ELEMENTOS HISTÓRICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

NATALIA ESCOBAR VILLOTA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2012

ELEMENTOS HISTÓRICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

NATALIA ESCOBAR VILLOTA
Código: 200530488

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Licenciada en Matemática y Física

TUTOR: PhD. LUIS CARLOS ARBOLEDA APARICIO
GRUPO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación Básica
Se trata de:	*Proyecto* [ ] *Informe Final* [X]
Director:	Luis Carlos Arboleda Aparicio
1er Evaluador:	Sergio Iván Valencia Marín
2do Evaluador:	Octavio Augusto Pabón Ramírez
Fecha y Hora	*Año:* 2012 *Mes:* 02 *Día:* 28 *Hora:* 14:40

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Natalia Escobar Villota	200530488	Lic. Matemática y Física

Evaluación

Aprobado	X	*Meritorio*		*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No Aprobado*		*Incompleto*	

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo		*1er Evaluador*		*2do Evaluador*	

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones:		**Recomendaciones:**		**Razón del Desacuerdo – Alternativas:**	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Se sugiere remover, si es posible, algunos de los anexos en virtud de que buena parte del informe, son anexos. Luego, se pueden incorporar algunos de esos anexos al cuerpo del texto.

Dar una justificación a la importancia (el por qué) de la selección de los textos, lo que aparece contemplado en el capítulo 4. Aspecto por el cual, dicho capítulo parece un poco escueto.

Tener en cuenta que algunas preguntas sobre Historia de las Matemáticas son muy generales. Quizá sea más conveniente perfeccionar las preguntas desde lo concreto (la historia de los logaritmos y su implementación) a lo general (las preguntas sobre Historia de las Matemáticas en general). Tener en cuenta esto para un futuro trabajo.

Es un trabajo valioso que vislumbra la conexión entre historia de las matemáticas y formación de docentes, de un modo muy concreto.
Vale la pena tener en cuenta la metodología (las entrevistas) para que sea afinada y las respuestas sean más "transparentes".

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Gdo

AGRADECIMIENTOS

Expreso los más sinceros agradecimientos, en primer lugar a mi señora madre, Cecilia Villota y mi hermano Gustavo Andrés Villota, por brindarme su apoyo durante toda la carrera universitaria. A mi tutor, Prof. Luis Carlos Arboleda, por disponer de su sabiduría, comprensión y paciencia para el completo desarrollo de esta producción académica. A los docentes que aceptaron amablemente ser parte fundamental de esta investigación a través de sus testimonios de experiencia. A mi amiga Lic. Sandra Milena Cuero, por su atención, consejos y asesorías en todo momento, especialmente durante este proceso. A profesores y compañeros que de alguna manera dieron su aporte al avance y culminación del proyecto. Igualmente, a todas aquellas personas que fueron objeto de mi inspiración para alcanzar esta meta.

Contenido

RESUMEN

En este trabajo de grado se pretende brindar algunos elementos desde la perspectiva de la Historia de las Matemáticas para contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la función logarítmica en los grados 8° y 9° de la Educación Básica. Para ello, se exploran las representaciones del docente frente a la caracterización matemática de la función, su metodología de enseñanza, la Historia de las Matemáticas y asuntos curriculares e institucionales influyentes en la enseñanza de la función, a través de entrevistas directas a diez docentes de Matemáticas en la ciudad de Santiago de Cali seleccionados bajo parámetros preestablecidos.

Se realiza una propuesta de intervención histórica para la enseñanza de la función logarítmica, y se recomienda bibliografía a los docentes con el fin de incentivar la consulta en Historia de las Matemáticas para su implementación en la transmisión de este objeto matemático e influir en su eficaz aprendizaje.

PALABRAS CLAVES: Historia de las Matemáticas, Función logarítmica, enseñanza de las Matemáticas, formación docente.

Capitulo 1.

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

CAPITULO 1. PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN.

1.1. INTRODUCCIÓN

A través del tiempo, el desarrollo y consolidación de las Matemáticas se ha debido a los aportes y trabajos incansables de seres humanos que como hoy, seguramente tuvieron obstáculos en el entendimiento de muchos de los conceptos surgidos constantemente. La historia de los logaritmos tuvo el mismo proceso de concepciones y formalizaciones al igual que los demás objetos constituyentes de la ciencia matemática. Su creación se originó en la necesidad de facilitar cálculos extensos de multiplicaciones y divisiones requeridos para la navegación y la astronomía en el siglo XVI. Sin embargo, en los años siguientes con los avances en su formalización, su tratamiento en contextos infinitesimales y las comparaciones con conceptos geométricos finalmente llevaron a ver los logaritmos como función en el siglo XVIII.

Si se plantea en el contexto educativo, los estudiantes similarmente requieren de esfuerzo para la apropiación del concepto de logaritmo y de función logarítmica. Sin duda hay diversas razones por las que aparecen tropiezos para su entendimiento, pero el papel del profesor como mediador entre el conocimiento y el estudiante es sumamente importante. Los recursos utilizados por el docente y la forma cómo exponga y maneje los objetos matemáticos afectarán la visión de los estudiantes sobre las Matemáticas.

Actualmente, la función logarítmica es muy importante para la modelación de situaciones empíricas, y para ciencias tales como Biología, Astronomía, Geografía, Economía, entre otras; en contextos concretos como la medición de la magnitud de sismos, y comportamientos en general que indiquen crecimiento o decrecimiento poblacional bien sea de humanos, animales, ventas, temperatura, etc. Viéndose necesario su aprendizaje, los estudiantes deben manejar la función logarítmica de manera apropiada y segura para que encuentren sentido al desarrollo de su pensamiento matemático. Esto depende en gran medida de una intervención significativa del docente en donde caracterice y analice la naturaleza epistemológica de las Matemáticas, y en este caso, de la función logarítmica.

Antes de comenzar a desarrollar esta producción académica, cabe mencionar su exteriorización en espacios académicos a público de interés y de necesario conocimiento como los estudiantes de pregrado de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, y Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle, además de docentes en ejercicio de algunos colegios de la ciudad.

El primer espacio de exposición fue el Seminario de Práctica Profesional en el año 2010, y los siguientes han sido en el marco del Laboratorio de Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Este ejercicio divulgativo ha permitido generar discusiones en torno a la formación de docentes en la línea de Historia de las Matemáticas. Específicamente, se ha reconocido por parte de los espectadores, un buen manejo del tema hasta el momento desconocido e inimaginable (para ellos) de la evolución histórica de los logaritmos y la función logarítmica, además de resaltar la propuesta de intervención didáctica.

Se espera, este informe final y detallado del análisis de las problemáticas de la enseñanza de la función logarítmica desde la perspectiva histórica y didáctica de las Matemáticas, impulse mucho más su divulgación con miras a contribuir mejor a las discusiones académicas, y al enriquecimiento del campo de conocimiento de los educadores matemáticos.

1.2. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

Indudablemente, el aprendizaje de las Matemáticas no es fácil para la mayoría de personas. Desde lo más básico a lo más complejo, se producen errores y dificultades no muy fáciles de corregir. Durante el desarrollo histórico de las Matemáticas, las personas involucradas en la construcción y consolidación de cada uno de sus objetos tuvieron obstáculos para su asimilación y entendimiento hasta el punto de producir discusiones y discernimientos sobre su reconocimiento en la Ciencia. Los logaritmos y la función logarítmica, no fueron la excepción.

En la escuela e incluso, en la Educación Superior se hallan varias dificultades concernientes a la comprensión del concepto, al abordaje realizado por los libros de texto u otros recursos didácticos, su interpretación y aplicación en otros campos del conocimiento o contextos reales, etc., algunas identificadas y caracterizadas en la presente investigación. Pero ello no solamente depende del esfuerzo del estudiante, sino también cómo el docente esté enseñando dichos conceptos, su exposición de tal manera que sea significativa y cómo sus concepciones influyen en las adoptadas por el alumnado. Esta función aparentemente la presentan de tres formas:

1. *Como algoritmo.* Por definición el logaritmo de un número x con una determinada base a ($\log_a x = y$) es el exponente y al cual se eleva la base para obtener el argumento x. Sin embargo, el concepto se reduce a un proceso algorítmico al hallar y a través de un sucesivo cálculo de potencias aleatorio y repetido mecánicamente en ejercicios propuestos por el docente, tomando como dominio de a, x e y sobretodo los números enteros positivos y el cero ($a, x, y \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) pero pocas veces los enteros negativos ($a, x, y \in \mathbb{Z}^-$).

   Esta práctica deja de lado el contexto donde puede utilizarse el objeto en cuestión, su relación con otras ramas de la Matemática, ciencias, o las operaciones básicas de su origen. El tema generalmente se da a conocer en los últimos años de la Básica Primaria o comienzos de la Básica Secundaria.

2. *Como función $f(x) = \log_a x$.* Puede definirse como función inversa de la función exponencial $g(x) = a^x$ previo estudio de la misma, y/o a partir de la

construcción de la gráfica con base en la tabulación de números enteros o racionales, postulando de antemano que su dominio son los números reales positivos ($x \in \mathbb{R}^+$) y su rango, todos los números reales ($y \in \mathbb{R}$).

La anterior definición no aborda de manera general la naturaleza del logaritmo como función, solo se vincula a la idea de función inversa. Puede ser más significativo definirla así: Dado un número x real positivo llamado *argumento*, la función logaritmo asigna el exponente $y \in \mathbb{R}$ al cual se eleva un número fijo a llamado *base* para obtener el argumento; pudiéndose hacer énfasis en la doble implicación lógica vinculada a la definición de función exponencial.

Esta forma se enseña durante los últimos grados de la Educación Básica Secundaria y/o durante la Educación Media.

3. *En forma algebraica.* El argumento x del logaritmo es la incógnita, inmersa en una ecuación que podría escribirse de manera general como:
$$p \cdot \log_a(hx^m * r)^k * q \cdot \log_b(jx^n * s)^{k'} * \ldots * u(x) * v(x) * \ldots * z(x) = 0$$
tal que $p, q, a, b, h, j, m, n, r, s, k, k' \in \mathbb{Z}$ y $u(x), v(x), z(x)$ son polinomios aunque generalmente de grado cero, y "$*$" es cualquier operación aritmética $(+, -, \times, \div)$.

No obstante, se remite frecuentemente a la función logaritmo natural $\ln x$, al ser más manipulable como inversa de la función exponencial e^x, limitando en gran parte el manejo general de la función $\log_a x$ en contextos algebraicos: ¿qué sucedería si el estudiante se encuentra con funciones logarítmicas con bases distintas de 10 o e, para su análisis geométrico y algebraico? Seguramente no tendría mayor éxito. Es muy probable que esta última presentación no se trate ni siquiera en últimos grados o tal vez muy poco.

Usar conocimientos geométricos y definiciones simples o intuitivas de la función sería una buena estrategia para plantear una idea. No obstante, es incompleta si para el educador es la única forma de definirla, sin estudiar su concepto trabajando rigurosamente, en particular, el paso de los elementos geométricos a la formalización de la definición.

Esta investigación exploró si realmente se profundiza la enseñanza de los logaritmos en estas tres fases, pues parece se manejara muy superficialmente a comparación con el estudio de otras funciones; no se hace un tratamiento detallado de sus propiedades o su gráfica, las variaciones de ésta según sus valores numéricos, ni de sus aplicaciones, como sucede con la función lineal, cuadrática, trigonométrica, exponencial o radical.

Una hipótesis manejada al respecto es la falta de formación del profesor sobre el origen, desarrollo y métodos involucrados en su estudio, viéndose abocado a evadirla por inseguridad, al ocasionarle las mismas dificultades de comprensión que a los estudiantes. Otro factor podría ser la falta de dedicación suficiente en la programación del curso y el año lectivo, constituyéndose en un obstáculo adicional para el estudiante pero esta vez, por cuestiones institucionales y curriculares.

Por otra parte, se nota que en nuestras realidades escolares no hay una apropiación didáctica[1] de la Historia de las Matemáticas, es decir, aún no es asimilada como recurso mediador para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Situación preocupante porque ella contribuye a entender la naturaleza epistemológica de los objetos matemáticos y la dimensión social y cultural de la actividad humana conducentes a su formación, motivo por el cual, en este trabajo se la considera línea fundamental para identificar grandes aportes en el estudio y enseñanza de esta función en el aula de clase.

La preocupación por la situación presentada es el fundamento, para que a través de esta investigación, se realice un estudio histórico buscando elementos que aporten a la enseñanza de los logaritmos de una manera más simple y significativa, especialmente en su presentación funcional, en la Educación Básica (si es el caso, Educación Media) contribuyendo a la apropiación de la función logaritmo pues tal como lo disponen los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para grados 8° y 9°, el alumno debe ser capaz de identificar y utilizar los logaritmos y la función logarítmica en situaciones matemáticas y en aplicaciones de la vida real, a lo que desafortunadamente no se le da mucha relevancia:

> *"PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS.*
> *(…)*
>
> *Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.*

[1] El término "apropiación didáctica" no alude a un concepto teórico del campo de la Didáctica de las Matemáticas.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS.

(…)

- *Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.*

- *Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones especiales pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas…"* (MEN, 2006, págs. 86-87).

Con toda la previa situación sobre la enseñanza de la función logaritmo y la importancia de involucrar a la Historia de las Matemáticas, se desarrolla la siguiente pregunta problema en el presente trabajo de grado: *¿Bajo qué condiciones conceptuales y metodológicas la Historia de las Matemáticas puede ser utilizada por el docente en el diseño de estrategias didácticas para el mejoramiento de la enseñanza de la función logarítmica en la Educación Básica?*

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL.

Explorar una manera de apropiación didáctica de la Historia de las Matemáticas en la formación de docentes de Matemáticas en el caso de la enseñanza de la función logarítmica.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Identificar y estudiar algunos problemas didácticos de la enseñanza de la función logarítmica entre docentes de Matemáticas de la Educación Básica y Media de Santiago de Cali.

- Examinar estos problemas didácticos desde la perspectiva histórica de constitución del objeto función logarítmica.

- Producir una selección de textos históricos significativos para los docentes de Matemáticas como recurso para la enseñanza de la función logarítmica.

1.4. MARCO TEÓRICO.

Se toman fundamentalmente referencias bibliográficas sobre el recuento histórico de los logaritmos, el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, la Didáctica de las Matemáticas, y el currículo colombiano. Además, se utilizaron textos guía para la localización de las instituciones educativas (*El Maestro en la Ciudad*), y la sistematización y organización de las entrevistas (*Más allá del dilema de los métodos: la investigación en Ciencias Sociales*) –Ver capítulo 2.

Los textos de Bell (2000), Boyer (2001), Edwards (1979), Gonzales y Vargas (2007), y Tapia (2003) dan cuenta del desarrollo histórico-epistemológico de los logaritmos y el paso a su constitución como función, partiendo de la época babilónica hasta los desarrollos de Leonhard Euler en el siglo XVIII. Abrate y Pochulu (2007), Barbín y Bérnard (2007), Ferrari y Farfán (2008), Panagiotou (2010), Ponte (1992) exponen diferentes perspectivas de la intervención de la Historia en la enseñanza de los logaritmos y la función logarítmica.

El eje estrictamente didáctico lo constituyen: Sierpinska (1992) quien involucra etapas históricas del concepto de Función enfatizándose en identificar obstáculos epistemológicos y actos de comprensión en la enseñanza y aprendizaje del tema, mientras Socas (1997) aborda las dificultades, obstáculos y errores de las Matemáticas en general. Además de una mirada sobre la importancia del conocimiento del docente para la enseñanza de las Matemáticas, por parte de Even (1990). En lo curricular solo se alude a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Para el desarrollo de la investigación, se estudiaron previamente varios de los señalados autores. Sin embargo, al entrar a analizar lo hallado en la exploración, se introdujeron otros debido a la necesidad de un plano más global con respecto a la Didáctica, y la relación entre Historia y enseñanza, con el fin de extraer problemas didácticos macro desde la teoría, aplicables al caso de la función logarítmica.

A continuación se realiza una reseña de la Historia de los logaritmos y su consolidación como función resaltando sus etapas más significativas, para una mejor comprensión del análisis histórico en el capítulo 3:

Primeramente, los mesopotámicos o babilonios (2000 a. C – 600 a. C) realizaban tablas de cálculo similares a las tablas de lo actualmente llamado antilogaritmos, las cuales contenían potencias sucesivas de un número dado. También se cuestionaban por lo que hoy se interpreta como el número y al que debían elevar a un número a para que les diera como resultado, un número dado x, es decir, el logaritmo $\log_a x = y$. Estos razonamientos se realizaban con el objetivo de resolver problemas concretos de su entorno.

En segundo lugar, Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.) en su reto por calcular el número de granos de arena que cabrían en el universo, introdujo la estimación de números muy grandes y con ello, el principio de la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas se empieza a notar. Por la misma línea, Nicolas Chuquet (1455 – 1488 aproximadamente) construyó una tabla de sucesivas potencias con base 2 con la que hizo notar que la suma de los exponentes era igual a su producto (cuestión que ya había hecho apreciar Arquímedes) y, sin tomar en cuenta el tamaño de los intervalos que separan un valor del otro, se puede interpretar como una tabla de logaritmos.

El escocés John Napier (1550–1617) fue quien en realidad inventó los logaritmos hacia 1594, realizando tablas de cálculo donde relacionaba progresiones aritméticas con geométricas, estableciendo una expresión numérica cercana a 1 $(1 - 10^{-7} = 0{,}9999999)$ para que los intervalos de separación entre los números calculados fueran próximos entre sí. La importancia de los logaritmos radica en la intención de reducir los dispendiosos cálculos de multiplicaciones y divisiones con números muy grandes para reducirlos a simples sumas y restas. Cálculos que se necesitaban en la astronomía y la navegación, pero que con las tablas logarítmicas se volvieron mucho más manejables hasta el punto de ayudar sustancialmente al desarrollo y culminación de la tercera ley del movimiento planetario de Kepler, quien era contemporáneo de Napier.

En el siglo XVI, el movimiento físico era la única base utilizable para consideraciones cuantitativas de variación numérica, posición que influyó en Napier para su definición de logaritmo sustentada desde el punto de vista geométrico del movimiento continuo de puntos sobre un segmento de recta. Por otro lado, la denominación de *“logaritmos”* a los números hallados en sus tablas, fue exclusivamente suya combinando dos palabras griegas: *logos* (razón) y *arithmos* (número), y gracias a su permanente utilización de la notación para los números decimales en sus trabajos, la comunidad matemática de los años 1600 la adoptó de modo general.

A partir de la publicación de las tablas logarítmicas en 1614, Henry Briggs (1561-1631) y Napier acordaron perfeccionar el método de cálculo e instauraron las identidades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$. Después de la muerte de Napier, Briggs elaboró más tablas deduciéndolas por una vía distinta a la anterior, usando las identidades convenidas. Simultáneamente, Jobst Bürgi (1552-1632) desarrolló el cálculo de logaritmos de manera independiente de Napier, que aunque con algunas diferencias en su tratamiento de terminología y valores numéricos escogidos, el principio fundamental de los logaritmos es el mismo.

Otros matemáticos interesados en los logaritmos fueron el italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) quien calculó tablas para funciones trigonométricas como senos, tangentes y secantes, y sus logaritmos respectivos; y Nicolaus Mercator (1620-1687) quien además de elaborar tablas logarítmicas, dedujo fórmulas de aproximación para el cálculo de logaritmos entre las cuales está la serie infinita que lleva su nombre, convirtiéndolo en el primero en establecer una relación entre los logaritmos y las series infinitas.

Sin embargo, el escocés James Gregory (1638-1675) fue el primero en identificar la asociación del área bajo una curva con los logaritmos, específicamente, con la curva hiperbólica rectangular pues su área satisface la ley de la suma de los logaritmos $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$, descubrimiento de gran importancia para el desarrollo del Cálculo implicando una conexión entre la función logaritmo natural y la hipérbola rectangular.

Gracias a este hallazgo, se fomentaron investigaciones queriendo precisar tal relación, desembocando en el surgimiento de las series infinitas y métodos de cálculo de los logaritmos. Tal es el caso de Isaac Newton (1641-1727) quien produjo la serie infinita de la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$, concluyendo que el área bajo la curva es igual al logaritmo, y cumple las leyes de adición (mostrada anteriormente) y sustracción $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$. Con esto, realizó tablas de cálculo de logaritmos de números enteros. No obstante, Newton no se refirió al área como logaritmo pero se nota que reconoció indirectamente su carácter logarítmico. Igualmente, Mercator en 1668 mediante el método de los indivisibles de Cavalieri produjo su serie infinita.

Hacia el siglo XVIII, los hermanos Bernoulli también realizaron su aporte. Jacques Bernoulli (1654-1705) trabajó en la curva *“espiral logarítmica”* mencionada antes por Descartes y Torricelli, pero Jacques mostró cuatro propiedades de esta curva, empezando a concebir la relación de los logaritmos con la parte gráfica. Por su parte, Jean Bernoulli (1667-1748) se interesó por la correspondencia entre las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos de números imaginarios que en aquel tiempo también estaban en desarrollo desde la perspectiva analítica, llevándolo a esbozar un primer concepto de función y su notación. Adicionalmente, se enmarcó en la discusión junto a Leibniz, sobre los logaritmos de los números negativos.

Por último, el suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue quien contribuyó enormemente a la consolidación de los logaritmos como función pues fue el primero en introducir el concepto de manera formal, además de insertar mucha de la notación utilizada actualmente. En 1748, investigó el vínculo entre las funciones logarítmica y exponencial, obtuvo la función exponencial a^x a partir de la expansión de una serie infinita teniendo en cuenta la existencia de números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. De estas series infiere el caso particular de la función e^x y el número e, calculando su valor numérico y estableciéndolo definitivamente como la base del logaritmo natural, pues en años anteriores ya se comprendía la existencia de los logaritmos naturales pero no se habían formalizado como tal. Por consiguiente, es el primero en interpretar los logaritmos (que él denotaba como "lx") como exponentes, es decir: $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

Igualmente, desarrolla las diferenciales de las funciones exponencial y logarítmica, y aplica todos los anteriores resultados a la teoría de los números complejos en donde la función e^x es fundamental y, una vez más, tiene correspondencia con la función logarítmica, de lo cual también concluyó que cualquier número $x \in \mathbb{C}$ puede tener muchos logaritmos.

Como puede verse *grosso modo*, el camino del desarrollo de los logaritmos y la función logarítmica, ha sido muy largo y dispendioso como cualquier otro objeto matemático. No obstante, en el desarrollo del análisis de la investigación se trabajará sobre seis de los anteriores autores considerados claves en cada etapa de evolución del objeto en cuestión. Para ello, se presentan en una dimensión epistemológica y una dimensión histórico-cultural.

En la primera, desde tres perspectivas: la representación algorítmica, la analítica del concepto, y la modelación o aplicación a situaciones de la vida real, en este caso, la navegación, la astronomía, el crecimiento poblacional, entre otras. Y en la segunda dimensión, se pretende abordar la historia identificando dos aspectos: la red de conceptos relacionados con los logaritmos para su desarrollo tal como las progresiones geométricas y aritméticas, las series infinitas, etc.; y la extrapolación al infinito, que es eje transversal en todo su proceso, a pesar de notarse más formalmente desde el siglo XVII con el caso de las series infinitas.

A continuación se presenta una rejilla en dónde se relaciona cada autor y los ítems expuestos con el fin de identificar la ubicación según sus aportes, para tener enfoques definidos en el análisis histórico:

REJILLA ANALÍTICA DE LOS MOMENTOS SIGNIFICATIVOS EN LA HISTORIA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Momentos significativos	Personaje	ARQUÍMEDES (287 a.C-212 a.C)	JOHN NAPIER (1550-1617)	NICOLAUS MERCATOR (1620-1687)	JAMES GREGORY (1638-1675)	BERNOULLI (1654-1705/ 1667-1748)	LEONHARD EULER (1707-1783)
Descripción epistemológica	Representación algorítmica del concepto		X	X			
	Representación analítica del concepto			X	X	X	X
	Modelación en la formación del concepto	X	X				
Descripción Histórico-cultural	Red de conceptos fundamentadores	X	X	X	X	X	X
	Modelación, extrapolación de infinito	X	X	X	X		X

El presente capítulo planteó el enfoque inicial del proyecto de este trabajo, las hipótesis, y consideraciones teóricas de partida, de donde se dedujeron en gran medida los ejes de investigación en la exploración práctica, los problemas didácticos e históricos y el análisis correspondiente. Sin embargo, en el transcurso de su ejecución se enriqueció de elementos brindados por los testimonios, la nueva bibliografía e inquietudes suscitadas en cada etapa.

La siguiente sección explicará la metodología de la indagación, y la determinación de los problemas didácticos e históricos a discutir en el capítulo tercero, en el cual también se confirmarán o refutarán las ideas planteadas aquí.

Capitulo 2.

DISEÑO, APLICACIÓN Y SISTEMATIZACIÓN DE LA ENTREVISTA

CAPITULO 2. DISEÑO, APLICACIÓN Y SISTEMATIZACIÓN DE LA ENTREVISTA.

Este trabajo se enfocó en estudiar la mirada del docente sobre varios aspectos influyentes en la enseñanza de la función logarítmica por lo cual se diseñó y aplicó una entrevista, con la estructura abajo indicada. Para tener una visión más global del proceso de enseñanza, habría sido importante conocer la opinión del estudiantado frente al ejercicio de su educador. Sin embargo, no se les realizó alguna entrevista, conversación informal o taller escrito, al considerar incorporaría un nivel mayor de complejidad que desborda el propósito del trabajo de enfocarse estrictamente en la actividad docente.

La primera versión del cuestionario de la entrevista –como se verá más adelante se le hicieron modificaciones- se compuso de 32 preguntas, 5 de ellas introducían cada eje: Enseñanza de la función logarítmica; caracterización de la función en tres fases; epistemología de la función; historia de las Matemáticas; condiciones institucionales (ver anexo 1). Tanto en la primera como en la última versión del cuestionario, se pretendía responder a la pregunta del problema, hipótesis y objetivos planteados en el capítulo 1.

El primer eje indagaría la metodología de enseñanza de los docentes en el caso de la función logarítmica, sus estrategias didácticas, las dificultades presentadas al enseñar la función (inseguridad, desconocimiento del tema u otras), las dificultades de los estudiantes y las soluciones. En el segundo, se escucharían opiniones frente a las tres facetas de los logaritmos: algoritmo, función y ecuación, en la parte matemática y didáctica.

El tercer eje exploraría, el conocimiento del profesor sobre la función: caracterización numérica, geométrica y funcional, su definición como inversa, y el manejo de ecuaciones. El cuarto bloque, se introducía con una pregunta sobre el reconocimiento de las disciplinas de la Educación Matemática como: Historia, Pedagogía, Matemáticas, etc., que por su formación académica o práctica, les permitiera pensar teóricamente su ejercicio profesional. Además, saber las lecturas sobre Educación que enriquecen su conocimiento, la concepción sobre la Historia de las Matemáticas y su intervención en clase. Con el quinto, los factores institucionales y curriculares (positivos o negativos) influyentes en la profundización de la función logarítmica, y la relación con los Estándares Básicos.

Una vez diseñado el cuestionario, se pasó a estudiar las condiciones más favorables a su aplicación, de tal manera se obtuviera variedad de casos donde se extrajeran datos significativos para un análisis enriquecedor. Los criterios fueron los siguientes:

CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LA INSTITUCIÓN.

Carácter. Institución de carácter oficial o privado;
Comuna. Localización distribuida por los puntos cardinales de la ciudad;
Estrato socioeconómico. Instituciones de todos los niveles socioeconómicos;
Filosofías. Instituciones con filosofía o prácticas culturales específicas.
Estrictamente, una debía ser de carácter religioso y otra, de carácter étnico.
Género. El género manejado por la institución: Femenino, Masculino, Mixto. Estrictamente, una institución debía manejar en su totalidad, población femenina, otra, masculina, y las demás, mixtas.[2]

CRITERIOS DE SELECCIÓN DEL DOCENTE.

Grado(s) en el o los que enseña. Docente de grados 8°, 9°, 10° u 11°.
Formación académica en pregrado y postgrado. Profesional o estudiante de Educación Superior de Licenciatura, y solo en un caso, de una profesión no afín;
Experiencia laboral. Mínimo 2 años;
Años lectivos enseñando Función Logarítmica. Mínimo 1 año;
Edad. Desde los 20 años en adelante.

El diseño de la entrevista y la selección de los criterios para su aplicación se tomó un mes como se tenía programado, incluidas las discusiones y precisiones.

La elección preliminar de las instituciones, se hizo con base en el mapa por comunas del municipio agrupándolas de acuerdo a los puntos cardinales: norte, sur, este, oeste, suroeste, noroeste, sureste, noreste y centro. Cuatro de las diez instituciones elegidas serían de carácter oficial ubicadas en el suroeste, noroeste, sureste, noreste de la ciudad, para tener miradas de zonas opuestas. Los demás colegios serían privados, de diferentes estratos socio-económicos: norte y sur -

[2] No se pudo conseguir una institución donde su población estudiantil fuera totalmente masculina, el caso más cercano fue la Academia Militar Joaquín Caycedo y Cuero.

estratos 5, 6, 7; oriente –estratos 1, 2; occidente –estratos 3, 4; centro –estrato 3. Sin embargo se encontraron colegios en el norte de Cali, que aún localizados en estrato 3, albergaban estudiantes de estratos 0, 1 y 2.

Las entrevistas, en principio, se aplicarían durante dos meses, pero se llevó un mes adicional debido a retrasos en el acceso a las instituciones y/o las citas con los docentes. En primer lugar, se abordaron los colegios públicos al considerar, era más fácil acceder sin oficialidad previa. Hubo excepciones pero no se continuó el proceso en ellas. Por el contrario, la mayoría de colegios privados requerían permiso oficial de la Universidad del Valle. En muchos casos, bastaba llevar la carta oficial, en otros, el permiso debía ser aprobado por el organismo académico-directivo del colegio, lo cual retrasó el proceso por varias semanas mientras se esperaba respuesta. En una de ellas, finalmente no dieron la autorización.

Obtenido el aval, se contactó al docente recomendado según el primer requisito: ser docente de los grados 8°, 9°, 10° u 11°. Se verificó el cumplimiento de los demás criterios, se registró su identificación, y se charló brevemente sobre temas como: la misión educativa del PEI y su propuesta frente a la Educación Matemática, la política de fomento a la innovación pedagógica, la participación de la institución en Olimpiadas Matemáticas; intervenciones rotuladas en la transcripción como “PREAMBULO”. Finalmente, se concretaba la fecha y hora de la entrevista.

Desarrollando la entrevista en los primeros tres docentes, se fue evidenciando confusiones en algunas preguntas, y otras eran entendidas con otro enfoque. No eran claras las referentes a: su visión de las tres facetas del logaritmo y la manera de enseñar cada una; las disciplinas que integraban la Educación Matemática; y algunas veces, las características numéricas, geométricas y analíticas de la función. En la primera, se confundían con el término “algoritmo”, no retenían la pregunta y/o no entendían su sentido; la segunda, a pesar de darles ejemplos de respuesta, seguían sin comprenderla; y en la tercera, parecía desentender el término “caracterizar”: no daban propiedades específicas de la función.

En la consulta relacionada con las dificultades del docente en la enseñanza de la función, hablaban de las dificultades de los estudiantes, por lo cual se suprimió y evaluó de otra manera como se verá luego. La pregunta explicita sobre la enseñanza de la función como ecuación fue indagada a partir de la quinta entrevista: antes estaba inmersa en la referente a las fases del logaritmo. La correspondiente a la razón por la cual generalmente la función logarítmica se enseña de último, se añadió a partir de la séptima, sin embargo algunos educadores ya habían hecho mención del tema. En el interrogante sobre condiciones institucionales, no se precisó la indagación de factores positivos, para poder tener una mirada más amplia al respecto.

Durante la realización de las entrevistas, se avanzó en las correcciones de redacción, se ordenaron mejor las preguntas, anotándose entre paréntesis unas como opcionales. Esta versión final del cuestionario tuvo 30 interrogantes, distribuidos en tres bloques: Experiencia docente; Historia de las Matemáticas; y Condiciones Institucionales (ver anexo 2). El eje de Epistemología de la función, no fue suprimido totalmente, más bien se enfocó hacia el ejercicio pedagógico, lo cual también permitía reconocer el dominio de la naturaleza matemática de la función por parte de los profesores.

En el anexo 3, se presenta la transcripción de las entrevistas a modo de relato[3] (registradas en audio) de cada uno de los diez casos, con el fin de concretar y sistematizar las respuestas de acuerdo a los objetivos e hipótesis del proyecto. El relato se encabeza por una tabla informativa de los criterios cumplidos y datos adicionales, seguida del “PREAMBULO” anteriormente explicado. El cuerpo escrito de cada relato oscila entre 2 y 3 páginas, siguiendo secuencialmente el orden de las preguntas y a veces, el de los educadores. Algunos no respondieron claramente a ciertas preguntas, notándose en el texto. En la tabla introductoria, se registran las preguntas contestadas y las que no.

La información suministrada por los testimonios, en un primer momento se clasificó en siete categorías referentes a concepciones de los profesores sobre lo curricular, su enseñanza, los estudiantes, la función logarítmica, la Historia de las Matemáticas, los contenidos de los grados superiores, y su profesionalización, aspectos percibidos como importantes para examinar desde todo punto de vista la situación de enseñanza de la función. Se vio la necesidad de decantar más detalladamente la información. Para ello, se establecieron subcategorías en cada tópico con base en las ideas inmersas en las preguntas y ejes del cuestionario, las hipótesis planteadas desde el inicio, y los temas comunes surgidos de la revisión exhaustiva de cada entrevista, arrojando finalmente seis categorías macro: Concepción sobre la función logarítmica, su enseñanza, los estudiantes, la Historia de las Matemáticas, el currículo, y las condiciones institucionales.

[3] En muy pocos casos, se transcribieron intervenciones textuales pues se requería plasmar especialmente ciertas concepciones de los docentes.

Las seis tablas describen cada categoría con sus respectivas subcategorías. En algunas de las tablas se repiten subcategorías, debido a su transversalidad. Cada tabla es comparativa: se encabeza por el nombre de la categoría y el número de las preguntas asociadas; en la columna izquierda, de manera vertical, se halla el nombre de la subcategoría; y en la parte superior en dirección horizontal, se señala el número correspondiente a cada profesor indagado. Los espacios vacios en algunos cuadros se deben a información no captada.

La categoría *"Concepción sobre las condiciones institucionales"* está compuesta de las subcategorías: condiciones externas; condiciones administrativas; condiciones académicas; otros. La categoría *"Concepción del currículo"*, se conforma por: relegamiento de la enseñanza de la función; relación con los estándares; profundización durante el avance de los grados; importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas; importancia de la enseñanza de la función logarítmica; opinión sobre el currículo de la institución; relación de los contenidos de secundaria y universitarios.

En la categoría *"Concepción sobre la función logarítmica"* se encuentra: conocimiento sobre campos de aplicación; conceptos previos, ideas básicas al terminar el tema; percepción de las propiedades o ecuaciones logarítmicas; reconocimiento de las tres fases; faceta profundizada; características (numérica y geométrica) de la función; comparación entre $\log_a x$ y $\ln x$; razones de la definición como inversa.

En la categoría *"Concepción sobre la enseñanza"* se tiene: forma de presentación de la función; método de enseñanza; relación enseñanza-realidad; importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas; importancia de la enseñanza de la función; enseñanza superficial de la función; relegamiento de la enseñanza de la función; manipulación de la calculadora; relación con los estándares; insumos a su enseñanza.

La categoría *"Concepción sobre la Historia de las Matemáticas"* está integrada por: concepto de Historia de la Matemática; la Historia de la Matemática como mediadora en la enseñanza; condiciones para ser utilizada; propuesta de formas de utilizarla; temas en que ha usado la Historia de las Matemáticas; agrado por conocer la Historia de las Matemáticas; conocimiento sobre la Historia de la función logarítmica. Y por último, en la categoría *"Concepción sobre los estudiantes"* aparecen: apatía/desmotivación; estudiantes temerosos; estudiantes capaces; dificultades; soluciones para superar las dificultades.

En el tercer y cuarto capítulo se estudiará la mayor parte de la información identificada en cada categoría mostrando las tablas correspondientes, pues hay muchos hallazgos qué resaltar, sin embargo, el grueso del análisis se centrará en estudiar las subcategorías que contengan más información acerca del conocimiento del maestro sobre la función logarítmica en las tres fases planteadas, su manera de presentarla, la relevancia y profundización de su enseñanza, la razón de la superficialidad al abordarla, la concepción de Historia y cómo la involucran en clase, la aplicación de los Estándares Básicos, las condiciones curriculares e institucionales de la enseñanza de la función. Las subcategorías no estudiadas explícitamente, se registran en el anexo 4.

Es así como se buscan referentes teóricos sobre temas y problemas relacionados a lo anterior, con el fin de realizar un análisis objetivo y enriquecedor para el lector. Se optó por manejar estudios sobre el concepto general de función, aplicables a este caso específico. Se encontró sobre todo tópicos concernientes a las representaciones de una función, la variabilidad, el desarrollo algebraico, la relación entre progresiones y el comportamiento de ciertos tipos de funciones, la importancia de distinguir la naturaleza de cada una, la aplicabilidad, el uso de la tecnología, el conocimiento del profesor, y las dificultades posiblemente presentadas por los estudiantes, etc.

Estas ideas utilizadas en muchas partes del análisis, fueron registradas en la tabla del anexo 5, además de mencionar las subcategorias y categorías abordadas. Finalmente, se concretan los siguientes grandes problemas:

1. La intervención del desarrollo histórico en el proceso de enseñanza de la función logarítmica.
2. Relación entre las progresiones aritmética y geométrica para el reconocimiento del proceso algorítmico del logaritmo.
3. Contextualización de dicha relación en las representaciones de la función logarítmica.
4. La concepción sobre las ecuaciones logarítmicas.
5. La relevancia de la enseñanza de la función en todas sus fases.

Cabe recordar, los anteriores ítems a analizar son producto del entrelace de las hipótesis, objetivos y pregunta problema del proyecto, los testimonios de los profesores, la bibliografía y las nuevas inquietudes durante el proceso. Concretamente, la primera proposición se relaciona con la pregunta problema; la segunda y tercera, con la epistemología de la función; la cuarta y quinta, con lo curricular, todo transversalizado por las concepciones de enseñanza y de Historia de las Matemáticas registradas en las entrevistas.

En consecuencia, se presenta a continuación el desarrollo pleno del análisis planteado en los dos anteriores capítulos.

Capitulo 3.

ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS

CAPITULO 3. ANALISIS DE RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS.

Como se ha dicho, en este apartado se analizan las concepciones de los entrevistados a la luz de la teoría didáctica, histórica, y las reflexiones personales. Concretamente se abarcarán cinco ejes: condiciones institucionales, curriculares, caracterización de la función logarítmica desde la Historia, la enseñanza y la Historia de las Matemáticas, y una perspectiva sobre los estudiantes.

En el primero, se discutirán los factores académicos, administrativos internos y externos de la institución, influyentes en su enseñanza. En el segundo, la relación de la enseñanza de la función con los Estándares Básicos, la relevancia y profundización de la función, la coherencia entre los contenidos de la escuela con la Educación Superior en el currículo. En el tercero, se explicitarán varios aspectos matemáticos de la función desde su Historia como: el sentido operatorio del logaritmo, la razón del comportamiento numérico, geométrico y algebraico de la función, la problemática de la distinción de variables y parámetros, los procesos relacionados con el infinito. En el siguiente, se hará una reflexión sobre los hallazgos de las concepciones de enseñanza e Historia de las Matemáticas. Y en el último eje, se analizan las percepciones sobre las dificultades afectivas de los estudiantes con las Matemáticas.

3.1. MIRADA SOBRE LAS CONDICIONES INSTITUCIONALES.

Las condiciones de las instituciones oficiales y privadas son bien distintas. Los educadores de las públicas señalan la falta de apoyo económico para las salidas académicas y dotación en materiales didácticos, mientras en las privadas sí hay respaldo, incluso para la formación pedagógica de los maestros. Los colegios privados también poseen diferencias, por ejemplo, para el uso de los recursos tecnológicos y didácticos. Véase los casos 6 y 8 (anexo 3: p. 91, 99), donde el uso de los computadores es limitado para el segundo.

Se muestra la siguiente tabla correspondiente a la categoría *“Concepción sobre las condiciones institucionales”* para el posterior análisis:

Tabla N° 1. *Categoría "Concepción sobre las condiciones institucionales".*

CONCEPCIÓN SOBRE LAS CONDICIONES INSTITUCIONALES (25, 26)										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Condiciones externas	La escolaridad de los padres y la comuna en donde viven los estudiantes influye en su actitud apática.	Las concepciones de los padres de familia y los docentes de Primaria, crean una barrera en el aprendizaje.	--	--	Hay dificultades externas que son difíciles de sobrelle-var: el número de estudiantes por sa-lón es mucho (40) impidiendo atender-los a todos; el estra-to, nivel de escolari-dad de los padres y la condición de desplazamiento.	--	--	--	La situación socioeconómi ca de los estudiantes (0, 1, 2). La mayoría no piensan en profesionali-zarse.	--
Condiciones administrativas .	La falta de tiempo no permite ahondar. Los contenidos del colegio y universidad no están relacionados. De lo que él aprendió en su formación profesional, no aplica casi nada.	Recorte de horario no permite profundizar.	Las directivas no se enterarían si no da algún tema. Las instituciones siempre lo han apoyado con materiales. Hay temas que se vuelven más prioritarios debido a la falta de tiempo.	Él se restringe a usar materiales simples.	No hay planes ni di-rectrices coherentes fomentadores de un proceso educativo. Le toca imponer su proceso. El PEI está mal hecho y mal enfocado. Los estu-diantes no salen con herramientas para enfrentar carreras tecnológicas o pro-fesionales. La ins-titución no dispone para materiales, ni salidas, le toca a los padres pero ellos se resisten si no es una actividad explicita relacionada con el colegio. Baja intensi-dad horaria, a veces solo enuncia temas pero no los puede evaluar.	En cada salón cuen-tan con herramientas computacion ales, las estudiantes también llevan su computador. La institución siempre está presta para logística o materiales, siempre que éstos ayuden a desarrollar las temáticas.	El tiempo es una gran limitante, hay que decantar conceptos aunque requieran dedicación.	El tiempo no deja profundi-zar, con tantos cursos a cargo a veces no puede preparar clase, pero debe man-tener el nivel superior del co-legio enseñando aprox. 5 horas a la semana en cada grupo; los tiempos mania-tan al docente para explorar y ahondar en los temas (hacer actividades especiales), a veces no se enseñan con-ceptos sino objetos.	La institución facilita elementos o aparatos que el colegio tenga pero no da para materiales; el tiempo es insuficiente, se dan 2 horas y 20 minutos a la semana, de Matemática.	Las directivas colaboran con la formación exterior y están dispuestas a la logística, solo es reportarlo en el proyecto; los tiempos no interfieren; el programa se cumple a pesar de la intensidad de 3 horas a la semana de Matemáticas, debido a los horarios de la formación militar.
Condiciones académicas.	Los contenidos del colegio y universidad no están relacionados;	La falta de formación de docentes de Primaria para mejor prepara-ción de los estu-diantes, deben enseñarles a interesar a los	--	--	Los profesores de Primaria tienen varias debilidades, los estudiantes llegan con falsas ideas al bachillerato, y le toca corregirlas. Afirma que si al profesor de primaria	--	Hay necesidad de con-ceptualizar mejor con los conceptos previos, falta trabajar en la abs-tracción o clasificación, pero reforzar es deber de todos los docentes de Bachillerato. Los pro-gramas están muy car-	Él ya no recuerda las bases históricas; el mal manejo de las tecnologías, pues no tiene acceso a las salas para	--	Los docentes de 5°, deben recomendar el estudio de la potenciación y radicación para su posterior uso en grados superiores,

		estudiantes en las Matem. Las concepciones de los padres de familia y los profes de primaria imponen una barrera al aprendizaje. Estos docentes no enseñan trucos aritméticos.			no le fue bien o no le gusta la Matemática, entonces la enseña mal.		gados de contenidos matemáticos más que de formación Matemática. Como maestra de grados superiores, pide que si en 9º se enfocan a enseñar función lineal y cuadrática, lo hagan bien y los estudiantes aprendan verdaderamente estas funciones o por lo menos el concepto de Función, para disminuir la complejidad al hacer la clasificación de todas.	enseñar con software. Los profesores deben gozar de alto nivel académico para el mejor tratamiento de los conceptos.		asignaturas o la vida. El docente intuye que el campo de la institución, los columpios o resbaladeros sirven para hacer prácticas de cálculos matemáticos.
Otros	Le interesa más la parte administrativa (rector, reformas) para cambiar metodologías que perjudican a los estudiantes en la entrada a la universidad, y ser catedrático universitario.	Todos los colegios deberían contar con calculadoras científicas para mejorar la enseñanza.	--	--	--	--	--	La Educación debe servir para cuestionar.	--	

Como se pudo apreciar, la gran mayoría de docentes coincide en que la intensidad horaria para la enseñanza de las Matemáticas, y específicamente de la función logarítmica, es reducida. Se evidencia la asfixia presupuestal de la educación oficial debido a las políticas gubernamentales, un desfinanciamiento que incide en los programas de apoyo pedagógico y tecnológico, instalaciones físicas, dotación material de maestros y estudiantes, y aspectos intangibles pero fundamentales como el tiempo, pues en estas instituciones se redujeron las horas de clase según testimonio de los entrevistados, situación limitante para la implementación de actividades innovadoras, profundización o abordaje de temas que mejorarían el rendimiento académico escolar.

Por otro lado, factores nominados como externos pero incidentes en las condiciones académicas de estudiantes y docentes, son el nivel escolar de los padres de familia, la comuna, el estrato socioeconómico de los estudiantes, y en algunos casos, la condición de desplazamiento. En los colegios públicos, súmese el número de estudiantes por aula (40), lo cual, como lo menciona un profesor, es problemático atender y verificar el proceso de aprendizaje de todos.

Es sabido que los colegios públicos generalmente aguardan estudiantes de barrios populares, personas socialmente excluidas de los elementos básicos para formarse integralmente, como una educación de sobresaliente nivel. Es distinta la calidad educativa de colegios de clase alta y baja, aunque todos sean privados, las bases conceptuales son enseñadas con exigencias y enfoques diferentes (la formación del profesor contratado, la jornada horaria, la disposición de material didáctico, las expectativas profesionales promovidas en los estudiantes, etc.) implicando costumbres de estudio distintas y generación de vacíos conceptuales más grandes que otros. En consecuencia, en los estudiantes de barrios populares se fomenta (no en todos) directa o indirectamente, un trabajo académico tendiente a ser muy básico, más no avanzado. Añádase, estas instituciones públicas y privadas acogen estudiantes desplazados que, en general, también llevan una formación inferior, dada la desigualdad entre lo urbano y lo rural.

Los maestros consideran que en el aprendizaje también influye la poca preparación académica de los profesores de Primaria. Ellos deben proveer a los estudiantes de elementos básicos para un buen desempeño en Secundaria, pero han hallado lo contrario: estudiantes que no manejan la aritmética de Números Naturales o Racionales, las propiedades de las igualdades, y han interiorizado erróneas ideas, conceptos o procedimientos de cálculo, produciendo un choque entre la metodología de enseñanza y sus concepciones cuando llegan al

Bachillerato. No obstante, una docente precisa: todo el cuerpo profesoral de Secundaria debe promover la abstracción, el refuerzo de los conceptos básicos; y en el tema de funciones, el profesor de Matemáticas debe asegurar el aprendizaje por lo menos del concepto de función para poder tener un mejor proceso en la Educación Media.

Esto deja ver una ruptura en el sistema educativo, dada la inconsistencia en el proceso interno escolar: Primaria - Básica Secundaria - Educación Media, originada tal vez, por fallas en la formación docente en general, o por la carencia de un currículo generador de un proceso de verdadera formación, transversal a todos los ciclos escolares. Las falencias del educador de Primaria evidencian posibles rupturas en los programas de formación universitarios donde igualmente se presentan desigualdades en la calidad, se instruyen enfoques o metodologías más o menos significativas, resultando, en ocasiones, actitudes negativas y de superficialidad ante su enseñanza produciendo vacíos epistemológicos a impactar en el Bachillerato.

3.2. MIRADA SOBRE EL CURRICULO.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas recomiendan la enseñanza de la función logarítmica en el ciclo de grados 8° - 9°, para enfocarla en el siguiente de 10º - 11º, hacia el Cálculo. Parte de los entrevistados lo hacen en el último ciclo, otros comienzan el proceso desde grado 9°. La mayoría de ellos la aborda aumentando gradualmente la complejidad. No obstante, la función pasa a tener un papel secundario, siendo una de las razones la falta de tiempo, implicando el recorte de contenidos “no prioritarios” o el dar un barrido superficial por sus principales características a modo de información.

A esta situación puede contribuir el orden dispuesto por los libros de textos utilizados por los docentes para este tema, como ellos lo afirman. Aunque los Estándares y los currículos de muchas de las instituciones visitadas, resaltan la aplicabilidad de las Matemáticas, en el caso de esta función, varios de los docentes desconocen sus campos de modelación, como puede apreciarse en la tabla a continuación, siendo otro de los motivos de su relegación según lo mencionaron. Este aspecto se indagará en el capítulo 4.

Tabla N° 2. *Fragmento de la tabla "Concepción sobre el currículo".*

CONCEPCIÓN SOBRE EL CURRICULO (12, 26, 27, 28 , 29 30)										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Relegamiento de la enseñanza de la función.	En ocasiones no alcanza a darla. La falta de tiempo y las dinámicas de receso, impiden profundizar o abarcar todos los temas.	--	En su experiencia personal, nunca le enseñaron la función y obtuvo dificultades en la universidad. Por falta de tiempo, a veces se suprime este tema en el colegio. La enseña rápidamente porque no es prioritaria.	Las Competencias permiten abordar todas las funciones y no relegarlas. Él sigue el orden de los libros de texto, si están ahí es porque son importantes.	Solo debe darse información y características.	--	El currículo y los programas dejan de relleno a la función logaritmo, pues el docente prioriza contenidos y el cumplimiento del programa. Años atrás también la relegaba, pero la ha ido retomando.	Puede ser por falta de tiempo, a los profesores les de miedo que los estudiantes les pregunten por las aplicaciones y no sepan, o porque en los libros de texto se organizan así, y ésta está de última, pero la mayor razón es la falta de tiempo.	Se relega la función logaritmo porque no es muy popular su aplicabilidad, y pasar de la teoría a la práctica es complicado.	La razón de que se relegue la función logaritmo es por la costumbre de la linealidad, pero puede trabajarse intermedio de otras funciones sin dificultad.
Profundización durante el avance de los grados.	Da ideas básicas suponiendo que en grados superiores afiance el tema con nuevos elementos.	En grado 11°, aplicación de la función en el Cálculo.	Al avanzar de grados aumenta la complejidad en este tema. En 5°: solo la definición; 6°: propiedades log; 7°: log con enteros. En estos grados no se presenta la parte gráfica, le concierne más a 11°.	Profundiza al avanzar de grado (no dice cómo).	Prefiere enseñarla en 11° luego de haber visto Sucesiones y Teorema de Tales para poder aplicarla. No puede profundizar al avanzar de grado porque solo enseña la función en 11°.	La función se estudia desde 9° y se dan conceptos de 11°: máximos, mínimos, etc., pero sin el rigor del Calculo, ven si la pendiente decrece, inyectividad, los puntos de corte y el TFA; se retoma en 10° con aplicaciones y en 11° abordan la función desde los límites y derivadas.	Estar a cargo de 6°, 10° y 11° le permite retomar cosas que tal vez no ha enseñado por falta de tiempo. En 10° se repasa la función logaritmo si no la han visto en 9°, y en 11° sí se estudian todas sus características.	En 10° enseña la función y su utilidad para resolver ecuaciones, en 11° da un panorama general para las pruebas Icfes, se detiene cuando ven derivadas pero no puede mostrar sus potencialidades por desconocimiento	Se enseña todo lo de función logaritmo en 9°, y en 11° se repasa desde Teoría de Conjuntos como repaso para el ICFES abarcando variación, derivadas y razón de cambio sin ahondar.	Hay una profundización de la función progresivamente: en 7° es superficial, en 9° se detiene en las características de la función y las ecuaciones, y en 11° se remite a derivadas y aplicaciones.

Claramente, a esta función no se le dedica buena parte de la programación como a otras temáticas, a pesar de ser uno de los conocimientos básicos del currículo nacional en el que existen varios elementos de los últimos ciclos de escolaridad donde es importante trabajarla detalladamente en los contextos numérico, geométrico y algebraico, por su conexión con los conceptos fundamentadores del Cálculo. Parece no haber conciencia de estas relaciones epistemológicas (pudiéndose indagar desde la Historia) y por ello, la conciben como un tema aislado, sin utilidad y de menos dedicación.

Paralelamente, los docentes de colegios oficiales, consideran su PEI insuficiente para las necesidades de formación requeridas por el sistema laboral o de Educación Superior. Notan un fraccionamiento en el proceso de formación, específicamente en la relación de los contenidos de la Educación Escolar con la Superior. Los conocimientos matemáticos parecen ser poco comprendidos por los estudiantes para tener un buen desempeño en la Universidad, creándose cursos de pre-Cálculo o Matemática Fundamental (Ver Tabla N° 3 – página siguiente).

Esta es una realidad que hace percibir un bajo nivel en la educación impartida por los colegios públicos, además de una desarticulación total entre el sistema de educación en general, pues se supone que cada etapa escolar debe dar los elementos suficientes para avanzar en la siguiente. También cabe resaltar, la importancia de la formación de pensamiento matemático frente a los contenidos matemáticos en el currículo, pues como lo decía una entrevistada, estos contenidos no sirven por sí solos si no hay una interiorización de los conceptos y se incentiva al estudiante a pensar matemáticamente, con lo cual se les estaría dando competencias para su desarrollo académico (escolar, universitario), y en la vida cotidiana y laboral.

Tabla N° 3. *Fragmento de la tabla "Concepción sobre el currículo".*

CONCEPCIÓN SOBRE EL CURRICULO (12, 26, 27, 28 , 29 30)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relación de los contenidos de secundaria y universitarios.	En 11 amplia un poco el tema en máximos, mínimos, curvatura de la función y derivadas, o lo deja para la universidad. Los contenidos del colegio y universidad no están relacionados; Hay contenidos del colegio que no deberían darse.	Por el desconocimiento de los fundamentos elementales de los estudiantes que egresan de secundaria, casi todas las universidades tienen que hacer cursos de nivelación.	Se profundiza este tema en 11° o en la U (exponente e, recta Euler); Es importante enseñar la función en polinomios para mejor preparación a la U.	--	Los estudiantes no salen con herramientas para enfrentar carreras tecnológicas o profesionales.	Las ecuaciones son importantes para el manejo en Cálculo.	Tanto contenido matemático al final no sirve mucho porque en la universidad toca repasarlos (funciones), lo cual indica que hay una falla en el proceso y currículo. Los ejercicios de resolución mecánica producen falencias para grados superiores y universidad.	Debería enseñarse conceptos más avanzados de Calculo (completitud, densidad, supremo, infinitos, máximos, etc).	--	Las ecuaciones se usan mucho en la universidad en Economía, Contaduría y Administración.

Se reitera la necesidad de una articulación entre los niveles de formación en el currículo institucional, generador de un proceso constante y coherente incluso con la Educación Superior. Por tal razón, en el "Preámbulo" a la entrevista se indagaba la existencia del trabajo en equipo entre profesores del Área, pues esto ayudaría a planificar, establecer y actuar en consecuencia con la misión del colegio y las metas curriculares locales y nacionales, a través de la coordinación epistemológica de los contenidos matemáticos, y modelos pedagógicos variados con los que resulte un aprendizaje significativo. El trabajo grupal también permitiría la retroalimentación entre docentes de todos los grados, para implementar medidas que eviten la incorporación de ideas erróneas en los estudiantes, disminuyendo así los casos que presentan grandes dificultades y vacíos en temas base para el aprendizaje posterior.

En siete de los diez casos, el PEI lamentablemente no contemplaba el trabajo en grupo. Por el mejoramiento de su labor pedagógica, se sugiere a los docentes promover el trabajo en grupo ya sea informalmente como lo hace el caso 8 (p. 97), para tratar de sobrellevar y solucionar las dificultades que ellos mismos han percibido, obstaculizadoras tanto de sus expectativas de enseñanza como de la formación de sus estudiantes.

3.3. CARACTERIZACIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA E INTERVENCIÓN DE LA HISTORIA EN SU ENSEÑANZA.

Dentro de las hipótesis iniciales de la investigación estaba el que la presentación de los Logaritmos en clase, fuese en tres etapas: algorítmica, función, y ecuaciones. Efectivamente, los profesores interrogados abordan las tres fases aunque con variaciones en algunos tópicos en cuanto al orden o forma de enseñanza, como puede observarse en el siguiente fragmento de tabla correspondiente a la *"Concepción de función logarítmica"*:

Tabla N° 4. *Fragmento de tabla "Concepción de la función logarítmica".*

CONCEPCIÓN SOBRE LA FUNCIÓN LOGARITMICA (2, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reconocimien-to de las tres fases.	La definición debe enseñarse como tipos especiales de ecuaciones.	Se deben enseñar las tres facetas integralmente.	---	La primera fase es la definición que debe enten-derse inicialmen-te, junto con la parte gráfica. Las tres fases se pueden explicar por separado pe-ro luego deberá integrarlas. Podría graficar ecuaciones.	Se enseñan las tres etapas.	--	El proceso que-da incompleto si se define y grá-fica si no se comprenden las expresiones al-gebraicas, si dado un proble-ma, el estudiante no lo interpreta.	--	El estudio de la fase de función, es más teórico y de observación, y es más amena para ellos (identificar características de la función).	Al considerar las tres fases se debe tener claridad en la definición, propiedades básicas, cuándo funciona y para esto, la gráfica es fundamental.
Faceta profundizada.	Le interesa com-prendan el con-cepto de función, dominio y rango.	Profundiza en las propiedades (ecuaciones).	Se enfoca en ecuaciones.	Definición y función porque se puede analizar el concepto en sí.	Función.	--	Definición y función pues se relacionan.	--	Enfatiza en ecuaciones porque es la que más dificultades genera.	Enfatiza en la definición y las gráficas.

El análisis en esta parte seguirá el orden de las etapas mencionadas, con las respectivas claridades epistemológicas y propuesta para la enseñanza desde la Historia de las Matemáticas, teniendo como apoyo la rejilla de los momentos significativos de la Historia de la función logarítmica (mostrada en el capítulo 1) siendo guía en cada fase, con los ítems y autores registrados, e investigaciones de teóricos como:

Edwards con dos capítulos dedicados a exponer detalladamente el desarrollo de los logarimos y la función logarítmica: *The Historial Development of the Calculus (1979)*; Hairer y Wanner con su libro *"Analysis by Its History" (2008);* el documento de Sierpinska, traducido por Delgado: *"Sobre la comprensión de la noción de función" (1992)*; Socas con: *"Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria" (1997)*; Farfán y Ferrari con: *"Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos" (2008)*, y Ponte con el artículo: *"The History of the concept of function and some educational implications" (1992),* entre otros citados en la bibliografía. Una de las intensiones del análisis por fases, es en primer lugar, diferenciar entre el concepto de Logaritmo y Función Logarítmica, pues algunos entrevistados los representan igual. Recuérdese que las concepciones del docente influyen en el aprendizaje de los estudiantes, por ello son importantes las aclaraciones.

Presentación del logaritmo como algoritmo. Los maestros entendieron esta fase como la definición primaria de Logaritmo, más no se ahondó en la identificación de las prácticas que inducían a la mecanización de su proceso algorítmico como se deseaba. Sin embargo, se pretende reconstruir el desarrollo histórico del concepto para una posible reformulación de su enseñanza como operación aritmética.

Como se decía en el marco teórico, Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.) fue quien empezó a indagar la relación entre la progresión aritmética y geométrica, pero fue John Napier (1550-1617) quien la consolidó como método esencial para el cálculo de logaritmos, incorporando términos numéricos para precisar sus cómputos, siempre teniendo como base la relación entre las progresiones. Este aspecto de la definición no fue mencionado por ninguno de los educadores entrevistados, tal vez por desconocimiento, pero debe resaltarse su constitución como principales conceptos fundamentadores del nacimiento de los logaritmos, a lo que se refiere la rejilla de la página 17 en su Dimensión histórico-cultural.

Éste comúnmente se define como: el exponente al que se eleva una base a positiva y distinta de 1, para obtener el número positivo m dado: $\log_a m = z \leftrightarrow m = a^z$, y se plantean ejercicios del siguiente estilo: *Hallar el logaritmo de* $\log_2 32$; $\log_5 125$; $\log_3 81$.Esta definición empezó a remitirse frecuentemente luego de la relación con la potenciación establecida por Euler (1707-1783), la cual fue una manera de simplificar el concepto y el procedimiento, pero debe dotarse de sentido en la enseñanza dando a los estudiantes una idea básica del proceso originario conllevando al actual. En primer lugar, se definen las progresiones:

Progresión Aritmética. Es una sucesión en la cual cada término, exceptuando el primero, se obtiene de sumar al término anterior el mismo número real constante d, llamada diferencia. La expresión general es: $a_n = a_1 + (n-1)d$; a_1 es el primer término de la sucesión.

Progresión geométrica. Es una sucesión en la que todo elemento después del primero se puede obtener multiplicando el elemento que le precede por la constante r denominada *razón*. La expresión general es: $a_n = a_1 r^{(n-1)}$; a_1 es el primer término de la sucesión.

Supóngase las progresiones con Números Naturales incluido el cero, una diferencia $d = 1$ y una razón $r = 2$, respectivamente. La relación existente entre las expresiones es el número n, el cual indica el lugar de cada término:

	Progresión Aritmética.	***Progresión geométrica.***
$n = 0$	$a_1 = 1 + (0-1)\cdot(1) = 0$	$a_0 = 2\cdot(2)^{(0-1)} = 2\cdot 2^{-1} = 1 = 1$
$n = 1$	$a_1 = 1 + (1-1)\cdot(1) = 1$	$a_1 = 2\cdot(2)^{(1-1)} = 2\cdot 2^0 = 2^1 = 2$
$n = 2$	$a_2 = 1 + (2-1)\cdot(1) = 2$	$a_2 = 2\cdot(2)^{(2-1)} = 2\cdot 2 = 2^2 = 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n = 10$	$a_{10} = 1 + (10-1)\cdot(1) = 10$	$a_{10} = 2\cdot(2)^{(10-1)} = 2\cdot 2^9 = 2^{10} = 1024$

Al tabular los valores se tiene claramente lo actualmente conocido como las potencias de 2:

Tabla N° 5. *Tabulación de valores de Progresiones Aritmética y Geométrica.*

P. Aritm.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P. Geom.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Si bien, calcular potencias directamente puede ser un proceso relativamente corto, se trata de retomar, reconocer y significar el procedimiento numérico de los logaritmos. La gran mayoría de los docentes entrevistados, considera a la potenciación un concepto previo importante, pues a través de ella deducen los logaritmos, aunque históricamente ocurrió lo contrario. Esta operación debería utilizarse en las progresiones, como se ilustró.

A partir de la definición actual de logaritmo, varios maestros lo conciben como la *forma de escribir* que debe hallarse un exponente. Usualmente, luego de la potenciación, enseñan radicación, logaritmación, y posteriormente hacen un ejercicio de comparación de los lugares de los parámetros en cada caso, como puede ilustrarse al leer los relatos 1, 3, 4 y 9 (p. 75, 81, 83, 101):

Potenciación	***Radicación***	***Logaritmación***
$a^z = m$	$\sqrt[z]{m} = a$	$\log_a m = z$

El logaritmo se ha venido concibiendo como una notación para indicar la carencia de un valor, más no una operación aritmética que provee un método propio de cálculo, necesario en la Historia de la humanidad para resolver muchos problemas prácticos (como se mostrará en el capítulo 4). La representación de los maestros sobre los logaritmos es que consiste en hallar, por medio de ensayo y error, el exponente que satisfaga la potencia dada en el argumento.

La notación logarítmica, por sí sola no resuelve el ejercicio. El hecho de tener $3^x = 27$ y escribir $\log_3 27 = x$, no promueve la realización de alguna operación propia, como sucede con la suma, resta, multiplicación o división. En este caso, se dan valores consecutivos a x hasta encontrar el número con el cual la potencia resulte 27, como se haría sin anotar logaritmo. Es decir, dado el ejercicio:

Hallar $\log_3 27 = x$, el procedimiento común es:

$$3^1 = 3;\ 3^2 = 3 \times 3 = 9;\ 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27\ \rightarrow\ \log_3 27 = 3.$$

Con esta práctica, el logaritmo carece de sentido operatorio y existencial. Esta podría ser la razón de fondo de pensar en la irrelevancia de los logaritmos. Aunque otra sea, el impacto del auge de las calculadoras pues la gran importancia de su enseñanza años atrás radicaba en la utilización de las tablas logarítmicas (Abrate y Pochulu, 2007), como lo señala uno de los entrevistados.

Por lo anterior, se desea formular un procedimiento a partir del significado no solo de la relación entre progresiones sino con la notación logarítmica. Si se observa detenidamente la Tabla N° 5, el argumento de un logaritmo es cualquiera de los valores de la progresión geométrica, y la razón r es la base: $\log_r(a_n)$, relación general por lo menos para los Números Naturales, que promueve una operación propia aludiendo a la raíz de la palabra *logaritmo*: *logos* (razón) y *arithmos* (número), es decir, su eje fundamental es el valor de la *razón* r. Como la razón es un concepto asociado a la división, entonces dado un argumento y la base, puede dividirse el primero con el segundo sucesivamente hasta llegar al menor valor del cociente. Los cocientes serán los valores de la progresión geométrica que le anteceden al argumento dado.

Por ejemplo: Hallar $\log_2 64$, entonces: $64 \div 2 = 32$; $32 \div 2 = 16$; $16 \div 2 = 8$; $8 \div 2 = 4$; $4 \div 2 = 2$; $2 \div 2 = 1$. El logaritmo es el número correspondiente a la cantidad de cocientes, en esta ocasión 6, pudiéndose verificar el resultado al calcular la progresión aritmética y compararla con la geométrica. Por lo tanto $\log_2 64 = 6$. Si se tomara los valores de la progresión aritmética desde uno (1), el logaritmo sería el número de cocientes adicionado el argumento: de nuevo, seis (6). Un docente decía: “la logaritmación debería llamarse *exponenciación”*, pero como se mostró, no necesariamente se requiere de tal operación.

Para los números negativos, bastan las propiedades de suma y resta. Con los Racionales e Irracionales, los métodos son tan dispendiosos como los usados por Napier, pues la diferencia d en la progresión aritmética debe ser cada vez más pequeña para ir abarcando todos los números reales, estando al final dada por: n, y la progresión geométrica por ar^n con $a, r > 0$. Pero se insiste en la importancia de dar a los estudiantes, ideas básicas del desarrollo y proceso operatorio del concepto, dada la complejidad del tema.

El motivo principal para la creación de los logaritmos fue la necesidad de reducir largas multiplicaciones y divisiones a sencillas sumas y restas, incluso el manejo de las potencias y raíces. La construcción de las tablas logarítmicas precisamente ayuda a visualizar la simplificación de los cálculos. Para hallar el producto de dos términos de la progresión geométrica, se suman sus términos correspondientes en la progresión aritmética, el número de la geométrica relacionado con el resultado de la suma, es el producto, por ejemplo: 16×32 corresponde a $4+5=9$ y éste corresponde a 512. Para realizar una división, se procede igual pero restando.

Para calcular la potencia n-ésima de un término de la progresión geométrica, se multiplica el término correspondiente en la aritmética por n: 32^2 corresponde a $5 \times 2 = 10$, el cual corresponde a 1024 (aquí se ve explícitamente que del logaritmo resulta la potenciación). Para extraer la raíz n-ésima exacta de un número de la progresión geométrica, se divide el término correspondiente en la aritmética con el índice de la raíz: $\sqrt[4]{256}$ corresponde a $8 \div 4 = 2$, que equivale a 4. En su expresión general, estas operaciones se constituyen en las propiedades logarítmicas, tema que abordaremos más adelante.

Presentación del logaritmo como Función. Antes de comenzar con el análisis de lo encontrado en este eje, se expondrá a continuación la tabla completa de la categoría concerniente a la *"Concepción de la función logarítmica"* para tenerla en cuenta durante la discusión:

Tabla N° 6. *Categoría "Concepción sobre la función logarítmica".*

CONCEPCIÓN SOBRE LA FUNCIÓN LOGARITMICA (2, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16)										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Conocimiento sobre campos de aplicación.	No presenta aplicaciones.	Ha perdido importancia. Servía para calcular números muy grandes ahora solo para ejercitar las propiedades, y aporta al desarrollo de la teoría matem; no tiene aplicaciones;	Economía, Ingeniería.	Crecimiento poblacional, Estadística, Economía, medicina (crecimiento de enfermedades).	Pocas veces la relaciona mucho con aplicaciones, tal vez en Química, Biología, Genética, Física y Matemática.	Química, Física y Economía.	Tiene aplicabilidad sobretodo en Economía o investigaciones científicas.	Tiene poca aplicabilidad. Una vez resolvió un problema sobre los saltos de una pulga pero no le vio importancia.	Casi no hay aplicabilidad de la función logaritmo; no se acuerda de los contextos donde es aplicable la función.	Estadística, Economía, Ingeniería, proyectiles, bacterias, matriculas del colegio, la aplicación militar se da en Física, con la caída parabólica y problemas de máximos y mínimos.
Conceptos previos.	Potenciación y Función.	Prop igualdades, función exponencial, factorización, aritmética de fracciones.	Potenciación y Radicación.	Función, función exponencial e interpretación de gráficas.	Manejo del plano cartesiano, y potenciación.	El concepto de Relación, dominio, rango, transformaciones en el plano, y buenos cimientos en Algebra.	Concepto de función, potenciación, logaritmos y sus propiedades algebraicas.	Potenciación, saber graficar y tabular, el concepto de variable independiente y dependiente.	Potenciación, radicación, manejo de las otras funciones.	Potenciación y radicación.
Ideas básicas al terminar el tema.	--	En grado 11° verán aplicación de la función en Cálculo Diferencial.	Existencia de esta función como alternativa para hallar distintos números, y cuándo se aplica la potenciación, radicación, o logaritmo.	--	La función logarítmica como función especial empleada en la vida y la ciencia. Busca que aprendan a identificar cuándo hallar qué parte de la Potenciac.	Busca que las estudiantes sepan cuándo utilizar las funciones y en qué campos.	Aprender el concepto de variación, qué significa la función logarítmica, y qué representa la delimitación de las variables.	Saber el concepto de variables dependientes e independientes, función, los tipos de variación, la existencia del infinito.	Comportamiento de la función, el elemento a buscar (potencia, exponente, base), propiedades y procedimiento para cambio de bases.	Deben tener presente las fórmulas, la nomenclatura, la aplicabilidad y los elementos en que funcionan las variables.
Percepción de las propiedades o ecuaciones logarítmicas.	--	Desarrolla habilidades y destrezas.	La función log es una manera de hallar el exponen desconocido si se tiene base y potencia. Es importante enseñar la función en polinomios. Utiliza expresiones (ecuaciones) con cuadritos vacios para rellenarlos (encontrar la incógnita). Para introducir "ecuaciones"	La parte algebraica es el razonamiento lógico de las propiedades aunque no tengan aplicación.	De la función se puede obtener un resultado, conclusiones y utilidad, una ecuación no. La función pierde su naturaleza si está en una ecuación. El manejo de ecuaciones se da por las propiedades. Generalmente, no enseña ecuaciones logarítmicas.	Enseña ecuaciones en polinomios o con otras funciones pero las resuelve por medio de gráficas virtuales, pues implican un proceso de resolución complejo. Para trabajar ecuaciones, hay que utilizar las propiedades, verificar el dominio, y manejar procesos algebraicos	Para resolver ecuaciones se necesitan las propiedades algebraicas.	Solo resuelve ecuaciones (en 10°) con el logaritmo natural, aplicando la inversalidad con e^x, y las propiedades, cuando la incógnita es el exponente.	Basta con saber el papel de cada parte del logaritmo, pueden cambiar de base. Las ecuaciones con logaritmos ayudan al desarrollo del pensamiento lógico del estudiante.	La función en ecuaciones es primordial para enseñar las propiedades. Enseña las propiedades de suma y resta, su aplicabilidad y problemas. Se utilizan en Contaduría, Economía y Administración. Es importante el manejo del algebra para

			comienza con la idea de la función log como alternativa para hallar determinados números.			de otras funciones. Esta función es una manera de hallar el exponente desconocido si se tiene base y potencia.				ecuaciones con exponenciales y logaritmos.
Reconocimiento de las tres fases.	La definición debe enseñarse como tipos especiales de ecuaciones.	Se deben enseñar las tres facetas integralmente.	---	La primera fase es la definición que debe entenderse inicialmente, junto con la parte gráfica. Las tres fases se pueden explicar por separado pero luego deberá integrarlas. Podría graficar ecuaciones.	Se enseñan las tres etapas.	--	El proceso queda incompleto si se define y gráfica si no se comprenden las expresiones algebraicas, si dado un problema, el estudiante no lo interpreta.	--	El estudio de la fase de función, es más teórico y de observación, y es más amena para ellos (identificar características de la función).	Al considerar las tres fases se debe tener claridad en la definición, propiedades básicas, cuándo funciona y para esto, la gráfica es fundamental.
Faceta profundizada.	Le interesa comprendan el concepto de función, dominio y rango.	Profundiza en las propiedades (ecuaciones).	Se enfoca en ecuaciones.	Definición y función porque se puede analizar el concepto en sí.	Función.	--	Definición y función pues se relacionan.	--	Enfatiza en ecuaciones porque es la que más dificultades genera.	Enfatiza en la definición y las gráficas.
Características (numérica y geométrica) de la función.	No recuerda su comportamiento. La ve como caso especial de la potenciación.	--	Concibe el concepto de Función log igual que el concepto de Logaritmo. La parte Geométrica la enseñaría así: grafico básico, variación en x e y, relación entre los números de la función y la ampliación o reducción de la gráfica.	La función es sinónimo de crecimiento y decaimiento.	La idea de función se ajusta al hacer-obtener. La parte numérica prefiere llamarla algebraica. Trabajan la gráfica en el plano con moldes, se estudia rotación, traslación la razón del dominio positivo y otras características. En lo numérico, tabula los números e indica cómo hallar el codominio. La logaritmación debería llamarse exponenciación.	Variaciones gráficas al cambiar de base, la gráfica siempre se extiende hacia la derecha, el dominio son los positivos, si la base es mayor de 1 las gráficas son crecientes, si la base está entre 0 y 1 la gráfica decrece, compara gráficas en un mismo plano. Es necesario comprender la parte numérica de la función para saber su concavidad, expansión.	En lo numérico, señala la definición, análisis de la variable, la parte algebraica, algoritmos y procedimientos. La parte geométrica da una ubicación, un plano y unas coordenadas, aclarando quién es x e y, luego la relaciona con la inversa. Muestra traslaciones.	La parte numérica de la función, es la tabulación y el cambio de las variables, la geométrica, la exposición de la parte algebraica en un plano.	A partir de la potenciación, radicación o logaritmación pueden determinarse propiedades de las otras. Identificación del dominio, rango, comportamiento de la gráfica, los valores que pueden introducirse; la parte numérica depende del valor de la base, pero en general no hay log negativos, y en la parte geométrica, la función tiene una gráfica muy definida.	En la parte numérica deben reconocer el Conjunto numérico (enteros) en donde la función toma valores, y en la parte geométrica, las tabulaciones y el manejo de variables al reemplazar.

Comparación entre $\log_a x$ y $\ln x$.	$\ln x$ es más complejo, y desmotiva al estudiante.	La diferencia entre $\ln x$ y $\log x$ es su escritura (la diferencia de bases); $\ln x$ se usa para demostraciones (las facilita), y $\log x$, para cálculos numéricos. $\ln x$ facilita procesos.	$\log_a x$ es la inversa de la potencia donde se calcula un exponente, y $\ln x$ para despejar e^x. En los grados donde enseña, no maneja el exponente e. Su manejo en ecuaciones no sería problema si conocen bien los conceptos y cuándo aplicarlos.	La diferencia entre $\log_a x$ y $\ln x$ es la base; $\ln x$ no tiene aplicación en la práctica, sirve para cálculos numéricos y hacer comparaciones.	La diferencia entre $\log_a x$ y $\ln x$ es la base; parece que para él $\ln x$ es el $\log_a x$ con base 10; puntualiza en $\ln x$ para hacer cambio de base. $\ln x$ puede tomar varias formas y caminos para hallar el exponente.	Entre $\ln x$ y $\log_a x$ no hay diferencias. Es necesario puntualizar en $\ln x$ porque las aplicaciones se manejan con ella.	No hay diferencia entre $\log_a x$ y $\ln x$, en $\log_a x$ se delimita la base por e. La manipulación en ecuaciones tampoco cambia, solo interesa ver cómo se restringe el dominio y el rango; luego del choque conceptual con $\ln x$, el resto es sencillo.	La diferencia entre $\log_a x$ y $\ln x$ es la base e, que es una sucesión infinita; la resolución de ecuaciones es más sencilla con $\ln x$, porque se puede manipular con la calculadora, mientras que con $\log_a x$ parece que no pueden relacionar con la función a^x.	La diferencia entre $\log_a x$ y $\ln x$ es la gráfica. El comportamiento y el trabajo con las dos es el mismo. Enseña la función $\ln x$ porque en Física se usa mucho la exponencial; al manipularlas en ecuaciones tampoco hay diferencia, depronto hay dificultad al calcular $\log_a x$ con bases distin.	La diferencia entre $\log_a x$ y $\ln x$ es la simetría dado que son inversas, comprobándose al graficarlas en el mismo plano. El manejo en ecuaciones también es igual, pues de la logarítmica puede pasarse a la exponencial.
Razones de la definición como inversa.	---	La define como inversa para que vean la bicondicionalidad. Si se define de otra forma, el estudiante no la comprendería.	La presenta como inversa de la exponencial y la radical, siguiendo la definición de los libros de textos.	La función logarítmica es la forma o símbolo de inversa a la exponencial. La estructura matemática hace que se definan inversos y recíprocos. Abordar y comprender inversas no es fácil.	Matemática Articulada facilita hacer la definición con la inversa, pues desde Primaria se les enseña potenciación.	La definición por inversalidad, es un concepto ya dado ligado al concepto de función compuesta. Gráficamente se constata la inversalidad con la recta identidad; Dada la exponencial se puede obtener la logarítmica.	La inversalidad se da por las propiedades de grupo, y la relación entre las operaciones opuestas.	La función logaritmo se define como inversa de la exponencial porque $\ln(e^x) = x$ como sucede con $(\sqrt{x})^2 = x$, esto se muestra como una pequeña demostración de la inversalidad y como herramienta para despejar.	Se define como inversa por la familiaridad que hay con los inversos en Matemáticas (suma-resta, etc.). Él no la define así.	La función se define como inversa para mostrar la simetría. Con programas como Derive se puede mostrar la simetría y que las gráficas siempre cortan los ejes en (1,0) y (0,1).

La mayoría de maestros entrevistados consideran el concepto de función como imprescindible para la enseñanza de la función logarítmica. Lo resaltan como concepto previo necesario para comprender toda clase de funciones, y suficiente cuando se trata de recortar temas debido a la baja intensidad horaria, considerando innecesario ahondar en esta función.

No es cuestionable considerar al concepto de función como previo para el estudio de las funciones, pero sí lo es pensar que basta entenderlo para desenvolverse bien con las clases de funciones. Ferrari dice (2008, p. 314): “(…) reconocer la naturaleza de cada función es necesario para enriquecer el universo gráfico de los estudiantes, lenguaje que puede discutirse desde las operaciones gráficas.” La particularidad de cada función produce un manejo distinto en el análisis de la variabilidad, los procesos infinitos, y las restricciones algebraicas. No es lo mismo manipular una función lineal y una cúbica, o una trigonométrica y una logarítmica, su origen y naturaleza es diferente, y por lo tanto generan distintas dificultades que el concepto de función por sí solo no puede solucionar.

Históricamente, el concepto de función surgió hacia el siglo XVII con las apreciaciones de Descartes, los trabajos sobre series infinitas de Newton, Leibniz acuñó el término “función” en la ciencia Matemática, y Euler le dio el papel principal en el desarrollo del Análisis Infinitesimal, convirtiéndolo en el concepto revelador de la Matemática moderna. Luego, Euler dotó del sentido de función a, por ejemplo, la potencia y los logaritmos. Él consolidó lo actualmente llamado Función Exponencial y Función Logarítmica.

Existen por lo menos, dos aspectos esenciales de diferencia entre el logaritmo como operación aritmética (algoritmo), y como función: variabilidad y continuidad. La función logarítmica encierra obviamente el concepto de función, es decir, la correspondencia entre dos conjuntos de elementos bajo una regla, en donde se da el cambio entre dos variables, y la continuidad viene dada por los procesos infinitesimales. En este aparte, se analizarán ítems concernientes a la noción de función en el logaritmo: parte numérica, geométrica, variabilidad, continuidad e infinitud, partiendo de la forma usual de su enseñanza. Recuérdese, se trata de sugerir elementos de una apropiación didáctica de la Historia para una mejor presentación y comprensión de la epistemología de la función logarítmica.

Al detallar la forma de cada docente entrevistado de introducir y desarrollar la función logarítmica en clase, en general tienen el esquema: definición, gráfica, inversalidad y propiedades, como puede apreciarse en el fragmento de tabla:

Tabla N° 7. *Fragmento de tabla comparativa de la categoría "Concepción sobre la enseñanza".*

CONCEPCIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA (1, 3, 4, 11, 12, 14, 16, 17, 27)										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Forma de presentación de la función.	La presenta como caso especial de la potenciac. Parte de la familiaridad de los estudiantes con los conceptos previos, tiene cuidado con la interpretación y construcción de la gráfica. No enseña $\ln x$	Es muy importan empezar por definirla, hace la gráfica, expone la inversa, y las propiedades algebraicas (definición, ejercicios, aplicaciones).	La presenta como inversa de la exponencial y la radical. Utiliza tablas de localización de las partes de la potencia, raíz y logaritmo. Define la función e indica cómo se maneja.	Empieza por potenciación, y por medio de las variables x e y de la función y jugando con su significado, encuentra la inversa (función logarítmica).	Aborda el concepto y el gráfico. Antes partía de los racionales, mostraba las matizas, y describía la parte entera y decimal del logaritmo, y su uso. Hace comparaciones para deducir las diferencias entre $\log_a x$ y $\ln x$. Dice enseñar todo sobre la función.	Parte del concepto de "relación", describe y explica los parámetros de la función, su simbología y uso, luego de repasar la potenciación. Hace notar que para enseñar esa función se deben tener en cuenta muchos conceptos.	Primordial empezar por Función, luego repasa potenciación, lo enlaza con la operación logarítmica, la define, la muestra como función, la caracteriza (rango, variables, constante, traslaciones), y la relaciona con la función exponencial por ser su inversa.	Comienza por enseñar función exponencial, la define, la gráfica, explica su crecimiento, analizan su comportamiento con exponentes naturales, enteros y racionales, e introducen las propiedades de los logaritmos naturales; Va de lo intuitivo a lo formal.	La gráfica es introductoria al tema y para el análisis. Comienza por potenciación, radicación y función logaritmo, las relaciona, expresa una potencia en una raíz, indica el lugar diferente que ocupa un número en cada caso, luego caracterizan la función (gráfica y comportamiento). Coloca más ejercicios de ecuaciones, explica más, para que se familiaricen y tengan idea de cómo resolverlas cuando se encuentren con situaciones similares. No presenta la función logaritmo como inversa de la exponencial, sino como relación entre con potenciación y radicación.	Enfoca la función en el crecimiento y decaimiento. Al enseñarse la función, se debe tener claridad en la definición, las propiedades, y gráficas. Enseña las propiedades de suma y resta, su aplicabilidad y problemas.

La gran mayoría toma la función exponencial como tema introductorio. Ningún educador describió la definición presentada pero se podría inferir su relación con el tema antecedente, enunciándola así:

Si a es un número real positivo distinto de 1 $(a \in \mathbb{R}^{+} \wedge a \neq 1)$, y x es cualquier número real positivo dado ($x \in \mathbb{R}^{+}$), existe un número real único y tal que:
$\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y$; como lo planteó Euler por primera vez en 1748.

De aquí se desprenden representaciones que expresan el mismo concepto: fórmulas, tablas, gráficas. Según Even (1990, p. 524), en primer lugar “los profesores tienen que entender los conceptos en diferentes representaciones, y ser capaces de traducir y formar vínculos entre todos. Diferentes representaciones dan ideas diferentes que permiten una mejor comprensión, más profunda, más potente y más completa de un concepto.”

Estas representaciones se enmarcan en un carácter numérico y geométrico. Los profesores conciben al numérico, como la tabulación de valores, identificación del dominio, rango, variable dependiente e independiente, procedimientos algorítmicos, y relación numérica con la radicación y potenciación. En la parte geométrica, la exposición y ubicación de la parte algebraica en un plano y sus coordenadas, donde se muestra el comportamiento de la función, la variación al cambiar la base del logaritmo: la gráfica siempre se extiende hacia la derecha, si la base $a > 1$ la gráfica es creciente, si $0 < a < 1$ es decreciente, además de la expansión, contracción, rotación, y traslación.

Entrando en la caracterización numérica, se vio que el logaritmo viene dado por la relación entre la progresión geométrica y aritmética, relación esencial también en su faceta como función. Primeramente determínese el dominio y el rango. En la Tabla 1, el argumento x del logaritmo son los valores de la progresión geométrica, los cuales nunca toman valores negativos pues al asignar un n negativo en la progresión, el exponente negativo corresponde a una fracción positiva. El dominio de la función logarítmica entonces está integrado por la progresión geométrica.

Napier comenzó sus cálculos con números naturales, pero con el fin de reducir los espacios entre cada número, hizo gran uso de los números decimales tanto que la comunidad matemática de la época aceptó definitivamente dicho sistema. Sin embargo, él siguió observando muchos espacios para lo cual desarrolló un método que permitía reducirlos aún más y calcular los logaritmos, inclusive de expresiones trigonométricas: *la interpolación lineal*. Es así como se expande el dominio de la función, abarcando lo actualmente llamado Sistema de Números Reales, tomando valores racionales e irracionales positivos. Retomando la relación entre progresiones, en consecuencia el rango está dado por la progresión aritmética, es decir, todos los Números Reales.

Los logaritmos de números negativos también existen, siendo su rango los Números Complejos como lo estableció Euler mediante la expresión: $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, donde cualquier número positivo o negativo tiene infinitos logaritmos debido a la variedad de ángulos que puede tomar θ. En este aspecto ya habían trabajado Jean Bernoulli (1667-1748) y Leibniz (1646-1716), pero este tema se deja a investigación del lector.

Uno de los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza del concepto de función, enunciado por Sierpinska (1992, p. 9) es: “Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en Matemáticas.” La tabulación parece tomarse como un instrumento sin mayor trascendencia donde se ubican números de acuerdo a una fórmula, el llamado es a reconocer la importancia de enseñar las relaciones precedidas a la construcción de tablas para significar su existencia.

Identificado el dominio como la progresión geométrica y el rango como la aritmética, ahora se entiende por qué x (que generalmente representa la variable independiente) aparece en el argumento de la función, e $y = f(x)$ como logaritmo es la variable dependiente, pues efectivamente depende del número n determinado por la progresión geométrica. Esto conduce a la representación gráfica de la función, la cual para los entrevistados parece ser un instrumento necesario para explicar su comportamiento y características. Al respecto, Ponte afirma (1992, p. 7):

> *“La interpretación de las características importantes de las funciones y sus gráficas cartesianas sin duda merece un lugar bien establecido en el currículo de matemáticas. Ideas relacionadas con la variación, tales como aumentar, disminuir, la constancia, el máximo y mínimo, y con variaciones en la variación, como la variación rápida y lenta, la tasa de cambio, la suavidad, la continuidad y discontinuidad, es mejor comprendido a partir de representaciones gráficas.”*

La parte geométrica fue un elemento esencial en la evolución de la noción de función, concepto utilizado para designar las relaciones entre las entidades geométricas. No obstante, debe distinguirse el papel de la Geometría en el ámbito matemático y didáctico. Si bien, el uso de la Geometría para modelar, visualizar y ejemplificar expresiones formales y generalizadas es una herramienta didáctica importante dada la necesidad del estudiante de relacionar una imagen con las propiedades del concepto para lograr entenderlo, debe tenerse en cuenta que la representación gráfica no guarda necesariamente la misma indispensabilidad en algunos campos de la Matemática, como el Análisis Infinitesimal.

Aunque las gráficas sean un recurso para la enseñanza, en el aula de clase se presenta una situación particular, Socas (1997, p. 137) señala:

> *"… para bastantes alumnos de secundaria las representaciones gráficas de las funciones parecen haber perdido su valor de representación de la función (…) El concepto de función se reduce, en cierta manera, a la imagen visual que su curva genera; la expresión analítica $y = f(x)$ sirve únicamente para designar esta curva y para identificarla entre otras formas distintas: de esta manera, la coordenada $(x, f(x))$ sería el nombre de tal o cual punto particular de la curva, esto genera errores; entre otros, el suponer que las gráficas son siempre continuas debido a que las situaciones manejadas por los estudiantes siempre tienen esta propiedad."*

Lo anterior no solamente ocurre en los estudiantes, los docentes también podrían concebirla así. Si bien, al ver una curva en el plano cartesiano se piensa inmediatamente en una función, debe concientizarse del significado de los ejes, los puntos y el plano en general, de acuerdo a su naturaleza. En la función logarítmica, el eje x representa la progresión geométrica, y el eje y la progresión aritmética, deducido el dominio y el rango como antes, las coordenadas no necesariamente se expresan como: $(x, \log_a x)$ sino como $(x = ar^n, y = n)$, pero teniendo en cuenta la definición actual del logaritmo, las coordenadas serían $(x = r^n, y = n)$ donde $a = 1$.

Ahora considérese otra problemática relevante reflejada en las entrevistas relacionada con el pensamiento variacional en la enseñanza de la función logarítmica. En primer lugar considérese el acto de comprensión para el concepto de función, planteado por Sierpinska (1992, p. 17): "Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes." El docente debe tener claridad sobre los modos de pensamiento, para poder inducirlos en sus estudiantes y efectivamente sea un acto de comprensión. El primer modo se abordará en la próxima sección; para el segundo, Sierpinska cita a Euler para diferenciar “constante” de “variable”:

> *“’Una cantidad constante es una cantidad determinada que conserva siempre su valor… Es verdad que, en el Análisis ordinario (Álgebra) que no posee más objetos que las cantidades determinadas, se designa ordinariamente aquellas que son conocidas por las primeras letras del alfabeto, y aquellas que no lo son, por las últimas; pero es una distinción que se atiende menos en la alta geometría; allí se consideran las cantidades bajo otro aspecto, las unas son consideradas como constantes y las otras como variables (Introduction à l'Analyse Infinitésimale, par Leonard Euler).’”*[4]

Al revisar los conceptos previos estimados por los profesores para la enseñanza de la función logarítmica, explícitamente un caso resalta el concepto de variable dependiente e independiente, pero al preguntárseles por lo comprendido al finalizar el tema, varios esperan el entendimiento de ese concepto, además de reconocer las situaciones donde se utiliza la función. Este aspecto sobre el pensamiento variacional, es necesario para abordar cualquier función y especialmente la logarítmica, pues goza de un parámetro adicional que las tradicionalmente enseñadas: la base. Las variables también tienen su naturaleza, por lo que debe hacerse de la “Discriminación entre las variables independientes y dependientes”, otro acto de comprensión (Sierpinska, 1992).

Como se ha dicho, x representa la variable independiente, en este caso es cualquier valor positivo de una progresión geométrica, escrito en el argumento del logaritmo, e y, la dependiente dada por al comportamiento numérico de la base y el argumento frente a la progresión geométrica. La base a es un parámetro que particulariza la función, como sucedía con la inclinación de los planos determinadores de las cónicas estudiadas por Apolonio (262 a.C. 190 a.C.) y cuya inclinación, en la Geometría Analítica de Descartes, representaba un parámetro.

Al dar inicio en la enseñanza del pensamiento variacional de esta función, debe hacerse énfasis en que existen tantas funciones logarítmicas como valores pueda tomar la base (recuérdese que la base siempre será positiva pues la razón r nunca es negativa o cero), en cada función la base es fija (es decir que no varía al mismo tiempo que x e y) y si ésta cambia, entonces se hablaría de una función

[4] Traducido del Latín al Francés por J. B. Labey. Impreso en 1797 en Paris Chez Bachelier.

logarítmica distinta, como puede observarse en las siguientes ilustraciones con el caso particular de $f(x) = \log_a 8.40$, donde la base a toma diferentes valores:

Figura 1. *Gráfica* $f(x) = \log_{28} 8{,}4$ y $g(x) = \log_{1{,}3} 8{,}4$.

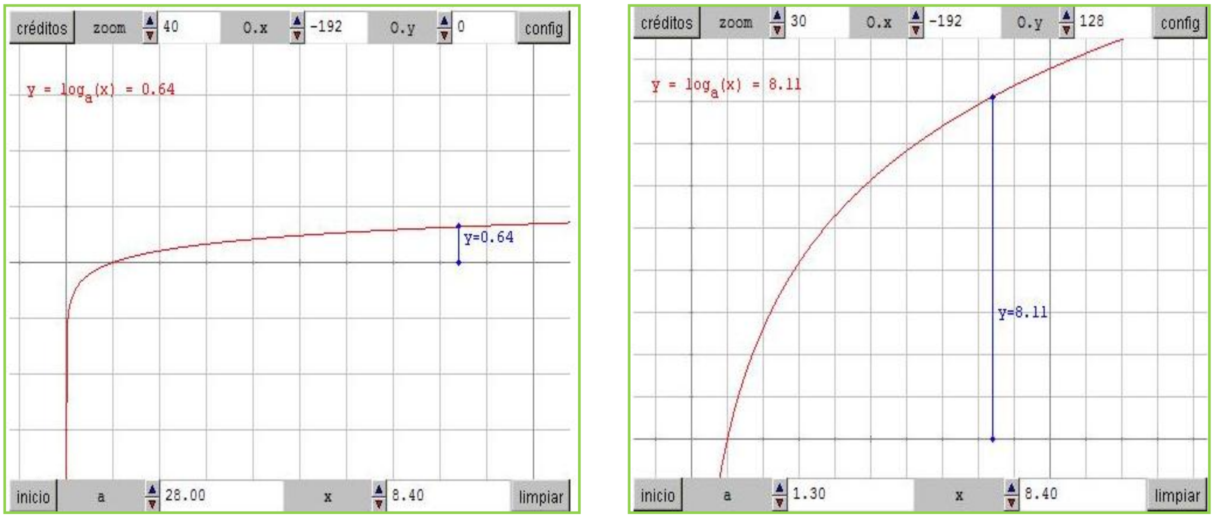
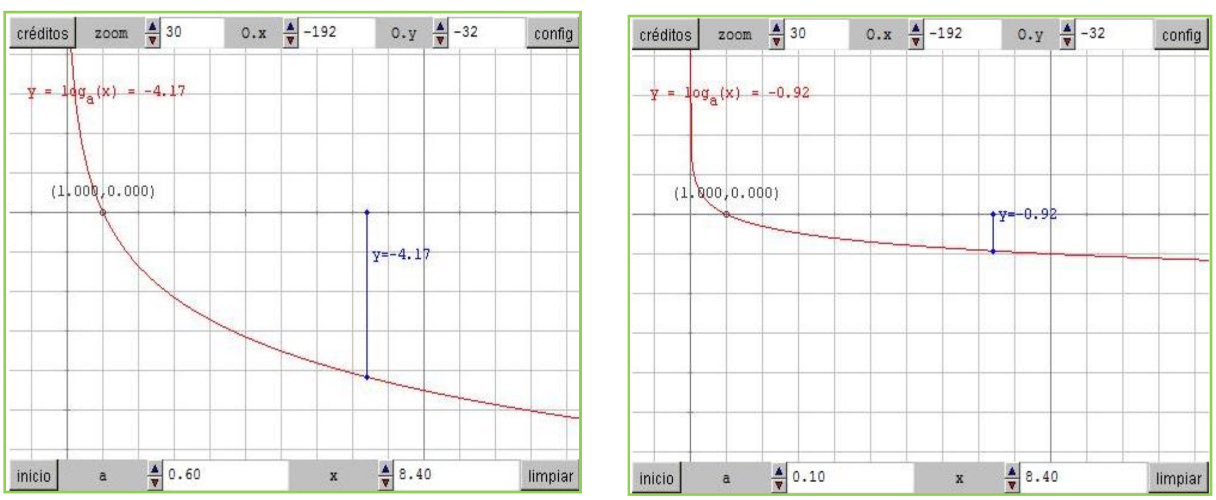


Figura 2. *Gráfica* $p(x) = \log_{0{,}6} 8{,}4$ y $q(x) = \log_{0{,}1} 8{,}4$.[5]

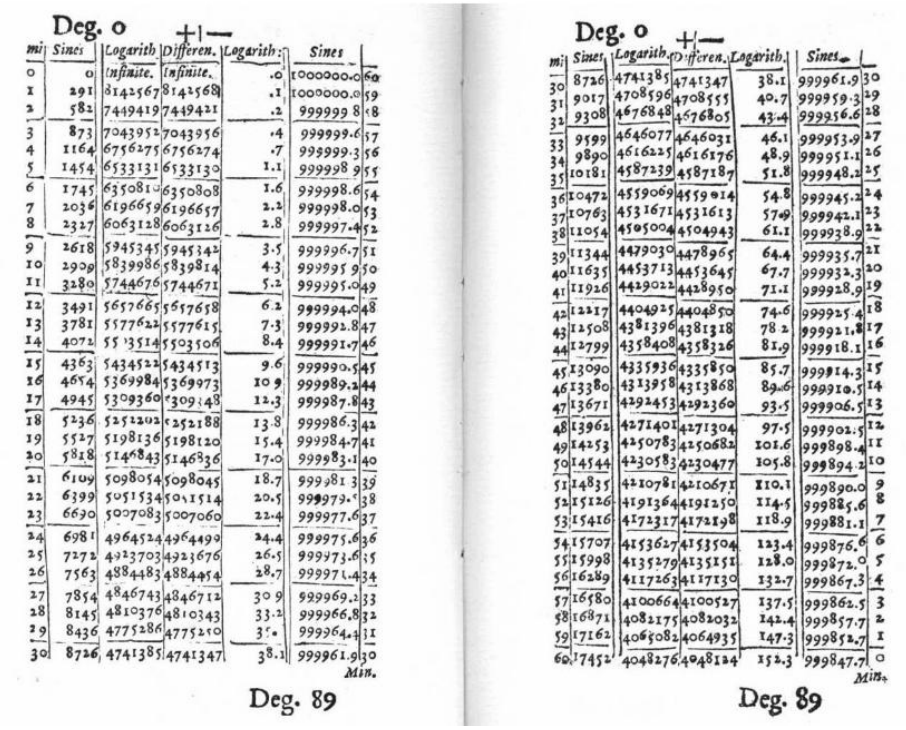


[5] Gráficas tomadas de www.educar.org.

Es importante hacer estas aclaraciones. Aunque no se manifestó en las entrevistas, según Sierpinska (1992, p. 11), “los estudiantes tienen dificultad para identificar qué está cambiando o cuáles son los objetos que cambian en sus procesos.” Además, los Estándares Básicos (2005, p. 87) establecen la necesidad de identificar “la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan”. Esto se nota en el ejemplo anterior: entre más grande sea la base para $a > 1$, la gráfica es más achatada acercándose al eje x, pero si la base se acerca a 1 de manera descendente, la gráfica se abre hacia arriba alejándose del eje x. Contrariamente pasa cuando $0 < a < 1$: Si la base se aproxima a 1 ascendentemente, la gráfica se abre hacia abajo alejándose del eje x, mientras que si la base desciende hacia cero, la gráfica es achatada acercándose al eje x.

Pasando a la problemática del infinito en la función logarítmica: uno de los aspectos más importantes de su enseñanza, aunque solamente un maestro lo haya referido. El logaritmo y la función logarítmica tuvieron procesos de infinitud un poco distintos pero cada vez más complejos. En principio, a Arquímedes le preocupaba el manejo de números muy grandes, Napier posicionó la notación decimal con la manipulación de números muy pequeños, y con el novedoso método de interpolación se encontraban números aún más pequeños y cercanos entre sí, mostrando la densidad de los decimales además de la extensión de las cifras significativas plasmadas en sus tablas:

Figura 3. *Tablas logarítmicas de Napier.*[6]



Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith:	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999.8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998.9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995.9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	55[illegible]3514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10.9	999989.2	44
17	4945	5309360	[illegible]309[illegible]48	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	[illegible]252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981.3	39
22	6399	5051534	50[illegible]1514	20.5	999979.[illegible]	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30.9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	3[illegible]	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
						Min.

Deg. 89

Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0
						Min.

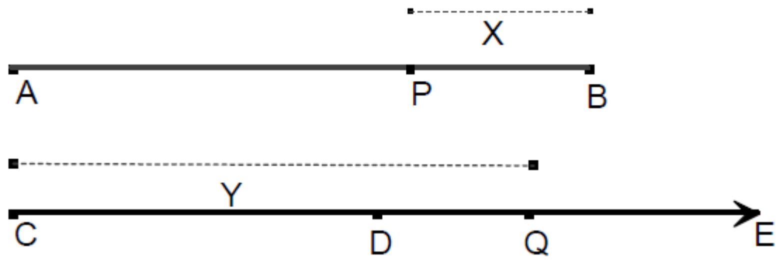
Deg. 89

Igualmente, él dio una definición geométrica involucrando el movimiento de puntos, queriendo ilustrar el comportamiento continuado de los términos arrojados por las progresiones como puede inferirse de la explicación de Boyer (2001):

> *"Sea el segmento $\boldsymbol{AB}$ y una semirrecta $\boldsymbol{CDE}$ dados en la figura. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de $\boldsymbol{AB}$ con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta $\boldsymbol{CDE}$ con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable $\boldsymbol{CQ}$ el logaritmo de la distancia $\boldsymbol{PB}$".*

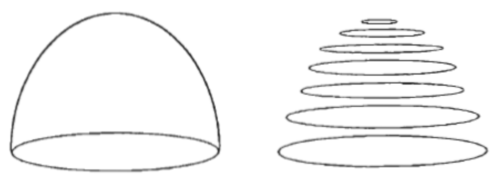
6 Imagen tomada de http://datavis.ca/milestones//admin/uploads/images/dan/napier_logtable.jpg

Figura 4. *Representación geométrica del logaritmo, hecha por Napier.*



La consolidación como función y objeto de estudio en el Análisis, se logró gracias a las relaciones con el área bajo la hipérbola, y con las series infinitas, las cuales constituyen otra parte de la *Red de conceptos fundamentadores* y de *Representación analítica del concepto*, como se registra en la rejilla (página 17). El comienzo del Cálculo Integral se da por el método de los indivisibles de Cavalieri (1598-1647): consistente en calcular el área de una figura plana o sólida mediante su corte en finas rebanadas (figura 5), y la sumatoria de las áreas de cada trozo correspondía al área de la figura. Esta idea se expandió al caso del área bajo las curvas cartesianas, con la construcción de rectángulos cada vez más delgados que coparan todo el espacio entre la gráfica y el eje x.

Figura 5. *Indivisibles de Cavalieri, y área bajo la curva.*



En 1647, St. Vicent Gregory fue el primero en hallar la conexión entre lo que hoy se conoce como logaritmo natural, y la hipérbola rectangular, con el siguiente procedimiento en notación actual (Edwards, 1979, p. 154-156):

Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado sobre el eje x positivo, denotese por $A_{a,b}$ el área de la región que se encuentra entre el eje y la hipérbola $xy = 1$. Si $k > 0$, entonces $A_{ka,kb} = A_{a,b}$.

Divídase $[a, b]$ y $[ka, kb]$ en n partes iguales, entonces se cumple que:

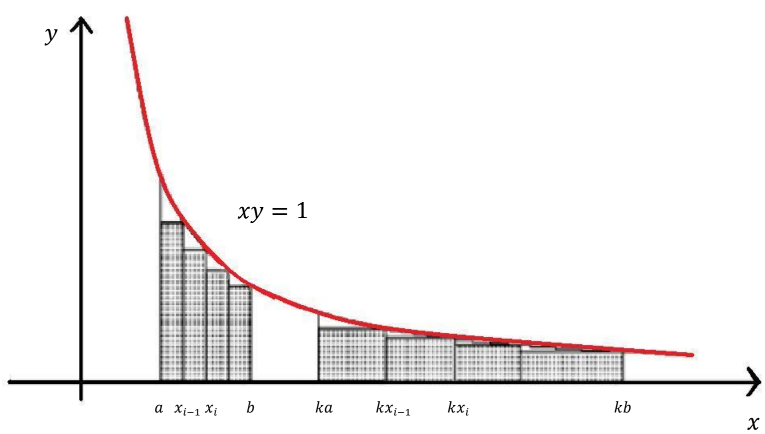
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b \text{ y}$$
$$ka = kx_0 < kx_1 < \cdots < kx_{i-1} < kx_i < \cdots < kx_n = kb$$

Sobre estos intervalos se construyen rectángulos cuya base es $\frac{b-a}{n}$ y $\frac{(kb-ka)}{n}$, y las alturas están dada por $\frac{1}{x_i}$ y $\frac{1}{x_{i-1}}$, y $\frac{1}{kx_i}$ y $\frac{1}{kx_i}$ respectivamente (Figura 6). Aplicando la expresión para el área de un rectángulo: $\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{x_i}$, $\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{x_{i-1}}$, y $\frac{(kb-ka)}{n}\cdot\frac{1}{kx_i}$, $\frac{(kb-ka)}{n}\cdot\frac{1}{kx_{i-1}}$ respectivamente. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_i}\leq A_{a,b}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_{i-1}} \text{ y } \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_i}\leq A_{ka,kb}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_{i-1}}$$

Demostrando que, $A_{ka,kb}=A_{a,b}$.

Figura 6. *Hipérbola* $xy=1$*.*



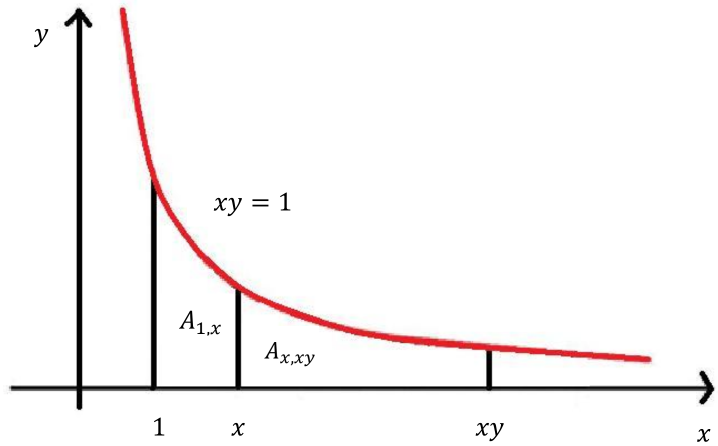
Ahora, sea

$$\ln(x)=\begin{cases}A_{1,x} & si\ x\geq 1\\ -A_{x,1} & si\ 0<x<1\end{cases}$$

Entonces $\ln(x)$ satisface la ley de los logaritmos: $L(xy)=L(x)+L(y)$.

Si $x,y>1$, se tiene: $\ln(xy)=A_{1,xy}=A_{1,x}+A_{x,xy}=A_{1,x}+A_{1,y}=\ln(x)+\ln(y)$.

Figura 7. *Suma de áreas bajo la hipérbola* $xy = 1$.



Se añade la explicación hecha por Gonzales y Vargas (2007, p. 139):

> *"Él se apoya sobre el hecho de que, cuando se toman abscisas tales que los intervalos que se forman crecen en progresión geométrica y se levantan las ordenadas correspondientes, entonces el área bajo la curva de dos abscisas sucesivas son iguales. Luego a medida que crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva crece aritméticamente11. Por lo tanto, la función área bajo la hipérbola cumple la propiedad aditiva característica de los logaritmos* ($L(xy) = L(x) + L(y)$) *ya que:*
>
> $$A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y}$$
>
> *por ser iguales las áreas entre abscisas en progresión geométrica, y se puede considerar que 'se parece' a los logaritmos."*

Este descubrimiento produjo un auge en el estudio de los logaritmos, las áreas hiperbólicas y las series infinitas. Al parecer Newton (1641-1727) fue el primero en desarrollar métodos de cálculo de logaritmos a partir de las áreas hiperbólicas. Él trabajó con la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$, $(x > -1)$ y su serie $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ Al aplicar, lo actualmente conocido como Integración, se obtiene el área entre $[0, x]$ (Edwards, 1979, p. 158):

$$A(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

De lo cual se deduce:

$$A\big((1+x)(1+y)\big) = A(1+x) + A(1+y) \text{ y } A\left(\tfrac{1+x}{1+y}\right) = A(1+x) - A(1+y).$$

Newton no relacionó directamente el área bajo la hipérbola con los logaritmos pero con base en esas expresiones indagó nuevos métodos para calcularlos.

Mercator (1620-1687) fue el primero en publicar (1668) una serie infinita relacionada con el *logaritmo natural*. Es la misma serie de Newton, pero él le dio el reconocimiento como $\ln(1+x)$. La serie de Mercator es:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cabe aclarar, Mercator infirió este resultado trabajando paralelamente con el método de los indivisibles de Cavalieri. Newton no publicó los suyos anticipadamente por ello se le atribuye a Mercator.

Gregory también aportó una serie para el logaritmo natural (Hairer y Wanner, 2008, p. 36). Se reemplaza x por $-x$ en la serie de Mercator:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Y relacionándola con la de Mercator, se tiene: $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots)$.

Por su parte, Euler (1707-1783) consolidó las exponenciales y logaritmos como funciones, y les dio un tratamiento mediante series infinitas. Él concebía números infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Al primero lo denotaba por ω y al segundo i, pero tiempo después i se adoptó como símbolo de los Números Complejos. Definió a través de series: la exponencial general a^x, el natural e^x, calculó el valor del número irracional e, y dedujo la serie para el logaritmo natural utilizando sus métodos con ω e i. Se expondrán los tres primeros procedimientos como lo hace Edwards (1979, p. 272-273) pues el cuarto ya se ha visto, aunque no con el proceso desarrollado por Euler el cual es un poco más complejo.

Para empezar, renómbrese ω por ϵ, e i por N. Euler establece $a^{\epsilon} = 1 + k\epsilon$, donde k es una constate dependiente de a. Dado un número (finito) x, Euler introduce el número infinitamente grande $N = \frac{x}{\epsilon}$, entonces:

$$a^{x} = a^{N\epsilon} = (a^{\epsilon})^{N} = (1 + k\epsilon)^{N} = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^{N} =$$

$$= 1 + N\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^{2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^{3} + \cdots \quad \text{(series binomiales)}$$

Como N es infinitamente grande, él afirma que: $1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \cdots$

Luego: $a^{x} = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^{2}x^{2}}{2!} + \frac{k^{3}x^{3}}{3!} + \cdots$ Sustituyendo $x = 1$, se obtiene:

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^{2}}{2!} + \frac{k^{3}}{3!} + \cdots$$

La exponencial natural se da cuando $k = 1$:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

Ahora, si $k = x = 1$ resulta el valor del número e: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

A lo que él llama la base del logaritmo natural o hiperbólico, y calcula sus primeros 23 decimales: $e \approx 2.71828182845904523536028$.

Haciendo un breve recorrido por los procesos que involucran el infinito en los logaritmos y la función logarítmica, pueden verse los diferentes contextos matemáticos por los que ha pasado: numérico, geométrico y analítico, cada uno aportando al avance de la siguiente etapa. En la enseñanza, no solo es hacer reconocer su trayectoria sino pensar en la causa de las restricciones de la función en comparación con el dominio y el rango de las demás funciones enseñadas, o el comportamiento creciente o decreciente de la función de acuerdo a la variabilidad de los números infinitamente grandes o pequeños, por qué los extremos toman comportamientos distintos: en determinado intervalo $(0 < x < 1)$ la gráfica es decreciente y tiende a cero, mientras en otro es creciente y no se acerca a un valor específico, elementos a analizar sobretodo en grado 11° donde se aborda Cálculo y el concepto de límite permite hacer este tipo de reflexiones que dan significado al aspecto infinito de la función marcado fuertemente en la historia.

Por último, se encontró que la gran mayoría de maestros interrogados omite la enseñanza de la función logarítmica en general, bien sea porque falta tiempo, ésta carece de aplicabilidad, o su nivel no es acorde a los contenidos básicos de la Secundaria (como se mostró en la Tabla N° 2). No obstante, en este apartado se brindaron elementos para sobrellevar en el aula de clase esa complejidad intrínseca de su naturaleza, y por tanto las dificultades se traten con mayor cuidado, pues encierra particularidades importantes de ser estudiadas con detenimiento. Se recomienda entonces, dejar de considerarla un contenido opcional de la programación curricular y reconocerla como un tema fundamental para trascender a conocimientos de mayor nivel que aportan a una mejor preparación académica de los estudiantes.

Presentación del logaritmo como forma algebraica o ecuación. Ponte (1992, p. 6) afirma: “La enseñanza de las funciones necesita articular de manera equilibrada las tres formas más importantes de la representación, es decir, la forma numérica, gráfica y algebraica”. Es probable que el currículo de las instituciones visitadas no contemple la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas o enfatice en ella, pero los educadores como agentes mediadores entre el conocimiento matemático y el estudiante, y su ineludible superioridad académica, deben reconocer y manejar las representaciones involucradas en el estudio de la función logarítmica, específicamente.

La forma algebraica de la función, permite entenderla en todas sus dimensiones, capturar sus características numéricas y geométricas, y encerrar en una expresión general gran parte de este contenido, permitiendo abstraer la epistemología del concepto en sí, entender su naturaleza de manera universal. Por ello, se insiste en la importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas.

Según los docentes entrevistados, el instrumento esencial para abordar las ecuaciones son las propiedades logarítmicas de suma, resta y exponente. Hairer y Wanner (2008, p. 29-30) definen la función logarítmica partiendo de sus propiedades:

Una función $\ell(x)$, definida para valores positivos de x, es llamada una función logarítmica si para todo $x, y > 0$:

$$\ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y);\ \ell(z/x) = \ell(z) - \ell(x);\ \ell(1) = 0;\ \ell\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}\ell(x)$$

Uno de los profesores afirmaba que al plantear la función en ecuaciones, pierde su naturaleza como función. Con lo anterior se refuta dicha idea, pues precisamente sus propiedades algebraicas se cumplen únicamente en esta función o en otras que se comporten de manera similar, como la hipérbola. Al conectar explícitamente la parte algebraica y la funcional, con esta definición se comprende por qué las condiciones de la función, el comportamiento del dominio, el rango, la restricción de las variables y parámetros, también abarcan el contexto de ecuaciones, situación referida por los entrevistados 6 y 7 (p. 91, 95).

Los maestros entrevistados, en general, consideran las ecuaciones como relevantes para el desarrollo del pensamiento lógico y las destrezas algebraicas de los estudiantes. Se encontró, en la escolaridad no se enseñan ecuaciones polinómicas con logaritmos como se supuso inicialmente, sino ecuaciones donde sus términos son logaritmos y/o exponenciales. Solo se halló el caso 6 (p. 91), pero él resuelve este tipo de ecuaciones por medio de programas virtuales.

A pesar de reconocer los beneficios intelectuales para los estudiantes, el profesorado no ve muy importante la enseñanza de ecuaciones logarítmicas en la escolaridad por razones como falta de aplicación en la vida real, dependencia de las expectativas académicas de educación superior del estudiante, o el nivel académico manejado en un colegio público y uno privado. Para varios de ellos es prioritaria la aplicabilidad de las Matemáticas (Véanse las subcategorías registradas en la Tabla N° 8); además Ponte (1992, p. 7) expone: “Naturalmente, el trabajo con expresiones analíticas sigue siendo importante. Pero, más fundamental que la habilidad del estudiante para manipular expresiones largas y complejas correctamente, es que los estudiantes comprendan el significado de estas expresiones en situaciones concretas.”

Tabla N° 8. *Fragmento de la tabla comparativa de la categoría "Concepción sobre la enseñanza".*

CONCEPCIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA (1, 3, 4, 11, 12, 14, 16, 17, 27)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relación Enseñanza-Realidad.	Todo tema es importante si se aplica. No da ejemplos de aplicaciones por agotamiento de los estudiantes.	--	No muestra aplicaciones para la Básica porque son complejas para los estudiantes de estos grados.	No es fácil encontrar aplicación para las funciones inversas. Los docentes tienden a evadir $\ln x$ porque no le encuentran aplicabilidad. No se comprende si se enseña en abstracto.	La vida real de la Matemática es la Geometría, por medio de ella se puede demostrar todo.	Uno de los pilares: modelación de los contenidos.	Enfatiza la aplicación en la parte financiera por el énfasis comercial del colegio.	--	Él se enfoca en la parte práctica de todo concepto.	La aplicabilidad se enfoca al contexto militar.
Importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas.	Todo tema es importante si se aplica.	Desarrolla habilidades y destrezas.	Es importante enseñar la func en polinomios para mejor preparación a la U.	Enseñaría ecuaiones si el PEI lo dice, pues no le parece significativa.	No le parece importante enseñar la función ni las ecuaciones porque no tienen aplicabilidad inmediata.	Es importante la función logarítmica en ecuaciones para desempeñar se en Calculo, tener buen manejo algebraico.	Su importancia es relativa. Si el estudiante aspira a una carrera distinta a las administrativas les daría más elementos; si es para Icfes no es necesario. En un colegio público basta dar lo básico, en un privado se los preparan más por las carreras a estudiar.	La enseñanza de la función en ecuaciones es importante, pero no se puede ahondar por el tiempo.	Es importante porque ayudan al pensamiento lógico del estudiante.	Es importante la enseñanza de la función en ecuaciones para el manejo de las propiedades.
Importancia de la enseñanza de la función.	Todo tema es importante si se aplica. No es que sea irrelevante sino que no hay tiempo para ahondar.	--	Depende del interés de cada estudiante, de lo contrario, solo lo básico.	Si está en los textos es porque es importante.	La función solo debe enseñarse para demostrar de forma gráfica que $a^0 = 1$. De la función solo debe darse información y características al no tener aplicación inmediata.	Explicar fenómenos, resolver problemas en varios campos.	--	Es importante enseñar esta función sobre todo al utilizar la función exponencial de Euler. Todo lo que le permita adquirir conocimientos es al estudiante es importante.	El mayor aporte de la función logaritmo es la pérdida del miedo, el ganar confianza y aprender a analizar, enfrentar y entender esta función. Las ecuaciones y gráficas, son muy importante para el comportamiento y destreza lógica.	La función es importante profundizarla solo a los que van a estudiar Ingeniería o Economía.
Enseñanza superficial de la función.	Enseña rápidamente la función.	--	La enseña rápidamente porque no es prioritaria.	--	Solo debe darse información y características.	--	--	En 11° repasa las características básicas para el Icfes.	--	En grado 7° se enseña superficialmente.

Sin embargo, percibiendo una baja calidad de la educación en Colombia y sus causas, la enseñanza de las Matemáticas no solo debería enmarcarse en la aplicabilidad sino también en el manejo de procedimientos puramente matemáticos que permitan el acercamiento a temas más complejos para aumentar el nivel académico de los estudiantes y se subsane, en parte, la ruptura del Sistema de Educación Nacional.

En el cuestionario se quiso explorar las posibles diferencias en la manipulación de ecuaciones con las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln x$, previa consulta sobre las probables distinciones entre $f(x)$ y $g(x)$. Mayoritariamente se respondió que la diferencia entre las funciones era la base, pero la manipulación en ecuaciones era la misma, tal vez la primera podría generar confusiones debido a la errónea limitación de las variables. Todos tienen concepciones distintas de estas funciones: no se encontraron ideas unificadas, ni la confirmación de otra hipótesis respecto a la preferencia de la función logaritmo natural para el manejo algebraico más sencillo, al ser la inversa de la función exponencial $h(x) = e^x$. Por el contrario se evidenció, la enseñanza se enfatiza en la forma general de la función.

Al mismo tiempo, enseñan el cambio de bases entre logaritmos. Suelen usarse con base 10 y e. La conversión de bases se inició con los cálculos de Briggs (1561-1631), quien trabajó con Napier en sus tablas. Briggs introdujo el logaritmo de base 10, calculando en 1624, treinta mil logaritmos con catorce cifras decimales. Además realizó la conversión de los logaritmos de Napier, pues cabe resaltar su particularidad debido a que la razón r escogida para disminuir los espacios entre los números hallados y los valores de la progresión geométrica correspondían a senos de ángulos. En ese tiempo se realizaba la conversión mediante la extracción de raíces sucesivas de 10, pero actualmente se puede proceder con la expresión (Edwards, 1979, p. 153):

$\log x = \frac{\mathrm{Nog}\, 1 - \mathrm{Nog}\, x}{\mathrm{Nog}\, 1 - \mathrm{Nog}\, 10}$, donde $\mathrm{Nog}\, x$ es la notación para los logaritmos de Napier.

Haciendo la conversión resultan las identidades: $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$.

Los logaritmos con base 10, son denominados logaritmos comunes o de Briggs.

Euler determinó una regla, llamada *La regla de oro*, para realizar el cambio de base en todos los casos, esta es (Hairer y Wanner, 2008, p. 30):

$$\log_b x = y \cdot \log_b a \leftrightarrow y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_a a}.$$

Retomando el primer modo de pensamiento enunciado por Sierpinska, cuando se aborda la fase de ecuaciones, el significado de las cantidades x, y, a cambia. Las primeras dos ya no representan variables, sino cantidades fijas conocidas y otras por conocer a través de la manipulación algebraica, sin perder de vista las restricciones definidas por el comportamiento de la función, pues como se decía arriba, si bien se cambia de contexto, históricamente las expresiones algebraicas y las relaciones funcionales han tenido un vínculo muy estrecho, por ello se resalta la necesidad de "identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas", objetivo dispuesto en los Estándares Básicos (2005, p. 87).

3.4. REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y LAS CONCEPCIONES DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.

La gran mayoría de los educadores conciben la Historia como mirar en retroceso los hechos de construcción de las Matemáticas: cómo, dónde, cuándo, quiénes, por qué y para qué se originaron los conceptos. Uno de ellos, además concibe la Historia de las Matemáticas como las acciones relativamente recientes relacionadas indirectamente con las Matemáticas, como la escritura o lectura de un libro de Matemáticas. Otro, señala que el *cómo las hicieron*, ayuda a afinar los métodos de enseñanza, y el *para qué* indica los objetivos y la interpretación de la naturaleza. Particularmente, de la Historia de los logaritmos, solamente un maestro describió un poco su origen y precursor. En un contexto más social, la conciben como cultura, herramienta pedagógica, oportunidad de reconocer y valorar lo realizado por otros, no subestimar a los demás por la incomprensión o dificultades en el aprendizaje de los conceptos.

A continuación se presenta un fragmento de la tabla comparativa de la categoría *"Concepción sobre la Historia de las Matemáticas"* que visualiza lo anteriormente dicho:

Tabla N° 9. *Fragmento de tabla de la categoría "Concepción sobre la Historia de las Matemáticas".*

CONCEPCION SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS (18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concepto de HM.	HM como herramienta pedagógica para enfatizar en biografías de matemáticos ilustres. La HM consiste en devolverse al origen de los conceptos.	Consiste en saber de dónde y cómo surgieron los conceptos, quiénes contribuyeron, además encierra curiosidades (anécdotas).	--	La HM son los conocimientos de años atrás y actuales, situa-ciones o accio-nes a través del tiempo (historia reciente). La historia se conoce a través de los libros escritos por historiadores.	La HM es saber todo sobre el origen de los conceptos. El cómo lo hicieron y saber los métodos de prueba, ayuda en la forma de enseñar; el para qué, indica que lo que se hace tiene un objetivo, y la in-terpretación de la naturaleza. Hasta qué punto el mate-mático busca interpretar la realidad, cómo pa-sa a la abstrac-ción. La Historia se constituye cuándo to-dos las activida-des confluyen o coinciden en un mismo lugar o tiempo para tener un desarrollo.	Si no fuera por la Historia no hubiera tantos avances en la Matemática. Siempre han existido grupos que han trabajado en Historia y a eso se deben los avances.	El concepto de Historia, la remite a: pensamientos, economía y sociedad. En HM la remite al origen, el precursor y la necesidad de surgimiento del concepto.	La HM es un compendio de sucesos que desarrollaron la Matemática, los progresos, las personas, el con-texto, que contri-buyeron a la Ma-temática de hoy.	HM es saber el origen de los conceptos y qué se hizo para tenerse todo lo actual. Reconoce que detrás de cada concepto hay un desarrollo teórico grande pero no lo presenta.	Es importante mostrar el origen y razón de las matemáticas.
La HM como mediadora en la enseñanza.	HM como herramienta pedagógica; la HM base fundamental como motivadora, y cultura general.	La HM sirve para culturizarse y motivar. Promueve la idea de que los jóvenes pueden desarrollar las mismas capacidades de los grandes mat.	No puede afirmar si la HM sirve en la enseñanza pues no la ha utilizado y tampoco la ve necesaria.	Es importante llevarla al aula porque él debe fomentar las Matemáticas desde todo punto de vista, siempre que haya espacio para hacerlo.	Entender cómo hicieron las Matemáticas ayuda la forma de enseñar. La HM como motivadora y fomentadora del gusto por la Matemática.	Es importante hacer reconocer el beneficio que trajo el desarro-llo histórico de cierto concepto. Involucrar la His-toria no es tan importante para personas que no les interesa. Co-nocer la Historia de la función no aporta a la enseñanza.	Conocer la HM sí aporta, en el interés, ubicación, a valorar lo que se ha desarrollado, a no subestimar a otro por no entender los conceptos, pues llevaron mucho tiempo de desarrollo.	Le gustaría mostrar la Historia de los conceptos en su clase.	La HM aportaría si se la enseña sin excesos y para que se comprenda el origen de los conceptos, pero no como eje de enseñanza.	A los estudiantes les atrae la His-toria al saber el origen de los nú-meros. Le parece importante comen-tar a los estudiantes que las Matemáticas no surgieron de un momento a otro sino que es de tradición y los cambios se tardan siglos. La Historia aporta a la enseñanza a ver los cambios a través de los siglos hasta hoy, mostrarles los papiros donde estaban escritas las fórmulas.

Es importante tomar conciencia de la Historia de las Matemáticas como disciplina no solo que estudia el origen, desarrollo y contexto de los conceptos matemáticos, sino como una herramienta para la enseñanza que permite a estudiantes y docentes acercarse a la naturaleza de las mismas. Para su adopción dentro del aula, es necesario tener un concepto definido de la Matemática como construcción humana, social y cultural, como ciencia de constante cambio donde se entrecruzan diferentes pensamientos, posiciones y elementos de la vida real. Por tal motivo, se resaltan esas ideas primarias relacionadas con la cultura, la pedagogía y los valores humanos expresadas arriba.

Varios de los entrevistados involucran la Historia por medio de lecturas, reseñas, biografías, anécdotas o retratos de los matemáticos más famosos, como objeto introductorio, motivador o informativo. Las lecturas y reseñas se integran como preámbulo a la unidad o a modo de consulta previa, para investigación de los estudiantes. Las biografías y anécdotas se comentan esporádicamente a manera de información, o estímulo para convencerlos de sus capacidades. Los retratos de matemáticos famosos es, en el caso 9, una experiencia vivida recordada con agrado, mientras en el caso 1, un anhelo (Véase la Tabla N° 10 para ilustración).

Si bien es valioso reconocer a través de relatos, la labor de las personas que han construido la ciencia Matemática durante siglos, su exploración puede ser más significativa si se revive y moldea parte del origen y etapas de desarrollo de los temas dispuestos para la escolaridad. Esta monografía, quiso dar idea de un uso alternativo de la Historia en la enseñanza sin inducir a la implementación de secciones o tiempos independientes a la ejecución de las clases, entendiendo que un mismo concepto puede abordarse de diferente manera y el profesorado debe estar familiarizado con diferentes métodos de resolución, como lo afirma Even (1990, p. 525). La intensión es: el maestro entrelace el proceso evolutivo de los conceptos con su propia metodología de enseñanza.

Las anécdotas y narraciones pueden ser una aproximación a la dimensión humana y cotidiana de las Matemáticas, ayudaría a reconocer como personas a quienes aportaron sus conocimientos, las situaciones curiosas en su vida “privada” o su labor diaria (Abrate y Pochulu, 2007, p. 112). Esto contribuiría a romper la creencia sobre la necesaria genialidad y perfección para comprender Matemáticas. Sin embargo, debe tenerse cuidado con el tipo de anécdotas a compartir pues el objetivo es acercarse al lado humano de la Matemática y al mismo tiempo, sea significativa para el aprendizaje del concepto abordado.

Tabla N° 10. *Fragmento de tabla de la categoría "Concepción sobre la Historia de las Matemáticas".*

CONCEPCIÓN SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS (18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Propuesta de Formas de utilizarla.	Le gustaría tener en los salones la biografía y aportes de los matemáticos ilustres; lectura de reseñas, Investigación a cambio de nota adicional y aportes en clase.	--	--	--	--	--	Al hacer recuentos, los estudiantes se interesan y se resultan discusiones enriquecedoras.	Se podría involucrar con una actividad didáctica donde apliquen los conocimientos previos para instaurar el concepto de función logarítmica, y hacerlos pensar en la forma desarrollada por los matemáticos, el contexto, quiénes lo hicieron, etc.	--	En el colegio donde trabajaba antes, tenía a los filósofos matem con sus principales contribuciones matemátcas y geométricas. Debe inducirse al estudiante a la lectura, leerles para que se acostumbren, proponerles investigaciones por internet, que lleven recortes o lecturas a clase, pues las Matem también se leen.

Tener los retratos de los matemáticos famosos en el aula de clase, también aportaría a la sensibilización en el carácter humano de las Matemáticas, esta vez en una forma física visual, la imagen de un ser humano de carne y hueso que aportó grandes ideas para todo lo conocido hoy en la Ciencia y la Tecnología. Así mismo, podría indagarse el contexto cultural pues estas personas llevan consigo una vestimenta particular correspondiente a su época, país u oficio. Recuérdese, no todos eran matemáticos de profesión, algunos se dedicaban a otras actividades pero gustaban del desarrollo matemático, como Napier, Fermat, Viète, etc.

Adicionalmente, se darían a conocer las dinámicas de estudio de las Matemáticas a lo largo de la Historia. Una de ellas es la conformación de grupos y comunidades matemáticas, los cuales se constituyen por el interés en el desarrollo de un mismo concepto o con fines pedagógicos como el grupo Bourbaki, comentando sus resultados a través de cartas, reuniones y discusiones para la validación de sus ideas. En cuanto, al ambiente físico del salón de clase, éste sería más situado en Matemáticas y humanizador de las mismas.

Se sugiere dejar de enfocarse solamente en los más *famosos*, dada la existencia de otras personas con valiosos aportes, que directa o indirectamente hicieron sobresalir a los considerados *famosos*. Un ejemplo, son las mujeres matemáticas a quienes la mayoría de veces se omite la divulgación de sus trabajos, tema que da cabida al tratamiento del género en las Matemáticas y en el aula de clase.

Paralelamente, algunos educadores afirmaban: quien conoce la Historia de las Matemáticas conoce las Matemáticas mismas, y su estudio requiere mucha dedicación. Su lectura profunda puede depender del grado de interés de la persona, y su implementación en clase, de la creatividad. A pesar del posible poco interés, es importante tener conocimientos históricos básicos de los temas a enseñar, no solo de fechas y nombres, sino principalmente de lo desarrollado y las características del surgimiento. Se hace el llamado a utilizar fuentes bibliográficas de autores con trayectoria en el tema, para extraer información confiable tanto del recorrido histórico como de las intervenciones anecdotarias.

Uno de los planteamientos de esta investigación ha sido la necesidad de explorar la Historia para involucrarla en la enseñanza, pero se resalta adicionalmente, lo primordial de conocer detalladamente tanto el tema matemático en sí, como el conocimiento pedagógico y didáctico, pues se encontraron casos en que no tienen el hábito de leer sobre temas concernientes a la Educación, y se percibió un poco el desconocimiento sobre la parte matemática de la función logarítmica, concretamente al indagar sobre su caracterización numérica y geométrica, pues no daban una descripción específica.

El manejo del conocimiento matemático es clave para la implementación de una buena enseñanza y obtener el aprendizaje de sus estudiantes, Even (1990, p. 521): “Un maestro que tiene sólidos conocimientos matemáticos para la enseñanza es más capaz de ayudar a su/sus estudiantes a lograr una comprensión significativa de la materia.”, aquí influye su formación académica de Educación Superior o capacitaciones, donde debería incentivarse al aprendizaje de Matemáticas para maestros, pues se sabe, el manejo de las Matemáticas puras es distinto al de su enseñanza.

En esta sección se pretendió, además de analizar las concepciones de los entrevistados sobre Historia de las Matemáticas, concientizar sobre la importancia de su implementación en la enseñanza, a partir de las estrategias expresadas en los testimonios. La actividad o comentario más sencillo sobre Historia en clase, está dotado de una complejidad similar a la de las Matemáticas mismas, pues lo rodea un contexto epistemológico, social y cultural del cual se requiere tener buen conocimiento para hacer mucho más significativa su intervención.

3.5. MIRADA SOBRE LOS ESTUDIANTES.

Cuatro de los diez profesores entrevistados, mencionaron percibir una actitud de apatía, falta de estudio y motivación, por parte de los estudiantes, particularmente por las Matemáticas, a pesar que el cuestionario no indagaba este aspecto. También notan ausencia de aspiraciones profesionales, muy pocos son quienes consultan, preguntan, son más activos en clase, y realmente quieren realizar una carrera universitaria. Muchos conciben las Matemáticas como un requisito para aprobar el año lectivo, sin mucho esfuerzo.

Otros docentes, observan que sus estudiantes son temerosos para exponer sus ideas ante los demás, solventar sus dudas, cuestionar al docente, o resolver problemas. El caso 9 manifiesta, los estudiantes repudian la función logarítmica al verla como un tema difícil. Al contrario, él resalta la importancia de la enseñanza de este tema para vencer el miedo. Igualmente, algunos profesores, a pesar de esas actitudes, creen a los estudiantes personas tan capaces de manejar las Matemáticas como quienes las desarrollaron. Mírese la siguiente tabla:

Tabla N° 11. *Tabla comparativa de la categoría “Concepción sobre los estudiantes”.*

	CONCEPCIÓN SOBRE LOS ESTUDIANTES (5, 6)									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Apatía/ Desmotiva-ción	Lo difícil desmotiva al estudiante; Motivación a cambio de nota adicional; se motivan al pedirles investigar sobre Hist de Log; Los estudiantes son conformistas, apáticos, facilistas; esa actitud también está ligada a la escolaridad de los padres, y la comuna; los estudiantes universitarios se interesan un poco porque pagan más.	--	Algunos estudiantes ven las Matemáticas como requisito para aprobar el grado.	Ven las Matem como requisito para aprobar el año lectivo, pero no como enriquecedora del conocimiento. Olvidan lo visto previamente. Perdieron la costumbre de estudiarla por varias horas y a esto se le suma el surgimiento de los medios virtuales. Es fundamental la actitud positiva de ellos para que comprendan rápido y mejor, adoptando el pensamiento lógico y la estructura matem. Su enseñanza depende de la actitud del grupo.	4 ó 5 estudiantes son activos y se interesan. Él trata de adherir a los demás (son su inspiración para trabajar en el colegio).	--	--	--	No repasan, llegan sin haber revisado los apuntes de cada clase, no le ven utilidad a lo que aprenden, no aspiran a estudiar y profesionalizarse, estudian sin interés, solo por obligación pero no porque les agrade y le vean utilidad. Si el docente propone una actividad tampoco muestran interés.	--
Estudiantes temerosos.	--	--	--	--	--	--	Los estudiantes son temerosos de preguntar y salir al tablero porque piensan que el docente siempre les ve lo negativo. Con su metodología tienen más confianza para preguntar aunque tengan errores, no les da miedo equivocarse.	Al llenar de confianza a los estudiantes es menos difícil subir el nivel. Ellos esperan al frente del tablero asumiendo que todo lo que el docente diga es verdad.	Les tienen más temor y rechazo a los logaritmos que a la potenciación, les parece horrible seguro por ser desconocida. Solo la palabra ecuación, les produce repudio, temor, se asaran y se sienten incapaces cuando no encuentran la solución de la ecuación con el procedimiento de ellos. Es más el miedo a enfrentarse que la incapacidad de resolverlas, pero el miedo se pierde practicando. Busca quitar el temor para poder avanzar a la formalidad.	--

Estudiantes capaces	--	Busca incentivar la idea de que tienen las mismas capacidades de los grandes matem, a través la HM. Trata de inculcar lo que lee de Educación a sus estudiantes.	--			--	Su metodología les atrae a los estudiantes porque es como colocar retos y demostrar que son capaces y que el profesor no lo sabe todo. Busca que sean jóvenes críticos, reflexivos, que argumenten, y cuestionen.	Si se plantea la definición de inmediato, no tienen oportunidad para cuestionarse.	Es más el miedo que la incapacidad. Esta función sirva para que enfrenten al miedo.	--
Dificultades	Interpretar una gráfica y graficar un problema propuesto.	Casos de estudiantes de 7º, 8º, 9º que no saben las operaciones aritméticas con fracciones. Las dificultades se dan por la falta de conceptos básicos de las propiedades de las igualdades.	Se confunden en la potenciación: multiplican el exponente con la base.	No comprenden el concepto de Función, grafican bien pero no saben interpretarla.	Los estudiantes que llevan otra metodología en Primaria, vienen con muchas debilidades y errores, y cuando llegan donde él "sufren"; la principal dificultad es entender por qué $a^0=1$.	No ha percibido dificultades porque previamente hace repaso aritmético de los logaritmos. Si hay buenos fundamentos las dificultades disminuyen.	El número e les presenta dificultad, y no se le enseña con profundidad cuando ven Números Irracionales, por eso hay que dedicarle más tiempo. Los estudiantes se incomodan al ver la palabra "logaritmo" (pero luego ven que es fácil) o ver el exponente como incógnita, esto les causa dificultad porque es un tema relativamente nuevo; los estudiantes se extrañan cuando ven escrito $\ln x$. La dificultad con $\log_a x$ puede deberse a las bases y la limitación de las variables.	Ha tenido dificultad con la enseñanza de las propiedades de los logaritmos. Los estudiantes piensan que la propiedad de multiplicación debe resultar multiplicación de logaritmos, no entienden por qué $a^0 = 1$, y se asombran cuando la incógnita es el exponente, también cuando ven que por el logaritmo se puede "bajar". Esto pasa por no entender demostraciones o la epistemología de los conceptos. Los estudiantes no conciben la noción de infinito. Ellos siempre esperan una regla, algo mecánico para despejar, al no entender las demostraciones. Parece dificultarles relacionar $\log_a x$ con la f. expon.	Los estudiantes tienen muchos vacíos, algunos no saben las operaciones aritméticas, les cuesta dificultad el tema de funciones (el algebra, reemplazar valores y graficar).Tal vez haya dificultad en el cambio de bases. Las ecuaciones generan más dificultad. Para ellos es lo mismo decir: 2 a la 3, y 2 por 3.	Se les dificulta la nomenclatura, los cambios de variable, la función inversa, resolución de ecuaciones al hacer el cambio de la función logaritmo a la exponencial con la misma base.
Soluciones para superar las dificultades.	--	La solución es la mejor cualificación de los docentes de primaria.	--	Debe hacerse acompañamiento constante, buscar metodologías fáciles que incentiven al gusto por las matemáticas y los ayude a abordar lo no entendido.	El profesor nivela y corrige a los estudiantes que llegan con debilidades. La solución sería no enseñar más por temas porque no construyen un proceso.	--	Si los docentes trabajaran bien los conceptos y propiedades con los ejercicios propuestos, trabajaran el vocabulario (operación "pasar" no existe), trabajaran los algoritmos, definieran las variables, dar orden.	Solucionar dificultades implica mucho tiempo para ahondar en lo epistemológico.	La forma de superar las dificultades sería sembrando buenas bases conceptuales, además de quitar el miedo.	Si los estudiantes se apersonaran investigaran, consultaran talleres, y practicaran.

No solamente la complejidad de las Matemáticas es la causante de las dificultades de los estudiantes. En Didáctica se distinguen tres tipos de procesos respecto al conflicto durante el aprendizaje de las Matemáticas: las dificultades, obstáculos y errores. Socas (1997, p. 126) define detalladamente cada una. Específicamente, clasifica las dificultades en: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas; a los procesos de pensamiento; a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas; a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos; a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Sobre las últimas menciona Socas (1997, p. 158):

> *"Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc. generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos."*

También influyen las concepciones de la sociedad: las Matemáticas son para personas inteligentes, son difíciles, requieren agilidad de cálculo, ideas que los maestros están llamados a corregir mediante su forma de enseñanza y actitud.

Adicionalmente, los profesores entrevistados manifestaron una serie de dificultades presentadas por los estudiantes durante el estudio de la función logarítmica y las Matemáticas en general. Algunos culpaban a la falta de formación de los profesores de Primaria. Lamentablemente, cuando se originan dificultades en un concepto y no se detecta oportunamente, éste puede convertirse en obstáculo y luego en un error, que más tarde se exterioriza más arraigado. Puede ser por esta razón que los maestros de Secundaria perciben dificultades incluso con las operaciones aritméticas.

Pero ellos también deben tener cuidado de no generar dificultades que puedan obstruir el rápido aprendizaje en la Educación Superior. La evaluación es una ayuda para reconocerlas y buscar la solución, reafirmando a los estudiantes como participantes activos del contrato didáctico, capaces de reflexionar sobre sus errores y, como lo afirman Farfán y Ferrari (2008, p. 322) citando a Tall: "…existen dos cuestiones importantes: el hecho de tomar en cuenta las ideas que han encontrado los estudiantes en su aprendizaje cotidiano, y ayudarlos a enfocar aquellas ideas esenciales como base de un pensamiento más sutil." Precisamente lo proponía el caso 4, la solución a estas dificultades se basa en el acompañamiento constante al estudiante, buscar metodologías fáciles que le permitan entender los conceptos y les incentive el gusto por las Matemáticas.

El caso 7, expone otra posición alusiva a responsabilidades específicas del maestro en su enseñanza: la solución consiste en que el profesorado trabaje los ejercicios propuestos en consecuencia con los conceptos y propiedades enseñadas, de manera que no fomente la mecanización pues ello trae graves consecuencias en grados superiores; manejen el vocabulario formal: la operación *“pasar”* no existe; definieran las variables; y dieran un orden en su explicación.

Ambas perspectivas son de importante consideración, al abarcar observaciones sobre un enfoque pedagógico y una metodología de enseñanza de las Matemáticas. Se trata de acompañar al estudiante en la superación de sus dificultades conservando la formalidad y rigurosidad del conocimiento matemático. Los métodos empleados para encaminarlo deben estar enmarcados hacia el reconocimiento pleno de la naturaleza abstracta de las Matemáticas.

Capitulo 4.

SISTEMATIZACIÓN DE BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

CAPITULO 4. SISTEMATIZACIÓN DE BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA A LOS DOCENTES.

Independientemente del grado de conocimiento sobre la Historia de las Matemáticas en general, es importante que el profesorado tenga una formación mínima de la Historia como disciplina, constituida con la misma rigurosidad característica de las propias Matemáticas. En la experiencia vivida y registrada en esta investigación, es evidente la poca o nula labor de consulta por parte de los docentes conllevando a respuestas que reflejan gran desconocimiento.

Dada la importancia argumentada durante todo este escrito, de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, se considera necesario recomendar al profesorado la lectura de los textos presentados en este capítulo con el fin de incentivar a la exploración de la Historia como campo de investigación que lo aproxima de mejor manera a la realidad de las Matemáticas, y sugieren metodologías o actividades didácticas que rescatan el desarrollo histórico de los logaritmos, para la experimentación en el aula de clase.

Durante el desarrollo teórico de esta investigación, mayoritariamente los documentos encontrados sobre Historia de los logaritmos estaban escritos en idioma inglés. Algunos de ellos se recomiendan en este aparte, no solo por ser textos muy enriquecedores sino también, por la necesidad de manejar otros idiomas para indagar buenas publicaciones realizadas por académicos de diversos países.

Entre la amplia literatura sobre Historia de los logaritmos, se han escogido cinco títulos a recomendar a los docentes de Educación Básica o Media, con los que pueden fundamentar sus conocimientos sobre la función logarítmica, repensar los problemas planteados en esta investigación, dar otros puntos de vista y enriquecer su enseñanza. Aquí se describe su contenido de manera general:

- **THE HISTORIAL DEVELOPMENT OF THE CALCULUS - Edwards (1979).**

Recopila los sucesos, matemáticos, conceptos y procedimientos en toda la Historia que contribuyeron al desarrollo del Cálculo. La exposición de los temas es detallada, recolecta datos de los trabajos matemáticos involucrados en cada tema, no se restringe a un relato puramente narrativo, reconstruye y explica los procedimientos originales del concepto tratado o los deduce mediante procesos y notación actual con la debida formalidad, incluso plantea ejercicios donde se aplican los procedimientos enunciados por él.

Específicamente, a los logaritmos y su introducción al Análisis le dedica dos capítulos: el capítulo 6 nombrado como *“Los maravillosos Logaritmos de Napier”* y el capítulo 10, *“La era de Euler”*.

En el primero se hace el siguiente recorrido: John Napier; La motivación original; Curiosa definición de Napier; Progresiones Aritmética y Geométrica; La introducción de los Logaritmos Comunes; Áreas Logarítmicas e Hiperbólicas; Computaciones logarítmicas de Newton; y Series de Mercator para el Logaritmo.

En el segundo: Leonhard Euler; El concepto de función; Las funciones exponencial y logarítmica de Euler; Funciones trigonométricas y expansiones de Euler; Diferenciales de funciones elementales de Euler; Interpolación e integración numérica; Series de Taylor; y Conceptos fundamentales en el siglo XVIII.

Este par de textos dan un panorama general pero explícito de la evolución histórica de los logaritmos, la función logarítmica, y su conexión con el Cálculo.

- **ANALYSIS BY ITS HISTORY - Hairer y Wanner (2008).**

Este libro se enfoca en temas concernientes al infinito. Contiene cuatro capítulos referidos al Cálculo diferencial e integral. El tratamiento se da desde el punto de vista histórico pero no maneja el estilo relato, por el contrario la gran mayoría de su escrito es netamente formal. Expone gran cantidad de conocimientos y conceptos nuevos que no aparecen comúnmente en los libros de Historia, pues éstos suelen ser más narrativos. Ilustra y explica los procedimientos ejecutados por los matemáticos en notación actual, y formula ejercicios para el lector.

Los apartados recomendados para el asunto abordado en este trabajo son: *“Teorema Binomial y Exponenciales”*, y *“Logaritmos y Áreas”*, pertenecientes al primer capítulo titulado *“Introducción al análisis del infinito”*.

En el primero se encuentra: Teorema Binomial; Aplicación de la interpolación polinomial; Exponentes negativos; Raíces cuadradas; Exponentes racionales arbitrarios; Función exponencial; Número de Euler; y Potencias de e. Éste proporciona una mirada general a las problemáticas que se tuvieron con los exponentes a lo largo del tiempo, y su resolución matemática.

En el segundo, aparece: La definición de la función logaritmo; Las bases; “La regla de oro” de Euler; Cálculo de logaritmos; Método de Briggs; Interpolación; Computación de Áreas; Área de la Hipérbola y el logaritmo natural; Series de Mercator; Series de Gregory; Cálculo de $\ln p$ para primos ≥ 3; Conexión con el número de Euler; y Potencias arbitrarias.

Se muestran procedimientos complejos realizados por matemáticos como Briggs, Fermat y Bernoulli, los cuales no se registran en Edwards. Estos son textos de mayor rigurosidad que ayudan a tener una visión complementada del desarrollo de los logaritmos y su función, con lo cual el docente puede poseer suficientes elementos para pensar en una estrategia de intervención de la Historia en clase.

Se recomienda consultarlo previa lectura de un texto narrativo sobre Historia de los logaritmos para comprender la secuencia y rigurosidad de este libro.

- **USING HISTORY TO TEACH MATHEMATICS: THE CASE OF LOGARITHMS – Panagiotou (2010).**

Es un documento que entrelaza la Historia de los logaritmos y la enseñanza de las Matemáticas. Expone minuciosamente cada aspecto relacionado con los logaritmos desde Napier hasta Euler, formulando preguntas frecuentemente hechas por los estudiantes durante su aprendizaje, proponiendo ideas, estrategias y actividades para implementar en clase, y haciendo reflexiones pedagógicas.

Empieza por reconocer una serie de dudas que generalmente se hacen los estudiantes como la justificación de la palabra Logaritmo, sus propiedades, el valor de e, por qué los logaritmos con base e son llamados naturales, etc. Afirma, si los profesores en realidad desean el aprendizaje de los logaritmos, debe seguirse la historia de su creación.

Luego de dicha introducción se desarrolla el contenido: Parte histórica de la creación de los Logaritmos (Primer acercamiento de la conversión de la multiplicación a la adición; Conversión de multiplicación a adición por comparación de la Progresión Geométrica y Aritmética; Una densa progresión geométrica; La más densa progresión geométrica); Presentación formal de la teoría (Logaritmo natural; La función exponencial e^x).

Todos los temas son manejados de manera narrativa pero con rigurosidad matemática, dando explicación desde el punto de vista numérico, geométrico y analítico, pues también se presentan las series infinitas y demás conceptos que introdujeron los logaritmos al Análisis infinitesimal. A diferencia de los dos libros anteriores, este documento explica muy detalladamente la relación entre progresiones, y la definición geométrica de Napier. Se específica mucho más los procedimientos y los motivos de utilizarlos.

El autor trata de ser fiel a los procedimientos de cada época, por lo que en algunas secciones se tornará compleja su comprensión, pero se debe a la naturaleza misma de los procesos que originaron y desarrollaron los logaritmos. Las preguntas o ideas sobre pedagogía y enseñanza suscitan una discusión al interior del lector, incentivando a contemplar una verdadera intervención de la Historia en su clase, bien sea por medio de actividades o preguntas que generen reflexiones entre los estudiantes.

- **LOS LOGARITMOS, UN ABORDAJE DESDE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS APLICACIONES ACTUALES - Abrate y Pochulu (2008).**

El documento brinda una contextualización histórica de los logaritmos, principalmente lo realizado por John Napier. A continuación presenta una forma alternativa de abordar la fase operatoria del logaritmo utilizando la tabulación de potencias con base y exponente natural. Se verifican, con los casos específicos, las propiedades de los exponentes: suma resta, y multiplicación; y las logarítmicas: suma, resta y exponente.

Un par de docentes afirmaron que la propiedad $a^0 = 1$ es la dificultad más frecuente en los estudiantes al no encontrarle sentido. De hecho, uno de ellos piensa que solo para mostrar gráficamente la razón de esa propiedad, se debe enseñar la función logarítmica. El texto propone un método intuitivo de explicación a través de un esquema paralelo de potencias y divisiones sucesivas, de base y cociente 2, deduciendo de una manera similar a la planteada en el capítulo 3 de este trabajo, el valor correspondiente.

Al observar la categoría *"Concepciones de la Historia de las Matemáticas"* (p. 117), los profesores generalmente introducen la Historia por medio de reseñas o biografías. En este documento aparece un breve cuento sobre la creación del Ajedrez y un reto matemático relacionado con la potenciación al rey de Arabia en el siglo IX, desencadenando actividades sobre Pensamiento Métrico. Este tipo de introducciones pueden ser significativas, no se enfatiza solamente en relatar un suceso histórico sino de incentivar la formación de pensamiento matemático previo del concepto a enseñar.

Parte de los interrogados desconocían las aplicaciones de la función logarítmica o afirmaban, solo se utilizaba en Cálculo. En realidad, los logaritmos surgieron como necesidad de reducir tediosas operaciones provenientes de las investigaciones en navegación y astronomía, mostrando aún su utilidad (esto constituye la red de conceptos modeladores de la rejilla analítica de la página 17). Precisamente, el texto propone varias situaciones problema como: las escalas logarítmicas, la audición humana, la destructibilidad de un terremoto, y las disoluciones químicas.

También se propone una actividad para detectar errores en el manejo algebraico de los logaritmos, y otra tipo desafío sobre interpolación lineal, conocimiento que también se puede ser parte de la red de conceptos fundamentadores en la rejilla.

- **UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LO LOGARÍTMICO: LA CONSTRUCCIÓN DE UNA RED DE MODELOS - Ferrari y Farfán (2008)**

Es un documento extraído de la tesis de Doctorado del mismo nombre. Mediante el enfoque socioepistemológico, es decir, la investigación en torno a la construcción social del conocimiento, se registra una experiencia con estudiantes de Licenciatura en Matemática donde caracterizan la covariación (relación entre las variables simultáneas de dos cantidades) de la función cuadrática y logarítmica. Insisten en la importancia de dar cuenta de las características y naturaleza particular de cada función.

Las autoras enfatizan en el tratamiento de las funciones desde la relación entre progresiones. Postulan previamente, de la covariación entre dos progresiones aritméticas resultan las funciones polinomiales, donde se encuentra la función cuadrática; y de la covariación entre las progresiones geométrica y aritmética, las funciones exponencial y logarítmica. Por ello, este texto en todo su planteamiento teórico es paralelo al hecho en el capítulo 3.

La actividad sugiere una forma de indagación y deducción de las diferencias de las funciones cuadrática y logarítmica. Primero analizan el tipo de crecimiento de la función cuadrática, y sin comunicárseles de antemano que trabajarán la función logarítmica, analizan la gráfica y logran concluir que se trata de la logarítmica, todo esto mediante la Geometría dinámica. Se contempla el análisis gráfico (traslación, expansión, rotación) y variacional de cada función, haciendo resaltar las distinciones de cada una. Estas transformaciones en el plano se abordan a través del cambio en los parámetros que multiplican o suman la función. Se identifica la problemática que tienen los estudiantes con las simetrías y la determinación de la función inversa, donde le dan varias representaciones gráficas.

A pesar que la actividad está planteada para Geometría Dinámica, podría hacerse sin necesidad de ello. Se trae a colación este aspecto debido a las limitaciones de algunos docentes para acceder a las herramientas computacionales de su institución, pero se insiste en la importancia de plantear la actividad en clase pues permite a los estudiantes analizar muchas características de la función logarítmica. De igual manera, en el documento se registran las dificultades presentadas por los estudiantes, las cuales permiten predisponer soluciones en caso que sus alumnos tengan similares situaciones.

Conclusiones.

CONCLUSIONES.

A partir de todo lo expuesto en esta investigación, se presentan las conclusiones enmarcadas en los ejes donde se hizo mayor énfasis durante el análisis: Historia de las Matemáticas, conceptos, enseñanza, condiciones institucionales y currículo.

Tomando como primer eje la Historia de las Matemáticas, puede decirse que ella permite identificar los motivos y procesos desarrolladores de la función logarítmica, justificar el sentido y la importancia de la enseñanza.

La consulta de documentos concernientes al desarrollo histórico-epistemológico de las Matemáticas, y sobre la intervención de la Historia en la enseñanza, es vital para presentar la función logarítmica resaltando sus procesos originarios que dan cuenta de su naturaleza.

La investigación visibilizó que la Historia de las Matemáticas es concebida como el retroceso en el tiempo, y las situaciones que dieron nacimiento a los conceptos matemáticos (quién, cómo cuándo, en dónde, por qué). Igualmente, como herramienta pedagógica, motivadora, cultural, y de formación de valores humanos.

Los métodos de utilización de la Historia de las Matemáticas en clase deben dotarse de significado matemático, pedagógico y cultural para el estudiante. Las anécdotas, reseñas, y retratos de los matemáticos deben visibilizar un sentido epistemológico y de potencialización del pensamiento. Aunque el profesorado reconoce la importancia de involucrar la Historia de las Matemáticas en el aula y a muchos les agrada leerla, no se utiliza permanente ni con métodos innovadores.

Otro aspecto importante, es que no precisamente se requiere de la extensión de la jornada escolar para involucrar la Historia de las Matemáticas en clase. La propuesta sugerida en esta investigación, permite involucrarla de manera alternativa en el transcurso de su enseñanza. Todo parte de la imaginación, estudio previo y disposición del maestro.

En el eje conceptual, los maestros desconocen la razón de la naturaleza de la función logarítmica: la relación entre progresiones geométrica y aritmética. Los logaritmos se estiman como un concepto dependiente de la potenciación, en su aspecto operacional. La propuesta sugerida resalta la operatividad individual de ellos, y de hecho se resalta el orden del desarrollo de los logaritmos con respecto a la potenciación, pues a partir de la logaritmación se establecieron las potencias, y solo Euler hizo una conexión entre ambas.

Pasando al eje sobre enseñanza de la función, puede decirse que la apropiación didáctica de la Historia de las Matemáticas es muy variada. En este caso, se resaltó la relación entre progresiones, los aspectos sobre pensamiento variacional y analítico, pues estos dieron vida a la función logarítmica. Además, la caracterización de esta función en sus tres facetas, permite tener una visión integral de todas sus representaciones, y una amplia comprensión de su comportamiento en cada una.

La función logarítmica posee una naturaleza particular que amerita ser enseñada detalladamente, no solo por su complejidad sino por su riqueza epistemológica. En el pensamiento variacional y analítico debe tenerse especial cuidado por la incidencia de tres cantidades variables: el argumento (variable independiente), el logaritmo (variable dependiente) y la base (parámetro).

Otra conclusión sobre lo hallado, es que los docentes reconocen la importancia de las ecuaciones logarítmicas para el pensamiento lógico y deductivo de los estudiantes, pero se abstienen de enseñarla detalladamente al percibir su inaplicabilidad en la vida cotidiana. Si bien, para los docentes es muy relevante relacionar las Matemáticas con la realidad para dotarlas de sentido ante los estudiantes, es significativo visibilizar los procesos algebraicos de complejidad que precisamente la distingue de otras ciencias.

En el eje de condiciones institucionales, la enseñanza de la función logarítmica es muy limitada a la intensidad horaria de la asignatura. Usualmente, se presenta superficialmente o se omite, al concebir su poca trascendencia en la vida práctica. En cuanto a la dotación en material didáctico, estructura física, formación pedagógica de maestros, y falta de trabajo colectivo, son aspectos descuidados en varias instituciones privadas, y abandonados en las públicas.

Sobre lo curricular, puede afirmarse que la enseñanza de la función logarítmica no se acoge estrictamente a los ciclos establecidos por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Si bien, en algunos casos se aborda en grado 9°, la presentación de todas sus características se da en la Educación Media.

Finalmente, la indagación sobre el currículo, las dificultades de los estudiantes, y las condiciones institucionales, evidencia una ruptura en todo el Sistema de Educación Nacional, un rompimiento del proceso en el currículo de Educación Primaria, Secundaria, Media y Superior.

BIBLIOGRAFÍA.

ABRATE, R. S. y POCHULU, M. D. (2007). Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de las Matemáticas y las aplicaciones actuales. En *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemáticas*, (p.p. 111 – 135). Villa María, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

BARBÍN, E. y BÉNARD, D. (2007). *Histoire et enseignement des mathématiques: rigueurs, erreurs, raisonnements*. Lyon, Francia: Editorial Institut national de recherche pédagogique INRP.

BELL, E.T. (2000). *Historia de las Matemáticas*. (2ª Ed.). México D.F., México: Fondo de Cultura Económica.

BONILLA, E. y RODRIGUEZ. P. (2008). *Más allá del dilema de los métodos: la investigación en Ciencias Sociales.* (3ra Ed.). Santa Fe de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

BOYER, C. B. (2001). *Historia de la Matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial S.A.

CAVIEDES, G., FAYAD, J., LARA, W., LOPEZ, H., y MANZANO, H. (2005). *El Maestro en la ciudad.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

CENTENO, G. y H., JIMENES, N., GONZALEZ, F., y ROBAYO, M. (1997). *Nueva Matemática Constructiva 9.* Santa Fe de Bogotá, Colombia: Libros & Libros.

EDWARDS, C.H. (1979). *The Historial Development of the Calculus.* New York Inc, United States of America: Springer – Verlag.

EVEN, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in Matematics*, *21*(6), 521 – 544.

FERRARI, M. y FARFÁN, R. M. (2008): Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 309 – 354.

GONZALES, M. T. y VARGAS, J. (2007): Segmentos de la Historia: La función logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza universitaria*, *15*(2), 129 - 144.

HAIRER, E. y WANNER, G. (2008): *Analysis by its History.* New York, United States of America: Springer.

LEIVAS, J. C. y CARNEIRO, M. T. (2010). A função logarítmica obtida por simetria da função exponencial: explorando visualização. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (3)*,* 93 - 106.

M.E.N. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Santa Fe de Bogotá, Colombia.

PANAGIOTOU, E. N. (2010). Using history to teach Mathematics: The case of Logarithms. *Sciencie & Education*, *20*(1), 1 – 35.

PONTE, J. P. (1992). The History of the concept of function and some educational implications. *Mathematics Educator*, *3*(2), 1 - 9.

SIERPINSKA A. (1992). On understanding the notion of function, IN: Harel & Dubinsky (1991).The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, Washington, DC : Mathematical Association of America, 25-58. Traducción al castellano (inédita) de Cesar Delgado.

SOCAS, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*, (pp.125 - 154). Barcelona, España: Editorial Horsori.

TAPIA, F. (2003): Historia de los logaritmos. *Apuntes de la Historia de las Matemáticas*, *2*(2), 5 - 22.

ANEXOS

ANEXOS.

Anexo 1. *CUESTIONARIO INICIAL DE LA ENTREVISTA.*

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
PROYECTO DE GRADO: ***"ELEMENTOS HISTÓRICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA"***
Por Natalia Escobar Villota
TUTOR: LUIS CARLOS ARBOLEDA
GRUPO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
ABRIL DE 2011

ENTREVISTA

La presente entrevista está dirigida a docentes de matemáticas de Educación Básica y Media, de diez instituciones educativas oficiales y privadas de la ciudad de Santiago de Cali en el marco del desarrollo del trabajo de grado: *"Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica"*.

- En su experiencia ¿Cómo ha presentado o abordado el tema de "función logarítmica"? ¿Qué recursos ha usado para introducirla, con qué concepto empieza a explicarla, cómo desarrolla y agota todo el tema?

¿Ha relacionado la función logarítmica con aplicaciones a la realidad?

¿Qué estrategias ha utilizado para que los estudiantes le comprendan?

¿Por qué ha escogido esa modalidad de enseñanza?

¿Qué tipo de actividades en clase maneja para que los estudiantes se apropien del tema?

¿Qué dificultades se le han presentado a usted como docente, en la enseñanza de esta función?

¿Qué dificultades (simbólicas, lingüísticas u operativas) nota generalmente en los estudiantes cuando ven este tema?

¿Cómo cree que los estudiantes podrían superar estas dificultades?

¿Qué conceptos previos considera que deben tener los estudiantes para entender muy bien la función logarítmica?

¿Qué considera que los estudiantes deben tener claro cuándo terminen el tema de "función logarítmica"?

- ¿Cómo entiende usted los logaritmos, si los caracterizamos como algoritmos, como función logarítmica y como objeto de manipulación en contextos algebraicos? ¿Qué opina de estos tres momentos?

¿Qué otras caracterizaciones de los logaritmos podría haber?

Para estas caracterizaciones de los logaritmos, ¿cómo cree que se deben abordar en su enseñanza? ¿Qué conceptos teóricos se aplicarían, qué rigurosidad, y cómo se podrían modelar en situaciones de la vida cotidiana?

A partir de su experiencia, ¿En cuál o cuáles de las formas anteriormente planteadas (algorítmica, función o manipulación algebraica) ha profundizado en sus clases?

En su opinión ¿Es necesario que el estudiante de educación básica aprenda a manipular algebraicamente la función logarítmica?

- Desde su experiencia, ¿Cómo podría caracterizar el momento numérico, geométrico y analítico de la función logarítmica?

¿Qué diferencia(s) se puede(n) establecer entre la función $f(x) = log_a(x)$ y la función $f(x) = \ln(x)$? ¿Cómo sería la manipulación de cada función en contextos algebraicos?

¿Cuáles serán las razones por las que, generalmente en la enseñanza, se utiliza la definición de la función logarítmica como función inversa de la función exponencial? ¿Por qué se da el énfasis en la función logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$ y la función exponencial $f(x) = e^x$?

- ¿Qué líneas o disciplinas conoce que entran en juego en la Educación Matemática?

¿Qué tipo de lectura concerniente a la Educación Matemática le gusta leer más?

¿Para usted qué es o en qué consiste la Historia de las Matemáticas?

¿Es de su agrado conocer el aspecto histórico de la Matemática? ¿Para qué podría servir conocerlo?

¿Conoce bibliografía sobre Historia de las Matemáticas o de los logaritmos específicamente? ¿Qué autores u obras conoce?

¿Tiene conocimiento de la Historia de los logaritmos o la función logarítmica? ¿O ha escuchado de los principales matemáticos que desarrollaron estos conceptos? ¿Qué conocimiento tiene al respecto?

¿Ha introducido alguna experiencia en el aula de clase a partir de su conocimiento sobre la Historia de los logaritmos o de la función logarítmica?

¿Qué tratamiento cree que se le debe dar a la Historia de las Matemáticas en el aula de clase?

¿Conocer la Historia de la función logarítmica aporta a la enseñanza? ¿Por qué?

- ¿Qué condiciones del entorno institucional influyen directamente en la enseñanza de la función logarítmica?

¿De qué manera su enseñanza de la función logarítmica está relacionada con los estándares básicos?

¿Considera que es importante profundizar en el estudio de la función logarítmica?

¿Los tiempos institucionales permiten desarrollar con suficiente profundidad el tema durante el año lectivo? ¿Qué otros factores influyen en la falta de profundización?

¿Durante el avance de los grados escolares o en otras asignaturas, se permite hacer esa profundización?

Anexo 2. *CUESTIONARIO FINAL DE LA ENTREVISTA.*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
PROYECTO DE GRADO: ***"ELEMENTOS HISTÓRICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA"***
Por Natalia Escobar Villota
TUTOR: PhD. LUIS CARLOS ARBOLEDA
GRUPO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
ABRIL DE 2011

ENTREVISTA

La presente entrevista está dirigida a docentes de matemáticas de Educación Básica y Media, de diez instituciones educativas oficiales y privadas de la ciudad de Santiago de Cali en el marco del desarrollo del trabajo de grado: *"Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica"*.

PREGUNTAS SOBRE SU EXPERIENCIA DOCENTE.

1. En su experiencia ¿Cómo ha presentado o abordado el tema de "función logarítmica"? (¿Qué recursos ha usado para introducirla, con qué concepto empieza a explicarla, cómo desarrolla y agota todo el tema?)

2. ¿Ha relacionado la función logarítmica con aplicaciones a la realidad?

3. ¿Qué estrategias ha utilizado para que los estudiantes le comprendan?

(¿Qué tipo de actividades en clase maneja para que los estudiantes se apropien del tema?)

4. ¿Por qué ha escogido esa modalidad de enseñanza?

5. ¿Ha percibido dificultades simbólicas, lingüísticas u operativas de la función en los estudiantes?

6. ¿Cómo cree que los estudiantes podrían superar estas dificultades?

7. ¿Qué conceptos previos considera que deben tener los estudiantes para entender muy bien la función logarítmica?

8. ¿Qué considera que los estudiantes deben tener claro cuándo terminen el tema de “función logarítmica”?

9. ¿Ha enseñado la función logarítmica en contextos de ecuaciones? ¿Cómo lo ha abordado?

10. Si caracterizamos los logaritmos en tres facetas: como definición básica, como función logarítmica y como objeto de manipulación en contextos algebraicos (ecuaciones), ¿habrá una diferencia en el modo de abordarlas? ¿Se tendrá que recurrir a actividades especiales para abordar una faceta particular?

11. A partir de su experiencia, ¿En cuál de las formas anteriormente planteadas (definición básica, función o manipulación algebraica) ha profundizado en sus clases?

12. En su opinión ¿Es necesario que el estudiante de educación escolar aprenda a manipular la función logarítmica en ecuaciones?

13. ¿Cómo podría describir la parte numérica y geométrica de la función logarítmica?

14. ¿Se puede establecer alguna diferencia entre la función $f(x) = log_a(x)$ y la función $f(x) = ln\,(x)$? ¿Existirá diferencia en la manipulación de cada función en contextos de ecuaciones? ¿Será más fácil manejar una que otra?

15. ¿Ha particularizado en sus clases en la función $f(x) = ln\,(x)$?

16. ¿Cuáles serán las razones por las que, generalmente en la enseñanza, se utiliza la definición de la función logarítmica como función inversa de la función exponencial?

PREGUNTAS SOBRE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.

17. ¿Acostumbra a leer artículos o libros relacionados con Educación?

18. En su opinión ¿qué es o en qué consiste la Historia de las Matemáticas?

19. ¿Es de su agrado conocer el aspecto histórico de la Matemática?

20. ¿Ha leído sobre Historia de las Matemáticas? ¿Qué autores u obras conoce?

21. ¿Tiene conocimiento de la Historia de los logaritmos o la función logarítmica, y sus precursores?

22. ¿Ha introducido alguna experiencia en el aula de clase a partir de su conocimiento sobre Historia?

23. ¿Qué tratamiento cree se le debe dar a la Historia de las Matemáticas en el aula de clase?

24. ¿Considera que conocer la Historia de la función logarítmica aporta a la enseñanza?

PREGUNTAS SOBRE LAS CONDICIONES INSTITUCIONALES.

25. ¿Qué condiciones del entorno institucional influyen directamente en la enseñanza de la función logarítmica?

26. ¿Los tiempos institucionales permiten desarrollar con suficiente profundidad el tema durante el año lectivo? ¿Qué otros factores influyen en la falta de profundización?

27. ¿De qué manera su enseñanza de la función logarítmica está relacionada con los Estándares Básicos?

28. ¿Durante el avance de los grados escolares, se permite profundizar en la función?

29. ¿Considera que es importante profundizar en el estudio de la función logarítmica en la escolaridad?

30. Generalmente, la función logarítmica se deja como última en la enseñanza de funciones ¿por qué cree que ocurre esto?

Anexo 3. *TRANSCRIPCIÓN Y RELATO DE LAS ENTREVISTAS.*

CASO 1:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Abril 6 de 2011.	**HORA:** 6: 30 a.m.	**DURACIÓN:** 1: 04: 12
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Siete de Agosto (Sede Principal).			
CARÁCTER: Oficial.	COMUNA: 7.	BARRIO: Siete de Agosto.	
ESTRATO: Dos y tres.	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 42 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Licenciado en Matemática y Física – Universidad Santiago de Cali.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: Especialista en Gerencia de Instituciones Educativas. Un semestre de Maestría en Matemática (No terminó) – Universidad del Valle.			
EXPERIENCIA LABORAL: 13 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 2 años.			
PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 2, 7, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16.			

PREÁMBULO. El colegio tiene un enfoque en la Media Técnica, para la preparación de los estudiantes al trabajo. Hacen convenios con diferentes instituciones de educación técnica y tecnológica como INTERNALCO y el SENA. El colegio ha venido participando en las Olimpiadas Matemáticas desde hace un año, y el grupo que los representa está conformado por estudiantes de 6º a 11º. Sobre la innovación pedagógica de los docentes, no hay apoyo ni de la Secretaria de Educación para la cualificación en congresos, foros, diplomados y cursos.

ENTREVISTA. El profesor aborda la función logarítmica solo al tratar Funciones desde grado 9°. Al querer abarcar todos los temas (tipos de funciones y operaciones) se descuida el énfasis en el concepto de función, dominio y rango. Le interesa que entiendan el concepto de función y lo puedan aplicar en muchos problemas. Opina, toda temática es importante si tiene aplicación en la realidad, sino se le estaría quitando espacio a otros temas que pueden ser más relevantes.

Define la función logarítmica como un caso especial de la potenciación por su familiaridad con los estudiantes, teniendo cuidado con la parte de interpretación y construcción gráfica, enseña a manejar la calculadora científica, e indica una parte de la Historia. A veces relega la función o no expone aplicaciones pues al verse esta función, se ha agotado al estudiante con mucha teoría de ésta o de otras funciones, pero retoma en grado 11° al abordar el tema de máximos, mínimos, curvatura de la función y derivadas con el fin de afianzar más el concepto; o la deja para el aprendizaje en una institución universitaria.

Los estudiantes tienen mucha dificultad en interpretar una gráfica y graficar un problema propuesto. No puede afirmar la idea esencial al culminar el tema, sin embargo, menciona los conceptos previos: función y potenciación. La primera fase de la función debería darse como *tipos especiales de ecuaciones* aclarando, más adelante y con mayores elementos de Potenciación asimilarán mejor el proceso con exponentes negativos o incógnitos. No recuerda el comportamiento numérico y geométrico de la función gracias a su falta de práctica. No puntualiza en el tratamiento del logaritmo natural por ser más complejo y desmotiva al estudiante, buscando reducir el grado de dificultad al describirla como un caso especial de ecuaciones y potenciación.

No acostumbra a documentarse sobre temas de Educación y Pedagogía para estudiantes bajo *"la ley del conformismo y el facilismo",* que son apáticos a investigar, no exigen información adicional ni preguntan al docente. Es un factor que impide la profundización.

Ha leído un poco de la Historia de las Matemáticas. La usa como *"herramienta pedagógica"* para enfatizar en la biografía de matemáticos ilustres como Gauss. Les comenta a los educandos: *"En cierta ocasión, había una vez un niño muy piloso que como aprendía las cosas tan rápido entonces molestaba mucho, entonces algunos profesores como no les gusta a los niños que molestan mucho, entonces lo puso a trabajar bastante en Matemática y lo puso a hacer esta suma… resulta que el niño salió y al poco tiempo volvió y ya lo había resuelto. ¡Uy sí!, ¿cómo se llama él, cómo se llama? (dicen los estudiantes)"*. Partiendo de esta dinámica, los anima a investigar sobre Historia a cambio de una nota adicional.

Generalmente, al empezar nuevo tema propone a los estudiantes un trabajo de consulta donde expliquen con sus propias palabras el concepto que desarrollarán, su importancia y aplicabilidad, además de introducir la lectura de reseñas históricas de los libros de texto (luego se hacen algunos aportes), biografías de personajes como Gauss, Gödel y Aurelio Baldor, o relata completamente procesos como el del sistema de numeración. Le gustaría contar en todos los salones de clase con la biografía y contribuciones de matemáticos famosos.

La Historia de las Matemáticas consiste en devolverse al origen de cada concepto. Es de su agrado, la considera cultura general y base fundamental para la motivación del estudiante y el profesor. Los estudiantes se animan al pedírseles investigar la historia de la logaritmación, pero él no ha consultado sobre ella.

Sobre las condiciones institucionales, el profesor pocas veces ha trabajado en la logaritmación debido al tiempo y dinámica de los colegios públicos como recesos académicos, actividades de la Secretaria de Educación, reuniones, asambleas y paros, por ende en sus 13 años de labor no ha logrado enseñar todo el programa. Está limitado a dar lo primordial de los Estándares Básicos para la adquisición de requisitos mínimos del grado escolar siguiente. Resalta varias veces, no es que la función logarítmica sea irrelevante, solo existen obstáculos para ahondar.

Comenta otros factores: la actitud de los estudiantes de barrios populares frente a su formación es muy pobre, influyendo la comuna y el grado de escolaridad de sus padres. No hay relación entre los contenidos del colegio y los universitarios. De todo lo visto en su carrera solo ha podido aplicar el veinte por ciento (20%) en la escolaridad. No concuerda con enseñar temas como identidades trigonométricas o factorización, pues aburren al estudiante que le gustaba la Matemática.

Dice llevar 3 años en la institución y como encargado de implementar el Sistema de Gestión de Calidad, ha solicitado al Rector y al Consejo Académico la modificación del Plan de Área, pues se está adoptando una política de calidad y debe estar al servicio de la política educativa, donde se haga un análisis profundo y los contenidos a enseñar sean aplicativos en consecuencia con la vocación técnica, revisión que según los docentes antiguos no se realiza desde hace 5 años, constituyéndose en otra falencia. Cuando fue Jefe de Departamento en un colegio público de Jamundí, articuló la Matemática desde grado cero hasta once.

Finalmente, no comparte que a sus colegas solo les interese cumplir el programa sin esforzarse enseñando, por eso desea ser Rector y cambiar aspectos que perjudican a los educandos hasta la universidad, por la diferencia de metodología empleada. También aspira a ser catedrático universitario pues a estos estudiantes les interesa un poco más su educación al tener costo económico más alto. Añade, al dirigir un grupo nuevo, hace un diagnostico y al notar los bajos resultados, se siente defraudado y triste, duda de su enseñanza y la de sus compañeros, se pregunta *“¿será que las herramientas pedagógicas son las adecuadas?”*, pero se calma un poco cuando se entera que a los demás profesores les pasa igual.

CASO 2:

<table>
<tr><th colspan="4">TABLA DE DATOS</th></tr>
<tr><td>TIPO DE CONTACTO:
Entrevista Individual.</td><td>FECHA:
Abril 6 de 2011.</td><td>HORA:
9: 30 a.m.</td><td>DURACIÓN:
30: 05 min</td></tr>
<tr><td colspan="4">INFORMACIÓN DEL LUGAR</td></tr>
<tr><td colspan="4">INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Carlos Holmes Trujillo (Sede Principal).</td></tr>
<tr><td>CARÁCTER: Oficial.</td><td>COMUNA: 16.</td><td colspan="2">BARRIO: República de Israel.</td></tr>
<tr><td>ESTRATO: Dos.</td><td>FILOSOFÍA: Neutra.</td><td colspan="2">GÉNERO: Mixto.</td></tr>
<tr><td colspan="4">INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO</td></tr>
<tr><td colspan="2">GÉNERO: Masculino.</td><td colspan="2">EDAD: 60 años.</td></tr>
<tr><td colspan="4">FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO:
Licenciado en Matemática – Universidad Santiago de Cali.</td></tr>
<tr><td colspan="4">FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: No tiene.</td></tr>
<tr><td colspan="4">EXPERIENCIA LABORAL: 40 años.</td></tr>
<tr><td colspan="4">AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 30 años.</td></tr>
<tr><td colspan="4">PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON:
1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28.</td></tr>
<tr><td colspan="4">INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER:
4, 5, 8, 13, 21, 23, 29, 30.</td></tr>
</table>

PREÁMBULO. El PEI de la institución se dirige a la preparación de los estudiantes en las pruebas ICFES para su ingreso a la universidad. Cada profesor enfatiza en la Matemática aplicativa, más no en procedimientos y teoría rigurosa. Laboran bajo guías acogidas a los Estándares Básicos y permanentemente los docentes del Área de Matemáticas interactúan, para su cumplimiento. Desde hace un año, en las *"Semanas de desarrollo institucional"*, trabajan en una reforma curricular interna definiendo la nueva orientación de la enseñanza en Matemáticas.

La institución ha participado en las Olimpiadas Matemáticas organizadas por la Universidad Autónoma de Occidente, y la Universidad del Valle, con un grupo de estudiantes de los grados 8° y 9°. A pesar del interés, los profesores no tienen espacio en la programación para capacitar a los estudiantes en dichas pruebas. No hay una política de fomento de innovación pedagógica en la institución ni por parte de las directivas. Solo se ven involucrados, cuando universidades como la Santiago de Cali y la del Valle, les convoca a charlas o seminarios.

ENTREVISTA. Según el profesor, la función logarítmica ha perdido importancia. Una de sus aplicaciones era simplificar el cálculo de números muy grandes, pero solo sirve para ejercitar las propiedades de la función cuando tiene distintas bases. Se utiliza actualmente por su derivada, para determinar derivadas de productos y cocientes de gran complejidad, y facilitar la demostración de algunos teoremas. Ha sido opacada por el surgimiento de las calculadoras, las cuales pueden realizar esos grandes cálculos numéricos, haciendo pasar a la historia la regla de cálculo.

Al iniciar el tema, presenta la definición (siendo supremamente importante), la representa geométricamente, compara con su inversa, y enseña sus propiedades algebraicas y geométricas. Realiza ejemplos para que interioricen la definición, mostrando situaciones simples, aumentando el grado de complejidad hasta generalizar. No plantea ejemplos de aplicación de la función en la vida cotidiana, solo la ve aplicable en la ciencia Matemática, especialmente en el Cálculo.

Su modalidad de enseñanza se sostiene en conferencias y talleres, resaltando la importancia de conocer los fundamentos del concepto, en este caso, saber manejar la función exponencial donde obligatoriamente se usan las propiedades de las exponenciales. La mayor dificultad percibida en su enseñanza, es la falta de formación de los docentes de Básica Primaria para la buena preparación de los niños, pues ha encontrado casos de estudiantes de 7º, 8 º y 9º sin saber sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, afectando la enseñanza en el Bachillerato. Las dificultades de los estudiantes se derivan del no tener los conceptos básicos de las propiedades de las igualdades, llevando a la creación, en casi todas las universidades, de cursos de formación básica en Matemáticas pues, a pesar de egresar del Bachillerato, desconocen los fundamentos elementales. La solución, es una mejor cualificación de los maestros de Primaria, enseñándoles a fomentar el interés de los estudiantes por las Matemáticas y las vean como algo divertido.

Entre los conceptos previos de la función logarítmica, están las propiedades de las igualdades, el manejo de las funciones exponenciales, los productos notables y la aritmética de fracciones. Al terminar el tema, deberán tener presente que en grado 11º encontrarán gran aplicación de esta función en el Cálculo Diferencial.

La función logarítmica debe enseñarse integralmente en las tres facetas a partir de la definición, con ejercicios y aplicaciones. Profundiza en la enseñanza de sus propiedades algebraicas, pues le servirán al estudiante para hallar las derivadas de complejidad. En grado 11º enseña a resolver ecuaciones con esta función, siendo muy importante y necesario para crear habilidades y destrezas.

La diferencia entre la función $f(x) = \log_a x$ y la función $g(x) = \ln x$, es su escritura. Cuando se tiene la segunda, la base es el número e, y en $f(x) = \log x$ se sobreentiende que la base es 10. Esto no influye en el manejo de ecuaciones, depende del ejercicio para aplicar una de las formas. Generalmente, la función $g(x) = \ln x$ se usa en demostraciones y ejercicios del Cálculo, mientras que la función $f(x) = \log x$ se utiliza para ejercicios y hallar valores numéricos. La función logaritmo natural facilita procesos complejos gracias a su definición.

La función logarítmica se define como inversa, para mostrarle al estudiante la bicondicionalidad con la función exponencial, donde se cumple la proposición en ambos sentidos. No concibe otra forma de conceptualizarla, pues es una definición dada y al mostrarse distintamente, el estudiante no la comprendería. Tampoco profundiza mucho en la función $g(x) = \ln x$ debido al recorte de la intensidad horaria de la asignatura. Antes contaban con 6 horas a la semana y ahora solo 3.

Todo lo existente en Ciencia y Tecnología se debe a la Matemática, sin ella no habría grandes adelantos en Medicina y otras áreas. Acostumbra a leer temas de Pedagogía, Didáctica e Historia de las Matemáticas, tratando de inculcarlos en sus estudiantes. Ha leído sobre los aportes de los griegos y los chinos, al ser relevante conocer de dónde y cómo surgieron los conceptos, además la historia encierra curiosidades interesantes. Por ejemplo, la historia de matemáticos como Gauss quien a los 5 años descubre la fórmula para sumar los términos de una progresión aritmética; Galois, dejó en una noche sus memorias, consideradas actualmente el fundamento de las ecuaciones; y Descartes quien *“por madrugar un día a dar una simple clase, se enferma y muere de una simple gripa”,* o *“como saber que por no levantarse temprano prefería que no le pagaran un salario”*.

Opina, la Historia de las Matemáticas consiste en mirar los orígenes y quiénes ayudaron a estructurar las Matemáticas. Menciona, la Geometría Euclidiana es un compendio organizado de los desarrollos griegos y las civilizaciones anteriores, pero no conoce sobre la historia de los logaritmos. La Historia de las Matemáticas sirve para culturizarse y llegar a motivar la exploración de nuevas cosas.

Interviene la Historia de las Matemáticas en el aula mediante lecturas, divulgando y promoviendo la idea de la capacidad de los jóvenes para entender y desarrollar las mismas habilidades de las personas contribuyentes a la Matemática. Lamentablemente, las concepciones de los padres de familia y los maestros de Primaria sobre las Matemáticas, al aparentarlas difíciles, crean una barrera en el aprendizaje durante el resto de la vida. Adiciona, los docentes no enseñan las aplicaciones y “trucos” de la Aritmética que pueden resolverse a través del Álgebra para fomentar el cálculo mental, e intrigar y motivar al estudiante.

Por último, los estudiantes de todas las instituciones educativas oficiales, por lo menos desde grado 9º deberían contar con calculadoras científicas para resolver problemas, y verifiquen desarrollándolos por otros métodos. Este instrumento permite calcular derivadas, hallar máximos y mínimos, entre otros, sirviendo como herramienta en la secundaria para llegar bien preparados a la universidad.

CASO 3:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Abril 11 de 2011.	**HORA:** 8: 20 a.m.	**DURACIÓN:** 31: 53 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Colegio Francisco José de Caldas.			
CARÁCTER: Privado.	COMUNA: 19.	BARRIO: Santa Isabel.	
ESTRATO: Cuatro.	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 28 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Estudiante de décimo semestre de Ingeniería Civil – Universidad del Valle.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: No tiene.			
EXPERIENCIA LABORAL: 6 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 6 años.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 2, 4, 6, 10, 15, 18, 19, 23, 24, 30.			

PREÁMBULO. El PEI del colegio solo contempla la planeación del cronograma de clases, qué se hará, los objetivos primordiales y los logros a evaluar acogiéndose a lo dispuesto por los Estándares Básicos, aunque no estima trabajo en grupo de maestros. Por el momento, los estudiantes participan en olimpiadas Matemáticas organizadas internamente más no han presenciado eventos convocados por las universidades. Señala, del tiempo que lleva laborando allí (10 meses), no conoce si hay una política o programa de innovación pedagógica para los maestros.

ENTREVISTA. El profesor aborda la función logarítmica como función contraria a la función exponencial o a la radical, teniendo el número de la base y la potencia, el resultado es el exponente. El tema no es prioritario, lo expone rápidamente pues él se encarga de la Básica Secundaria (6º a 9º) y el contenido en este ciclo es poco y muy básico. La profundización de la función se da en grado 11º o en la Educación Superior, viéndose por ejemplo, el exponente e, la recta de Euler, las aplicaciones en Economía, Ingeniería y otros campos. Por ello, el docente da la definición e indica cómo manejar cada una de las funciones.

Generalmente, ha enseñado la función en grados 5º, 6º y 7º manipulando solo bases numéricas a excepción de e, que constituye el $ln\, x$, reiterando no encuentra una aplicación de fácil asimilación para los estudiantes de estos grados. Sin embargo, la enseña con más complejidad: en 5º solo enseña la definición fundamental (inversa de la potencia), en 6º, las propiedades de suma y resta de logaritmos, y en 7º, logaritmos con números enteros.

En su modalidad de enseñanza empieza por explicar potencia y raíz cuadrada, mediante una tabla, separando cada una de sus partes: la base, el exponente y la potencia. Luego, relaciona el lugar de cada número en la estructura simbólica de la función logarítmica: *“uno coloca la base en la parte de abajo, el número chiquito en la parte del logaritmo; el resultado de la potencia es el que colocamos en el logaritmo y después del igual, el resultado, sería el exponente”*. Resalta, la función es un modo de hallar el exponente de un número si se tiene la potencia y la base.

No ha visto dificultades con este tema, pues ya conocen el proceso de la potencia y la raíz. En potenciación sí presentan confusiones: multiplican el exponente con la base, sin comprender que el exponente es el número de veces a multiplicar la base. La idea básica al acabar el tema, es la existencia de funciones alternativas para hallar distintos números, y cuándo se aplica potenciación, radicación o logaritmación según sea el caso. Ello lo utiliza para introducir las ecuaciones.

Se enfoca a enseñar la función logarítmica en ecuaciones para hallar la incógnita, más no aborda el caso de la función inmersa en un polinomio, es un tema más avanzado que requiere de las propiedades algebraicas pero le parece importante que se enseñe, pues sirve mucho al estudiante que ingrese a la universidad. Comenta, como estudiante de Bachillerato nunca le enseñaron esta función obteniendo varias dificultades en su Educación Superior.

En su metodología, escribe la ecuación con *“cuadritos”* haciendo el papel de incógnitas, con el fin rellenar los espacios. Propone este ejercicio en varios casos de posición de los “cuadritos”, para encontrar la potencia, el exponente o la base.

El programa del año lectivo para estos grados, no involucra la interpretación gráfica de la función, solo propone dar logaritmación luego de potenciación y radicación. La parte de interpretación le concierne a grado 11°. Sin embargo, describe un poco cómo la expondría: introduciría el gráfico básico, seguiría con la especificación de la variación en el eje x y el eje y, y la relación entre los números que toma la función con la ampliación o reducción de la gráfica.

Hay una diferencia completa entre las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln x$: la primera es la inversa de una potencia donde se halla el exponente, y la otra ayuda a despejar la incógnita de la recta de Euler e^x, al ser inversas. El manejo de ecuaciones en cada caso no sería problema si conocen bien los conceptos, y cuándo se aplican. Indica, los docentes deben introducir bien los conceptos, que aprendan bien el origen de cada ecuación para poderlas resolver.

Seguramente habrá otra forma de enseñar la función logarítmica pero él sigue los libros de texto, donde la presentan como inversa de la función potencia y radical. Por otro lado, al introducir un nuevo tema propone un juego o vivencia con el objetivo de familiarizar a los estudiantes con el concepto, puedan asimilarlo rápidamente, noten su significado y no piensen que la invención de conceptos no tiene razón de ser. Experiencias con los sentidos (ver y tocar el fenómeno a estudiar) como las compras en la tienda, el número de cuadrados de la tabla de ajedrez, y en la parte de potenciación, la utilización de cuadrados y cubos.

Él no acostumbra a leer textos concernientes a la Educación. Solo revisa los libros de texto al planear sus clases y para la elaboración del PEI lee el programa que publica el MEN. Tampoco ha leído sobre Historia de las Matemáticas, no conoce de matemáticos como Pitágoras. Solo ha introducido el procedimiento antiguo de multiplicación de los números romanos a través de la descomposición en unidades, decenas, centenas y unidades de mil. Conoce que la Matemática actual viene de los árabes, los primeros en introducir los números del cero al diez, desarrollándose tratados, teorías y operaciones aritméticas. No puede decir si la Historia de las Matemáticas contribuye a mejorar la enseñanza porque no la ha implementado y evaluado los resultados de su utilización, ni le parece necesaria.

Las condiciones institucionales no han impactado negativamente la enseñanza de la función logarítmica, opina es lo que se quiera aportar al estudiante o plantee el PEI, es más, podría pasarla por alto y las directivas no se enterarían. Las instituciones siempre lo han apoyado con el material requerido para sus clases. Los tiempos sí han influido en contra. A veces se profundiza en temas estimados “más importantes”, hasta el punto de suprimir función logarítmica.

Para cerrar, la significación de la enseñanza de esta función en Secundaria depende sobre todo del estudiante consiente de la utilidad del tema para su desempeño en la Educación Superior. En este caso, sí debería dársele a conocer ciertas aplicaciones y motivación, de lo contrario bastaría la parte básica para el no interesado, pues solo lo toma por ser requisito para la aprobación de la materia.

CASO 4:

<table>
<tr><th colspan="4">TABLA DE DATOS</th></tr>
<tr><td>TIPO DE CONTACTO:
Entrevista Individual.</td><td>FECHA:
Abril 13 de 2011.</td><td>HORA:
9: 00 a.m.</td><td>DURACIÓN:
01: 02: 26 min</td></tr>
<tr><td colspan="4">INFORMACIÓN DEL LUGAR</td></tr>
<tr><td colspan="4">INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Centro Etnoeducativo Antonio Maceo.</td></tr>
<tr><td>CARÁCTER: Privado.</td><td>COMUNA: 21.</td><td colspan="2">BARRIO: Pizamos.</td></tr>
<tr><td>ESTRATO: Uno.</td><td>FILOSOFÍA: Étnica.</td><td colspan="2">GÉNERO: Mixto.</td></tr>
<tr><td colspan="4">INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO</td></tr>
<tr><td colspan="2">GÉNERO: Masculino.</td><td colspan="2">EDAD: 44 años.</td></tr>
<tr><td colspan="4">FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO:
Licenciado en Matemática y Física – Universidad Santiago de Cali.</td></tr>
<tr><td colspan="4">FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO:
Especialización en Educación Matemática (no culminó) - Universidad del Valle; Cursos en Pedagogía Conceptual, y Modificabilidad Cognitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="4">EXPERIENCIA LABORAL: 20 años.</td></tr>
<tr><td colspan="4">AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 20 años.</td></tr>
<tr><td colspan="4">PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON:
1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30.</td></tr>
<tr><td colspan="4">INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER:
5, 6, 8, 9, 13, 19, 23, 26.</td></tr>
</table>

PREAMBULO. La Matemática en el PEI está muy bien planteada y organizada bajo el modelo de competencias. Sostienen reuniones constantes por áreas trabajando proyectos transversalizados. Se apoya la formación pedagógica de los maestros. Actualmente, los docentes cursan un diplomado los días sábados relacionado con pedagogías y procesos por competencias. No sabe aún si la institución ha participado en Olimpiadas Matemáticas, pero se tiene la estructura y el tiempo para preparar a los estudiantes y participar este año.

ENTREVISTA. El profesor comienza el tema con potenciación, ejemplificando cálculos dados la base y el exponente, explica qué significa cada una de estas partes e introduce las variables x e y, para hablar de la función exponencial. Jugando con el significado de las variables encuentra la función inversa, es decir, la logarítmica. Para él, esta función es la forma o símbolo de Función inversa de la exponencial, por ello muestra la relación exponencial-logarítmica y viceversa. Posteriormente, plantea ejercicios sencillos y profundiza hasta donde lo permita el nivel de los estudiantes, las competencias de los Estándares o el plan curricular del Colegio, adaptándolos y visibilizando su significado en otros campos de las Matemáticas o Ciencias, como el caso del crecimiento de una población, vinculado con la Estadística, el crecimiento de una enfermedad en una ciudad o problemas del contexto cercano. El crecimiento económico no lo verían fácil.

Entre las dificultades percibidas está la incomprensión de los estudiantes por el concepto de "función", reconocer qué está ocurriendo (situaciones de crecimiento) en una curva dada, a pesar de trazarla correctamente. La actitud de los estudiantes es otro obstáculo, pues la mayoría toma las Matemáticas como requisito fundamental más no como enriquecedoras del conocimiento, han perdido la noción de su metodología de estudio, y varios olvidan los prerrequisitos, teniendo a los docentes recordarles constantemente. Los medios virtuales también han interferido en la utilización de libros físicos para estudiar varias horas. Para superarlo, debe hacerse un acompañamiento constante en clase, buscar metodologías fáciles que incentiven el gusto por las Matemáticas y los ayude a abordar conceptos no entendidos. Es fundamental una actitud positiva de los estudiantes para asimilar rápido y mejor los conocimientos, partiendo de juicios lógicos e identificando la estructura de las Matemáticas, es decir, el enfoque.

Los conceptos previos del tema son: el concepto de función, e interpretación de gráficas, para comprender su significado. Como estrategia didáctica, lleva los problemas y gráficas en papel para facilitar la interpretación de la información, aunque depende de las cualidades del grupo para avanzar y realizar actividades variadas. Escogió esta modalidad, al ser más sencilla para los educandos.

Sobre las tres facetas de los logaritmos opina, la primera es la definición, lo que el estudiante debe entender desde el inicio además de la interpretación gráfica; y la parte algebraica, es el razonamiento lógico de las propiedades de la función, sin mostrar significado en la vida cotidiana, lo enseñaría si el PEI lo contempla. Puede explicarlas por separado pero tendrá que integrarlas. Podría graficar ecuaciones.

Ha profundizado en la primera fase y en su interpretación gráfica siendo la parte del análisis del concepto en sí, lo demás es pura estructura. La razón de definir esta función como inversa, es la estructura matemática donde se encuentran elementos recíprocos e inversos de los conceptos. Abordar funciones inversas no es fácil, interpretarlas y encontrar sus aplicaciones tampoco, por eso muchas veces solo se da el concepto, pero debe buscarse la ocasión para enseñarlas. La única diferencia entre $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln(x)$, es la base. La segunda no tiene mucha significación en la práctica pudiendo ser la razón de la evasión docente. Más bien sirve para trabajar con numéricos y hacer comparaciones.

Habitualmente, lee artículos de Educación y de contenido puramente matemático. Solo ha leído algunos textos sobre Historia de las Matemáticas. No ha leído sobre la Historia de la función logarítmica. Lee más sobre estructura de las Matemáticas y su relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes y la Historia.

La *“Historia de las Matemáticas”* son los conocimientos de años atrás hasta hoy en día. Se da en todo momento, desde la época Neolítica y Paleolítica o acciones en periodos recientes, por ejemplo, haber leído un libro hace años o leer un texto producido muchos años atrás como el de Baldor. Quien conoce la historia conoce la Matemática en sí. El educador en Matemáticas debe conocer su estructura, tener unos conocimientos mínimos de cómo surgió y de dónde viene, lo cual se puede saber a través de los textos realizados por historiadores.

En ocasiones, interviene la Historia en clase dependiendo del tema, hablando de un matemático con la poca información existente en internet o un libro. En general, todos los profesores abordan la Historia de las Matemáticas tangencialmente y estudiarla requiere dedicación. Es importante introducirla en el aula pues debe fomentar la Matemática desde la Historia, la Recreación, la Didáctica, y demás conocimientos de insumo a la enseñanza, siempre que haya espacio para hacerlo.

Por otro lado, el colegio sigue los ciclos indicados en los Estándares Básicos buscando relacionar la competencia con la realidad. Al enseñar la Matemática de forma abstracta no será comprendida. Con este esquema puede generalizar y luego particularizar en cada función o dejar algunas para el siguiente año del ciclo.

Es importante ahondar en la función logarítmica. Las competencias permiten trabajar todas las funciones y no dejarlas al final como se hacía antes. Si los libros de texto traen la secuencia: función lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, su aprendizaje es significativo, y por ello proyecta su enseñanza en ese orden. Esta función se profundiza al avanzar de grado. Para terminar, sobre el apoyo de material didáctico de las instituciones, él se restringe a la metodología más sencilla usando recursos simples como papel, aunque a veces necesite otros materiales. La filosofía étnica del colegio transversaliza todas las áreas de conocimiento, es parte del PEI, pero depende del docente cómo quiera retomarla. Él la ubicaría en lo histórico del conteo y las mediciones, enlazándolo a la Matemática actual. Aún así, las Matemáticas son las mismas aunque cambie la forma de enseñarse.

CASO 5:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Abril 15 de 2011.	**HORA:** 9: 30 a.m.	**DURACIÓN:** 01: 14: 05 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: José Holguín Garcés (Sede Principal).			
CARÁCTER: Oficial.	COMUNA: 1.	BARRIO: Terrón Colorado.	
ESTRATO: Uno.	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 49 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Licenciado en Matemática – Universidad Santiago de Cali.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: Estudiante de primer semestre de Especialización en Matemática y Tecnología – Universidad del Cauca.			
EXPERIENCIA LABORAL: 30 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 6 años.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 10, 23, 30.			

PREAMBULO. El PEI no concibe el trabajo en grupo. Propone la enseñanza tradicional y por temas. La institución permite asistir a cursos y conferencias, pero no hay apoyo económico para Congresos o programas de formación o innovación pedagógica, ni siquiera para comprar materiales didácticos. Desde el año 2010 han participado en las Olimpiadas Matemáticas organizadas por la Universidad Javeriana y San Buenaventura, con estudiantes de todo el Bachillerato.

ENTREVISTA. Comienza por el concepto "función", dado que por Matemática Articulada se lo enseña desde grado 2º de Primaria, comprendiendo la existencia de Dominio y Codominio, y la producción de un gráfico llevando las coordenadas al plano. Antes partía de los números racionales, llevaba las tablas logarítmicas *(matizas)*, las asociaba a la escritura decimal y directamente a la potenciación (vista antes), explicaba cuál era la parte entera de un logaritmo y su utilización.

Pocas veces relaciona la función con aplicaciones a la realidad. Prefiere enseñarla en grado 11° previo aprendizaje de sucesiones y el Teorema de Tales, facultando la resolución de problemas sobre todo en Biología y Química, como el proceso de subdivisión celular, el estudio de alguna enfermedad, o casos de otras ciencias.

Su estrategia de enseñanza es *"Matemática Articulada"*, instaurada por el Doctor en Matemática, Francisco Escobar, profesor de la Universidad del Cauca. Se centra en el aprendizaje a través de la Geometría, enlazando procesos desde grado 1º hasta 11º. Realiza gráficas, traslaciones, rotaciones, etc. y se plasma al Álgebra. La escogió por su relación con la Historia. Para las actividades, usa materiales como cartulina, piolas de colores para las gráficas, y recortes de figuras para hacerlas en el plano, como las de las funciones lineal y trigonométricas.

Caracteriza las dificultades de la enseñanza en: *factores externos, administrativas* y *académicas*. Las primeras se refieren a la cantidad de estudiantes por salón (40) impidiendo la atención a todos; el estrato, el nivel de escolaridad de los padres de familia, y la condición de desplazamiento, factores complicados de sobrellevar. Sobre la parte académica, en primer lugar, los docentes de Primaria tienen varias debilidades. Aún afirman: *"que si uno no suma por la derecha, no puede sumar"* o *"que en la división, se hace la resta en el aire"*. No enseñan el esquema real de división empleado por los babilonios. Los jóvenes llegan mal preparados y él debe cambiar esos paradigmas. Si al profesor de Primaria *"le fue mal"* en Matemáticas, no la enseña o lo hace inadecuadamente, siendo inexpertos en el tema.

Segundo: no hay planes ni directrices coherentes con los procesos de enseñanza de ninguna ciencia en las instituciones. Al contar con autonomía, no los cumplen ni los exigen duraderos, constantemente cambian de profesor, por tanto todo será un fracaso. Si el docente desea un proceso, le toca imponerlo como en su caso: él se encarga de 6° a 11°, y aunque los educandos tengan debilidades, los corrige en el tiempo. Un estudiante habituado a otra metodología *"sufre"* con él al desconocer conceptos. El 80% de trabajo es del educando y el 20% del profesor, contrario a la tradicional sin aplicación en la vida real. La vida real en Matemática es, en general, la Geometría, todo puede demostrarse con ella, hasta los logaritmos.

La principal dificultad de los estudiantes en la potenciación es entender ¿por qué un número elevado a la cero da uno? Solo para demostrarlo de manera gráfica se debe enseñar la función logarítmica. La solución sería no seguir enseñando por temas al no constituir un proceso y fomentar una enseñanza deficiente.

Él busca fortalecer la identificación de cuál parte de la potencia encontrar. La logaritmación no debería llamarse así sino *exponenciación* pues se desea calcular el exponente. Como conceptos previos se necesitan: la ubicación de puntos en el plano y la Potenciación. Al culminar el tema, deben entenderla como una función especial empleada en la vida diaria, la Ciencia y la Tecnología. Usualmente no enseña la función en ecuaciones, le gusta más la segunda fase. Este concepto se ajusta a la idea humana *hacer-obtener*, si la función se aplica se obtiene un resultado, arroja conclusiones y tendrá utilidad en la vida. Si la función se da en ecuaciones, se pierde el contexto de lo qué es función.

La parte geométrica de la función corresponde a su gráfica en el plano cartesiano o hacen su molde en cartulina, estudian su movimiento en el espacio, la razón del Dominio positivo y otras características de la función, o la similitud con objetos como una campana. Por el lado numérico (lo llama *algebraico* al involucrar números x, y) tabula los números e indica cómo hallar el Codominio.

La diferencia entre $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln(x)$ es la base. Muestra qué sucede si la base es 10 ó a y compara. Él puntualiza en la función $g(x) = \ln(x)$ para explicar la conversión de bases logarítmicas con las propiedades, pasar de base a a 10. Hay que suministrar todo lo concerniente a esta Función. La manipulación en ecuaciones sería por la aplicación de las leyes, mostrando que el logaritmo natural toma diferentes formas y caminos para hallar el exponente. Adiciona, evita involucrar procedimientos algebraicos no manejados por los estudiantes.

En Matemática Articulada es más fácil definir la función logarítmica como inversa, porque los estudiantes tienen fortaleza en el concepto de potencia. Desde grado 1º aprenden la descomposición de factores en suma de productos de base 10 ayudando al proceso de conversión de bases numéricas distintas.

De otro lado, le gusta leer sobre Pedagogía y Desarrollo cerebral, al Dr. Llinas, Vigostky, Inés Agüerrondo, los Uribia, quienes son buenos maestros y pedagogos. En clase, mínimamente el 30% la dedica a leer, analizar e interpretar gráficos de artículos científicos, seguido del desarrollo algebraico y numérico.

La Historia de las Matemáticas consiste en saber quiénes, cómo, cuándo y para qué la hicieron. Entender *cómo la hicieron* y los métodos de prueba, ayuda en la forma de enseñar. El *para qué la hicieron*, indica que lo desarrollado tiene un objetivo, qué parte y cómo interpretaban la naturaleza, cómo influye para usarla y vivir mejor. *"Por ejemplo, cuando Newton construyó el Cálculo, cómo hizo para interpretar eso del mundo real... para llevarlo a las expresiones algebraicas que conocemos. Pero eso para él tenía un objetivo, que era la transformación… de su pensamiento como ser humano y la transformación del mundo real, entonces ahí apareció… los principios de las máquinas. Lo mismo que podemos hacer con la Segunda Ley de la Termodinámica en Física, ellos la construyeron para arreglar las leyes de la naturaleza, tenían un para qué la hacían, y el momento histórico es cómo se confluyen tantas cosas para que eso se dé en un sitio y no en otro…"*

Le agrada leer Historia de las Matemáticas, sobretodo Euclides denominándolo *"el Maestro de Maestros"*. Está leyendo el libro *"Dios creó los números"*, recopilación de los 17 grandes matemáticos de la Historia y sus aportes. También le maravillan las obras de Poncairé. Actualmente, lee textos en inglés al ser deficiente la traducción hecha por españoles, deforman el significado. No ha leído la Historia de los logaritmos, poco se escribe de ella, pero hoy en día se encuentra fácilmente en internet. Tampoco conoce de sus principales contribuyentes pero considera su trabajo muy válido. Son los maestros de la Matemática y tenemos que imitarlos.

Le atrae más leer Geometría: es muy descuidada en nuestra educación, mientras en el resto del mundo es un conocimiento básico. No ha introducido la Historia en clase, comenta algunos aspectos de sucesiones, sumatorias u otros importantes para el desarrollo de las Ciencias y de mucha aplicabilidad a su alrededor.

Sin embargo, considera significativo tratarla en el aula porque ocasiona el gusto del estudiante por las Matemáticas, sabrá *"de dónde viene y para donde va"*, quién fue la primera persona que desarrolló el concepto, por qué y cómo lo hizo, en qué museo están los escritos originales, qué dicen y en qué idioma. Les explica historias de agrado no muy confusas en el contenido matemático. La Matemática se vuelve "tediosa" si: 1. No se le ve sentido; 2. Se da información contradictoria; 3. Se adoptan prácticas del Catolicismo discernientes a la naturaleza matemática.

Para materiales o logística se requiere del aporte del padre de familia, pero no tienen disposición si no ven relación a la dinámica del colegio. Hay baja intensidad horaria: 3 horas para Matemática y 3 para Física. A veces le toca enunciar temas sin poder evaluarlos. El PEI está mal elaborado, no enfatiza en la enseñanza de las Ciencias básicas conduciendo a la mala formación para estudiar una carrera. Su inspiración son 4 ó 5 estudiantes dedicados, y trata que los demás se adhieran.

Su enseñanza sobrepasa los Estándares Básicos, más no se ajusta a los ciclos. No puede profundizar al avanzar la escolaridad pues solo enseña esta función en grado 11° y para hacerlo se necesitan bases muy sólidas en potenciación, funciones y ecuaciones. Opina, la enseñanza de la función y las ecuaciones logarítmicas es secundaria, al no tener aplicación inmediata, por eso basta ofrecer su información y características. Es más pertinente ahondar, en carreras como Genética, Química, Matemática o Física en donde sea necesaria para su práctica.

CASO 6:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Abril 27 de 2011.	**HORA:** 9: 15 a.m.	**DURACIÓN:** 48: 10 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Colegio Benalcazar.			
CARÁCTER: Privado.	COMUNA: 2.	BARRIO: Santa Teresita.	
ESTRATO: Cinco y seis.	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Femenino.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 65 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Licenciado en Matemática – Universidad del Valle.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: Especialización en Informática Educativa.			
EXPERIENCIA LABORAL: 40 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 40 años.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 6, 10, 11, 13, 17, 18, 23, 26, 30.			

PREAMBULO. El PEI busca formar mujeres con valores, sentido crítico y habilidades. No contempla el trabajo en equipo entre docentes. La planeación de contenidos y logros se realiza con la Coordinadora Académica y en ocasiones, los profesores de Matemática discuten informalmente un tema particular. Tres veces al año realizan Seminarios de Pedagogía y asuntos educativos. Cuando es necesario, los educadores hacen diplomados, como el más reciente en *Lectores Competentes*. Participan en las Olimpiadas de Matemáticas desde hace 15 años, realizadas en Bogotá. Han estado en las de la Universidad Antonio Nariño, la Javeriana y las organizadas por la Universidad del Valle en los últimos 4 años.

ENTREVISTA. Inicia con “Relaciones”, describe la función $f(x) = \log_a x$, qué significan esos parámetros, los logaritmos utilizados en la práctica: el neperiano y el general. Uno de los pilares del plan de Matemáticas en el colegio, es la modelación de los contenidos. Busca que las estudiantes reconozcan cuándo emplear cada función. En grado 9° se empieza a estudiar esta función, se profundiza en grado 10°, sobretodo en aplicaciones para el uso en Química y Física, y en 11° se retoma con límites y derivadas. Se interpreta fenómenos del comportamiento de la vida media de un ser vivo o elemento, hallar la función que describe el cambio de temperatura de un objeto, la ley del decaimiento, situaciones modeladas con la función exponencial. Igual con la logarítmica, en el caso del pH de las soluciones químicas, problemas financieros de capital e interés.

Una buena herramienta disponible en cada salón es la computacional, las estudiantes tienen su propio ordenador permitiendo agilizar la enseñanza de las variaciones gráficas al cambiar de base, analizar por qué la gráfica siempre se extiende hacia la derecha, por qué su dominio se define para los números positivos, cuál es el rango de la función, si la base es mayor que 1 entonces las gráficas son crecientes, si la base está entre 0 y 1 la gráfica decrece, compara gráficas en un mismo plano, sin dedicar clases enteras a tabular y dibujar en el tablero como antes; examinan las características de cada función con todo lo discutido en grado 9°: continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, máximo continuo, máximo absoluto, y asíntotas, sin el rigor del Cálculo. Ven si la pendiente es negativa la función decrece, su inyectividad, qué significan los puntos de corte, si el Teorema Fundamental del Álgebra dice que una función de grado n tiene n cortes ¿qué pasa si no los tiene? Así lo planteó en una experiencia: graficó una función de grado 5 mostrando solo tres cortes.

Esta modalidad de enseñanza es una forma rápida de conceptualizar varios aspectos de las funciones tratados usualmente con conocimientos de Cálculo que en este grado escolar no se desarrollan. Afirma, así debe enseñarse hoy en día. No ha percibido dificultades con la función logarítmica, pues al empezar el tema hace un repaso de la parte aritmética: al calcular la potencia de un número si no se conoce el exponente, se halla con el logaritmo. Esta función es una forma de escribir que hay que calcular el exponente, como la radicación es hallar la base.

Para que las estudiantes entiendan cualquier función, deben saber el concepto de relación, dominio, rango, las transformaciones de las gráficas en el plano, desplazamientos y contracciones, tener buenos cimientos en Álgebra. Al culminar, el objetivo es pensar en su utilidad para resolver problemas en varios campos. No podrían explicar una serie de fenómenos si no conocen las funciones.

Enseña la función logarítmica inmersa en ecuaciones con logaritmos y otras funciones, resolviéndolas con los puntos de corte mostrados virtualmente por la grafica, pues implican un proceso muy complejo de resolución que inclusive, en épocas anteriores fue muy difícil para los matemáticos. Las computadoras sirven para resolver problemas que no resisten procesos algebraicos.

No nota dificultades comparativas al abordar las facetas de la función logarítmica, pues al tener buenos fundamentos para resolver las situaciones, los obstáculos disminuyen. Las ecuaciones deben trabajarse mucho en su manipulación: utilizar las propiedades para convertirlas en una ecuación simple, verificar el dominio positivo e identificar cuándo se utilizan procesos algebraicos de otras funciones, como usar la ecuación cuadrática. Basta enfatizar en las ecuaciones de grado 1 y 2 para manejar otro tipo de ecuaciones. Es importante enseñar la función logarítmica en ecuaciones, sino la estudiante tendrá muchas dificultades, sobretodo en el aprendizaje del Cálculo.

Debe entenderse la parte numérica para saber las implicaciones en la función gráficamente: concavidad, expansión, traslación. Va de lo general a lo particular. Es necesario puntualizar en la función logaritmo natural pues las aplicaciones se manejan con ella. La función general y natural, tienen las mismas características. La inversalidad de las funciones es algo ya dado, y se muestra con el concepto "Función compuesta": si el resultado es la función identidad, entonces la logarítmica y exponencial son inversas entre sí. Gráficamente, al trazar la recta $y = x$ se encuentra una simetría, viendo la relación *"que dada la una, ya tiene la otra".* Para poder enseñar esta función debe tener en cuenta muchos conceptos.

Lee muy poco de Historia de las Matemáticas, tangencialmente lo escrito en textos escolares. A través de lecturas en clase comenta experiencias muy básicas y sobresalientes como la vida de Pitágoras. Generalmente no usa la Historia. Desconoce de los pioneros de la función logarítmica, no tiene la costumbre de regresar sobre lo sucedido con este concepto, quién lo trabajó, cómo lo hizo, etc.

Si no existiera la Historia, no se tendría todo lo obtenido hoy en Matemática. Siempre han existido grupos trabajando al respecto y a eso se debe el avance de la Matemática. Para él es agradable conocer la Historia de la Matemática. Cuando era estudiante de Licenciatura leyó cinco tomos de Historia, donde supo cómo los antiguos resolvían una ecuación $2x = 10$, un problema muy grande en esa época. Es importante visibilizar el beneficio para la humanidad y la posibilidad de estudiar fenómenos por el desarrollo histórico de cierto principio. No es tan oportuno involucrar la Historia en clase, pues las personas que no van a estudiar ese campo no se interesan. Conocer la Historia de la función no aporta nada a la enseñanza.

La institución está presta para cualquier actividad solo si ayuda al desarrollo de las temáticas. Su enseñanza es acorde a los Estándares Básicos pero los tiempos son relativos porque depende del grupo de estudiantes a cargo; el trabajo que quiera hacer; o el énfasis en ciertos temas "suficientes" para que la estudiante pueda abordar otros relacionados.

CASO 7:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Mayo 2 de 2011.	**HORA:** 2: 00 p.m.	**DURACIÓN:** 45: 12 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Álvaro Echeverri Perea (Sede Principal).			
CARÁCTER: Oficial.	COMUNA: 18.	BARRIO: Meléndez.	
ESTRATO: Dos y tres.	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Femenino.		EDAD: 42 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Licenciada en Matemática – Universidad Santiago de Cali.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: Especialización en Educación Matemática – Universidad Autónoma; Actualmente cursa segundo semestre de Maestría en Educación Superior - Universidad Santiago de Cali.			
EXPERIENCIA LABORAL: 25 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 10 años.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 10, 15, 23.			

PREAMBULO. El PEI propone *“la formación de pensamiento matemático potenciando las operaciones intelectuales”*. Se articula el trabajo en reuniones semanales de docentes del Área de Matemáticas. Tienen certificado de calidad. Han asistido a las capacitaciones de la Universidad del Valle. Participan de las Olimpiadas Matemáticas desde 2006 con estudiantes de todo el Bachillerato.

ENTREVISTA. Como la función logarítmica es parte de “Funciones”, conceptualiza qué es y cuáles son sus características, dedicando mucho tiempo. Repasa potenciación, muestra la operación logarítmica, la define, la representa como función, trabaja las variables, la constante, delimita los valores de x, del gráfico, cómo es el rango, sus variaciones y las traslaciones, identificando así el comportamiento de la función, y la aplica en problemas concernientes a tasas de interés (sobretodo), investigaciones científicas o situaciones recientes.

Su única modalidad de enseñanza en los grados a cargo (10º y 11º), consiste en la escritura intensiva de los estudiantes, ejercitación en el tablero y la profesora como verificadora del proceso. Esta metodología no es 100% tradicionalista donde solamente habla la maestra, más bien es mediadora. Con su orientación busca la interiorización de los conceptos en los estudiantes, los reescriban diciendo qué y cómo lo hicieron. Al salir al tablero les pide argumentar cómo están desarrollando el ejercicio, permaneciendo muy pendiente a la opinión de un estudiante o corregir alguna idea errónea. No coloca talleres para calificar o dedicarse a otra actividad. Realiza talleres en clase cuyas horas considera sagradas.

Ha escogido esta modalidad de enseñanza al percibir buenos resultados, además a los estudiantes les atrae pues *"es como colocar retos, de que ellos pueden y no que el profesor lo sabe todo"*. Cuando ellos escriben tienen confianza para preguntar aunque tengan errores, aclaran dudas, no les da miedo equivocarse, gran problema de los estudiantes creyendo que el docente en todo instante los fiscaliza y recalca lo negativo. Con este método, quien trabaje permanentemente, alcanza logros. A ella no le reprueban muchos estudiantes. La gran mayoría logran un nivel básico, y muchos alcanzan un nivel sobresaliente.

Otra actividad, es una guía enfocada a la unidad de Historia siendo importante resaltar qué pasó en y con el concepto, y deja una consulta de los términos. Ello para *"ambientar"*, entrar a la formalidad y así se va creando un interés. Utiliza libros y ejercicios variados para avanzar de nivel dependiendo del empeño de cada estudiante. Además, siempre plantea problemas tipo Olimpiadas debido a su responsabilidad en liderar la preparación en estas competencias en el colegio.

Ha percibido dificultades en los estudiantes: se asombran al escuchar la palabra "logaritmo" pero luego ven su fácil proceder; les incomoda ver una incógnita como exponente, por ello muestra el uso de las propiedades para despejar, causando también dificultad al ser un lenguaje relativamente nuevo para ellos. Esto podría corregirse si los maestros trabajaran bien los conceptos y propiedades en relación con los ejercicios propuestos, trabajaran los algoritmos, el vocabulario, fueran más cuidadosos con ciertos términos, por ejemplo, *"la operación "pasar" no existe"*; definieran las variables, dieran un orden. Al plantear ejercicios de resolución mecánica producen falencias repercutiendo en grados 10°-11° o en la Universidad.

Como conocimientos previos: el concepto de función, potenciación, logaritmos y sus propiedades. Al culminar, debieron aprender el concepto de variación, qué significa la función logarítmica y qué representa la delimitación de sus variables. Ella ha introducido la función en ecuaciones, solo requiere aplicar las propiedades. Profundiza en la fase 2 y 3 de la función, las cuales se relacionan pues a partir de su definición y gráfica, resulta una expresión algebraica por comprender. Si dado un problema, el estudiante lo entiende, lo interpreta, plantea la ecuación pero no puede resolverla, el proceso queda incompleto.

La importancia del aprendizaje de la función logarítmica en ecuaciones es relativa. Si es para el ICFES, no es necesario, pero para el desempeño en la universidad, sí. Para colegios oficiales basta dar conocimientos básicos. Daría más elementos a aquellos interesados en una carrera diferente a las administrativas. Mientras, en un colegio privado se los prepara más porque aspiran a carreras de alto contenido matemático, como las ingenierías. Sin embargo, como maestra universitaria de Cálculo I, ha repasado todos estos aspectos de las funciones a los estudiantes.

Caracterizando la función logarítmica en su parte numérica, señala la definición, análisis de la variable, la parte algebraica, los algoritmos y procedimientos. La parte geométrica da una ubicación, un plano y unas coordenadas aclarando quién es x e y. Luego la relaciona con la función exponencial por ser su función inversa.

No hay diferencia entre la función $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln(x)$, pues $\ln(x)$ es $f(x)$ con base e, se delimita la base. Los estudiantes al ver "$\ln(x)$", preguntan qué es, pero al escribir $\log_e x$ no tienen problema. Previamente debe explicarse el número e (al ser otra dificultad), dedicarle más tiempo y manejar la calculadora, pues cuando se ven Números Irracionales no se le dedica tal atención. La manipulación en ecuaciones no cambia. Interesa mirar cómo se restringe el dominio y el rango. Luego de afrontar el *"choque conceptual"* de los estudiantes con $g(x) = \ln(x)$, lo siguiente es más sencillo. La dificultad con la forma general puede deberse a las bases y la limitación de las variables.

Generalmente se define la función logarítmica como inversa de la exponencial, por la permanente asociación entre las operaciones: multiplicación-división, suma-resta, números positivos con los negativos, etc. Esa inversalidad se establece por las propiedades de los números, la definición de Grupo.

Le inquieta mucho leer sobre Educación. Saber el impacto en el currículo de Secundaria debido a la reforma a la Ley 30 de Educación Superior, cómo "evolucionan" los conceptos, cómo abordar a los estudiantes, y cómo ellos conceptualizan mejor. Busca sean reflexivos y críticos, argumenten los procesos y cuestionen por qué, qué pasó, cómo, dónde lo aplicó. Se apoya en la "*Modificabilidad cognitiva"* de Reuven Feuerstein, y lee a Vigostky y a Piaget.

Sobre Historia de las Matemáticas consulta la enciclopedia de Matemáticas Sigma. La palabra Historia la remite a varios factores: pensamientos, sociedad, economía. Con ella busca saber qué pasó con el concepto, quién fue su pionero y qué necesidad hubo para su surgimiento. Le agrada conocer este aspecto, le atrae retroceder en el tiempo, aunque conozca poco: "*cada vez que uno lee se da cuenta que hay que leer mucho más",* se siente carente a pesar de dedicar media o una hora de clase -siendo muy poco- al empezar la unidad, a través de investigaciones sobre el origen y desarrolladores del concepto, lecturas breves de los textos o transcritas a una guía. Muestra cómo el hombre al empezar a contar y organizar comenzó la Historia de las Matemáticas, sin alejarlos mucho del tema de clase. No conoce la Historia de los logaritmos ni sus contribuyentes.

Conocer la Historia de las Matemáticas aporta a la enseñanza porque ayuda al estudiante en la ubicación e interés, a reducir procesos, valorar lo hecho, no juzgar a otro por no entender un concepto, pues para avanzar alguien dedicó mucho tiempo, escribió, dejó sus papiros y luego otra persona prosiguió su trabajo. En ocasiones comenta a los estudiantes, que para realizar el procedimiento que actualmente hacen en 20 min., pasaron siglos de desarrollo y evolución de los conceptos. Por eso hace recorridos históricos como el de Trigonometría o de Cantor, y se hacen discusiones enriquecedoras a partir del interés generado.

La institución no influye en la enseñanza de la función logarítmica. La da desde el énfasis curricular comercial. El tiempo es insuficiente para profundizar en la función, es una limitante. Implica decantar conceptos así requieran dedicación. Desafortunadamente cumple con un plan, pero trata de hacer lo mejor posible. Tiene la ventaja de enseñar en grado 6°, 10° y 11° permitiéndole retomar en éstos. Los programas están muy cargados de contenido matemático y no de formación matemática, esencial para la construcción del pensamiento, contenidos que toca repasarlos en la universidad, lo cual indica que algo está fallando en el proceso.

Otros aspectos que afectan: la necesidad de conceptualizarla mejor con conceptos previos fortalecidos; no se trabaja en la abstracción o clasificación, compromiso no solo del docente de Matemáticas sino de todos los educadores de Bachillerato. Su enseñanza está relacionada con los Estándares Básicos para los grados 10° y 11°. En 10° la muestra solo si no la vieron en 9°, pero el tema central es Trigonometría; y en 11° estudian todas sus características y diferentes contextos.

La función logarítmica se relega al no dársele importancia, el docente prioriza el cumplimiento de un programa y generalmente, en el currículo se *“deja de relleno”*. Ella también la relegaba pero la ha venido retomando últimamente. Como maestra de grados superiores pide: si en grado 9° se enfatiza en la función lineal y cuadrática, se enseñen bien y los estudiantes las manejen o aprendan el concepto de función, para reducir su complejidad al clasificar funciones.

CASO 8:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Mayo10 de 2011.	**HORA:** 6: 30 p.m.	**DURACIÓN:** 01: 09: 04 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Colegio San Alberto Magno.			
CARÁCTER: Privado.	COMUNA: 9.	BARRIO: Junín.	
ESTRATO: Tres.	FILOSOFÍA: Católica.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 36 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Licenciado en Matemática y Física – Universidad del Valle.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: Ninguna. En planes.			
EXPERIENCIA LABORAL: 3 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 1 año.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 10, 11.			

PREAMBULO. El profesor desconoce el PEI, no se lo han entregado. Es libre para diseñar su Plan de Aula con temas trazados por la institución. Interesa más el comportamiento ético y con valores de los estudiantes, que los conocimientos disciplinares. Con acuerdos verbales, los docentes de Matemáticas coordinan los temas y el desempeño de los estudiantes, necesarios para cumplir sus Planes de Aula, también, docentes de las demás áreas sugieren actividades para visibilizar la relación entre sus disciplinas y su utilidad.

Como el docente es nuevo, solo sabe de la participación en las Olimpiadas Matemáticas del Colegio Fray Damián. La institución es flexible en dar permisos para la asistencia a cursos formativos. Hace poco los profesores acudieron a un seminario ofrecido por el CECEP para educadores de todas las áreas, consistente en el diseño de Planes de Aula, diligencia de documentos, entre otros.

ENTREVISTA. Él parte con enseñar la función exponencial, escoge un número, lo repite varias veces, y al número de repeticiones lo llama x. No tarda en pasar de lo intuitivo a la definición. Luego, grafica, explica por qué es creciente, analizan su comportamiento con exponentes naturales, enteros y racionales, cómo se hallan los ceros, y se introducen las propiedades de los logaritmos naturales. No ha planteado problemas de aplicación a la realidad. Una vez, resolvió una situación relacionada con los saltos de una pulga, pero no le vio relevancia al problema.

No ha leído investigaciones sobre cómo enseñar, pero aprendió su modalidad en la universidad: sitúa a los educandos en la resolución de problemas básicos con conocimientos previos, y establece el concepto. Al llenarlos de confianza con lo aprendido, es menos difícil pasar a una etapa avanzada. En cambio, si se plantea la definición de inmediato, no tienen oportunidad de cuestionarse.

Ha tenido problemas con la explicación de las propiedades de los logaritmos, preguntan por qué $\log_a(a \times b) = \log_a a + \log_a b$, les extraña ver una variable como exponente y más, poderla *"bajar"* con el logaritmo natural. Aunque hace pequeñas demostraciones, no se convencen, siempre esperan una regla a seguir e insisten, por ejemplo en: $\log_a(a \times b) = \log_a a \times \log_a b$. También les causa duda $a^0 = 1$ y les parece mágico el procedimiento: $\log_y(y^n) = n$. Esto sucede al incomprender las demostraciones o epistemología (dónde y cómo nació el concepto), para lo que usualmente no se tiene tiempo. La Educación debería servir para cuestionar.

Superar estas dificultades requiere mucho tiempo para ahondar en temas interesantes y conceptos epistemológicos de las Matemáticas: cómo se originó, quién y cómo lo pensó, qué hizo. En clase mostraría la forma como fue construido el concepto, al final diría quién lo hizo así, y daría referencias bibliográficas.

Como conceptos previos: potenciación, el concepto de variable dependiente e independiente, tabular y manejar el plano cartesiano. Agrega, debería enseñarse completitud, densidad de los números y de los puntos de una línea, supremo, valor máximo y mínimo, infinitos, el sucesor de una función, Continuidad en mayor nivel. Al finalizar el tema, deben saber qué es una variable dependiente e independiente, una función, el tipo de variación en cada valor reemplazado, y al graficar, recordar la existencia de infinitos números entre dos enteros, noción inconcebida por ellos.

Ha enseñado la función en ecuaciones en grado 10°, aplicando la inversalidad de $f(x) = \ln(x)$ con $g(x) = e^x$, y las propiedades logarítmicas cuando la incógnita es el exponente, tema relevante para su aprendizaje, y relacionarla con la inversa. Es importante la enseñanza de esta función en ecuaciones, pero el inconveniente para ahondar es el tiempo. Al estar a cargo de seis grupos (3º a 6º, 10º, 11º), en ocasiones no puede preparar clase, aún así debe sostener el nivel del Colegio enseñando en promedio, 5 horas semanales por grado. A veces no se muestran conceptos, sino objetos. La epistemología es relevante enseñarla, aunque en la universidad poco se imparte. Los docentes egresan mal preparados.

El momento numérico de la función logarítmica, es la tabulación y cambios de la variable independiente y la dependiente; el geométrico, la exposición de la parte algebraica en un plano. La diferencia entre la forma general de la función logarítmica y la natural, es que la última tiene base e de Euler, cuyo número es aproximado por una sucesión infinita. La resolución de ecuaciones es más sencilla con la función natural, pues ya saben que se trata del número e y lo manipulan fácilmente con la calculadora. Cuando la base del logaritmo es un $a \in R$, parece darles dificultad al no lograr hacer la relación con la función exponencial. Se muestra la función logarítmica como inversa de la exponencial porque $\ln(e^x) = x$, como sucede con la operación inversa $(\sqrt{x})^2 = x$, mostrándola como una pequeña demostración y herramienta para resolver ecuaciones.

Actualmente no lee artículos sobre Educación por falta de tiempo, lo hacía cuando era estudiante. Solo está leyendo una serie de *libritos* de Educación Secundaria y Procesos educativos, con poca matemática. La Historia de las Matemáticas *"es un compendio de sucesos que ocurrieron en la historia que modelaron las Matemáticas que vemos hoy en día. Los progresos, cada paso, cada momento en que depronto los matemáticos se frenaron y a través de sus propios estudios ellos trascendieron sobre los problemas y todo ese tipo de registros… epistemología, naturaleza"*. Leyó Historia al investigar el concepto de Topología, partituras de Dedekin y otros. También consultó el libro *"Historia de las Matemáticas",* además para diferenciar el significado entre *La Topología* y *Topología*.

Le agrada conocer el aspecto histórico de las Matemáticas pues sin naturaleza y epistemología no hay nada. El educador actual está maniatado a tiempos y espacios a cumplir. No recuerda haber leído sobre Historia de los logaritmos, ni de sus precursores. Alguna vez leyó sobre las variaciones infinitas de la sucesión de Euler, cuando en su momento le interesó. Nunca ha introducido una experiencia a partir de la Historia. Recuerda, recreó el proceso de la cuadratura del círculo con niños de 3°, a través de la construcción sucesiva de polígonos.

La Historia de las Matemáticas podría introducirse en clase a través de una actividad didáctica donde los estudiantes apliquen sus conocimientos previos, para instaurar el concepto de función logarítmica, indicarles la forma desarrollada por los matemáticos, se ubicarían en un contexto, no estarían al frente de un tablero asumiendo todo lo que el docente diga, sino pensando en cuál fue su estrategia para mostrarlo. Sería muy significativo.

Entre los obstáculos institucionales influyentes en la enseñanza de la función logarítmica, puede reconocer: 1. Él ya no recuerda las bases históricas; 2. El tiempo es muy reducido para cumplir con muchos contenidos; 3. Hay mal manejo de las tecnologías. Sería bueno poder trabajar con computadores y un programa, se podría avanzar y visualizar las funciones luego de exponer su parte algebraica.

Al abordar la función logarítmica, los estudiantes desarrollan Pensamiento Variacional y Métrico al observar el cambio en las variables y el crecimiento de la función; y Pensamiento Geométrico, porque siempre están esperando ver el gráfico o saber cómo hacerlo. Su enseñanza se acerca un poco a los objetivos de los Estándares Básicos. Los considera demasiado exigentes por ser copiados de los franceses y españoles, siendo casi imposible lograr lo estipulado.

Es importante profundizar en esta función, sobre todo al utilizarse la función $f(x) = e^x$. Todo lo que permita avanzar al estudiante a adquirir bases es significativo, por ello los profesores deben gozar de un nivel más alto y de tiempo para realizar actividades especiales para el mejor tratamiento de los conceptos.

En grado 10° se enseñan las propiedades de la función logarítmica y su utilidad para resolver ecuaciones. En grado 11°, se repasan sus características básicas (por la presentación del ICFES) y se detiene un poco al abordar derivadas, más no explora sus potencialidades, en su caso, por desconocimiento. Para cerrar, las posibles causas del relego de esta función: 1. Los docentes sientan miedo al cuestionamiento sobre las aplicaciones; 2. Las funciones trascendentes aparecen al final en los libros de texto; 3. La mayor razón es la falta de tiempo.

CASO 9:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Junio 3 de 2011.	**HORA:** 4: 00 p.m.	**DURACIÓN:** 43: 56 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Centro Educativo San Sebastián.			
CARÁCTER: Privado.	COMUNA: 5.	BARRIO: Metropolitano del Norte.	
ESTRATO: Uno y dos.	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 28 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Técnico en Ingeniería Industrial; Estudiante de octavo semestre Ingeniería Mecánica – Universidad del Valle.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: No tiene.			
EXPERIENCIA LABORAL: 8 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 8 años.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 13, 23.			

PREÁMBULO. El PEI prioriza la aplicación de los conocimientos siendo la teoría, escasa. No promueve el método tradicional de enseñanza, sino el aprendizaje de varios métodos para resolver un problema. No participan en las Olimpiadas Matemáticas dado el bajo nivel académico en el ICFES con un puntaje entre 35 - 36 puntos. El año pasado subió un poco, y en este se espera aumente más. No se trabaja en grupo, él es el único docente de Matemáticas de Secundaria. El colegio organiza periódicamente capacitaciones para los maestros, por ejemplo, de Matemática Articulada, independiente del tiempo de Planeación. Se concede la asistencia a seminarios o foros, y en ocasiones les apoyan económicamente.

ENTREVISTA. Primero, introduce el tema de Potencia, pues genera menos rechazo en los estudiantes. Sigue con Radicales y Función logarítmica, expresa una potencia como una raíz o una raíz como un logaritmo, indica que a partir de una pueden deducir propiedades de la otra, qué lugar ocupa un número determinado en el logaritmo, etc. Luego, ven las características de la función, su gráfica, y comportamiento. Al mostrarles Logaritmos, piensan *“es lo más horrible que se les puede poner”*. No la expone en situaciones reales, casi no encuentra aplicación, más bien se centra en el desarrollo teórico. Cuando la trabaja, plantea problemas de los libros de texto. No tiene presente los contextos dónde usarse.

Él utiliza videos, gráficas o situaciones simples, dados los serios problemas de algunos estudiantes con las Matemáticas. Busca la miren de forma menos agresiva y dejen el temor al comenzar tema nuevo, para poder abordar la formalidad. Incluso, si debe detenerse en un solo tema toda la semana, lo hace con el objetivo que comprendan bien. Esta modalidad de enseñanza es más fácil. Se basa en su experiencia estudiantil, recuerda sus métodos de aprendizaje con ciertos conceptos, de dónde diseña estrategias de enseñanza. Sin embargo, cuando un tema genera dificultades debe cambiar la metodología y probar otras.

Hay estudiantes de grado 9° ó 10° sin saber sumar o restar. Al entrar en funciones, se les dificulta la parte algebraica, reemplazar valores, y graficar en el plano cartesiano. Muchas veces debe retomar procedimientos básicos y aclarar dudas para poder volver al tema de clase, aunque en ocasiones este corte suscita otros inconvenientes. Tampoco repasan, llegan a clase sin haber revisado sus apuntes y no encuentran utilidad a lo aprendido. No ha detectado debilidades en la parte simbólica, lingüística ni operativa de la función logarítmica. Les dice a los educandos: *“tan importante como saber hacer una suma o una resta, es saber leer matemáticas”*, pues para ellos es lo mismo decir *“dos por tres, y dos a la tres”*. Cuando enseña esta función recalca la lectura correcta de la expresión y el significado de cada símbolo involucrado.

Sembrar buenas bases conceptuales sería la forma de superar sus dificultades, además de eliminar el miedo. Los conceptos requeridos son Potenciación, Radicación, entender las demás funciones y todo lo que interviene en ellas. Al finalizar el tema debieron aprender el comportamiento de la función, lo buscado al trabajarla (base, exponente o potencia), qué representa cada parte, las propiedades y el procedimiento para cambiar la base del logaritmo.

Ha profundizado en la enseñanza de la función logarítmica en ecuaciones porque produce más dificultades. Inicia el tema presentando las particularidades de la función, las propiedades y las ecuaciones en donde esté inmersa. Con la identificación del papel de cada parte del logaritmo pueden hacer el procedimiento de cambio de base. Enseña cómo hacerlo en la calculadora científica con bases distintas a 10 ó e, además del uso adecuado de esta herramienta.

El estudio de la segunda fase es teórico y de observación, determinar el dominio, rango, qué valores puede introducir y el comportamiento de la gráfica, siendo esta parte más amena para ellos. La manipulación de ecuaciones les es más compleja, solo la palabra *ecuación* les produce rechazo. Los estudiantes se asaran y dicen no entender ni ser capaces, al no encontrar solución con su procedimiento. Es mayor el miedo a enfrentarse que la incapacidad, pero éste se pierde practicando. Por ello en esta fase exige, explica y ejemplifica más, plantea más ejercicios para familiarizarlos y tengan ideas cómo enfrentar alguna situación parecida.

Le parece importante se enseñe la manipulación de la función en ecuaciones, pues aporta mucho al progreso del pensamiento lógico de los estudiantes, el cual es la gran ganancia obtenida de la Matemática. Los educandos tienen resistencia a esta función al ser inusual y desconocida. Fácilmente se encuentra una potencia o raíz en una ecuación o aplicación, un logaritmo no. El comportamiento numérico de la función depende de la base, pero en general, no hay logaritmos negativos. La función tiene una gráfica muy definida, la parte geométrica es introductoria al tema y la más importante para el análisis.

La diferencia entre la función $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln(x)$ es la parte gráfica, el comportamiento y trabajo realizado con las dos es el mismo. Ha enseñado la función $g(x) = \ln(x)$ porque la función exponencial se usa mucho en Física. La manipulación de estas funciones en ecuaciones es la misma, no hay inconveniente en la parte algebraica, tal vez sí al calcular con bases distintas. Él no define la función logarítmica como inversa de la exponencial, parte de la Potenciación y Radicación relacionando, en un triángulo, lo buscado con cada una: base, exponente o potencia, pero no las presenta como inversas entre sí. La causa de definirla como inversa es la familiaridad con las operaciones opuestas en Matemáticas como suma-resta, solución o no solución, positivo–negativo, etc.

Al profesor le gusta leer bastante temas sobre Educación, especialmente sobre metodologías de enseñanza pues no tener formación pedagógica es una de sus debilidades. Descarga libros de Matemática interactiva, y revisa tipos de ejercicios. Muy poco lee sobre Historia de las Matemáticas. En clase la propone como consulta para los estudiantes, pero prefiere centrarse en la parte práctica.

La Historia de las Matemáticas es saber el origen de los conceptos, qué se hizo para obtener lo utilizado tan fácil actualmente. Sabe, el desarrollo teórico detrás de cada concepto es grande pero no lo presenta. En clase explica de dónde salió la función, las expresiones o herramientas usadas, las constantes, el número π y su importancia, sin profundizar en lo histórico. En grado 6° hace un recuento histórico de los Conjuntos Numéricos, por qué surge el cero, por qué hay números negativos, etc. El profesor indaga sobre Historia cuando le surge la duda a él. La Historia de las Matemáticas aportaría a la enseñanza si se aborda para comprender el origen de los conceptos, más no como eje de enseñanza. Reitera, él se enfoca en la parte práctica, entonces no le *“bota mucha corriente”* a esto.

El limitante institucional más grande es el nivel socio-económico de los educandos (estratos 0, 1 y 2). Muy pocos aspiran a estudiar y profesionalizarse. Hacen las cosas sin interés, solo por obligación más no porque les agrade y vean utilidad, si el docente propone una actividad tampoco muestran interés. El profesor puede emplear los equipos, herramientas o salas del colegio, como la *"Sala interactiva"*, pero difícilmente apoyan la financiación de materiales. Los tiempos no permiten la profundización de los conceptos matemáticos. Se da 1 hora y 10 min de clase por grupo 2 veces a la semana, es decir, 2 horas y 20 min semanales.

Con relación a los Estándares Básicos, en su enseñanza de la función logarítmica se analizan las gráficas planteadas a partir de las opiniones de los estudiantes. La parte propositiva de los mismos, la aborda desde el desarrollo de ecuaciones porque debe formular un método inicial para avanzar. No se acoge a los ciclos, él tiene libertad de enseñar los temas en el orden y tiempo deseado siempre que cumpla con los establecidos, pues a partir de ello lo evalúan en la institución. El docente profundiza bastante en la función logarítmica en grado 9°, y en 11° realiza un repaso desde Teoría de Conjuntos a fin de mejorar el puntaje en el ICFES, mirando variación, razón de cambio, y derivada, sin detenerse mucho.

El mayor aporte de la función logarítmica en la escolaridad es la pérdida del miedo, la ganancia de confianza y el aprender a analizar. El hecho de enfrentarse y entender esta función que les provoca repudio, pierdan el miedo a manipular una ecuación con logaritmos, y tracen su gráfica, es importante para la comprensión y destreza en la parte lógica. Por último, la razón de eludir la enseñanza de esta función en las escuelas, se debe a que *"no es muy popular"* la parte aplicativa de la función y llevarla de la teoría a contextos de la vida real es complicado.

CASO 10:

TABLA DE DATOS			
TIPO DE CONTACTO: Entrevista Individual.	**FECHA:** Junio 9 de 2011.	**HORA:** 11: 00 p.m.	**DURACIÓN:** 43: 56 min
INFORMACIÓN DEL LUGAR			
INSTITUCIÓN EDUCATIVA: Academia Militar Joaquín de Cayzedo y Cuero.			
CARÁCTER: Privado.	COMUNA: 22.	BARRIO: Valle del Lilí.	
ESTRATO: Cuatro	FILOSOFÍA: Neutra.	GÉNERO: Mixto.	
INFORMACIÓN DEL INDIVIDUO			
GÉNERO: Masculino.		EDAD: 54 años.	
FORMACIÓN ACADÉMICA EN PREGRADO: Licenciada en Matemática – Universidad Santiago de Cali.			
FORMACIÓN ACADÉMICA EN POSTGRADO: No tiene.			
EXPERIENCIA LABORAL: 35 años.			
AÑOS LECTIVOS ENSEÑANDO LA FUNCIÓN LOGARITMICA: 35 años.			
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN QUE SE RESPONDIERON: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.			
INFORMACIÓN QUE NO SE LOGRÓ RECOGER: 1, 12, 14, 22.			

PREAMBULO. La misión de la Academia establece formar cadetes íntegros en la virtud y saber para la Patria, disciplina y orden para el bien propio y de los suyos. El PEI en Matemáticas plantea la aplicación de los conocimientos en el contexto militar, se enseña lo básico con énfasis en resolución de problemas de cálculos de distancias, armamento y otras situaciones. Se trabaja conjuntamente en el Departamento de Matemáticas. No tienen una política de innovación pedagógica, sin embargo los docentes han asistido a varios Seminarios de la Universidad del Valle. La Academia participa en las Olimpiadas Matemáticas desde el año 2010, debutando en las organizadas por el Colegio Alférez Real, con estudiantes de todos los grados escolares. Cerca del 80% de la población escolar es masculina.

ENTREVISTA. La función logarítmica la enfoca en problemas de crecimiento y decaimiento. Tiene gran visibilidad, se utiliza en problemas de análisis, revisión, lanzamiento de proyectiles, Estadística, Economía, comportamiento de matriculas y pensiones en la institución, y problemas de bacterias. La aplicación militar de la función está en Física con problemas de caída parabólica, de máximos y mínimos.

Para la comprensión de los estudiantes utiliza internet para mostrar las gráficas y procesos de análisis de situaciones, recortes de prensa y revistas. Ha escogido esta modalidad de enseñanza al considerarla muy práctica. Como dificultades, al principio no comprenden muy bien la nomenclatura, los cambios de variable, la función inversa, la resolución de ecuaciones al hacer el cambio de la función logarítmica a la exponencial con la misma base. Estas se podrían superar si los estudiantes se apersonan, investigan, consultan talleres en internet y practican.

El estudiante debe saber previamente Potenciación y Radicación. Es importante que el maestro desde 5° de Primaria recomiende su estudio dada su necesidad en grados superiores, su vida cotidiana u otras asignaturas. Al terminar el tema, deben tener presente las fórmulas, la nomenclatura, la aplicabilidad y los elementos en que las variables funcionan.

La función logarítmica en ecuaciones es un tema primordial para la enseñanza de las propiedades de los Logaritmos. Él muestra primeramente las propiedades de suma y resta, su aplicabilidad y los problemas. En la universidad se usan mucho en Contaduría, Administración de empresas y Economía. Al considerar las tres facetas de la función, se debe tener claridad en las definiciones, las propiedades básicas, cuándo funciona y para ello, la representación gráfica es fundamental. Profundiza más en la definición y graficas. Es muy importante el manejo del álgebra, básica para el desarrollo de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

En la parte numérica, los estudiantes deben saber en qué conjunto numérico (Números Enteros) la función toma valores. En la geométrica, realizar las tabulaciones y manejar las variables con las respectivas sustituciones. La diferencia entre las funciones $f(x) = log_a(x)$ y $g(x) = ln\,(x)$, es su simetría producida por su relación inversa, basta comparar sus gráficos en el mismo plano. La manipulación de las dos en ecuaciones es igual, pues de la logarítmica se puede pasar a la exponencial. Cuando del logaritmo con base 10 resultan números muy extensos (para él, conmensurables), enseña el cambio de base al logaritmo natural con la calculadora.

La razón de definir la función logarítmica como inversa de la exponencial es para ver su simetría. Con programas graficadores como Derive, puede mostrarse que cualquier valor tomado por las funciones, siempre cortará los ejes en los puntos (1,0) y (0,1) respectivamente.

Al docente entrevistado le agrada leer artículos sobre Educación e Historia de las Matemáticas, porque es importante mostrar la importancia de las Matemáticas, el origen y razón de ellas. Le gusta hablar de los Números Naturales, recordar la primera actividad realizada por el hombre: contar objetos pertenecientes a la naturaleza, y por tal motivo se llaman así. Le parece muy bonita la Historia de la Matemática y dice atraerles a los estudiantes al ver el origen y la causa de los números. Lee a Sócrates, Arquímedes, Pitágoras y actualmente investiga por internet ideas de Galileo Galilei, la revista pedagógica “El Tablero” de la que salen versiones interesantes, o artículos de España pues el nivel de Educación Matemática en ese país y en Méjico es muy bueno.

Es importante comentar a los estudiantes que las Matemáticas y sus cálculos numéricos no se construyeron de un momento a otro, al contrario, es de tradición e inclusive, de siglos para poder hacer cambios. De la Historia de la función logarítmica conoce el trabajo de Copérnico en el movimiento satelital, y la caída de los cuerpos de Galileo cuyo comportamiento es distinto en el vacío y en la gravedad normal. El principal precursor de los Logaritmos fue el escoses John Napier, ha leído bastante de él y cómo llegó al número neperiano.

En el salón de clases del colegio donde laboró por 25 años antes de llegar a la Academia Militar, tenía a los principales filósofos matemáticos y sus relevantes contribuciones matemáticas y geométricas. A partir de la Historia de los Logaritmos no ha introducido nada. Como tratamiento de la Historia en clase, debe leérseles para acostumbrarlos a leer Matemáticas, proponer investigaciones por internet, lleven recortes o lecturas pues las Matemáticas también se leen. La Historia de las Matemáticas aporta a la enseñanza, a ver los cambios en el transcurso de los siglos hasta hoy, ir a un laboratorio o a una biblioteca para mostrar a los estudiantes los papiros donde estaban escritas las fórmulas.

Sobre las condiciones institucionales, el docente intuye la utilidad del centro campestre de la Academia, los columpios o resbaladeros para prácticas de cálculos matemáticos. Las directivas colaboran en la formación del conocimiento exterior y están dispuestas al apoyo logístico de materiales y salidas, solo es reportarlo en el proyecto. Los tiempos no interfieren en la enseñanza de la función Logarítmica, se enfatiza en los conceptos, la definición y la práctica con problemas de la actualidad, se cubre todo el programa. La intensidad horaria es la mínima exigida por el Ministerio de Educación Nacional, hasta grado 8° ven 5 horas de Matemáticas y en grados superiores 3, dado el comienzo de la formación militar.

Los Estándares Básicos *“es el saber hacer con lo que uno sabe”*. Después de enseñar las fórmulas al estudiante, se lo lleva al análisis de situaciones reales y constantes que vivimos, así los aplica al igual de cumplir con los ciclos propuestos. La función logarítmica la enseña superficialmente en grado 7º, se profundiza en 9º introduciendo los sistemas de ecuaciones, revisando sus características como función, y la retoma en grado 11º con el tema de derivadas y aplicaciones. Opina, solo es importante profundizar en esta función si el estudiante estudia Ingeniería o Economía. Finalizando, la razón de eludir la enseñanza de la función logarítmica en las instituciones es la costumbre de trabajar la linealidad, pero puede trabajarse intermedio de las demás funciones sin ninguna dificultad.

Anexo 4. *DECANTACIÓN DE INFORMACIÓN DE LAS ENTREVISTAS: TABLAS DE CATEGORÍAS Y SUBCATEGORÍAS.*

CONCEPCIÓN SOBRE EL CURRICULO (12, 26, 27, 28 , 29 30)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relación con los Estándares.	Enseña funciones desde 9°; se tiene que limitar a dar lo básico de los estándares.	--	Los contenidos de 6°-9° son pocos y muy básicos.	La enseñanza del colegio se regula por los ciclos de los Estándares. El modelo de Competencias aterriza los conceptos a la realidad, y le da libertad de ir de lo general a lo particular, y de dejar algunos contenidos para el año siguiente del ciclo.	Sobrepasa los estándares pero no cumple con los ciclos.	Se acoge a los Estándares pero no en los tiempos porque depende del grupo de estudiantes, lo que quiera desarrollar, o enfocarse a enseñar temas suficientes para conocimientos posteriores de las estudiantes.	Su enseñanza se acopla a los estándares de 10° y 11°.	Su enseñanza se acerca los objetivos de los Estándares en la parte Variacional por el cambio de variables, y el crecimiento de la función, y Geométrica porque se gráfica, pero éstos son muy exigentes por ser copiados de españoles y franceses, y es casi imposible alcanzarlos.	Su enseñanza se relaciona con los Estándares en el análisis de las gráficas, y en cuanto a la parte propositiva, la plantea con el desarrollo de ecuaciones. No se acoge a los ciclos, es libre de enseñar los temas en el orden y tiempo que quiera, siempre y cuando cumpla con los temas, pues por eso lo evalúan.	Los estándares es saber hacer con lo que se sabe. Cumple con los Estándares porque luego de darles las fórmulas a los estudiantes, muestra las aplicaciones; cumple con los ciclos.
Importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas.	Todo tema es importante si se aplica.	Desarrolla habilidades y destrezas.	Es importante enseñar la función en polinomios para mejor preparación a la U.	Enseñaría ecuaciones si el PEI lo dice, pues no le parece significativa.	Su enseñanza es secundaria al no tener aplicabilidad.	Son importantes la ecuaciones para desempeñarse en Calculo, y tener buen manejo algebraico.	Es relativa.	La enseñanza de la función en ecuaciones es importante, pero no se puede ahondar por el tiempo.	Las ecuaciones con logaritmos, ayudan al pensamiento lógico del estudiante.	Es importante la enseñanza de la función en ecuaciones para el manejo de las propiedades.
Importancia de la enseñanza de la función logarítmica.	Todo tema es importante si se aplica. No es que sea irrelevante sino que no hay tiempo para ahondar.	--	Radica en el interés de cada estudiante, para su educación superior.	Es importante profundizar en la función.	Su enseñanza es secundaria al no tener aplicabilidad.	Explicar fenómenos, resolver problemas en varios campos.	--	Es importante enseñar esta función sobre todo al utilizar la función exponencial de Euler. Todo lo que le permita adquirir conocimientos es al estudiante es importante.	El mayor aporte de la función logaritmo es la pérdida del miedo, el ganar confianza y aprender a analizar, enfrentar y entender esta función. Las ecuaciones y gráficas, es muy importante para la comprensión y destreza lógica.	La función es importante profundizarla solo a los que van a estudiar ingeniería o economía.

Opinión sobre el currículo de la Institución.	Quiere cambiar el plan de área para hacer los contenidos más aplicativos, recortar otros, y cambiar la metodología de los docentes.	--	Los contenidos de 6°-9° son pocos y muy básicos. El programa dice que para estos años no se enseñe la parte gráfica.	La filosofía étnica está en el PEI, cada profesor la acoge como desee, él la mira desde lo histórico. Los estándares o el PEI pueden permitir la profundización de la función.	El PEI está mal hecho y mal enfocado. Los estudiantes no salen con herramientas para enfrentar carreras tecnológicas o profesionales. Le toca imponer su metodología para mejores procesos. No hay planes ni directrices coherentes fomentadores de un proceso educativo.	El pilar del plan en el colegio es la modelación de contenidos.	Involucra ejercicios tipo Olimpiadas pues es la encargada de la preparación en el colegio de estas competencias. Ella enseña la función desde el énfasis comercial del colegio. Los programas están muy cargados de contenidos matemáticos más que de formación matemática. Desafortunadamente,	Debería enseñarse conceptos más avanzados de Calculo (completitud, densidad, supremo, infinitos, máximos, etc).	--	--

CONCEPCIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA (1, 3, 4, 11, 12, 14, 16, 17, 27)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Método de enseñanza.	Busca reducir el grado de dificultad para no aborrecer y desmotivar. Al iniciar cada tema, plantea consultas sobre la definición del concepto a estudiar, su utilidad, importancia e introduce reseñas históricas. Se siente defraudado al ver los bajos resultados de los estudiantes, y se cuestiona sobre sus herramientas pedagógicas y las de sus colegas.	Su metodología es magistral, solo conferencias y talleres; en los ejercicios busca incrementar el grado de complejidad hasta generalizar. Trata de inculcar lo que lee de Educación a sus estudiantes.	Para enseñar, sigue la estructura de los libros de texto; al entrar en un nuevo tema, hace un juego o vivencia para familiarizar y vean el sentido; la enseñanza depende de lo que se quiera dar al estudiante, o lo que proponga el PEI.	Plantea ejercicios y profundiza dependiendo del nivel de los estudiantes, los Estándares o el currículo. Las Matemáticas son las mismas aunque se enseñe diferente. Su estrategia didáctica es llevar los problemas y gráficas en papel para facilitar la interpretación. Esta estrategia es más sencilla para los estudiantes.	Su estrategia es la Matemática Articulada donde se aprende a través de la Geometría, enlazando procesos desde 1° hasta 11°. La escogió por su relación con la HM. Se usan materiales para actividades de aprendizaje. En este método, el 80% es trabajo del estudiante. La matemática se vuelve tediosa porque no se le ve el sentido, se da información contradictoria, o se mezcla con conductas de la Iglesia. Evita manejar ciertos procesos si los estudiantes no los manejan. Dedica una parte de la clase a leer artículos científicos para interpretarlos. Quiere rescatar la enseñanza de la Geometría.	La herramienta computacional ayuda a conceptualizar más rápido y sin el rigor del Cálculo, se guía por la gráfica. Así se debería enseñar hoy en día. Las computadoras se hicieron para resolver problemas muy complejos que a veces no resisten un proceso algebraico. En sus explicaciones, va de lo general a lo particular.	Su estrategia es que los estudiantes interpreten e interioricen los conceptos por su propia escritura y argumentación, la profesora es mediadora; esta métodología no es 100% tradicionalista, es decir, que el profesor hable todo el tiempo; los saca al tablero a argumentar, y estén atentos a lo que el otro hace, ella interviene para aclarar dudas; las horas de taller son sagradas, cuando pone taller es para trabajarlo con los estudiantes, no para entretenerlos; esta metodología da buenos resultados; en este modelo, quien trabaje obtiene logros; es de las profesoras que menos estudiantes reprueba, la mayoría alcanzan una nivel básico y muchos un nivel sobresaliente. Utiliza libros y ejercicios variados para subir el nivel pero depende del estudiante. Propone ejercicios tipo Olimpiadas.	Su modalidad es que los estudiantes resuelvan problemas con sus conceptos previos para luego, dar el concepto nuevo. La epistemología es lo más importante a enseñar en un colegio.	Muchas veces debe repasar conocimientos básicos, para poder continuar el tema, pero a veces éstos generan otras dificultades. Proyecta videos, gráficas, presenta situaciones simples, dadas las falencias de los estudiantes. Busca, miren la función menos agresiva, para poder avanzar a la formalidad. Si debe quedarse toda la semana en un solo tema, lo hace con tal que comprendan bien. Esta modalidad de enseñanza es más fácil. Se guía de su experiencia como estudiante y sus métodos de aprendizaje, para diseñar sus estrategias de clase, pero cuando hay dificultades debe cambiar de estrategia. Enfatiza en la correcta lectura de la función y sus símbolos, en general, de las Matemáticas.	Para la comprensión de los estudiantes utiliza internet, prensa, y revista para analizar las gráficas; Escogió esa modalidad de enseñarla por considerarla más práctica.

Relegamiento de la enseñanza de la función.	En ocasiones no alcanza a darla, la deja para 11° o para la universidad.	--	No es prioritaria.	Él sigue el orden de los textos en cuanto a las funciones, si están en los textos es porque son importantes.	Solo debe darse información y características.	--	Años atrás la relegaba, pero la ha venido retomando.	Puede ser por: miedo al cuestionamiento, orden de los textos, falta de tiempo.	Se relega la función logaritmo porque no es muy popular su aplicabilidad, y pasar de la teoría a la práctica es complicado.	--
Manipulación de la calculadora.	Enseña a manejar la calculadora. (no especifica qué y cómo)	La calculadora como instrumentos de mejoramiento de la enseñanza para llegar bien preparados a la Universidad.	--	--	--	Se manipulan software.	Enseña a manejar la calculadora cuando enseña el número e.	Para resolver ecuaciones, el $\ln x$ lo manejan con la calculadora porque saben que la base es e.	Les enseña a manejar la calculadora científica, y cambiar de bases con bases 10 ó e, además del uso adecuado de esta herramienta.	Enseña cambio de bases al $\ln x$ con la calculadora, cuando del $\log x$ resultan números muy extensos (conmensurables).
Relación con los Estándares.	Se limita a lo básico.	--	Los contenidos de 6°-9° son pocos y muy básicos.	Sigue los ciclos de los Estándares, relacionando cada competencia con la realidad.	Sobrepasa los estándares pero no cumple con los ciclos.	Es acorde con ellos pero no en los tiempos.	Se relaciona para lo programado en 10° y 11°.	Pensamiento variacional: variables y crecimiento; Pensamiento Geométrico.	Se analizan las gráficas, y el desarrollo de ecuaciones.	Después de enseñar las fórmulas, pasa a las aplicaciones. Cumple con los ciclos.
Insumos a su enseñanza (docum.)	No se documenta en temas de Educación para estudiantes conformistas	Acostumbra a leer sobre Pedagogía, Didáctica e HM.	No lee sobre Educación, solo libros de texto para planear las clases y documentos del MEN para elaborar el PEI.	Lee sobre Educación y contenido matemático pero le interesa más conocer sobre la Estructura Matemática y su relación con la cognición y la Historia.	Le gusta leer sobre Pedagogía y desarrollo cerebral, tiene varios autores que le gusta leer.	--	Le gusta mucho leer temas de Educación, sobre procesos cognitivos, cómo abordar a los estudiantes, y mejorar su enseñanza; se guía por la "modificabilidad cognitiva", y Vigostky; las implicaciones de la reforma a la Ley 30.	Actualmente no lee sobre Educación por falta de tiempo; los profesores deben gozar de mayor nivel que el de los estudiantes para poder desarrollar mejor el concepto.	Le gusta leer sobre Educación dado que no tiene formación docente; lee sobre metodologías de enseñanza, matemática interactiva, tipos de ejercicios.	Le gusta leer sobre Educación, la revista "El Tablero" o artículos de España pues considera que la Educación Matemática española y mejicana tiene alto nivel.

CONCEPCIÓN SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS (18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Condiciones para ser utilizada.	--	--	--	Tal vez el tiempo y el currículo no dejan ahondar en la HM en clase. Hay poca información en internet y libros. Profundizar en HM requiere dedicación. Todos los profesores abordan superficialmente la HM.	--	--	--	Más tiempo.	--	--
Propuesta de Formas de utilizarla.	Le gustaría tener en los salones la biografía y aportes de los matemáticos ilustres; lectura de reseñas, Investigación a cambio de nota adicional y aportes en clase.	--	--	--	--	--	Al hacer recuentos, los estudiantes se interesan y se resultan discusiones enriquecedoras.	Se podría involucrar con una actividad didáctica donde apliquen los conocimientos previos para instaurar el concepto de función logarítmica, y hacerlos pensar en la forma desarrollada por los matemáticos, el contexto, quiénes lo hicieron, etc.	--	En el colegio donde trabajaba antes, tenía a los filósofos matem con sus principales contribuciones matemátcas y geométricas. Debe inducirse al estudiante a la lectura, leerles para que se acostumbren, proponerles investigaciones por internet, que lleven recortes o lecturas a clase, pues las Matem también se leen.
Temas en que ha usado la HM.	Hace recuento histórico completo en cada tema nuevo. Comenta anécdotas o biografías, el proceso del Sistema de Numeración.	Introduce lecturas o comentarios de anécdotas.	Solo conoce el proceso multiplicativo de los Números Romanos (lo enseña), y sabe que los árabes introdujeron lo que es la Matemática actual.	Ocasionalmente introduce la HM en clase, hablando de matemáticos. Depende del tema.	Solo ha comentado algo sobre sucesiones o sumatorias al ser importantes para la ciencia y la aplicabilidad. Les comenta historias agradables y poco confusas en cuanto a su contenido matemático.	Comenta información muy básica y sobresaliente de HM, como la vida de Pitágoras. Generalmente no la usa.	Introduce una guía con lecturas sobre Historia, o reseñas de textos, y consulta sobre términos, como para ir ambientando y con eso se fomenta interés. Les comenta: cuando el hombre empezó a organizar y contar, empezó la HM.	Solo la ha involucrado al hablar de la cuadratura del círculo en grado 3°.	La coloca como consulta. En grado 6° hace recuento de los Conjuntos Numéricos, por qué surge el cero, la razón de los números negativos, etc.	A partir de su conocimiento sobre la Historia de los logaritmos no ha introducido nada. Le gusta hablar de los Números Naturales, por qué se llaman así.

Agrado por conocer la HM.	Le agrada conocer la HM	Le agrada.	--	Lee algunos textos de HM. Quien conoce la HM conoce la Matemática en sí; el docente de matemáticas debe conocer mínimamente el origen de los conceptos, y la estructura de las matemáticas.	Lee mucho sobre HM. Le gusta mucho las obras de Euclides; no le gustan las traducciones de los españoles.	De HM solo lee lo expuesto en libros de texto. Le agrada conocer sobre HM, y recuerda haberse leído 5 tomos en la universidad, de esa experiencia reconoce los avances de los procesos matemáticos a través del tiempo. No tiene la costumbre de revisar la Historia.	Para sus lecturas en HM usa la enciclopedia Sigma. Le gusta conocer de HM aunque se considera poca conocedora del tema, pero trata de introducirla en clase (1/2 o 1 hora, le parece poco). Al leer sobre historia se da cuenta que debe leer mucho más.	Le agrada conocer sobre HM, pues sin epistemología no hay nada, aunque poco se imparte en las universidades.	Poco lee sobre HM. Solo indaga de Historia cuando le surgen dudas. Como se enfoca en la parte práctica no le bota corriente a esta parte.	Le gusta leer HM, leer a Sócrates, Arquímedes, Pitágoras, Galieo.
Conocimiento sobre la Historia de la función logarítmica.	Ninguno.	Ninguno.	Ninguno.	Ninguno.	No ha leído la H de los logaritmos, pero el trabajo de quienes contribuyeron a su desarrollo le parece muy bueno.	Ninguno. Conocer su Historia no aporta a la enseñanza.	Ninguno.	No conoce nada sobre la Historia de los logaritmos, pero ha leído sobre variaciones de la serie de Euler	Ninguno.	Conoce el trabajo de Copernico en el espacio y la gravedad, el precursor de los logaritmos, es el escoses John Neper, dice haber leído mucho sobre él y cómo llegó al número neperiano.

Anexo 5. Tabla de problemas.

PROBLEMAS	CATEGORÍA	SUBCATEGORIA(S)
El docente considere que solo la definición del concepto es suficiente para que los estudiantes venzan sus dificultades con las funciones (Farfán y Ferrari, 2008).	*Concepción sobre la enseñanza*	*Forma de presentación de la función.*
No se nota en ningún entrevistado, la introducción al concepto de progresión geométrica y numérica para relacionar la covariación de la función (dominio y codominio respectivamente), además de las razones por las cuales los logaritmos se volvieron función (Farfán y Ferrari, 2008).	*Concepción de función logarítmica; Concepción de enseñanza.*	*Caracterización de la función; forma de presentarla.*
Análisis de la construcción gráfica de la función. Manera tradicional de presentar el tema de Función: formula, tabla, grafico, exposición en los libros de texto, interrelación de tres factores (contrato didáctico), (Farfán y Ferrari, 2008).	*Concepción sobre la enseñanza.*	*Forma de presentación de la función.*
Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en Matemáticas (Sierpinska, 1992).	*Concepto de la Función logarítmica.*	*Caracterización de la función.*
Acto de Comprensión: Discriminación entre diferentes formas de representar funciones y las funciones mismas (Sierpinska, 1992).	*Concepción de la función.*	*Características de la función, forma de presentación del concepto.*
La noción de función como una correspondencia numérica entre las variables es de gran importancia en la concepción y estudio de modelos matemáticos (Ponte, 1992).	*Concepción de la función.*	*Conceptos previos, ideas al terminar, aplicación de la función.*
Asociación de expresiones analíticas y objetos geométricos es la consolidación del concepto de función (Ponte, 1992).	*Concepción de la función*	*Reconocimiento de las tres fases, Faceta profundizada.*
Acto de Comprensión: Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes (Sierpinska, 1992).	*Concepción de la función.*	*Percepción de propiedades o ecuaciones logarítmicas, características de la función.*
La interpretación de las características de la función y el gráfico deben tener un reconocimiento en el currículo (Ponte, 1992).	*Concepción de la función.*	*Características de la función.*
Los estudiantes tienen dificultad para identificar qué está cambiando o cuáles son los objetos que cambian en sus procesos (Sierpinska, 1992).	*Concepción de enseñanza y de estudiantes.*	*Dificultades de los estudiantes.*
Para la enseñanza de funciones se necesita articular de manera	*Concepción de la función.*	*Reconocimiento de las tres*

equilibrada las formas de representación (numérica, gráfica y algebraica), (Ponte, 1992).		*facetas.*
Que los estudiantes comprendan el significado de expresiones analíticas en situaciones concretas es mejor que las sepan manipular (Ponte, 1992)/ La capacidad de manipular expresiones algebraicas no es suficiente para resolver problemas reales.	*Concepción de la función.*	*Percepción de propiedades o ecuaciones log, importancia de enseñar ecuaciones.*
Los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos, las tablas fueron reemplazadas por las calculadoras, indica un actividad en donde pueden seguir siendo aplicados (Abrate y Pochulu, 2007).	*Concepción de la enseñanza.*	*Manipulación de la calculadora.*
La incorporación de materiales virtuales, facilita la emergencia de nuevas técnicas pero no siempre influyen positivamente al construir conceptos matemáticos asociados (Farfán y Ferrari, 2008).	*Concepción sobre la enseñanza.*	*Manejo de calculadoras.*
La narración puede ser una manera de “humanizar” el contenido matemático, aproximándolo a la realidad del alumno, y tal vez, una manera más apropiada para iniciar su abordaje (Abrate y Pochulu, 2007).	*Concepción de HM.*	*La HM como mediadora en la enseñanza; formas de utilizarla.*
Condiciones para el éxito o fracaso: el conocimiento profundo de los maestros y comprensión de su contenido (Even, 1992).	*Concepción de enseñanza.*	*Insumos a su enseñanza.*
A.C.: Identificación de cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver (Sierpinska, 1992).	*Concepción de enseñanza; Concepción de función logarítmica.*	*Relación Enseñanza-Realidad; Aplicaciones de la función.*
Es necesario que las matemáticas escolares preparen a los estudiantes para interpretar gráficas que circulan a través de los medios de comunicación (Dolores y Cuevas, 2007).	*Concepción de enseñanza; Concepción de función logarítmica.*	*Relación Enseñanza-Realidad; Aplicaciones de la función.*
La percepción de las funciones como una herramienta adecuada para modelar o matematizar las relaciones entre magnitudes físicas es una condición para tomar un completo sentido del concepto de función (Sierpinska, 1992).	*Concepción de enseñanza; Concepción de función logarítmica.*	*Relación Enseñanza-Realidad; Aplicaciones de la función, Percepción de las ecuaciones.*
Acto de Comprensión: Síntesis de las diferentes formas de dar funciones, representar funciones y hablar sobre funciones (Sierpinska, 1992).	*Concepción de la función.*	*Aplicaciones de la función.*
Es necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno (MEN, 2005).	*Concepción sobre la enseñanza; Concepción de la función.*	*Aplicación de la función, importancia de enseñar la función.*