CONSTRUCCIONES MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
marcela.parraguez@ucv.cl

Palabras clave: espacio vectorial, combinación lineal, teoría APOE
Key words: vector space, linear combination, APOS theory

RESUMEN

En el marco del proyecto FONDECYT Nº 1140801 titulado: CONSTRUCCIONES y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL se propuso investigar desde una postura cognitiva el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos básicos del AL, en estudiantes universitarios; utilizando como marco teórico la TEORÍA APOE, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores. En esta primera fase de la investigación reportamos cómo los estudiantes universitarios hacen evolucionar su esquema de dos conceptos básicos del AL (espacio vectorial y combinación lineal) a través de su uso.

ABSTRACT

Under project FONDECYT No. 1140801 entitled CONSTRUCTIONS and MENTAL MECHANISMS FOR THE USE OF THE BASIC CONCEPTS OF LINEAR ALGEBRA we proposed to investigate from a cognitive approach the teaching and learning of the basic concepts of linear algebra in college students; using as framework the APOS Theory, developed by Dubinsky and colleagues. In this first phase of the research we report how university students evolve their scheme of two basic concepts of linear algebra (vector space and linear combination) through the use of them.

Introducción

En el marco del proyecto FONDECYT Nº 1140801 titulado: CONSTRUCCIONES y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL (AL) se propone investigar desde una postura cognitiva el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos básicos del AL en estudiantes universitarios; utilizando como marco teórico la TEORÍA APOE, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Arnon, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014). En esta primera etapa de la investigación analizamos cómo los estudiantes universitarios construyen, los conceptos de espacio vectorial y combinación lineal y Transformación lineal.

El proceso investigativo desde la teoría APOE conlleva el tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático, llamado Descomposición Genética (Dubinsky, 1991) que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesta por dicha teoría (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, Thomas, 1996).

Las descomposiciones genéticas que se han diseñado para tres conceptos básicos del AL, espacio vectorial (Parraguez y Oktaç, 2012), combinación lineal (Parraguez, 2011) y Transformación lineal (Maturana y Parraguez, 2014), han seguido la metodología que nos provee la teoría APOE, poniendo de relieve las construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (Interiorización Coordinación, Encapsulación, Desencapsulación y Asimilación) que los estudiantes ponen en práctica en la (re)construcción que hacen de estos tres conceptos básicos del AL.

Los resultados que se derivan de estas tres últimas investigaciones, están relacionados, por un lado con el rol que juega la generalización de vector nulo en la evolución del esquema espacio vectorial (Parraguez y Oktaç, 2012), y por otro lado la posibilidad que los estudiantes trabajen los espacios vectoriales con operaciones diferentes a las usuales; contribuyendo ambos a consolidar la coherencia del esquema espacio vectorial, mostrada a través de los conceptos y propiedades relacionadas con el espacio vectorial (Parraguez, 2013).

Elementos de diagnóstico de la situación que se pretende abordar

Actualmente existe una gran cantidad de enfoques para impartir los cursos de AL en las universidades, estos tienden a enriquecerse conforme las nuevas tecnologías se incorporan a la enseñanza y se desarrollan paquetes computacionales cada vez más potentes y apropiados en lo que se refiere al cálculo y la graficación. Sin embargo, independientemente de los debates suscitados recientemente, véase por ejemplo, Carlson et al., (1997) sobre el enfoque que debiera darse a un primer curso de AL, la teoría de espacios vectoriales sigue siendo un tema central en estos cursos, y según Dubinsky (1997) las dificultades de los estudiantes con los conceptos de espacio vectorial, combinación lineal y transformación lineal, cuyos contenidos son propios de un curso inicial de AL, y que aquí se llamarán simplemente conceptos básicos ligados a la teoría del AL, provienen de tres fuentes:

- “El papel pasivo, imitador, asignado al estudiante en los cursos de AL”, (Dubinsky, 1997, p. 93).
- La falta de comprensión de algunos conceptos que resultan un antecedente indispensable para entender las nociones básicas referidas, tal es el caso del concepto de función y los cuantificadores.

- Ausencia de estrategias didácticas que den a los estudiantes la oportunidad de construir sus propios conceptos. La elaboración de estas estrategias debiera iniciar por analizar las construcciones mentales específicas que pueden usarse para entender un determinado concepto.

De hecho el núcleo de este reporte se relaciona mucho con los tres puntos anteriores.

La enseñanza aprendizaje del AL

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del AL es, comparativamente, menor que en otras áreas de la Matemática, y es inevitable coincidir con Asiala y otros (1997) que hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de estas materias o bien propuestas para su enseñanza, pero son muy escasos los dedicados a la enseñanza explícitamente vinculados con la investigación. Los estudios del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) acerca del AL son una excepción, pero no ofrecen, propiamente, descomponer genéticamente los conceptos básicos ligados al AL.

Investigaciones han reportado que el discurso matemático escolar del AL privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska et al., 2002). De hecho, Sierpinska (2000) se concentra en algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes, que podrían ser los responsables de algunas dificultades en el aprendizaje del AL. La autora argumenta que los estudiantes tienden a pensar más en forma práctica que teórica, y señala que esta tendencia afecta negativamente el razonamiento en el ámbito del AL (Sierpinska, 2000).

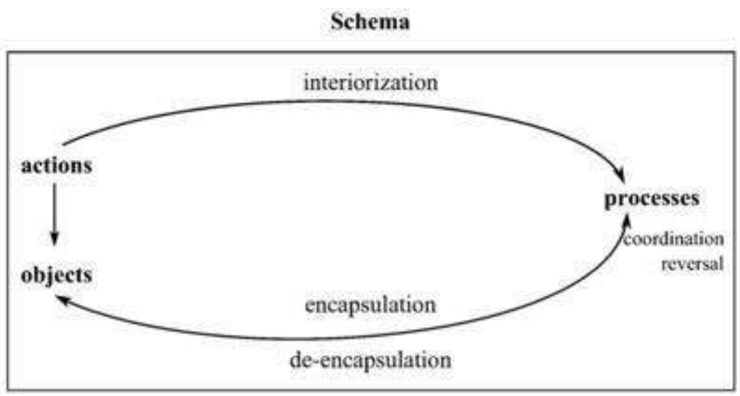
Especificamente, Maturana y Parraguez (2012) utilizando como marco teórico los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural), reportaron que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios en un modo analítico-aritmético, desarticulado con el modo sintético-geométrico.

Teoría APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas, acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales.

El esquema, "es el nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala et al., 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la Figura 1, se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014, p. 18).



A lo largo de todo este reporte, vamos a considerar un ESQUEMA como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos y que muestran la coherencia del esquema (o sea niveles de desarrollo) al discernir cuando el esquema es aplicable o no. De esta manera, el desarrollo cognitivo de un esquema en la mente de un individuo se caracteriza a través de los niveles Intra, Inter y Trans por el tipo de las relaciones y transformaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre construcciones particulares que evocan dentro del esquema, cuando resuelven un problema.

Desde estas caracterizaciones generales, un indicador del desarrollo del esquema en la mente de un individuo es el tipo de relaciones y el tipo de transformaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los estados de construcciones de conceptos matemáticos particulares, que evocan dentro del esquema, cuando resuelven problemas. La forma en que los estudiantes establecen relaciones y transformaciones entre los diferentes estados de construcciones mentales de conceptos particulares dentro del esquema, cuando están resolviendo un problema matemático, puede ser vista como la forma en que los estudiantes reorganizan y reconstruyen –USAN– los conceptos básicos del AL, para formar nuevos estados de construcción de éstos. De esta manera el desarrollo de un esquema viene determinado por el tipo de organización, a partir de relaciones lógicas y síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL, que el resolutor de un problema precisa para su resolución.

Así los niveles de desarrollo del esquema de los “conceptos básicos del AL” en la mente de un estudiante los caracterizaremos como:

- ***Nivel INTRA de los Conceptos básicos del AL***: no se establecen organizaciones a partir de relaciones lógicas o síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan los conceptos básicos del AL en forma aislada (por ejemplo: para cierto tipo de Espacios Vectoriales), y no como un cuerpo de conocimiento.

- ***Nivel INTER de los Conceptos básicos del AL***: Los estudiantes establecen organizaciones a partir de relaciones lógicas (o alternativas) entre los estados de construcción del esquema de conceptos básicos del AL, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica, en elementos del AL que le son familiares. El estudiante es capaz de usar más conceptos básicos del AL de forma correcta que en nivel anterior.
- ***Nivel TRANS de los Conceptos básicos del AL***: Aumenta el repertorio de las relaciones lógicas (y lógica, cotrarecíproco, absurdo, y equivalencia lógica) que el estudiante es capaz de establecer entre los diferentes estados de construcción del esquema conceptos básicos del AL. En este nivel se produce la síntesis de los modos de rotular cuestiones relativas a los conceptos básicos del AL y lo lleva a la construcción de un cuerpo de conocimiento unificado.

La síntesis se aplica a situaciones en las que hay que considerar conjuntamente cuestiones del AL que pertenecen a una misma familia o categoría. Por ejemplo: a veces un vector es una flecha, otras veces en un par ordenado, otras una matriz, otra un polinomio, etc.; para obtener una información que no se conocía. Considerar la información conjuntamente lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica (o síntesis) para tomar decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra.

Por tanto, desde esta perspectiva el tipo de relaciones diferentes entre los estados de construcción de los conceptos básicos del AL que los estudiantes establecen durante la resolución de un problema puede ser considerado un indicador del nivel de desarrollo mental del esquema que hemos llamado de los conceptos básicos del AL.

El objetivo en esta parte de la investigación es identificar el tipo de relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes usan cuando resuelven un problema, para así caracterizar el proceso de desarrollo del esquema concepto básicos del AL.

La hipótesis sobre la cual se apoya este objetivo es que las relaciones entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes (de nuestro casos de estudio) son capaces de establecer durante la resolución de un problema, pueden ser consideradas como las construcciones o mecanismos mentales en el sentido de APOE, que apoyan la construcción del conocimiento.

■ Metodología

En esta primera etapa se trabajó con un caso de estudio, constituido por10 estudiantes (sean estos de Licenciatura o Pedagogía en Matemática), atendiendo a criterios de selección: (haber cursado AL, buen rendimiento académico, accesibilidad de los investigadores). Los estudiantes fueron etiquetados como E1, E2,…, E10.

■ Instrumento de recogida de datos

En esta primera etapa se aplicó un cuestionario de 11 preguntas, del tipo lápiz y papel. La idea es que la demanda del problema propuesto al resolutor sea tal, que podamos caracterizar la evolución del esquema de estos los conceptos básicos del AL.

Análisis de las respuestas al cuestionario

Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario que se aplicó a los estudiantes, para mostrar en este reporte su análisis desde la triada Inter-conceptos básicos del AL, Intra- conceptos básicos del AL y Trans-conceptos básicos del AL.

Pregunta 8 del Cuestionario

Sea $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x,y,z>0\right\}$ un espacio vectorial con las operaciones:

SUMA: $u\oplus v=\left(xa,yb,zc\right)$ con $u=\left(x,y,z\right)$, $v=(a,b,c)$ en *V*

PONDERACIÓN: $\lambda \,\mathrm{e}\, u=\left(x^{\lambda},y^{\lambda},z^{\lambda}\right)$ con $u=\left(x,y,z\right)\in V$ y $\lambda\in\mathbb{R}$.

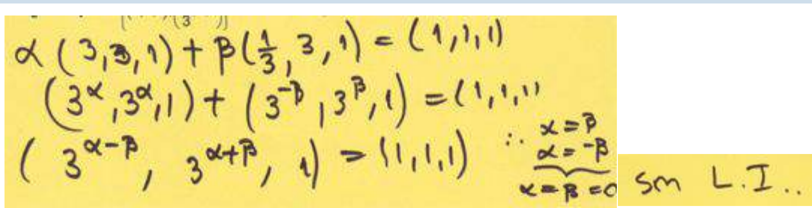
Sea *W* el subespacio de todos los puntos de *V* situados sobre el plano $z=1$**.**

8.1 ¿Los vectores $\left(2,2,1\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ de *W* son linealmente independientes?

8.2 ¿El conjunto $\left\{\left(3,3,1\right),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ es una base para *W*?

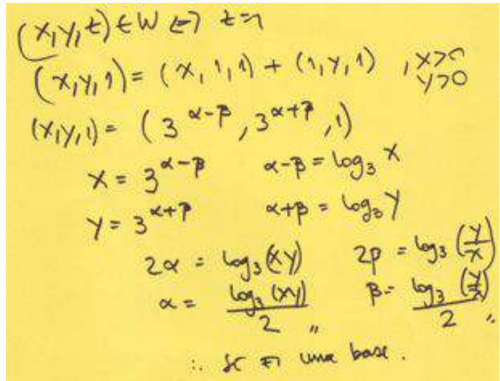
Al evocar el esquema de conceptos básicos del AL en un nivel Inter, los estudiantes establecen relaciones entre el objeto espacio vectorial, conjuntos linealmente independiente (li) y base, con operaciones suma y ponderación diferentes de las usuales. Veamos las relaciones que estableció el E5 al enfrentar la pregunta 8, en particular se resalta la pregunta 8.2, en la cual aplica adecuadamente las definiciones de las operaciones suma y ponderación, de combinación lineal, de linealmente independiente/dependiente y base, al demostrar que el conjunto $\left\{\left(3,3,1\right),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ es una base para *W*. El E5 primero prueba que el conjunto es li, (Figura 2).

Figura 2. E5 mostrando que un conjunto es li.



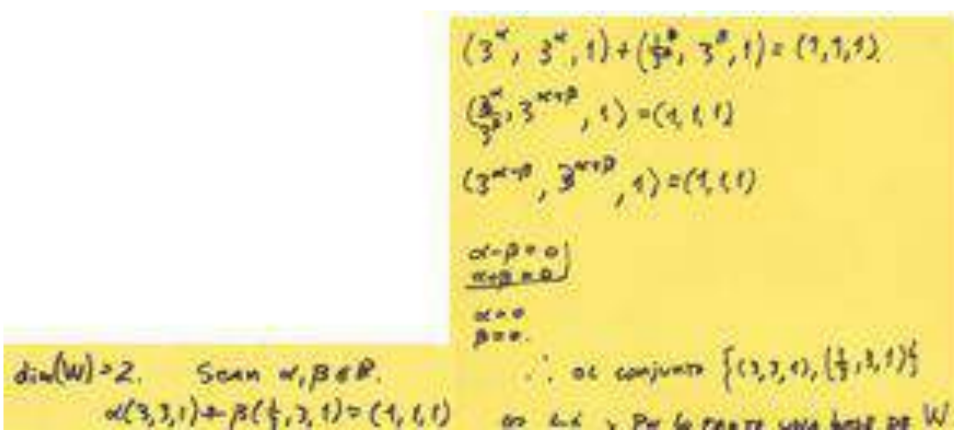
Y después chequea que el conjunto $\left\{\left(3,3,1\right),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ genera a *W*, (Figura 3).

Figura 3. E5 mostrando que un conjunto que genera y es li, es base.



En tal caso, E8 y E5 no fueron los únicos estudiantes que mostraron estar en este nivel de esquema, también encontramos al estudiante E3, que también mostró evidencias de relaciones entre sus construcciones: objeto de espacio vectorial y base, al resolver la pregunta 8.2 del cuestionario. E3 comienza diciendo que la $\dim(W)=2$, por lo que sólo le resta probar que el conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ sea linealmente independiente, (Figura 4).

Figura 4: E3 mostrando que un conjunto es base, a través de la dimensión.



■ Reflexiones finales

En esta primera etapa de desarrollo del proyecto podemos señalar que ante un problema, por ejemplo de base de un Espacio Vectorial emergen subproblemas, de linealmente independiente/linealmente dependiente, espacio generador, dimensión, entre otros; que si no son evocados en el esquema conceptos básicos del AL por el resolutor, no puede abordar con éxito el problema.

Los resultados obtenidos hasta ahora indican que el desarrollo del esquema de espacio vectorial y conjuntos linealmente independiente están vinculados a la capacidad de los estudiantes de relacionar elementos constitutivos del concepto durante la resolución de problemas. Sin embargo estos mismos resultados preliminares, indican que es necesario llevar a cabo más investigación, para ello se sugieren entrevistas a los estudiantes, para profundizar en su razonamiento y poder con ello tener más evidencia que sustente cómo evolucionan sus esquemas de los conceptos básicos del AL cuando están en uso a través de la resolución de un problema.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory*: a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. y Oktaç, A. (1997). Development of students. Understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior 16*(3), 241-309.

Carlson, D.; Johnson, C. R.; Lay, D. C.; Porter, A. D.; Watkins, A. E. y Watkins, W. (Eds.). (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42.

Dorier, J. L. y Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek H. (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level*: An ICMI Study (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first linear algebra course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra*, *MAA notes, 42*, 85-106.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123. Dordrecht: Kluwer.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, *20*(2), 65-89.

Maturana, I. y Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27 (pp. 71-778). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maturana, I. y Parraguez, M. (2012). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios. *Revista de Educación Matemática RECHIEM*, *6*(1), 173-191.

Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Educación Matemática*, *25*(1), 133-154.

Parraguez M. y Oktaç A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA*, *33*(1), 163-192

Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24 (pp. 263-272). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sierpinska, A., (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra* (pp. 209-246) Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie A. y Oktaç A. (2002). *A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra.* Montreal: Concordia University.