 2014 de <http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Enfoque.pdf>
- Smith H.J., Higgins, S., Wall, K., y Miller, J. (2005). Interactive whiteboards: boon or bandwagon? A critical review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning*, 21, 91-101.
- Torff, B. y Tirota, R. (2010). Interactive whiteboards produce small gains in elementary students' self-reported motivation in mathematics. *Computers and Education*, 54, 379-383.
- Walpole, R. y Myers, R. (1989). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (2a. ed.). México: Interamericana.
- Zabala, A. y Arnau, L. (2008). *11 Ideas clave, ¿Cómo aprender y enseñar competencias? (2da ed.)*. Barcelona: Grao.